

ATTI

DELLA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCLVIII

1961

SERIE OTTAVA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

VOLUME XXX

(1° semestre 1961)



ROMA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1961

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 14 gennaio 1961

Presiede il Socio anziano GINO CASSINIS

NOTE DI SOCI

Magnetofluidodinamica. — *Sulla stabilità dei moti magnetofluidodinamici stazionari.* Nota II (*) del Corrisp. CATALDO AGOSTINELLI.

5. Continuando la trattazione iniziata nella Nota I, se ora poniamo

$$(36) \quad \mathfrak{F}\{\xi\} = \gamma \operatorname{grad} (p \operatorname{div} \xi) + \left(K \frac{d\xi}{dP} - \operatorname{div} \xi \right) \operatorname{grad} p + \operatorname{rot} \mathbf{B} \wedge \frac{d\xi}{dP} \mathbf{B} + \\ + \left[\operatorname{rot} \operatorname{rot} (\xi \wedge \mathbf{B}) + \frac{d \operatorname{rot} \mathbf{B}}{dP} \xi \right] \wedge \mathbf{B} - \rho \frac{d \operatorname{grad} \Phi}{dP} \xi$$

dove \mathfrak{F} è un operatore differenziale vettoriale (lineare), l'equazione (31) del moto perturbato si può scrivere più semplicemente

$$(37) \quad \rho \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \mathfrak{F}\{\xi\}.$$

L'operatore \mathfrak{F} è come si suol dire *autoaggiunto*, cioè, se ξ^* è un altro spostamento, soddisfacente anch'esso alla condizione $\xi^* \times \mathbf{n} = 0$ sopra la superficie che limita il campo τ occupato dal fluido, sussiste la relazione

$$(38) \quad \int_{\tau} \mathfrak{F}\{\xi\} \times \xi^* d\tau = \int_{\tau} \mathfrak{F}\{\xi^*\} \times \xi d\tau.$$

(*) Presentata nell'adunanza del 10 dicembre 1960.

Infatti si ha

$$\text{grad} (p \operatorname{div} \xi) \times \xi^* = \operatorname{div} (p \operatorname{div} \xi \cdot \xi^* - p \operatorname{div} \xi^* \cdot \xi) + \text{grad} (p \operatorname{div} \xi^*) \times \xi$$

e quindi

$$(39) \int_{\tau} \text{grad} (p \operatorname{div} \xi) \times \xi^* d\tau = \int_{\tau} \text{grad} (p \operatorname{div} \xi^*) \times \xi d\tau = - \int_{\tau} p \operatorname{div} \xi \cdot \operatorname{div} \xi^* d\tau.$$

Si ha inoltre

$$\begin{aligned} \left(K \frac{d\xi}{dP} - \operatorname{div} \xi \right) \text{grad} p \times \xi^* &= \text{grad} p \times \left(\frac{d\xi}{dP} - \operatorname{div} \xi \right) \xi^* = \\ &= \text{grad} p \times \left[\operatorname{rot} (\xi \wedge \xi^*) + \left(\frac{d\xi^*}{dP} - \operatorname{div} \xi^* \right) \xi \right] = \\ &= \operatorname{div} [(\xi \wedge \xi^*) \wedge \text{grad} p] + \text{grad} p \times \left(\frac{d\xi^*}{dP} - \operatorname{div} \xi^* \right) \xi, \end{aligned}$$

da cui integrando si ottiene

$$(40) \int_{\tau} \left(K \frac{d\xi}{dP} - \operatorname{div} \xi \right) \text{grad} p \times \xi^* d\tau = \int_{\tau} \left(K \frac{d\xi^*}{dP} - \operatorname{div} \xi^* \right) \text{grad} p \times \xi d\tau.$$

Osserviamo ora che sussiste la relazione facile da dimostrare

$$\text{grad} (\operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B} \wedge \xi^*) \times \xi = \frac{d \operatorname{rot} \mathbf{B}}{dP} \xi \times \mathbf{B} \wedge \xi^* + \operatorname{rot} \mathbf{B} \times \frac{d(\mathbf{B} \wedge \xi^*)}{dP} \xi,$$

da cui si ha

$$\begin{aligned} \frac{d \operatorname{rot} \mathbf{B}}{dP} \xi \times \mathbf{B} \wedge \xi^* &= \text{grad} (\operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B} \wedge \xi^*) \times \xi - \operatorname{rot} \mathbf{B} \times \frac{d(\mathbf{B} \wedge \xi^*)}{dP} \xi = \\ &= \operatorname{div} (\operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B} \wedge \xi^* \cdot \xi) - \operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B} \wedge \xi^* \cdot \operatorname{div} \xi - \operatorname{rot} \mathbf{B} \times \left(\frac{d\mathbf{B}}{dP} \xi \wedge \xi^* + \mathbf{B} \wedge \frac{d\xi^*}{dP} \xi \right). \end{aligned}$$

Si ricava quindi

$$\begin{aligned} \left(\frac{d \operatorname{rot} \mathbf{B}}{dP} \xi \wedge \mathbf{B} + \operatorname{rot} \mathbf{B} \wedge \frac{d\xi}{dP} \mathbf{B} \right) \times \xi^* &= \operatorname{div} (\operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B} \wedge \xi^* \cdot \xi) + \\ &+ \operatorname{rot} \mathbf{B} \wedge \left(\frac{d\xi}{dP} - \operatorname{div} \xi \right) \mathbf{B} \times \xi^* - \operatorname{rot} \mathbf{B} \times \left(\frac{d\mathbf{B}}{dP} \xi \wedge \xi^* + \mathbf{B} \wedge \frac{d\xi^*}{dP} \xi \right). \end{aligned}$$

Tenendo conto che $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, e applicando note formule che danno la divergenza del prodotto vettoriale di due vettori, si ottiene

$$\begin{aligned} \left(\frac{d \operatorname{rot} \mathbf{B}}{dP} \xi \wedge \mathbf{B} + \operatorname{rot} \mathbf{B} \wedge \frac{d\xi}{dP} \mathbf{B} \right) \times \xi^* &= \operatorname{div} (\operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B} \wedge \xi^* \cdot \xi) + \\ &+ \operatorname{div} [(\xi \wedge \mathbf{B}) \wedge (\xi^* \wedge \operatorname{rot} \mathbf{B})] + \frac{d \operatorname{rot} \mathbf{B}}{dP} \xi^* \wedge \mathbf{B} \times \xi - \\ &- \left(\frac{d\xi^*}{dP} - \operatorname{div} \xi^* \right) \operatorname{rot} \mathbf{B} \wedge \mathbf{B} \times \xi - K \frac{d\xi^*}{dP} (\operatorname{rot} \mathbf{B} \wedge \mathbf{B}) \times \xi. \end{aligned}$$

Ma per una nota formula di calcolo vettoriale (loco citato in ⁽⁶⁾, p. 68), la somma degli ultimi due termini del secondo membro (presi col segno —), vale $\text{rot } \mathbf{B} \wedge \frac{d\xi^*}{dP} \mathbf{B} \times \xi$, perciò, integrando si ha

$$(41) \quad \int_{\tau} \left(\frac{d \text{rot } \mathbf{B}}{dP} \xi \wedge \mathbf{B} + \text{rot } \mathbf{B} \wedge \frac{d\xi}{dP} \mathbf{B} \right) \times \xi^* d\tau = \\ = \int_{\tau} \left(\frac{d \text{rot } \mathbf{B}}{dP} \xi^* \wedge \mathbf{B} + \text{rot } \mathbf{B} \wedge \frac{d\xi^*}{dP} \mathbf{B} \right) \times \xi \cdot d\tau.$$

Si ha ancora

$$\text{rot rot } (\xi \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{B} \times \xi^* = - \text{div} [\text{rot } (\xi \wedge \mathbf{B}) \wedge (\xi^* \wedge \mathbf{B})] - \text{rot } (\xi \wedge \mathbf{B}) \times \text{rot } (\xi^* \wedge \mathbf{B})$$

e pertanto

$$(42) \quad \int_{\tau} \text{rot rot } (\xi \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{B} \times \xi^* d\tau = - \int_{\tau} \text{rot } (\xi \wedge \mathbf{B}) \times \text{rot } (\xi^* \wedge \mathbf{B}) d\tau.$$

Infine è ovviamente

$$(43) \quad \int_{\tau} \rho \frac{d \text{grad } \Phi}{dP} \xi \times \xi^* d\tau = \int_{\tau} \rho \frac{d \text{grad } \Phi}{dP} \xi^* \times \xi d\tau.$$

Le relazioni (39), (40), (41), (42) e (43) dimostrano la proprietà espressa dalla (38), che cioè l'operatore \mathfrak{F} è autoaggiunto.

6. Passiamo ora a considerare la stabilità del dato moto stazionario.

Poiché risulta

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{d\xi}{dP} \mathbf{v}, \quad \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + 2 \frac{d}{dP} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right) \mathbf{v} + \frac{d}{dP} \left(\frac{d\xi}{dP} \right) \mathbf{v}$$

e poiché il tempo non figura esplicitamente nell'equazione (37), possiamo cercare soluzioni della forma

$$(44) \quad \xi = e^{i\Omega t} \eta(P).$$

L'equazione del moto (37) porge allora

$$(45) \quad \rho \left[-\Omega^2 \xi + 2 i\Omega \frac{d\xi}{dP} \mathbf{v} + \frac{d}{dP} \left(\frac{d\xi}{dP} \right) \mathbf{v} \right] = \mathfrak{F} \{ \xi \}.$$

Questa equazione, dove ξ è un vettore complesso della forma $\xi = \xi_r + i \xi_i$, equivale a un sistema di sei equazioni differenziali scalari fra quantità reali, in cui la pulsazione Ω figura come un parametro. La natura fisica del problema fa prevedere l'esistenza di *autovalori* del parametro Ω e di *autosoluzioni* ξ dell'equazione (45), soddisfacenti alla condizione $\xi \times \mathbf{n} = 0$ sopra la superficie limite.

Ad autovalori reali di Ω corrisponderanno *oscillazioni stabili*, mentre autovalori complessi daranno luogo ad *instabilità*.

Per avere ora una condizione che assicuri la stabilità, moltiplichiamo scalarmente ambo i membri della (45) per il vettore $\hat{\xi} = \xi_1 - i \xi_2$ coniugato di ξ e integriamo rispetto al volume τ occupato dal fluido.

Ponendo

$$(46) \quad A = \int_{\tau} \rho \xi \times \hat{\xi} d\tau \quad ; \quad B = -i \int_{\tau} \rho \frac{d\xi}{dP} \mathbf{v} \times \hat{\xi} d\tau ;$$

$$C = - \int_{\tau} \rho \frac{d}{dP} \left(\frac{d\xi}{dP} \mathbf{v} \right) \mathbf{v} \times \hat{\xi} d\tau$$

si ottiene

$$(47) \quad -A\Omega^2 - 2B\Omega - C = \int_{\tau} \mathfrak{F} \{ \xi \} \times \hat{\xi} d\tau.$$

Il coefficiente A è evidentemente reale e positivo; così pure sono reali B e C. Invero, prendendo il coniugato \hat{B} di B, e facendo la differenza, si ha

$$B - \hat{B} = -i \int_{\tau} \rho \left(\frac{d\xi}{dP} \mathbf{v} \times \hat{\xi} + \frac{d\hat{\xi}}{dP} \mathbf{v} \times \xi \right) d\tau = -i \int_{\tau} \rho \operatorname{grad} (\xi \times \hat{\xi}) \times \mathbf{v} \cdot d\tau =$$

$$= -i \int_{\tau} [\operatorname{div} (\xi \times \hat{\xi} \cdot \rho \mathbf{v}) - \xi \times \hat{\xi} \cdot \operatorname{div} (\rho \mathbf{v})] d\tau.$$

Ma $\operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) = 0$, e l' $\int_{\tau} \operatorname{div} (\xi \times \hat{\xi} \cdot \rho \mathbf{v}) d\tau$ è nullo, poichè in superficie è $\mathbf{v} \times \mathbf{n} = 0$; ne segue che è $B = \hat{B}$, e quindi B è reale.

Analogamente, in virtù dell'identità

$$\frac{d}{dP} \left(\frac{d\xi}{dP} \mathbf{v} \right) \mathbf{v} \times \hat{\xi} = \operatorname{grad} \left(\frac{d\xi}{dP} \mathbf{v} \times \hat{\xi} \right) \times \mathbf{v} - \frac{d\xi}{dP} \mathbf{v} \times \frac{d\hat{\xi}}{dP} \mathbf{v}$$

si ottiene

$$(48) \quad C = - \int_{\tau} \rho \frac{d}{dP} \left(\frac{d\xi}{dP} \mathbf{v} \right) \mathbf{v} \times \hat{\xi} \cdot d\tau = \int_{\tau} \rho \frac{d\xi}{dP} \mathbf{v} \times \frac{d\hat{\xi}}{dP} \mathbf{v} d\tau$$

e quindi il coefficiente C è reale e positivo.

Il secondo membro della (47) è pure reale, come si riconosce subito ricordando che l'operatore \mathfrak{F} è autoaggiunto e quindi

$$\int_{\tau} \mathfrak{F} \{ \xi \} \times \hat{\xi} \cdot d\tau = \int_{\tau} \mathfrak{F} \{ \hat{\xi} \} \times \xi \cdot d\tau = \frac{1}{2} \int_{\tau} [\mathfrak{F} \{ \xi \} \times \hat{\xi} + \mathfrak{F} \{ \hat{\xi} \} \times \xi] d\tau.$$

Se perciò poniamo ancora

$$(49) \quad D = \int_{\tau} \mathfrak{F} \{ \xi \} \times \hat{\xi} d\tau$$

si ha

$$(50) \quad A\Omega^2 + 2B\Omega + C + D = 0$$

ed Ω risulterà reale se

$$(51) \quad B^2 - A(C + D) > 0.$$

Dunque se esiste uno spostamento ξ soddisfacente all'equazione (45) e alla condizione in superficie $\xi \times \mathbf{n} = 0$, per cui il primo membro della (51) è negativo, allora il moto stazionario considerato è instabile.

Osserviamo che dalla (14) si ha che $\mathbf{v} + \frac{d\xi}{dP} \mathbf{v}$ rappresenta la velocità di trascinamento che si ha nel punto $P' = P + \xi$, all'istante t , per effetto del moto permanente, e che $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ rappresenta invece la velocità relativa dovuta alla perturbazione. Segue allora dalla (37) che la variazione nell'unità di tempo dell'energia potenziale in detto moto relativo, vale

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_{\tau} \left[\mathfrak{F} \{ \xi \} \times \frac{\partial \hat{\xi}}{\partial t} + \mathfrak{F} \{ \hat{\xi} \} \times \frac{\partial \xi}{\partial t} \right] d\tau &= -\frac{1}{2} \int_{\tau} \left[\mathfrak{F} \{ \xi \} \times \frac{\partial \hat{\xi}}{\partial t} + \mathfrak{F} \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial t} \right\} \times \hat{\xi} \right] d\tau = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\tau} \frac{\partial}{\partial t} [\mathfrak{F} \{ \xi \} \times \hat{\xi}] d\tau = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\tau} \mathfrak{F} \{ \xi \} \times \hat{\xi} d\tau \end{aligned}$$

e quindi

$$(52) \quad \delta W = -\frac{1}{2} D = -\frac{1}{2} \int_{\tau} \mathfrak{F} \{ \xi \} \times \hat{\xi} d\tau$$

rappresenta l'energia potenziale nel moto perturbato relativo.

La quantità

$$-\frac{1}{2} C = -\frac{1}{2} \int_{\tau} \rho \frac{d\xi}{dP} \mathbf{v} \times \frac{d\hat{\xi}}{dP} \mathbf{v} d\tau$$

si può dire invece che rappresenta l'energia di deformazione nel moto di trascinamento. Il rapporto $\frac{1}{2} \frac{B^2}{A}$, che è positivo, rappresenta anche una energia dipendente pure dal moto di trascinamento, o se si vuole dalle forze di Coriolis.

La (51) mostra allora che affinché vi sia instabilità, la somma algebrica $-\frac{1}{2} (C + D)$ dell'energia di deformazione e dell'energia potenziale deve essere necessariamente negativa.

Il teorema inverso evidentemente non è vero, poiché la (51) può essere verificata, e vi può essere quindi stabilità, anche con $-(C + D) < 0$, se B^2 è sufficientemente grande.

Nel caso in cui si parte da una configurazione di equilibrio statico, poiché allora è $\mathbf{v} = 0$, e quindi $B = 0$, $C = 0$, la condizione di instabilità si riduce a quella ben nota (cfr. Memoria citata in ⁽²⁾),

$$-\frac{1}{2} D = \delta W < 0,$$

che cioè la variazione di energia potenziale sia negativa, e questa condizione in tal caso è necessaria e sufficiente.

7. Vogliamo ora far vedere, applicando i noti metodi del calcolo delle variazioni, come i valori estremi di Ω sono autovalori dell'equazione (45). Infatti, sia $\delta\xi$ un incremento arbitrario dello spostamento ξ , assoggettato alla sola condizione di essere tangente alla superficie limite σ del campo τ occupato dal fluido e indichiamo con $\delta\hat{\xi}$ il suo coniugato. Prendendo allora la variazione di ambo i membri della (50), e ponendo quindi $\delta\Omega = 0$, si ottiene

$$(53) \quad \Omega^2 \delta A + 2\Omega \delta B + \delta C + \delta D = 0.$$

Ora risulta

$$\begin{aligned} \delta A &= \int_{\tau} \rho (\delta\xi \times \hat{\xi} + \xi \times \delta\hat{\xi}) d\tau \\ \delta B &= -i \int_{\tau} \rho \left[\delta \left(\frac{d\xi}{dP} \mathbf{v} \right) \times \hat{\xi} + \frac{d\hat{\xi}}{dP} \mathbf{v} \times \delta\hat{\xi} \right] d\tau. \end{aligned}$$

Ma

$$\begin{aligned} &\int_{\tau} \rho \delta \left(\frac{d\xi}{dP} \mathbf{v} \right) \times \hat{\xi} d\tau = \int_{\tau} \rho \left(\frac{d\delta\xi}{dP} \mathbf{v} \right) \times \hat{\xi} d\tau = \\ &= \int_{\tau} \rho \operatorname{grad} (\delta\xi \times \hat{\xi}) \times \mathbf{v} \cdot d\tau - \int_{\tau} \rho \left(\frac{d\hat{\xi}}{dP} \mathbf{v} \right) \times \delta\xi \cdot d\tau = - \int_{\tau} \rho \left(\frac{d\hat{\xi}}{dP} \mathbf{v} \right) \times \delta\xi \cdot d\tau, \end{aligned}$$

poiché per il teorema della divergenza e per l'equazione di continuità il primo integrale del terzo membro è nullo; ne segue:

$$\delta B = -i \int_{\tau} \rho \left(\frac{d\hat{\xi}}{dP} \mathbf{v} \times \delta\hat{\xi} - \frac{d\xi}{dP} \mathbf{v} \times \delta\xi \right) d\tau.$$

Analogamente dalla (48) si ha

$$\begin{aligned} \delta C &= \int_{\tau} \rho \left(\frac{d\delta\xi}{dP} \mathbf{v} \times \frac{d\hat{\xi}}{dP} \mathbf{v} + \frac{d\xi}{dP} \mathbf{v} \times \frac{d\delta\hat{\xi}}{dP} \mathbf{v} \right) d\tau = \\ &= \int_{\tau} \rho \left[\operatorname{grad} \left(\delta\xi \times \frac{d\hat{\xi}}{dP} \mathbf{v} \right) \times \mathbf{v} + \operatorname{grad} \left(\delta\hat{\xi} \times \frac{d\xi}{dP} \mathbf{v} \right) \times \mathbf{v} \right] d\tau - \\ &- \int_{\tau} \rho \left[\frac{d}{dP} \left(\frac{d\hat{\xi}}{dP} \mathbf{v} \right) \mathbf{v} \times \delta\xi + \frac{d}{dP} \left(\frac{d\xi}{dP} \mathbf{v} \right) \mathbf{v} \times \delta\hat{\xi} \right] d\tau. \end{aligned}$$

Ma anche qui il primo integrale del secondo membro è nullo, perciò

$$\delta C = - \int_{\tau} \rho \left[\frac{d}{dP} \left(\frac{d\hat{\xi}}{dP} \mathbf{v} \right) \mathbf{v} \times \delta\xi + \frac{d}{dP} \left(\frac{d\xi}{dP} \mathbf{v} \right) \mathbf{v} \times \delta\hat{\xi} \right] d\tau.$$

Infine per la proprietà autoaggiunta dell'operatore \mathcal{F} si ha

$$\delta D = \int_{\tau} [\mathcal{F} \{ \delta \xi \} \times \hat{\xi} + \mathcal{F} \{ \xi \} \times \delta \hat{\xi}] d\tau = \int_{\tau} [\mathcal{F} \{ \hat{\xi} \} \times \delta \xi + \mathcal{F} \{ \xi \} \times \delta \hat{\xi}] d\tau.$$

Sostituendo nella (53) in luogo di δA , δB , δC , δD , i valori trovati, per l'arbitrarietà di $\delta \xi$ e del suo coniugato $\delta \hat{\xi}$, si deduce proprio l'equazione (45) e quella che si ha prendendo i coniugati di ambo i membri.

Ne segue che se esiste uno spostamento ξ che rende minimo (o massimo) il valore di Ω definito dalla (50), questo valore minimo (o massimo) rappresenterà un limite di instabilità per la frequenza di oscillazione.

8. Osserviamo infine come nel caso particolarmente importante in cui il moto permanente si riduce a una rotazione uniforme intorno a un asse z con velocità angolare costante ω , indicando con φ l'angolo di rotazione, l'equazione (45) diventa

$$(54) \quad \rho \left(-\Omega^2 \xi + 2 i \omega \Omega \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} + \omega^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2} \right) = \mathcal{F} \{ \xi \}.$$

In questo caso, posto

$$B_1 = -i \int_{\tau} \rho \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \times \hat{\xi} \cdot d\tau, \quad C_1 = \int_{\tau} \rho \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \hat{\xi}}{\partial \varphi} d\tau$$

si ha $B = \omega B_1$, $C = \omega^2 C_1$ e la condizione di stabilità (51) porge

$$\omega^2 (B_1 - A C_1) - A D > 0,$$

da cui si può dedurre l'influenza che le azioni centrifughe hanno sulla stabilità.

Considerando uno spostamento ξ della forma

$$(55) \quad \xi = e^{i(\Omega t - n\varphi)} \eta(r, z)$$

con n intero ed η vettore le cui componenti cilindriche η_r , η_φ , η_z dipendono soltanto da r e da z , e indicando con \mathbf{K} il versore dell'asse z , si ha

$$\frac{\partial \xi}{\partial \varphi} = -in \xi + \mathbf{K} \wedge \xi \quad ; \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2} = -n^2 \xi - 2in \mathbf{K} \wedge \xi + (\mathbf{K} \wedge)^2 \xi.$$

La (54) porge allora

$$(56) \quad \rho [-(\Omega - n\omega)^2 \xi + 2i\omega(\Omega - n\omega) \cdot \mathbf{K} \wedge \xi + \omega^2 (\mathbf{K} \wedge)^2 \xi] = \mathcal{F} \{ \xi \}$$

e se indichiamo con ξ_r , ξ_φ , ξ_z le componenti cilindriche dello spostamento ξ , risulta

$$\mathbf{K} \wedge \xi \times \hat{\xi} = \xi_r \hat{\xi}_\varphi - \hat{\xi}_r \xi_\varphi \quad ; \quad (\mathbf{K} \wedge)^2 \xi \times \hat{\xi} = -(\xi_r \hat{\xi}_r + \xi_\varphi \hat{\xi}_\varphi).$$

Dimodoché se la componente trasversale ξ_φ dello spostamento ξ è nulla, moltiplicando ambo i membri della (56) scalarmente per $\hat{\xi}$, e integrando rispetto al campo τ si deduce

$$(57) \quad (\Omega - n\omega)^2 \int_{\tau} \rho \xi \times \hat{\xi} d\tau = - \omega^2 \int_{\tau} \rho \xi_r \hat{\xi}_r d\tau - \int_{\tau} \mathfrak{F} \{ \xi \} \times \hat{\xi} d\tau.$$

In questo caso se

$$\omega^2 \int_{\tau} \rho \xi_r \hat{\xi}_r d\tau + \int_{\tau} \mathfrak{F} \{ \xi \} \times \hat{\xi} d\tau < 0$$

si avranno autovalori positivi di $(\Omega - n\omega)^2$ e le corrispondenti oscillazioni saranno stabili. Il limite di instabilità in questo caso si otterrà minimizzando l'espressione di $(\Omega - n\omega)^2$ che si ricava dalla (57).

Giova osservare come in quest'ultimo caso considerato due autosoluzioni distinte ξ, ξ^* dell'equazione (56) soddisfano alla condizione di ortogonalità $\int_{\tau} \rho \xi \times \xi^* d\tau = 0$.

Chimica inorganica. — *Sui solfogermanati: argirodite sintetica.*

Nota I^(*) di LIVIO CAMBI e MARIO ELLI, presentata^(**) dal Socio L. CAMBI.

1. PREMESSE.

Questa ricerca fa parte delle indagini che abbiamo in corso sui solfuri di germanio, e si collega con quelle precedenti compiute da me e dai miei collaboratori sui solfosilicati e solfoalluminati dei metalli pesanti⁽¹⁾.

Dalle ricerche sui solfosilicati, dai diagrammi, dai sistemi

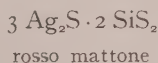


sono risultati tipici, quali unici composti, più ricchi in solfuro del metallo pesante, fondenti inalterati, di composizione vicina o quasi coincidente con

$4 \text{Ag}_2\text{S} \cdot \text{SiS}_2$	$4 \text{Cu}_2\text{S} \cdot \text{SiS}_2$
colore ardesia	colore ardesia
a. metallico	a. metallico

corrispondenti all'Argirodite. Per il primo venne riconosciuto lo stesso abito cristallino del solfogermanato minerale. Questi composti si presentano nel diagramma di fusione con un massimo, rispettivamente di 959°C e di 1185°C .

Nei sistemi predetti, spinti fino al tenore del 30% di SiS_2 , appaiono solfosali più ricchi in silicio, nel caso dell'argento venne individuato



fondente inalterato a 750°C ⁽²⁾.

R. Schwarz e H. Giese hanno sperimentato sull'Argirodite ottenuta per via umida⁽³⁾ per coprecipitazione con H_2S dei due solfuri: ottennero dei prodotti non precisamente coincidenti con la formula (I), ma intermedi fra questa e la (II):



(*) Ricerca eseguita presso il Centro di Chimica Metallurgica dell'Università di Milano.

(**) Nella seduta del 14 gennaio 1961.

(1) L. CAMBI, « Rend. Ist. Lomb. Sc. e Lett. » (II), XLV, 183 (1912); questi « Rend. » (5), XXI, 2, 837 (1912); « Rend. Soc. Chim. Ital. » (2), 6, 47 (1914); L. CAMBI e G. G. MONSELISE, « Gazz. Chim. Ital. », 66, 696 (1936); G. G. MONSELISE, idem, 67, 748 (1937).

(2) È opportuno ricordare che posteriormente alle ricerche cui si accenna, non risultano altri studi sui solfosilicati dei metalli pesanti. Recentemente R. WEISS e G. ROKTASCHEL, « Z. allg. u. Anorg. Chemie », 307, 1 (1960) hanno preparato i solfosilicati di litio, sodio, calcio.

(3) « Berichte », 63, 778 (1930).

se pure più vicini alla prima; d'altra parte, anche il minerale presenta analoghe oscillazioni della composizione.

Per le ricerche che ci interessano, si imponeva la preparazione del solfo-sale per via secca, con l'indagine del sistema $\text{Ag}_2\text{S}-\text{GeS}_2$, e quella cristallografica roentgenografica relativa; la prima compiuta dal dott. Mario Elli, la seconda dalla Signora dott. Maria Fiorentini Potenza ⁽⁴⁾.

La regione da 100 mol di Ag_2S alle miscele fino a circa 25 % mol di GeS_2 può considerarsi, per quanto riguarda il lato termico e strutturale, come definita. Il tratto del sistema da 25 mol a 48 mol su cento è preliminare, pure essendosi riconosciuto l'andamento generale termico delle successive miscele.

L'analisi termica, compiuta con la massima precisione possibile, ha portato a riconoscere che il massimo di fusione non coincide con il rapporto $4\text{Ag}_2\text{S}/1\text{GeS}_2$, ma è spostato verso quello corrispondente a $3,80\text{Ag}_2\text{S}/1\text{GeS}_2$ ⁽⁵⁾.

Cioè, si riscontra la stessa divergenza dal rapporto $4\text{Ag}_2\text{S}/1\text{GeS}_2$ verificatasi nell'Argirodite minerale e in quella ottenuta per via umida dai predetti Autori.

È stata da noi considerata l'ipotesi di un ristretto campo di soluzioni solide, con il massimo di fusione a 950°C circa, che subissero lo smistamento alle più basse temperature, segregando il tetra-sale, ma finora non abbiamo potuto confermare o meno tale ipotesi.

Il sistema considerato si distingue da quelli dei solfosilicati nei quali finora non è stato precisato alcun intervento di polimorfismo della fase che diremo convenzionalmente Argirodite. Tale comportamento è apparso probabile nel composto circa $4\text{Cu}_2\text{S}\cdot\text{SiS}_2$. Per l'Argirodite, nelle attuali misure, è stata nettamente individuata la trasformazione a 822°C , che corrisponde probabilmente al passaggio della forma tetraedrica, stabile alle alte temperature, a quella rombica, stabile al disotto di 822°C , che può conservare per pseudomorfo l'abito esterno tetraedrico dei cristalli primari.

Tale polimorfismo è stato intraveduto anche per l'Argirodite naturale.

In questa Nota non si espongono le ricerche di carattere chimico, fra cui quelle della dissociabilità dei solfosali, cioè della tensione di vapore di GeS_2 delle diverse miscele alle diverse temperature che sono pure in corso.

2. - PREPARAZIONI E ANALISI TERMICHE ESEGUITE DAL DOTT. MARIO ELLI.

Preparazioni. - Le miscele di Ag_2S e GeS_2 , in polvere, riscaldate anche lentamente fino a 836°C (p.f. di Ag_2S), in tubo di quarzo e in navicelle di grafite pura, recano a perdite sensibili di GeS_2 per la sua ragguardevole volatilità.

(4) Questi « Rendiconti », pp. 16-22.

(5) In rapporti interi la miscela corrisponde a



TABELLA I.

Moli % di GeS_2	Temp. di cristall. primaria	1° arresto	2° arresto	3° arresto	Osservazioni
0	836°	—	—	—	Ag_2S al 100 %
5,43	800°	770°	—	—	
6,40	795°	770°	—	—	
7,19	790°	764°	—	—	
10,26	770°	—	—	—	
12,00	802°	770°	—	—	
14,33	822°	771°	—	—	
16,30	911°	769°	822°	—	
17,53	928°	775°	820°	—	
17,90	930°	776°	822°	—	
18,74	940°	770°	822°	—	
19,92	945°	—	822°	—	
21,00	950°	—	822°	—	
24,24	929°	—	820° ?	581° ?	Circa 4 $\text{Ag}_2\text{S} \cdot \text{GeS}_2$ 3,8 $\text{Ag}_2\text{S} \cdot \text{GeS}_2$
25,57	920°	—	—	582°	
26,18	910°	—	—	580°	
30,51	710°	—	—	580°	
31,81	675°	—	—	579°	
32,65	650°	—	—	578°	
33,18	600°	—	—	579°	
33,41	590°	—	—	?	
35,91	590°	—	—	580°	
39,52	610°	—	—	583°	
40,32	620°	—	—	578°	Circa 3 $\text{Ag}_2\text{S} \cdot 2 \text{GeS}_2$
41,92	675°	—	—	581°	
42,21	680°	—	—	—	
42,85	685°	—	—	—	
45,46	660°	—	—	—	4 $\text{Ag}_2\text{S} \cdot 3 \text{GeS}_2$
47,72	620°	—	—	—	

Le preparazioni vennero eseguite con lo stesso dispositivo, ma facendo precedere nel senso del flusso di N_2 una navicella contenente GeS_2 , cioè mantenendo l'atmosfera satura del vapore del solfuro stesso.

Analisi termica. - L'analisi termica venne effettuata in un forno verticale a tubo di quarzo, a resistenza, con involucro tale da consentire anche raffreddamenti lenti, per conseguire reperti termici soddisfacenti,

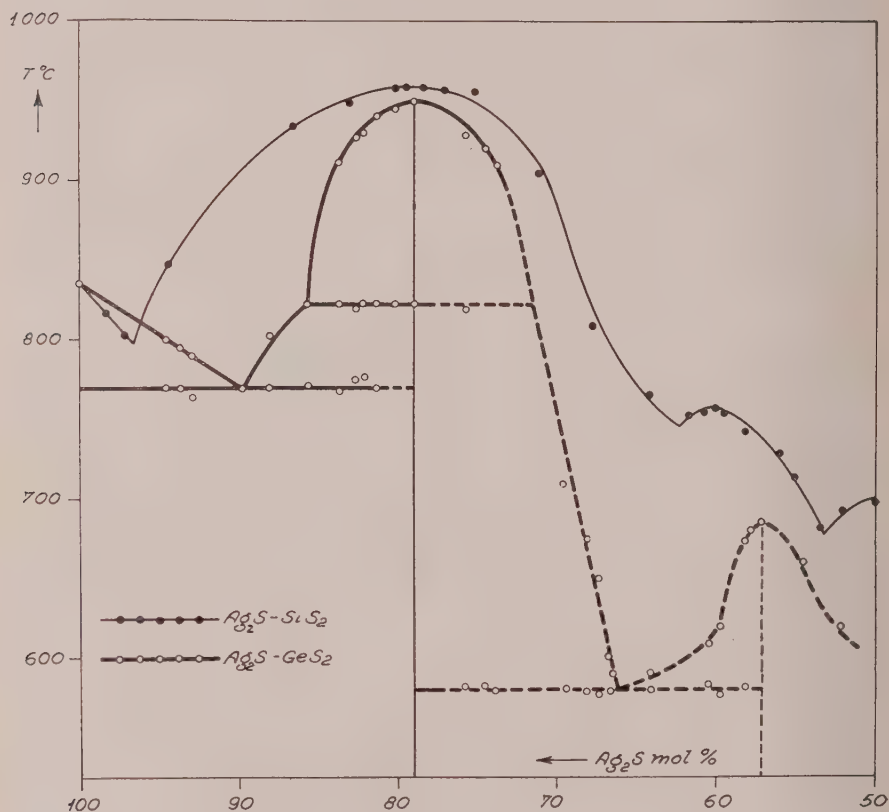


Diagramma 1.

Si riporta, per confronto, il diagramma Ag_2S-SiS_2 nel tratto realizzato da L. CAMBI, « Rend. Ist. Lomb. Sc. e Lett. » (II), XLV, 183 (1912).

operando in atmosfera di A, in crogiuoli di porcellana, \varnothing 12 mm, e con circa 15 gr di miscela per ogni saggio. La termocoppia (Pt/Pt—Rh) era protetta con guaina in porcellana Pythagoras, \varnothing esterno 6 mm. Le letture furono eseguite con apparecchio registratore potenziometrico della Leeds—Northrup.

Le miscele fino al 21–22% di GeS_2 , sono stabili anche dopo due o più fusioni. Con le più alte percentuali di solfuro di germanio, si presenta un campo di stabilità minore, per cui occorre operare con notevoli precauzioni, quali ad esempio un riscaldamento molto lento durante l'analisi termica. Le

miscele con più del 22 % di GeS_2 sono di colore mattone ed all'aria umida perdono H_2S diventando sensibilmente più scure.

I solfogermanati ottenuti sono risultati scarsamente attaccabili dagli acidi concentrati. Le miscele che si trovano nel diagramma $\text{Ag}_2\text{S}-\text{GeS}_2$ tra il solfuro d'argento e l'eutettico al 6 % di GeS_2 sono attaccate dall'acido nitrico concentrato, *quasi completamente*. I solfosali contenenti meno dell'8,5 % di GeS_2 sono molto simili fisicamente al solfuro di Argento e, come questo, difficilmente macinabili. Tutti gli altri miscugli invece sono facilmente frantumabili ed il loro colore va dal nero all'ardesia dell'Argirodite, al grigio chiaro, fino al colore mattone dei composti superiori in GeS_2 .

All'aria umida sono tutti stabili meno quelli già ricordati, con più del 22 % di GeS_2 .

I lingotti estratti dal crogiuolo presentavano in genere tenui dendriti di argento alla superficie, prodotti evidentemente dall'azione di tracce di ossigeno.

Analisi. — Le analisi vennero compiute fondendo circa 0,1 g della miscela triturrata, in crogiuolo di nichel con Na_2O_2 e Na_2CO_3 . Il residuo fuso venne disciolto in acqua e neutralizzato, poi distillato in corrente di HCl . Nel distillato stesso ho dosato il germanio precipitandolo come GeS_2 e ossidando questo a ossido seguendo i metodi noti. Nel residuo della distillazione dosavo l'argento.

Dopo separato AgCl , nella soluzione venne «dosato» il solfo per controllo, per quanto l'analisi non risultasse sempre esatta per le perdite di solfo che possono verificarsi nella distillazione del tetracloruro di germanio.

La Tabella I riporta i risultati delle analisi termiche, ripetute almeno due volte per ogni singola miscela. Il diagramma 1 corrisponde agli stessi dati.

Chimica inorganica. — *Sui solfogermanati: argirodite sintetica.* — *Ricerche röntgenografiche* (*). Nota di MARIA FIORENTINI POTENZA, presentata (**) dal Socio L. CAMBI (***).

Le ricerche che seguono si riferiscono a quelle sul sistema $\text{Ag}_2\text{S}-\text{GeS}_2$, indagato da L. Cambi e M. Elli, illustrato nella Nota che precede ⁽¹⁾. I prodotti da me esaminati risultano dalla ricerca stessa e mi vennero sottoposti dagli stessi Autori: sono i seguenti, in riferimento al diagramma termico riportato nella Nota predetta:

A) Ag_2S sintetico fuso puro. Lo spettro Roentgen di righe da me osservate coincide con i dati della bibliografia riguardanti la fase di bassa temperatura (ved. foto N. 1), cioè dell'acantite stabile al di sotto di 180° .

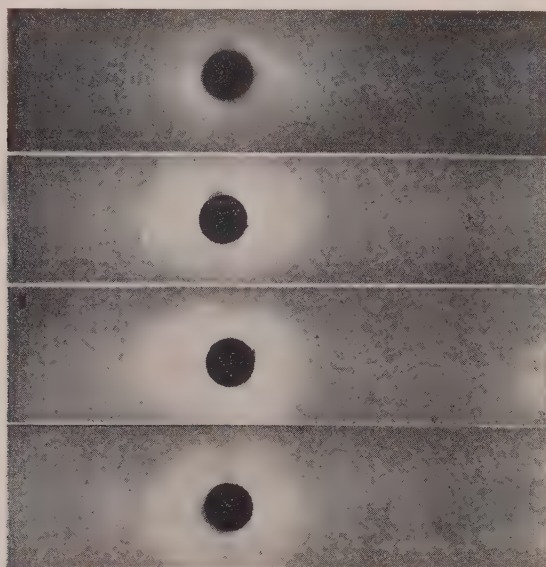


Foto N. 1.

Foto N. 2.

Foto N. 3.

Foto N. 4.

1) Solfuro di Argento Ag_2S .

2) Argirodite (massimo termico).

3) Argirodite + eutectico (punto di flesso).

4) Eutectico Ag_2S -Argirodite.

B) Miscela al 21 % di GeS_2 , in mol, corrispondente all'argirodite naturale. Il campione, in polvere, è stato sottoposto ai raggi X, $\text{Cu K}\alpha$; 40 KV;

(*) Ricerca eseguita presso l'Istituto di Mineralogia, Petrografia e Geochimica della Università di Milano, diretto dal prof. G. Schiavinato.

(**) Nella seduta del 14 gennaio 1961.

(***) La Nota della dott. M. Fiorentini Potenza che avrebbe dovuto essere inserita tra le «Note presentate da Soci» è stata collocata fra le «Note di Soci» per essere unita a quella del Socio L. Cambi e di M. Elli, trattandosi del medesimo argomento.

(1) Questi «Rendiconti», pp. 11-15.

9 mA, in camera Debye, \emptyset 57,3 mm, pellicola Kodak, con 3 h di esposizione a causa del forte assorbimento, nonostante l'impiego della sorgente «microfocus».

La successione dei riflessi $d_{(hkl)}$ reperiti e la loro attribuzione è la seguente (ved. foto N. 2):

I_{oss}	d_{lett}	$I_{bibl.}$	d Argirodite (*)	Osservazioni e riferimenti
10	3,235	10	3,2	Argirodite
36	3,045	40	3,05	»
12	2,820	10	2,82	»
27	2,684	20	2,68	»
8	2,466	10	2,45	»
5	2,442			Ag ₂ S
7	2,345			Ag
9	2,215			Ag ₂ S
8	2,180	2	2,18	Argirodite
29	2,050	10	2,04	» rinforzata da Ag
15	1,956	3	1,95	» » » Ag ₂ S
35	1,873	10	1,87	» » » Ag ₂ S
14	1,777	5	1,79	»
8	1,590	5	1,59	»
7	1,480	2	1,48	»
4	1,315			Ag ₂ S
8	1,233	2	1,215	Ag ₂ S rinforzata da Ag (riga molto diffusa)

(*) NOVITZKJ, *Tablas para la determinacion microscopica j rafas X de minerales opacos*, Oruro, Bolivia, p. 198 (1957).

Ho concluso:

i) le righe che rimangono, dopo sceverate le poche righe dell'Ag e dell'Ag₂S, coincidono con quelle note dalla letteratura come proprie del minerale argirodite, assunto in generale come 4 Ag₂S·GeS₂.

ii) la composizione percentuale in volume, determinata col metodo microfotometrico, risulta: tracce di Ag, di Ag₂S, e 99 % circa di argirodite.

Il massimo termico osservato da L. Cambi e M. Elli corrisponde pertanto al punto di fusione di un composto binario, fra i due componenti Ag₂S e GeS₂, del tutto simile al minerale naturale argirodite, e probabilmente

simile, se non del tutto isotipo, col composto binario $4\text{Ag}_2\text{S} \cdot \text{SiS}_2$ descritto da L. Cambi nel 1912 ⁽²⁾.

Confrontando lo spettro di polvere del composto ottenuto con quello del minerale, si deduce innanzitutto che essi hanno la stessa struttura cristallina; inoltre la successione dei riflessi rivela trattarsi di sostanza cristallizzata nel sistema rombico. Studi cristallografici più accurati sono in corso su nuovi campioni puri e ben cristallizzati, per la rideterminazione delle costanti reticolari e determinazione del gruppo spaziale che non è conosciuto, su cui riferirò in seguito.

Per le proprietà ottiche di questo composto binario, esaminato al microscopio in luce riflessa in campo semioscuro e oscuro, si nota: il colore di riflessione è grigio; il potere di riflessione è medio, l'anisotropia è bassa ma distinta come nella argirodite naturale.

C) Miscela al 19,92 mol % di GeS_2 . Lo spettro di polvere eseguito in condizioni identiche ai precedenti dà le seguenti letture:

I	d_A	Riferimenti	I	d_A	Riferimenti
133	3,20	Argirodite	30	2,04	Argirodite
35	3,055	»	9	1,95	»
4	2,99	»	30	1,87	»
10	2,82	»	(12)	(1,82)	?
21	2,659	»	15	1,78	Argirodite
5	(2,60)	Ag_2S	7	1,60	»
15	2,46	Argirodite (larga)	4	1,53	»
(11)	(2,33)	Ag	6	1,47	»
8	2,175	Argirodite	ecc.		

Il preparato, eccettuate le impurezze di Ag alla superficie, corrisponde all'argirodite al 99 % più 1 % circa di Ag_2S appartenente all'eutectico, e ciò è in buon accordo con i dati analitici riportati nella Nota citata.

D) Miscela al 14,33 % mol. di GeS_2 . Corrisponde al punto angolare lungo la curva di inizio di cristallizzazione della argirodite. Tale arresto termico è stato riscontrato anche nei campioni di argirodite molto pura come i precedenti B) e C).

Questo punto (822°) può indicare o una reazione peritettica o una modificazione di fase della Argirodite.

(2) L. CAMBI, « Rend. Ist. Lomb. Sc. e Lett. » (II), XLV, 183 (1912); L. CAMBI e G. G. MONSELISE, « Gazz. Chim. Ital. », 66, 696 (1936).

La successione di riflessi ottenuti dal diagramma di polvere (condizioni c. s.) è la seguente (ved. foto N. 3):

I_{oss}	d_{lett}	Riferimenti
15	3,24	Argirodite
28	3,05	» + Ag_2S
11	2,81	» + Ag_2S
19	2,70	»
14	2,60	Ag_2S
12	2,47	Argirodite
16	2,44	Ag_2S
12	2,38	»
9	2,21	»
8	2,18	Argirodite
27	2,08	» + Ag_2S
13	1,965	»
26	1,88	»
10	1,82	?
8	1,78	Argirodite + Ag_2S (larga)
6	1,71	» + »
6	1,65	» (?)
11	1,60	Argirodite
9	1,55	» + Ag_2S
7	1,50	» + »
5	1,42	Argirodite
6	1,38	» + Ag_2S
7	1,24	» + »

Il preparato risulta pertanto costituito da argirodite identica a quella riscontrata in B), e da Ag_2S dell'eutectico.

Credo pertanto di poter escludere che a 822° la argirodite reagisca incongruentemente col liquido Ag_2S per dare un nuovo composto: questo darebbe una propria successione di riflessi differenziabili da quelli della argirodite.

Rimane da considerare un punto di trasformazione polimorfa. Lo spettro di polvere ottenuto, se esclude il composto a fusione incongruente, non dà però indicazioni su una eventuale trasformazione di fase.

Esistono tuttavia tre dati, termico, ottico e bibliografico, che appoggiano l'ipotesi di un eventuale dimorfismo della argirodite:

i) l'arresto a 822° rivelato dalle analisi termiche;

ii) l'abito esterno dei campioni di argirodite sintetizzati dai predetti Autori, è distintamente monometrico, talvolta tetraedrico, come mostra la foto N. 5, con lati fino a 3 mm; ma gli stessi cristalli ridotti in sezione



Foto N. 5. - Microfotografia della superficie del menisco della pasticca di fusione ottenuta da L. Cambi e M. Elli.

Si notano i grossi cristalli di argirodite con caratteristico abito esterno tetraedrico (tetraedri con faccia di ottaedro $\{111\}$).

lucida ed osservati al microscopio in luce riflessa, in campo semioscuro, rivelano una anisotropia bassa ma distinta, ed anche la successione di riflessi $d_{(hkl)}$ non è caratteristica di una struttura cubica;

iii) in letteratura, alcuni Autori⁽³⁾ riferiscono una argirodite cristallizzata nel romboico, altri⁽⁴⁾ nel monometrico.

Poiché l'abito tetraedrico da noi constatato fu notato anche nel corrispondente solfosilicato $4\text{Ag}_2\text{S} \cdot \text{SiS}_2$ di L. Cambi, per il momento si può soltanto supporre che la forma stabile al disotto di 822° sia una fase romboica paramorfa su una presumibile fase monometrica stabile sopra 822° . Ricerche

(3) H. STRUNZ, *Mineralogischen Tabellen*, 1957.

(4) P. RAMDOHR, *Die Erzminerale und ihre Verwachsungen*, Akademie Verlag, Berlin 1955, pp. 370.

cristallografiche sono in preparazione al riguardo, con attrezzature specializzate, per la conferma definitiva delle ipotesi.

E) Miscela al 10,26% mol. di GeS_2 corrispondente all'eutectico a 770° : la successione di distanze interplanari, ottenute nelle solite condizioni, conferma infatti (ved. foto N. 4):

I_{OSS}	d_{OSS}	Riferimenti
12	3,20	Argirodite
29	2,02	» + Ag_2S
10	2,81	» + »
25	2,69	»
11	2,66	(?)
15 }	2,61 }	Ag_2S
15 }	2,59 }	
10	2,47	Argirodite + Ag_2S
14	2,43	Ag_2S
12	2,37	Argirodite
(12)	(2,33)	Ag
10	2,23	Ag_2S
14	2,18	Argirodite
15	2,09	Ag_2S
34	2,06	Argirodite
14	1,96	» + Ag_2S
36	1,87	» + »
9	1,79	»
8	1,73	Ag_2S
8	1,60	Argirodite
10	1,54	» + Ag_2S (larga)
15	1,49	»
5	1,45	Ag_2S
5	1,38	Argirodite
5	1,35	Ag_2S
4	1,29	»
4	1,16	Argirodite

Si constata a prima vista che argirodite e Ag_2S sono presenti in quantità non molto differenti.

L'analisi quantitativa volumetrica eseguita per microfotometria dei films ha reso i seguenti valori:

Argirodite 52,3 % in volume: riga 2,68 Å.

Solfuro d'argento 47,3 % in volume: riga 2,60 Å.

Questi valori, che sommano a 99,6 % sul totale sono in accordo con i dati chimico-analitici riportati nella Tabella I della Nota di L. Cambi e M. Elli.

Ringrazio il prof. G. Schiavinato per i consigli di cui mi è stato largo.

Fisiologia vegetale. — *Nuovi apparecchi per misura di precisione dell'accrescimento dei fusti: dendrometro e dendrometrografo.*

Nota (*) del Corresp. CARLO CAPPELLETTI.

La tecnica per la misura dell'accrescimento dei tronchi ha un grande interesse nel campo delle discipline forestali, e non mi riferirò alla numerosa serie di apparecchiature, già in largo uso presso i tecnici forestali, ai quali necessita ottenere una misura relativamente approssimata, ma tale da fornire la cubatura di un tronco con un errore che rientra nella tolleranza della stima, già scontata in partenza. Detto errore dipende dalla irregolarità dei tronchi e da altri fattori che non è qui il caso di analizzare, perché ben diverso è l'interesse dei dendrometri da me sperimentati, e che hanno lo scopo di fornire misure di alta precisione per lo studio dell'incremento di accrescimento annuale.

Si tratta insomma di una strumentazione per ricerche scientifiche di precisione. Questo studio che conduco da oltre 15 anni (e che non ho mai reso di pubblica ragione prima d'ora perché le speciali prove richiedevano una lunga elaborazione), mi ha permesso di controllare la strumentazione in modo completo, per cui sull'uso di questo dendrometro ho già una larga serie di dati che saranno oggetto di ulteriori comunicazioni. Per ora è sufficiente la descrizione tecnica della apparecchiatura e le sue possibili applicazioni.

DENDROMETRO CON COMPARATORE. — L'apparecchio di misura è costituito da un comparatore in uso nei laboratori di meccanica di precisione, con divisioni su cerchio graduato di $1/100$ di millimetro, con possibilità di lettura fino ad $1/200$ di millimetro, perciò $5\ \mu$. Il quadrante di lettura, a due lancette, permette una lettura fino a 12 mm, valore che è sempre largamente sufficiente per lo studio dell'accrescimento in spessore di un fusto durante un periodo vegetativo.

Un apparecchio di così alta sensibilità doveva evidentemente venire solidamente applicato al fusto in esame, ed essere protetto in modo da non subire danni dagli agenti atmosferici ecc. A tale scopo il comparatore viene montato su un complesso di aste metalliche preferibilmente in ferro, poste come indica la fig. 4 ad angolo retto. Una prima asta è inserita mediante viti da legno, o del tipo autofilettante, su un lato del fusto tramite una lamina quadrata di ferro verniciato, di circa 7 cm di lato, sulla quale è saldata l'asticciola di ferro a L (15 mm di lato), tutta perforata con fori equidistanti in modo da poter su di essi inserire le viti passanti con dado che servono per

(*) Presentata nella seduta del 14 gennaio 1961.

collegare l'altra asta, posta ad angolo retto, con la prima (fig. 3, A-B). Detta asta è destinata a portare il comparatore di misura. Si forma in tal modo un angolo retto fra l'asta inserita sul fusto, e l'asta portatrice dell'apparecchio di misura. Un nuovo supporto collega la seconda asta con l'apparecchio di misura (fig. 3 C) che è fissato dal basso con vite a dado. L'asta porta delle fessure che permettono spostamenti in modo da poter situare l'apparecchio di misura nel punto più adatto del tronco da studiare. Per coprire il comparatore dagli agenti atmosferici, si pone un coperchio, a snodo ribaltabile, in modo da avvolgere quasi completamente il comparatore, lasciando libero solo il tratto che porta l'asticciuola che tocca il fusto (fig. 3, D-E).

Come è noto il comparatore (cioè l'elemento di misura) consta di una asticciuola che termina con una punta conica di acciaio; una molla di piccola resistenza trovasi nell'interno del comparatore in modo da permettere il richiamo automaticamente allo zero delle lancette con il cessare della pressione. In luogo della punta di cui sopra si è dovuto applicare una piastrina quadrata (o rotonda) di circa 10 mm di lato o diametro, in modo da evitare che la pressione dell'apparecchio, agendo in permanenza sul tronco, potesse promuovere reazioni secondarie nel fusto. Si è veduto nelle prove fatte nei primi anni dove veniva usata in luogo della piastrina di 1 cm² la sola punta conica libera, che certi fusti reagivano producendo delle intumescenze, per cui si aveva una lettura errata per cause traumatiche. Usando la piastrina, dato che la pressione della molla è invariata, si ripartiva la pressione su 1 cm²; nessun inconveniente si è più verificato, per cui si può ritenere che operando in queste condizioni l'apparecchio come tale non fa risentire la sua presenza sulla pianta.

Piccoli accorgimenti (come l'applicazione di manicotti di gomma con vaselina sui perni scorrenti del comparatore), impediscono la penetrazione di umidità nell'apparecchio che può restare all'aperto anche per più anni consecutivamente senza subire danni. Le prove da me fatte, e che datano da parecchi anni, sono state fatte con l'uso di soli 4 comparatori, che dopo un così lungo uso sono ancora in perfetta efficienza (come nuovi). Sono dunque prove che si possono condurre per lunghi periodi di tempo, ed è questo l'interesse che possono avere data la lentezza con cui i fusti si accrescono, e la necessità di prostrarre le osservazioni per più anni consecutivi. Al momento della lettura si solleva con precauzione il coperchio e si legge il quadrante senza scuotere l'apparecchio.

Con una breve pratica anche il personale non qualificato è in grado di effettuare le letture con sicurezza.

ATTENDIBILITÀ DELLE LETTURE. - Dalle numerosissime prove effettuate ho potuto constatare che questo dendrometro fornisce effettivamente degli ottimi risultati; ritengo difficilmente superabili per precisione, e tali da permettere un esame con la massima garanzia di attendibilità. Infatti la mensola (fig. 4), infissa nel tronco, non subisce nessun movimento perché vi è saldamente infissa mediante 4-6 viti (un numero superiore risulta del

tutto superfluo) che raggiungono il legno e che perciò non vengono influenzate dall'accrescimento del fusto. In quel tratto il cambio, che pure agisce, viene sacrificato e compresso, sicché è la corteccia che si schiaccia perché la piastra è inamovibile in quanto saldamente ancorata nel legno profondo. Si è veduto dopo due anni di applicazione delle piastre supporto che la corteccia faceva ernia sopra e sotto le piastre, con un fenomeno del tutto simile a quanto si osserva quando un filo di ferro strozza un ramo in via di sviluppo. Perciò si può essere sicuri della stabilità del supporto principale sul tronco. Il supporto (fig. 3 A) viene fissato con due bulloncini con dado, ed altrettanto dicasi per l'apparecchio di misura. Data la resistenza delle aste di ferro di 15 mm di lato, a forma di L, non si verificano (il peso del comparatore è di gr 190, quello del coperchio di gr 110) oscillazioni di sorta – il sistema è rigidissimo. È stata calcolata la dilatazione lineare delle aste di ferro con il variare della temperatura, ma questa è dell'ordine di alcuni micron, e perciò rientra nella sensibilità di lettura del comparatore e si può praticamente trascurare ai fini delle esperienze di dendrometria, dove altre cause, quali le variazioni di umidità atmosferica, influiscono assai di più sulle letture, come verrà esposto in altra Nota.

Installato il dendrometro con il metodo su ricordato, non deve essere più toccato per tutto il periodo di esperienza, quando siano state prese le precauzioni necessarie per la protezione del comparatore. Le letture possono essere fatte in qualsiasi momento a seconda del tipo di ricerca che si voglia fare. Di solito per osservazioni sull'accrescimento totale del tronco sono sufficienti letture settimanali, fatte possibilmente alla stessa ora, dopo aver tenuto conto del grado igrometrico dell'aria al momento della lettura. Per lo studio sulla igroscopicità dei tronchi ho fatto per un certo periodo anche 4 letture per giorno ad ore fisse.

Esiste sempre il pericolo della curiosità del pubblico, se gli apparecchi sono posti in luogo frequentato da visitatori, come spesso succede negli orti botanici, specie se si tratta di giardini di chiara fama, come quello di Padova, che per la sua vetustà (1545), è considerato il più antico del Mondo. Per ovviare a questo pericolo si possono seguire alcuni accorgimenti: o mediante recinzione dell'albero in esperimento con una rete metallica provvisoria (come si è dovuto fare quest'anno con il dendrometrografo che è più macchinoso e anche più vistoso) oppure collocando i dendrometri ad una certa altezza dal suolo (quando la pianta lo consente), ma ciò diventa scomodo per le letture. In tal caso si può montare il dendrometro alla rovescia, cioè con il quadrante di lettura volto verso il basso, e porre il coperchio di protezione stabilmente collegato ed inamovibile essendo il quadrante sempre visibile. L'osservatore legge l'apparecchio guardando in alto senza toccare nulla: ci si pone così nelle condizioni ideali di sperimentazione, perché non occorre toccare minimamente il dendrometro. Questo metodo fu da me già largamente usato ponendo i dendrometri rovesciati ad una altezza di circa m 2,50 dal suolo.

Sia per l'altezza sia per la difficile accessibilità essi sfuggono all'occhio dei visitatori e non possono venire raggiunti. Evidentemente la misura del-

l'accrescimento viene fatta a quella determinata altezza. Le letture si riportano di solito direttamente in centesimi di millimetro. Si può leggere agevolmente, come dissi, mezzo centesimo di millimetro (cioè 5 micron). Normalmente si registrano valori che in una settimana possono andare da 20 fino a 40 micron.

DENDROMETRI CONTRAPPOSTI (figg. 3 e 4). - Ho ritenuto interessante nello studio dell'accrescimento, osservare, sullo stesso fusto, ed allo stesso livello dal suolo, l'accrescimento di un tronco mettendo due dendrometri uno opposto all'altro, utilizzando lo stesso supporto principale (inserito sul tronco), ma munito di due bracci equivalenti, in modo da utilizzare due dendrometri in opposizione. Con questo sistema fu possibile esaminare il comportamento di una stessa pianta su parti del fusto aventi esposizione opposta.

La mia esperienza mi permette di consigliare l'inserzione dei dendrometri con il quadrante rovesciato, e fare la lettura dal basso, perché questo sistema offre i seguenti vantaggi: inamovibilità del manicotto di protezione, maggior sicurezza della fissità del sistema, e minor rischio che l'apparecchio possa venir toccato da estranei, sempre solleciti a disturbare le esperienze di campagna.

IL DENDROMETROGRAFO. - L'idea della costruzione di un dendrometrografo sorse dalla necessità di controllare le variazioni dello spessore del tronco in funzione della umidità. Quando occorre solo la misura dell'incremento di spessore di un tronco è sufficiente l'uso di un dendrometro come quello ora descritto, ma per misure più precise e soprattutto per l'esame durante il giorno e la notte delle variazioni di spessore di un tronco (non essendo concepibile eseguire la lettura diretta a tutte le ore del giorno e della notte), si rese necessario un apparecchio scrivente applicabile al tronco. Dopo alcuni tentativi infruttuosi, sono giunto alla costruzione di un apparecchio come quello illustrato nella fig. 1 che mostra l'apparecchio al completo con la custodia fissa di protezione.

DESCRIZIONE DELL'APPARECCHIO E SUE PARTI. - Esso deriva sostanzialmente dal dendrometro precedente, del quale si utilizza il comparatore, elemento sempre importante perché con questo è possibile sia la taratura iniziale del dendrografo, sia la lettura diretta della misura assoluta.

Il principio sul quale si fonda consiste nella utilizzazione di un braccio di leva (fig. 2 F) fissato sull'asta emergente del comparatore, la quale forma un pezzo unico con l'asta che si appoggia al fusto: ne consegue che il movimento dei due segmenti è identico. Questo braccio si appoggia contro una serie di leve, e contrappesi che ruotano su un fulcro, e che portano la penna scrivente flessibile, ruotante, con uno snodo cardanico, nel punto d'inserzione (fig. 2 G). La penna scrivente con lungo braccio di leva si appoggia al tamburo del cilindro registratore ruotante, con movimento ad orologeria e

che compie un giro o in un giorno o in una settimana. Questa apparecchiatura è montata su una lastra metallica la quale a sua volta è portata da due mensole in alluminio (con sagoma ad L, di cm 5 per lato). Una piastra pure in alluminio, serve a fissare stabilmente la mensola al tronco ed ha le dimensioni di 12×10 cm. Cinque o sei viti (fig. 1 A) fissano la mensola al tronco.

La parte meccanica del dendrografo, essendo portata da una asta verticale con possibilità di variare le distanze fra le due aste orizzontali (fig. 2, D-G) permette innanzi tutto l'adattamento del dendrometrografo al fusto, operazione preliminare e di una certa delicatezza (date le irregolarità che si riscontrano nei fusti e la diversa grossezza), per cui le due mensole supporto si devono adattare in modo da formare un piano sul quale appoggia la piastra basale dell'apparecchio. Non è concepibile la costruzione di un dendrometrografo rigido, per le enormi difficoltà che si incontrerebbero nella sua applicazione al fusto in esame; l'apparecchio deve essere adattato volta per volta al tronco, e da ciò la necessità di avere la maggiore libertà di movimento delle sue varie parti. Evidentemente potendo variare le lunghezze dei bracci di leva, viene a modificarsi anche il rapporto di amplificazione del movimento sul registratore grafico: in particolare ha la massima importanza la lunghezza del braccio di leva sull'asta (fig. 2 G) perché più in alto si trova il punto di applicazione della leva (fig. 2 F) sulla leva G e maggiore è l'amplificazione del grafico sul tamburo ruotante: al contrario abbassando il punto di inserzione di F si ha un'amplificazione minore. La presenza del comparatore che fornisce misure assolute dei movimenti del fusto, permette la taratura volta per volta del rapporto di amplificazione del grafico. In pratica si provoca un movimento del comparatore e si osserva di quanto si muove l'asta sul tamburo, in modo da stabilire a quanti micron corrisponde una divisione della carta millimetrata. Nel mio caso ho usato per carta quella impiegata per i termografi, nella cui parte inferiore si trova la scala del termografo ed in quella superiore quella dell'igrografo: l'amplificazione raggiunta era tale che ad una divisione sulla carta (1 grado) corrispondeva un movimento di accrescimento pari a 51 micron, amplificazione più che sufficiente per controllare i movimenti del fusto e della corteccia. Usando una velocità di rotazione del cilindro per settimana, era necessario controllare (settimanalmente, al cambio della carta) la posizione segnata sul grafico, e la lettura sul comparatore, in modo da stabilire un controllo e fra la posizione del grafico e la corrispondente misura assoluta.

Altra precauzione notevole è data dalle modalità di protezione di tutto l'apparecchio, protezione che oltre ad assicurare l'impermeabilità assoluta, non influisca negativamente determinando, per effetto del vento od altro, oscillazioni di tutto il sistema. Il problema fu risolto impiegando una cassetta costruita in laminato di polietilene (fig. 1, C-D) munita di un coperchio mobile ad incastro dello stesso materiale, lasciando una parete trasparente (usando altro materiale plastico di tipo trasparente) in modo da permettere l'ispezione in qualsiasi momento senza togliere il coperchio; quest'ultima operazione viene fatta solo settimanalmente per il cambio della carta, l'ag-

giunta di inchiostro e la carica dell'orologeria. A parte qualche piccolo inconveniente verificatosi nei primi giorni di esperimento, quando in seguito alla caduta di pioggia sulle mensole laterali, si è notata la proiezione di schizzi d'acqua sul tamburo del grafico, inconveniente che fu subito eliminato con piccoli accorgimenti, per il resto non si è dovuto lamentare alcun inconveniente. La cassetta di protezione è montata con aste a L di alluminio e fissata stabilmente sul supporto di base in modo da essere assolutamente rigida. Con questa apparecchiatura fu possibile, nel corrente anno, seguire l'accrescimento del fusto di *Acer platanoides*, sul lato volto ad ovest, mentre un altro dendrometro posto quasi allo stesso livello registrava l'accrescimento sul lato opposto (volto ad est) (fig. 1, E-F). L'esperimento ha dato esito più che soddisfacente, e la registrazione fu continuata dalla metà di marzo fino ai primi di ottobre. L'apparecchio ha funzionato ininterrottamente per 8 mesi, senza il minimo incidente, anche durante una annata particolarmente piovosa, e con forti raffiche di vento. Nessun danno fu mai riscontrato per cause naturali (contro il più grave pericolo rappresentato dalla curiosità del pubblico si è provveduto recingendo con una rete metallica tutto l'albero). Un incaricato provvedeva al cambio della carta ogni lunedì mattina, rimetteva inchiostro e caricava l'orologeria, e segnava su un registro il valore indicato dal comparatore.

A questa apparecchiatura composta di un dendrometro ad est, e di un dendrometrografo ad ovest, si aggiungeva - nello stesso recinto anche un termoigrografo (elemento della massima importanza in questo studio), il quale essendo posto a poco meno di un metro dai dendrometri, riproduceva fedelmente le condizioni di temperatura e di umidità esistenti nel corso dell'esperimento. Si ottenevano così tre grafici (su due distinti cilindri registratori) uno del dendrometrografo, uno della temperatura ed uno dell'umidità relativa.

Mentre dei dendrometri a comparatore ho già l'esperienza di alcuni lustri, e posso dire con sicurezza che sono di una grandissima precisione e stabilità oltre che di facilissima applicazione, del dendrometrografo ho solo l'esperienza dell'annata in corso, ma la regolarità del suo funzionamento (durata 8 mesi) senza il minimo inconveniente, mi autorizza a considerare questo modello come versione definitiva. Nell'anno prossimo sono in programma solo queste variazioni (di dettaglio e non sostanziali) che sono: 1° alleggerimento dell'apparecchio ad orologeria togliendo la base metallica pesante gr 1.900 e unendo il perno fisso del cilindro direttamente sulla piastra di base; 2° alleggerimento della piastra rettangolare basale, ora in ferro dello spessore di mm 5, sostituendola con altra piastra di alluminio dello spessore di mm 3. Con queste piccole innovazioni l'apparecchio, che sostanzialmente resta immutato nella sua parte funzionale, viene ad essere alleggerito di circa gr 4.000 ed è probabile che possa essere portato da una sola mensola, in luogo delle due attuali.

Il dendrometrografo ora descritto per dare risultati sicuri deve essere stabilmente ancorato al fusto con un numero notevole di viti in modo da impedire ogni oscillazione delle mensole che devono essere rigidissime, come

pure dev'essere rigidissimo tutto l'apparecchio, il quale una volta montato deve formare tutto un corpo, anche con la scatola di protezione. La base del cilindro ad orologeria è fissata, nel modello ora descritto, con tre bulloni passanti inferiormente alla piastra, in modo da formare un tutto unico con la piastra basale.

A titolo di indicazione dirò che nell'appnata in corso il fusto dalla parte del dendrometrografo ha avuto un accrescimento insolitamente lieve di appena mm 0,8 (cioè 800 micron) durante tutto il periodo vegetativo. Questo piccolissimo accrescimento fu registrato in 30 settimane, delle quali il vero periodo di attività fu compreso dal 2 maggio al 4 luglio (praticamente appena due mesi). Sul lato opposto il dendrometro nello stesso periodo di tempo registrò un accrescimento totale di mm 6,07 cioè circa otto volte superiore a quello del lato opposto. Evidentemente la zona scelta ad ovest fu particolarmente infelice e non ho potuto osservare tutti i fenomeni che mi ripromettevo di seguire con l'apparecchio scrivente. Bellissimo in ogni caso il movimento dovuto alla igroscopicità della corteccia, che segue con brevissimo ritardo la curva dell'igrografo a capello la cui reazione è più rapida di quella della corteccia.

Il fusto preso in esame si trova in questo momento in fase di accrescimento asimmetrico, massimo a est, minimo ad ovest, fenomeno del resto ben noto nella sua frequenza e del quale si è occupata Mariani (1955) in un lavoro eseguito nell'Istituto Botanico di Padova. Anche nelle piante non conifere (cioè quelle che non hanno accrescimento monopodiale) queste irregolarità di accrescimento settoriale sono frequentissime, e si suole interpretarle come dipendenti dalla vascolarizzazione di rami distribuiti sulla chioma in modo non omogeneo, per cui danno un maggior accrescimento sul tronco le zone che sono strettamente dipendenti da grandi rami, mentre al contrario i minimi accrescimenti avvengono nei settori dai quali non dipendono grossi rami. Questa è almeno la spiegazione corrente che ha il pregio della verosimiglianza. Nel caso di *Acer platanoides* studiato nell'anno 1960, si tratta di una pianta di circa 12-15 metri di altezza, ma crescente in strettissima vicinanza e con forte compenetrazione dei rami di una grossa quercia, più alta di *Acer* e con denso fogliame; condizioni evidentemente difficili che hanno dato la loro immediata risposta in un debole accrescimento sul lato ovest. Questo risultato non poteva in alcun modo essere prevedibile, perché tutta la pianta si trovava in un ambiente sacrificato per la presenza delle altre piante ora ricordate. È già questo un primo risultato interessante e del tutto imprevisto. La scelta di questa pianta è dipesa dal fatto che in anni passati, sullo stesso tronco, furono eseguiti saggi multipli con dendrometri e perciò si disponeva di buone osservazioni preliminari; in altre occasioni la stessa pianta e sullo stesso lato aveva fornito un accrescimento circa doppio. Evidentemente la presenza della quercia, che ha assunto in questi ultimi tempi dimensioni piuttosto massicce, ha influito negativamente sull'*Acer platanoides*, di minor statura, e già sono evidenti i primi effetti sullo sviluppo.

Nella letteratura esiste un dendrografo proposto nel 1955 da Fritts e Fritts, che sotto certi punti di vista ha qualche somiglianza con quello da me proposto, con la differenza che si tratta di solo dendrografo, e non di dendrometrografo. Il sistema di applicazione al tronco, anche se è abbastanza semplice in apparenza, a mio avviso non offre eccessive doti di stabilità, ed inoltre le viti di attacco sono molto vicine al punto di lettura, per cui non si può escludere una diretta influenza del trauma locale sui risultati della attività cambiale. Nel dendrometrografo da me proposto i punti di appoggio al tronco distano di 90° dalla zona di lettura e perciò a distanza tale da non influenzare in alcun modo l'attività cambiale della zona in esame. Un altro dendrometro è quello proposto da Byram e Doolittle (1950) ma fondato su un principio del tutto diverso e che io chiamerei piuttosto dendroscopio e non dendrometro, in quanto l'apparecchio misura le distanze intercorrenti fra un cuneo metallico infisso nel legno, ed un traguardo nella corteccia. Evidentemente con questo apparecchio (a parte le lesioni cambiali del cuneo che si infigge nel legno) non si possono registrare misure inferiori al decimo di millimetro e può essere utilizzato solo su fusti aventi una corteccia spessa: è inoltre inutilizzabile del tutto su fusti giovani o con corteccia sottile. Altro dendrometro abbracciante il fusto intero, e che per conseguenza fornisce non l'accrescimento su un raggio, ma l'aumento totale della circonferenza del fusto, è quello proposto da Liming (1957) di facilissima applicazione, ma non può nemmeno essere lontanamente confrontato al dendrometro ed al dendrometrografo da me descritti.

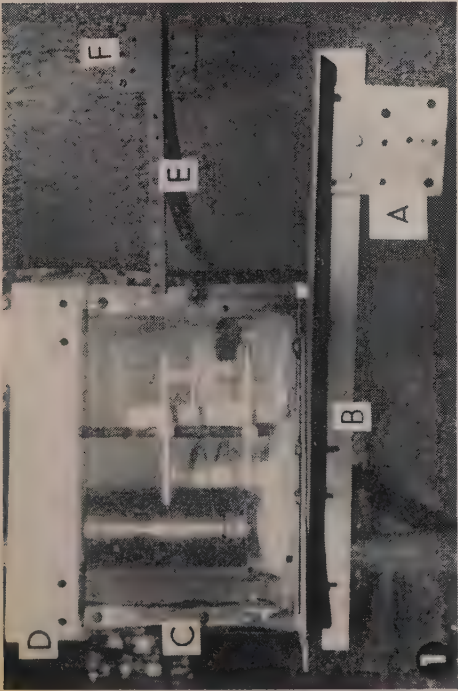
BIBLIOGRAFIA.

- [1] BYRAM G. M. e DOOLITTLE W. T., *A year of growth for a shortleaf pine*, « Ecology », vol. 31, pp. 27-35 (1950).
- [2] FRITTS H. C. e FRITTS E. C., *A new dendrography for recording radical changes of a tree*, « Forest Sciences », 1, pp. 271-276 (1955).
- [3] KRAMER P. J. e KOZOLWSKI T. T., *Physiology of Trees*, McGraw-Hill Book Company, Inc. N. Y. (1960).
- [4] LIMING F. G., *Homemade dendrometers*, « Journal Forestry », vol. 55, pp. 575-577 (1957).
- [5] MARIANI P., *Accrescimento e caratteri istologici di un fusto eccentrico di Larix europaea* D. C., « L'Italia forestale e montana », anno X, fasc. 5, pp. 11 (1955).

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA I

Fig. 1. - Dendrometrografo completo con custodia di protezione in plastica, montato su un fusto: A, piastra quadrata unita solidamente alla mensola (B); C, custodia di protezione; D, coperchio mobile della stessa; E, supporto in ferro di un dendrometro, con piastra (F) di infissione al tronco. Il dendrografo si trova dalla parte opposta rispetto al dendrometrografo, e non è visibile.

Fig. 2. - Dendrometrografo privato della custodia, con indicazione delle parti che lo compongono; A, mensola supporto; B, base del cilindro registratore; C, asse verticale infisso



sulla base su quale si inseriscono i bracci orizzontali (D) che porta all'estremità il comparatore (E); F, asta uscente dal comparatore con avvitato un braccio di leva verticale che muove le altre leve superiori (G) unite alla penna scrivente.

Fig. 3. — Due dendrometri su lati opposti di un tronco di modeste dimensioni: A, supporto del comparatore di sinistra; B, supporto comune ai due dendrometri, visibile in tutta la sua lunghezza nella successiva figura 4; C, comparatore; D, supporto del coperchio mobile (E); F, comparatore di destra con coperchio alzato, e non visibile nella figura perché nascosto dal fusto.

Fig. 4. — Gli stessi due dendrometri della fig. 3, visti dal lato opposto con coperchi di protezione abbassati. Si vede bene la piastra infissa sul tronco e portante il supporto comune ai dendrometri. I settori di fusto in istudio non sono interessati dai supporti infissi a vite.

Botanica. — *I gemelli della Canapa*. Nota (*) del Corrisp. ROBERTO SAVELLI.

I. ACCERTAMENTO DELLA GEMELLARITÀ. — Risale ai primordî della Botanica la tendenza a designare cose relative alle piante con nomi resi già famigliari dalle scienze umane e animali, ciò che implica un ravvicinamento spesso inesatto, ma non privo di qualche fondamento analogico e di efficacia rappresentativa. Aderisce a tale tendenza anche il titolo di questa Nota.

Nella specie umana il prodotto del concepimento è d'ordinario unico; ma l'eccezionale parto di due o più figli, sviluppatisi insieme nello stesso alvo, costituisce la gemellarità. Analogamente, nelle piante superiori, designeremo in tal modo *la formazione di più embrioni nello stesso ovulo*. È questa idea del comune ricetta dato dall'ovulo, che io intendo sottolineare particolarmente per la Canapa, ove ciò che popolarmente si chiama « seme » è botanicamente un frutto; e nei cui riguardi perciò si è voluto sostenere che un achenio da cui nascano due piantine contenga due distinti semi invece di uno solo come di norma. Francamente, io ritengo che tale convinzione — ove non sia validamente documentata — provenga da una suggestione libresca, sia un prodotto di « erudizione » piuttosto che di osservazione. Ripensando alle gran discussioni morfologiche sulla monocarpellarità o bicarpellarità del pistillo della Canapa (che ha due stimmi ma una cavità sola), si vede come nasca spontanea l'idea di una specie di risurrezione del secondo carpello e, con esso, di un secondo ovulo; e poiché un riflesso di « cultura » è meno brigoso di una avveduta dissezione ⁽¹⁾, questa sarà la spiegazione più facilmente adottata.

Non che io neghi la possibilità di una *polispermia* (cioè formazione di due semi entro lo stesso achenio, o « nucula »); *ma io non l'ho mai vista*. Questa Nota riassume tutte le mie osservazioni, cominciate nel lontano 1928, culminate nel 1957, anno in cui le ho chiuse per non più riprenderle. Dal primo all'ultimo caso ho sempre positivamente accertato la formazione di *due*, rarissimamente *tre*, plantule, generate e contenute entro una *nucula monospermica*. Si tratta di 163 coppie gemellari + 2 trigemini = 332 gemelli (venuti dallo spoglio di oltre 120.000 germinazioni), cui sono da aggiungere una dozzina di *mostri doppi*, ovviamente collegati con le gemellarità e che la confermano.

Nelle piante — a differenza degli animali — i meccanismi di una tale evenienza sono molteplici e, al momento della nascita (cioè della germinazione,

(*) Presentata nella seduta del 14 gennaio 1961.

(1) Per esempio, nel caso di MANICARDI (« Accad. Sc. Med. e Nat. », Ferrara 1905, pp. 77-81) sarebbe stata *necessaria e sufficiente* una sezione trasversale mediana: quella appunto la cui mancanza rende equivoca e non persuasiva le figure e le conclusioni.

che rende palese il fenomeno) non più riconoscibili; perciò l'uso di termini più strettamente botanici nulla aggiungerebbe in precisione e forse toglierebbe qualcosa in chiarezza. «Gemellarità» è la parola che meglio aderisce al mio concetto.

Per chi voglia ripeterne l'accertamento, è scorta sicura la tuttora eccellente monografia di Briosi e Tognini (*Anatomia della Canapa*, Milano 1894 e 1896) che descrive (parte 1^a, p. 62) l'embrione «rivestito di due pellicole sovrapposte, l'una verdognola di spessore più o meno uniforme, e l'altra bianca e di varia grossezza. Ambedue queste pellicole si insinuano anche fra il cotiledone interno e la radichetta assumendo intorno a quest'ultima la forma di un dito di guanto». Mentre il guscio rappresenta il pericarpo della *nucula*, le due pellicole rappresentano quanto resta dell'ovulo: nella verde si riconosce il prodotto di trasformazione del *tegumento esterno* (op. cit., p. 73), quello interno tendendo a scomparire, schiacciato durante la maturazione; nella pellicola bianca si riconosce il residuo della nucella, in gran parte digerita per attività dell'embrione accrescentesi, e perciò avente valore di *perisperma* (anche se gli Autori, in più punti, la designano con parola più generica e meno esatta). L'*alburne* (che gli Autori chiamano «endosperma») è stato digerito dall'embrione molto tempo prima della maturazione del frutto. Per poter sostenere la esistenza di due semi si sarebbero dovuti vedere i due embrioni avvolti ciascuno da un proprio pajo di invogli: ora, al contrario, nei nostri gemelli i due embrioni si videro sempre *a diretto contatto l'uno dell'altro*, e sempre *avvolti da una pellicola bianca unica*, rivestita a sua volta da una pellicola verde: *un solo pajo di invogli che, in una cavità comune, contiene due embrioni*. Nei due casi in cui gli embrioni erano *tre*, essi pure erano a diretto contatto l'uno dell'altro, tutti e tre racchiusi entro un comune duplice invoglio. Le figg. 8 e 10 documentano con particolare evidenza il contatto diretto dei due embrioni e la loro comunanza d'invoglio.

II. SCOPI E LIMITI DELLA RICERCA. — Il primo scopo vagheggiato era quello di tentare di ottenere ciò che, nell'ambito delle *eversporting varieties*, De Vries chiamava una «razza ricca». La quale, naturalmente, avrebbe avuto valore non in sé stessa, ma come mezzo strumentale per favorire la ricerca embriologica a livello microscopico: penso infatti che nessuno si metterebbe a tagliare in serie decine e decine di ovarî di canapa senza la prospettiva di trovare presto in qualcuno di essi il fenomeno desiderato. Praticamente, una ragionevole probabilità del fortunato incontro è la condizione *sine qua non* per avviare una ricerca laboriosa, fidando nella buona sorte. Cominciai con un lotto di 1850 «semi», che mi dette il *sei per mille* di casi di gemellarità: questo lotto, appartenente ad una stirpe di canapa ordinaria, costituiva già una vantaggiosa eccezione su altre stirpi che avevo avuto fra mano. Il massimo risultato l'ho avuto recentemente in una discendenza di *pinnatifidofilla*, i cui lotti, saggiati tra il 1956 e il 1957, dettero frequenze medie oscillanti intorno all'1,7% di casi di gemellarità (riferendomi cioè al numero dei semi contenenti i gemelli, non ai gemelli stessi, che sarebbero il

doppio). Anche quando, fenotipicamente, in piccoli lotti, si salga al 3 % ed oltre, si rimane pur sempre nei limiti di una « razza povera ». Perciò questo indirizzo non riuscì fruttuoso.

Senonché, alcuni dei quesiti che potevo propormi, nel frattempo si risolvevano da sé, più presto per via genetica che per via anatomica, con quel mezzo che — in una pianta dioica come la Canapa — è dato dalla considerazione del sesso dei gemelli. Il dioicismo del materiale costituisce infatti il punto del più alto interesse.

Perciò la mia ricerca ed i suoi risultati si estendono a tutto quel che può dare la osservazione morfologica e sessuologica, ciò che è molto; rimanendo del tutto in ombra quei punti che solo l'anatomia microscopica potrebbe illuminare.

III. DIMENSIONI E SVILUPPO DEI GEMELLI. — Il carattere più generale delle nostre germinazioni gemellari è che vi si trova un embrione più grande ed uno più piccolo. Per stabilire i reali rapporti bisognerebbe osservarli al primo inizio della germinazione; ma ciò non accade quasi mai, e allora la differenza si accentua perché la plantula minore dimostra — anche — una diminuita capacità di accrescimento. La differenza è vieppiù aggravata dal fatto che mentre la plantula maggiore pone facilmente la sua radice in rapporto col substrato, e se ne giova per accrescersi, la piantina minore spesso viene a trovarsi nella più infelice delle posizioni, impigliata fra i cotiledoni della sorella e la pellicola bianca, dalla quale ho dovuto spesso liberarla artificialmente, essendone da sé stessa incapace. Benché tutto ciò venga a falsare i rapporti, ed a togliere una vera comparabilità, si può tuttavia affermare che in generale la differenza può essere molto più forte che nei casi animali. Nei casi più sicuri, raramente il gemello più piccolo è minore della terza parte del più grande, differenza che tuttavia appare grande rispetto a quelle osservabili nell'Uomo; con questo in più; che nelle piante la differenza tende ad accentuarsi con lo sviluppo, tende invece a livellarsi nell'Uomo. Nella Canapa quando le dimensioni di uno dei gemelli si scostano troppo dal normale, esso generalmente muore, anche quando si cerchi di fargli attorno le condizioni migliori.

Il caso di forte differenza con alta mortalità del più piccolo è frequente; raro invece quello di due gemelli quasi uguali. Disturbare i gemelli al loro primo rinvenimento significa spesso ucciderli: perciò solo dopo due giorni dalla germinazione ho determinato il peso fresco dei tre componenti un *trigemino*, e per questa dilazione le cifre trovate hanno soltanto un valore indicativo:

la plantula maggiore mgr 15,0

» media » 4,6

» piccola » 1,2

Comunque, entro un mese dalla pesata, i tre gemelli morirono.

IV. POSIZIONE DEI GEMELLI. — Deve essere osservata al primo inizio della germinazione, quando nessun sensibile spostamento può essere ancora avvenuto. E allora si vede che i casi sono due: *a)* disposizione *inclusa*, dove l'embrione maggiore forma una curva che circonda il minore. Allora la radichetta dell'embrione maggiore non può, come di norma, addossarsi « alla faccia esterna del cotiledone interno » (loc. cit., p. 63), ma si addossa invece alla radichetta del secondo embrione, la quale, poi si addossa regolarmente alla faccia esterna del cotiledone interno del secondo embrione medesimo: la compressione che ne deriva produce spesso in quest'ultimo anomalie secondarie;

b) altra disposizione, più comoda, che consente all'embrione minore uno sviluppo più libero, è quella che dirò *collaterale*, in cui i due embrioni si toccano di fianco. È evidente il collegamento tra questi fatti e quelli del § III.

V. GEMELLARITÀ E PESO. — I singoli embrioni gemellari pesano in media meno degli embrioni normali, ma i due embrioni insieme pesano generalmente un po' più di un solo embrione normale. Fondandosi sui principi generali relativi alle *eversporting-varieties* era naturale chiedersi se vi fosse un certo parallelismo tra la grossezza dei « semi », espressa dal loro *peso* (concepito come indizio di buona nutrizione) e la percentuale di gemellarità.

Un piccolissimo lotto di « semi », col peso eccezionalmente alto di mgr 16,74 ciascuno, affidato alla attenta premura ed alla cortesia del compianto collega Chiarugi nel 1956, gli dette 40 germinazioni, di cui 2 gemellari, cioè 4 individui gemelli su 42: percentuale rilevantissima rispetto alla media usuale. Le mie ricerche sistematiche però non hanno potuto indicare una relazione veramente stretta tra il peso dei semi e la gemellarità. La punta massima della gemellarità fu raggiunta in un piccolo campione che la presentò nella proporzione enorme del 7%, mentre il peso era solamente di mgr 10,90 per ogni « seme ». Un lotto di « semi », di mgr 12,44 ciascuno, dette il 3,6%, mentre un altro notevolmente più pesante (mgr 15,06) dette soltanto l'1,7% di gemellarità. La relazione esiste all'ingrosso, facilmente sopraffatta da altri fattori. La conclusione più sicura è di carattere negativo: se, in una data stirpe, il peso dei « semi » cade sotto 1/3 del normale, la gemellarità è praticamente abolita.

VI. CRIPTOMORTALITÀ PREGERMINATIVA. — Una gemellanza si scopre nell'Uomo col parto; e nella Canapa con la germinazione. Nella Canapa si ritrovano, in generale, i fatti della criptomortalità prenatale dei gemelli umani. Ho costantemente accertato la rapida caduta di percentuale della gemellarità con l'invecchiamento del seme. Se un lotto, nell'anno seguente la maturazione, dà il 6 per mille, un campione uguale fatto germinare l'anno dopo può anche scendere al disotto del 0,5 per mille. Il fatto è stato osservato troppo regolarmente per poterlo credere accidentale. Dobbiamo ammettere che gli embrioni gemelli abbiano una minor vitalità rispetto ai normali,

risentano prima le conseguenze dell'invecchiamento, e la perdita della germinabilità colpisca prima gli embrioni gemelli, *o almeno uno di essi, verosimilmente il minore*. La percentuale dei gemelli ne subisce una diminuzione, che non ci sarebbe se — per irrealizzabile ipotesi — gli accertamenti si fondassero, anziché sulla germinazione, sulla dissezione uno ad uno dei semi, quiescenti.

VII. MOSTRI DOPPI E ANOMALIE MINORI. — Frequentemente nelle stirpi a gemellarità accentuata nascono plantule a radichetta bifida. Nella loro interpretazione è molto difficile decidere tra l'ipotesi di un incipiente sdoppiamento e quella di una profonda fusione. La radichetta bifida può bene additare una delle vie sulle quali, avanzando, si può giungere alla poliembrionia.

« Poliembrionia », nel senso lato che la teratologia accorda a questa parola, è una caratterizzazione ancora approssimativa: può venire da una embrionia avventizia d'origine nucellare, come pure da fecondazione dell'oosfera e di una delle sinergidi; ma anche dalla scissione d'una massa embrionale unizigotica.

Varie ragioni, topografiche e fisiologiche, rendono probabili manifestazioni di concrescimento fra embrioni comunque generatisi entro lo stesso ovulo. Non si nega affatto la possibilità di biforcazioni effettivamente riferibili a ciò che Worsdell chiamerebbe *positive desdoublement*, limitato ad un dato organo; ma il fatto è che parecchi gradi di passaggio permettono di seguire il processo di concrescimento e la graduale perdita di individualità dei gemelli. Una semplice ragione meccanica fa sì che in embrioni orientati nello stesso senso, il saldamento avvenga « per le foglie » cioè per le parti più espanse che vengono prima a contatto, mentre gli apici radicali più facilmente restano indipendenti. Ma identici risultati si potrebbero avere per la via opposta dello sdoppiamento di una massa embrionale originariamente unica.

La fig. 22 (vedasi anche la didascalia) mostra uno dei casi più interessanti e complessi di duplicità, conducente ad una particolare *trisincotilia*. Ciò induce a toccare un punto importante: la possibile derivazione di tri- o policotili dalla fusione di plantule. La tricotilia è stata spesso riferita a questa causa (vedasi Vuillemin, *Les anomalies végétales*, p. 216 e sg. Paris 1926) esagerandone la frequenza a scapito della più facile origine per schizocotilia. Sommando le mie osservazioni sulla Canapa e sul Tabacco, concludo che per la tricotilia e fenomeni affini debbono ammettersi tre origini:

- a) scissione di abbozzo cotiledonare primitivamente unico: *schizocotilia*;
- b) formazione di abbozzi cotiledonari straordinari in embrione unico: *plejocotilia vera*;
- c) fusione di embrioni: *plejocotilia falsa*, cioè *sinoftia* (Morren, Vuillemin).

Nella Canapa il primo fatto è il più frequente, attestato da scissione incompleta, o appena accennata, di un cotiledone. Sono riferibili al secondo fatto quei casi, di architettura compiutamente armonica, che Gain chiamerebbe « a tricotilia perfetta », in cui sono trimeri anche due o tre verticilli fogliari sovrastanti ai cotiledoni, e l'alterazione fillotassica può riuscire sensibile per un certo tratto, anche più in alto, dove — secondo l'espressione di Briosi e Tognini (op. cit., parte 2^a, p. 43) — « i verticilli si sciolgono », e « le foglie staccansi in piani diversi ». In queste piante, di cui ho visto tanti esemplari, sarebbe assurda e gratuita la supposizione di una *sinoftia* ed una congiunzione qualsiasi con la gemellarità. Il terzo modo, tanto bene attestato dalla fig. 22, lo ritengo il meno frequente: è infatti una anomalia della anomalia.

Punto importantissimo da sottolineare è che nelle comuni germinazioni gemellari, uno dei gemelli può essere tricotilo. Evidentemente se ogni caso di tricotilia si volesse riferire a saldatura di embrioni, bisognerebbe in questo caso pensare a formazione di 3 embrioni, uno libero e due saldati. Neppur questo si può escludere, ma è statisticamente molto improbabile.

Menzione speciale merita una coppia gemellare data da un embrione normale con un piccolissimo tricotilo, minore di 1/10 (in volume) del coge-mello, ma bellissimo per rara e perfetta simmetria; purtroppo morto prima di emettere foglie ⁽²⁾.

La gemellarità nella Canapa conduce dunque a *mostri doppi*, che in casi spinti, danno particolari manifestazioni di *policotilia*, o di « *radice bifida* »: *schizocotili* e *plejocotili* possono tuttavia essere anche i singoli gemelli, indipendentemente dalla *sinoftia*.

VIII. IL SESSO DEI GEMELLI. — Nel campo animale si tende ad attribuire i mostri doppi alla sola categoria dei gemelli monozigotici, ma tale limitazione sarebbe gratuita per le piante, date le molte vie che possono condurre alla gemellanza, e la perturbante ambivalenza di alcune manifestazioni morfologiche, per cui, per esempio, una profonda fusione può assumere le apparenze di un incipente sdoppiamento.

Per superare queste difficoltà, un mezzo ci sarebbe, sottile e potente: l'analisi statistica della distribuzione dei sessi tra i gemelli; se di statistica si potesse parlare. Sfortunatamente la mortalità riduce a pochissimi i gemelli che arrivano ambedue a dichiarare il proprio sesso.

Tuttavia il fatto assodato e relevantissimo è che tutte le combinazioni sessuali possibili furono verificate: *maschio con maschio*; *femmina con femmina*; *maschio con femmina*. Una statistica complessiva sarebbe eterogenea e priva di significato; ma si può prendere a paradigma un lotto del quale si poterono portare a fioritura in ambedue i componenti 19 coppie gemellari: 3 furono

(2) Essendo eccezionalmente alta la frequenza dei tricotili nelle coppie gemellari, si può suggerire che gemellarità e tricotilia sieno due effetti paralleli di una causa comune: per esempio un *localizzato* eccesso di nutrizione dell'abbozzo ovulare e dell'ovulo.

♂ e ♂, 5 ♀ e ♀ ed 11 ♂ e ♀, Ciò dà l'idea di una distribuzione come si avrebbe nella associazione casuale di due fecondazioni indipendenti.

Il più bel risultato fu ottenuto in uno degli anni precedenti, quando uno dei 2 trigemini trovati durante tutta la ricerca, poté essere condotto a fiore in tutti e 3 i suoi componenti. Le piantine crebbero ravvicinate, a *contatto di radice*, e vennero a svilupparsi su un medesimo piano: da un lato un grande maschio, alto e slanciato; dall'altro lato una femmina, alta meno della metà del maschio, ma robustissima; e in mezzo - tra le due grandi piante - un maschietto alto meno di 1/10 del cogenello maggiore, ma perfettamente fiorito e con polline atto alla fecondazione. L'interpretazione è difficile, e deve tener presenti alcuni punti fermi: i gemelli che provenissero da scissione di *uno* zigote, sarebbero *sempre* dello stesso sesso; quelli di produzione agamica sarebbero *soltanto* femmine. Una doppia fecondazione anomala, in cui due spermí fratelli di uno stesso tubetto pollinico fecondino uno l'oosfera e l'altro una delle sinergidi, darebbero ancora prodotti dello stesso sesso, pur non avendo alcuna corrispondenza con gli *uniovulari* dell'Uomo. Per la produzione di un maschio, è necessario un atto sessuale.

Nel nostro trigemino i due maschi potrebbero provenire da *una* fecondazione, con successiva scissione dello zigote; ma la femmina è di origine apomittica o deriva da una improbabile fecondazione indipendente? Sono questi gli interrogativi che restano insoddisfatti senza la ricerca microscopica fatta al primo inizio dello sviluppo.

IX. GEMELLARITÀ E SELEZIONE. - La interfecondazione dei prodotti gemellari del 1956 dette 1.600 «semi», tra cui *un solo* gemellare, cioè caduta anziché esaltazione della percentuale. Ciò era prevedibile, e quadra perfettamente con i concetti devriesiani sulle *eversporting-varieties*. In esse tanto gli individui «ereditari» quanto gli «atavisti» hanno la stessa probabilità di potenza ereditaria; ma a questa potenziale uguaglianza genetica si sovrappone l'effetto di condizioni esterne ed interne (e particolarmente di nutrizione) che influiscono sulla ontogenesi. Una selezione *diretta* può ancora essere efficace su una *fasciazione*, in cui gli individui anormali sono anche i meglio nutriti, i più robusti. Il contrario avviene per la gemellarità: qui gli individui «ereditari» sono i più deboli, ed i semi che sviluppano sono in generale piccoli e pochi. Credo che in pochi altri casi di *eversporting* sia altrettanto sconsigliabile la *selezione diretta*. Ai risultati della selezione *indiretta* fu accennato nel § II.



Fig. 1 - Gemellanza omosessuale: è tipico il rapporto di sviluppo tra le 2 ♀ cogemelle. Fig. 2 - Gemellanza omosessuale: è eccezionale la uguaglianza di sviluppo tra i 2 ♂ cogemelli. Fig. 3 - Gemellanza eterosessuale: è il caso più frequente. Fig. 4 - Un trigemino dato da due ♂ e una ♀. Fig. 5 - Particolare dello stesso caso della fig. 4: il piccolo ♂ mediano, in fiore, ritratto a 4/5 del vero. Fig. 6 - Due «siamesi»: sembrano una piantina sola, con 4 cotiledoni: in *c* quelli del cogemello maggiore; in *c'* quelli del minore, profondamente concresciuto con la metà inferiore del tratto ipocotilare del cogemello maggiore. Fig. 7 - Un particolare della base dello stesso «siamese».

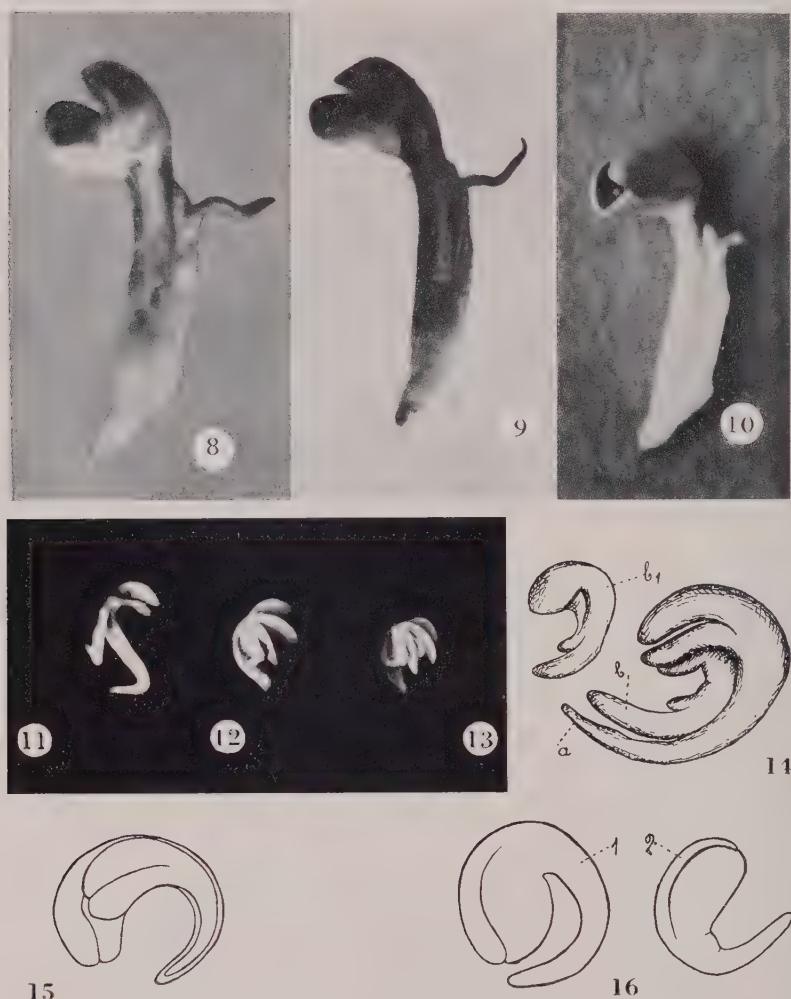


Fig. 8 - Gemelli, molto disuguali in sviluppo, con gli apici radicali ancora avvolti nello stesso «dito di guanto» formato dalla «pellicola bianca». Fig. 9 - Gli stessi, in uno stadio appena ulteriore, liberati dalla «pellicola bianca». Fig. 10 - Gemelli, di molto disuguale sviluppo: il maggiore ancora impigliato nel «guscio» dell'achenio; il minore è tricotilo; ambedue hanno gli apici radicali ancora avvolti nella stessa «pellicola bianca». Fig. 11 - Due gemelli «collaterali», visti di fianco. Figg. 12 e 13 - Due gemelli in disposizione «inclusa», visti di fianco e di fronte. Fig. 14 - Disegno dal vero di due gemelli in disposizione «inclusa»: a) embrione maggiore, b) embrione minore, b¹) lo stesso embrione minore, girato e visto di scorcio (in questo embrione piccolo, la compressione generata dall'angustia dello spazio concessogli, ha determinato una coerenza tra il cotiledone interno e l'ipocotile, per cui i cotiledoni si mostrano aperti e slargati). Fig. 15 - Disegno dal vero di due gemelli in posizione «collaterale». Fig. 16 - I due embrioni del caso precedente, ritratti dalla faccia con la quale si guardavano, dopo aver ribaltato il minore di 180°.

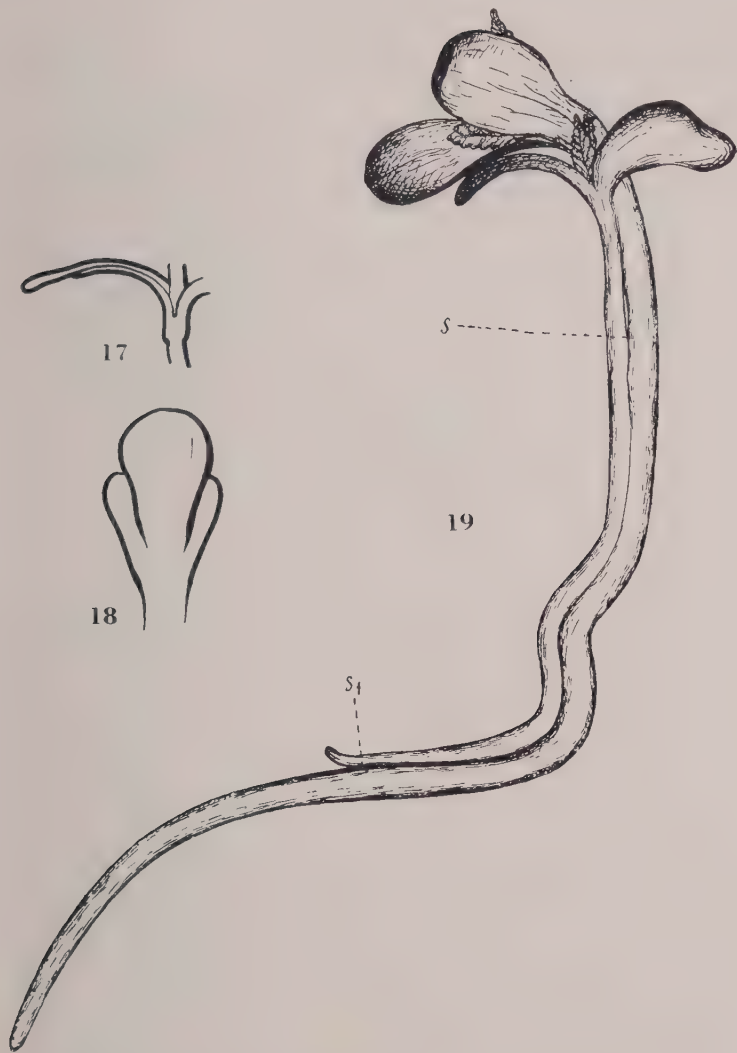


Fig. 17 - Disegno dal vero (ingrandito) tratto da una plantula appartenente ad una germinazione gemellare: la lamina di uno dei cotiledoni si presenta come rinforzata da una specie di linguetta aderente alla sua pagina inferiore: può trattarsi di un parziale sdoppiamento tangenziale della lamina, come pure di un fillo autonomo (un terzo cotiledone disposto al disotto anzichè a lato del cotiledone normale). Fig. 18 - Un cotiledone tripartito, in una plantula per tutto il resto normale, che aveva quasi l'aspetto di essere tetracotile. Fig. 19 - Schizzo dal vero (ingrandito), di due gemelli, poco diversi di mole, coesi per lungo tratto dell'ipocotile e della radice. La superficie di adesione è data peraltro dalle due epidermidi a contatto; ed in conseguenza della diversa capacità di accrescimento dei due cogemelli si ha dapprima uno stiramento della superficie di adesione, eppoi un graduale scollamento delle due epidermidi, per cui le due plantule tendono spontaneamente a rendersi libere.

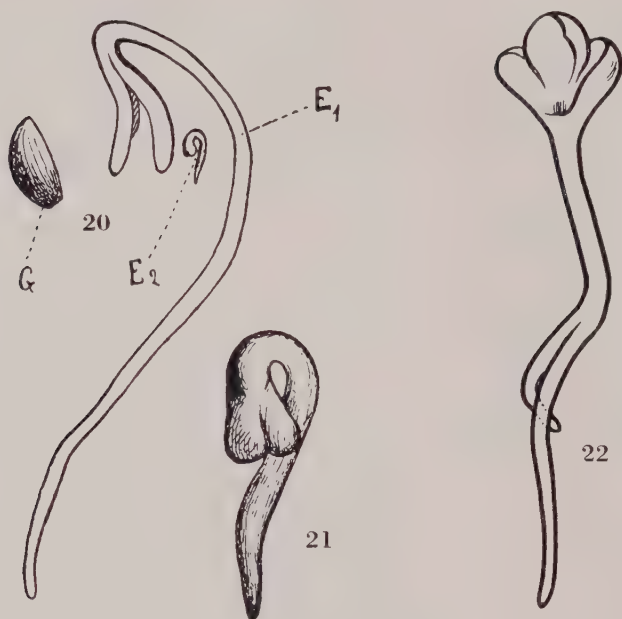


Fig. 20 - Disegno dal vero (ingrandito) di 2 gemelli, uno fortemente accresciuto (E_1), l'altro piccolissimo (E_2) perchè rimasto impigliato tra i cotiledoni del cogemello e la «pellicola bianca». In G è stato ritratto mezzo guscio dell'achenio, per comodità di confronto tra le grandezze. Fig. 21 - Un'altra piccola plantula (molto ingrandita) rimasta impigliata fra i cotiledoni del cogemello, e che presenta un giramento dei cotiledoni per un angolo di circa 90° , che segna l'avviamento alla sincotilia. Fig. 22 - Mostro doppio trisincotile. I cotiledoni la cui individualità è ancora sufficientemente riconoscibile sono 3: il mediano contrae con i 2 laterali una saldatura non marginale, che avviene per largo tratto delle superfici dorsali convesse. Ipocotile chiaramente proveniente dalla fusione di due ipocotili; la parte inferiore è foggata a nastro, che si continua, allargandosi, nella radice, ove comincia a sciogliersi nei suoi due elementi, i quali si rendono poi indipendenti: infatti gli apici sono due. Piumetta incapace di sviluppo; la plantula rimase lungo tempo senza accrescersi. Si tratta di saldatura di due gemelli di diversa dimensione, molto profonda in alto, dove il 4° cotiledone è stato riassorbito, confondendo la propria individualità con quella di un cotiledone del gemello, e costituendo insieme ciò che appare come cotiledone mediano del trisincotile. La coesione si scioglie gradatamente verso il basso, e uno dei gemelli termina con un apice radicale libero, più in alto di quello del cogemello maggiore: nel disegno appare punteggiato il tratto della radice più piccola nascosto sotto la radice maggiore.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Fisica. — *Sui fondamenti dell'elettrodinamica.* Nota III di GIOVANNI ZIN, presentata (*) dal Socio E. PERUCCA.

INDETERMINAZIONE DELLA LEGGE DELLA FORZA ELETTROMOTRICE ELEMENTARE INDOTTA IN UNA SPIRA MOBILE. — Ove nel calcolo delle azioni elettrodinamiche fra due circuiti aperti, ad esempio due antenne radiotrasmittenti, si ricorra alla seconda legge elementare di Laplace oppure alla legge III stabilita nella Nota prima, si ottengono manifestamente risultati diversi. In sede di sistemazione logica dei principi dell'elettromagnetismo e dell'elettrodinamica si pone pertanto il problema della deduzione della legge elementare delle azioni elettrodinamiche fra circuiti aperti, a partire dall'elettromagnetismo e dal principio di conservazione dell'energia. Evidentemente il ricorso al principio dei lavori virtuali implica l'applicazione di una deformazione ad almeno uno dei due circuiti, le cui parti vengono così a trovarsi in movimento per tutta la durata della deformazione. La possibilità di costruire una teoria delle azioni elettrodinamiche è pertanto subordinata alla conoscenza delle f.e.m. che il circuito fisso induce nei vari elementi del circuito in moto. Notoriamente la formulazione maxwelliana dell'elettromagnetismo nulla dice su tale questione. La famosa legge di Faraday-Neumann

$$(1) \quad e = - \frac{d\Phi}{dt}$$

esprime la forza elettromotrice e generata in una spira C dalla variazione del flusso Φ di induzione magnetica concatenato con la spira, ha due distinti aspetti:

1° la spira è fissa e il vettore di induzione magnetica \vec{B} varia nel tempo. Tale aspetto è contenuto nelle equazioni di Maxwell;

2° il vettore \vec{B} non varia nel tempo e la spira C si contrae. Tale secondo aspetto non è notoriamente contenuto nelle equazioni differenziali maxwelliane dell'elettromagnetismo. Ed è di questo secondo aspetto della legge dell'induzione che è opportuno analizzare la portata in relazione all'oggetto sopra menzionato.

Fissato su C (conduttore filiforme, chiuso, non percorso da corrente) un verso positivo, detta S una superficie avente C per orlo, fissata su C una origine degli archi s e su S la normale unitaria \vec{n} orientata con la solita con-

(*) Nella seduta del 9 aprile 1960.

venzione, detta da l'area dell'elemento di S , detta \vec{v} la velocità del punto s di C , si ha

$$(2) \quad e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \times \vec{n} da = -\int_C \vec{B} \wedge \vec{v} \cdot d\vec{s}.$$

Tale relazione è ordinariamente interpretata ammettendo che su ogni elemento $d\vec{s}$ di C sorga una f.e.m.

$$(3) \quad de = -\vec{B} \wedge \vec{v} \cdot d\vec{s}.$$

Ma dell'equazione

$$(4) \quad \int_C de = -\int_C \vec{B} \wedge \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

si possono costruire altre soluzioni, aventi pure il carattere di leggi fisiche elementari⁽¹⁾. A tale scopo si indichi con $\delta(\vec{ds})$ la variazione subita da $d\vec{s}$ nell'intervallo di tempo δt e sia $\delta(\vec{ds}) = \vec{\chi} \delta t \wedge \vec{ds} + \eta \delta t d\vec{s}$. Evidentemente il vettore $\vec{\chi}$, che si suppone normale a $d\vec{s}$, esprime la velocità di rotazione di $d\vec{s}$, mentre η denota un coefficiente di allungamento di $d\vec{s}$ per unità di tempo. Ovvio dire che $\vec{\chi}$ e η si intendono funzioni di s e di t . Sia \vec{A} il potenziale vettore da cui discende l'induzione magnetica \vec{B} . Si scelga allora come f.e.m. elementare de la seguente:

$$(5) \quad de = \vec{B} \wedge d\vec{s} \cdot \vec{v} - \frac{d\vec{A}}{ds} \cdot \vec{v} ds - \vec{A} \cdot \vec{\chi} \wedge d\vec{s} - \vec{A} \cdot \eta d\vec{s}.$$

Si osservi che tale definizione, per la sua formulazione intrinseca in cui intervengono soltanto proprietà geometriche o cinematiche del circuito oltre a grandezze di stato, può essere considerata una legge elementare. Per calcolare rapidamente l'integrale del secondo membro esteso a un arco (a, b) di C si ricorra al seguente artificio. Sull'elemento $d\vec{s}$ si suppongano applicate tre forze: una forza $-\vec{B} \wedge d\vec{s} + \frac{d\vec{A}}{ds} ds$ (con ciò si intende dire una forza avente la direzione e il verso del vettore $-\vec{B} \wedge d\vec{s} + \frac{d\vec{A}}{ds} ds$ ed avente

(1) Per una discussione delle proprietà delle leggi elementari, come pure per un algoritmo atto a trasformare le leggi elementari si veda G. ZIN, *Funzioni tensoriali di un vettore e leggi elementari dell'elettromagnetismo*, «Annali di Mat. Pura e App.», vol. 50 (dedicato al prof. A. Signorini), 1960.

intensità numericamente uguale al modulo di tale vettore; analogamente per il seguito) applicata in un punto qualunque di $d\vec{s}$; una forza $-\vec{A}(s)$ applicata al primo estremo s di $d\vec{s}$; una forza $+\vec{A}(s)$ applicata al secondo estremo $s+ds$ di $d\vec{s}$. Poiché nel tempo δt l'elemento $d\vec{s}$ subisce una traslazione $\vec{v}\delta t$, la prima delle dette forze compie nel tempo δt un lavoro $-\vec{B} \wedge d\vec{s} \cdot \vec{v} \delta t + \frac{d\vec{A}}{ds} \cdot \vec{v} ds \delta t$. Inoltre, detto P_1 il primo estremo e P_2 il secondo estremo di $d\vec{s}$, le due altre forze compiono nell'intervallo δt il lavoro $-\vec{A}(s) \cdot \delta P_1 + \vec{A}(s) \cdot \delta P_2 = \vec{A}(s) \cdot \delta(P_2 - P_1) = \vec{A}(s) \cdot \delta(d\vec{s}) = \vec{A}(s) \cdot \vec{\chi} \wedge d\vec{s} \delta t + \vec{A}(s) \cdot \eta d\vec{s} \delta t$. Pertanto se lungo l'arco (a, b) di C si integrano i due membri della (5) dopo averli moltiplicati per $-\delta t$, si ottiene un'espressione interpretabile come somma di lavori elementari compiuti dal sistema di forze considerato:

$$(6) \quad - \int_a^b d\vec{e} \delta t = \int_a^b \left(-\vec{B} \wedge d\vec{s} \cdot \vec{v} \delta t + \frac{d\vec{A}}{ds} \cdot \vec{v} ds \delta t + \right. \\ \left. + \vec{A}(s) \cdot \vec{\chi} \wedge d\vec{s} \delta t + \vec{A}(s) \cdot \eta d\vec{s} \delta t \right).$$

Ma il detto sistema di forze è riducibile (si tenga presente il ragionamento che ha condotto dalla proposizione III alla IV della Nota prima) a una forza $-\vec{B} \wedge d\vec{s}$ in corrispondenza di ogni elemento $d\vec{s}$, a una forza $-\vec{A}(a)$ applicata al primo estremo a e ad una forza $+\vec{A}(b)$ applicata al secondo estremo b . Per cui la somma dei detti lavori elementari estesa a tutto l'arco (a, b) e compiuti nel tempo δt si riduce all'espressione:

$$- \int_a^b d\vec{e} \delta t = - \int_a^b \vec{B} \wedge d\vec{s} \cdot \vec{v} \delta t - \vec{A}(a) \cdot \vec{v}(a) \delta t + \vec{A}(b) \cdot \vec{v}(b) \delta t$$

dove $\vec{v}(a)$ e $\vec{v}(b)$ sono i valori di \vec{v} negli estremi a e b . Da questa dividendo per $-\delta t$ si ottiene:

$$(7) \quad \int_a^b d\vec{e} = - \int_a^b \vec{B} \wedge \vec{v} \cdot d\vec{s} + \vec{A}(a) \cdot \vec{v}(a) - \vec{A}(b) \cdot \vec{v}(b).$$

Si osservi ora che tale espressione, ove gli estremi a e b coincidano e per arco (a, b) si intenda tutto il circuito C , coincide con la (4). La legge elementare (5) è perciò in accordo con la legge (1) dell'induzione elettromagnetica, pur definendo essa la f.e.m. elementare in modo diverso dalla (3). Viene così

dimostrata l'erroneità della credenza universalmente diffusa, secondo la quale la (3) sarebbe l'unica definizione possibile di una legge elementare in accordo con la legge integrale (1).

Secondo la (5) nei circuiti deformabili mediante contatti striscianti sorgerebbero f.e.m. di valore finito (per velocità finite) nei contatti stessi. Inoltre, sempre secondo la (5), in un conduttore rettilineo che venga stirato in un campo magnetico ($\vec{v} \wedge \vec{d}s = 0, \vec{\chi} = 0, \vec{\eta} \neq 0$), dovrebbe insorgere una f.e.m.

Ancora, per quanto visto nella Nota seconda, si può scrivere

$$-\vec{B} \wedge \vec{d}s + \frac{d\vec{A}}{ds} ds = ds \text{ grad } (\vec{A} \cdot \vec{u})$$

essendo $\vec{u} ds = \vec{d}s$ e l'operatore grad intendendosi agire soltanto sulle coordinate x, y, z del punto P da cui dipende il potenziale vettore \vec{A} . Se f è una funzione di un punto P, notoriamente è $df = \text{grad } f \cdot dP$. Per tale motivo ed a meno di infinitesimi di ordine superiore a ds si può scrivere:

$$\begin{aligned} (8) \quad & -\vec{B} \wedge \vec{d}s \cdot \vec{v} + \frac{d\vec{A}}{ds} \cdot \vec{v} ds = \text{grad } (\vec{A} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} ds = \\ & = [\vec{A}(\vec{P} + \vec{v} ds) - \vec{A}(\vec{P})] \cdot \vec{u} = [\vec{A}(\vec{P} + \vec{v} dt) - \vec{A}(\vec{P})] \frac{ds}{dt} \cdot \vec{u} = \\ & = \frac{\vec{A}(\vec{P} + \vec{v} dt) - \vec{A}(\vec{P})}{dt} \cdot \vec{d}s = \left[\frac{d}{dt} \vec{A}(\vec{P}(t)) \right] \cdot \vec{d}s. \end{aligned}$$

Evidentemente con $\vec{A}(\vec{P}(t))$ si è inteso indicare il potenziale vettore non in un punto fisso P, ma in un punto P(t) mobile con velocità \vec{v} . Tenendo ancora presente l'espressione di $\delta(\vec{d}s)$ già introdotta, si ha:

$$(9) \quad \vec{A} \cdot \vec{\chi} \wedge \vec{d}s + \vec{A} \cdot \vec{\eta} \vec{d}s = \vec{A} \cdot \frac{\delta(\vec{d}s)}{\delta t}.$$

La (5), per le (8) e (9), diventa così:

$$(10) \quad de = - \left[\frac{d}{dt} \vec{A}(\vec{P}(t)) \right] \cdot \vec{d}s - \vec{A} \cdot \frac{\delta(\vec{d}s)}{\delta t} = - \frac{d}{dt} [\vec{A}(\vec{P}(t)) \cdot \vec{d}s].$$

Per un qualunque circuito γ , rigido o no, chiuso o aperto, in moto, si ha allora:

$$(11) \quad e = - \frac{d}{dt} \int_{\gamma} \vec{A} \cdot \vec{d}s$$

e essendo la forza elettromotrice indotta su γ ed \vec{A} il potenziale vettore di origine esterna.

Se γ si riduce a un circuito chiuso C , l'integrale (11) può essere trasformato in un integrale superficiale mediante il teorema di Stokes. Tenendo allora presente che è $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ si ritrova la (1), ciò che costituisce una riconferma dell'equivalenza delle (3) e (5).

Dall'analisi che precede risulta che l'elettromagnetismo, anche nel suo più lato significato di Farady, Neumann, Maxwell, non offre elementi sufficienti per consentire la deduzione della legge delle azioni elettromagnetiche fra circuiti aperti in moto e di conseguenza, per quanto sopra esposto, non consente la deduzione della legge delle azioni elettrodinamiche fra circuiti aperti. In sede di assetto logico dei principi dell'elettromagnetismo, tali leggi devono o essere postulate o desunte da un quadro di principi più generale di quello limitato alle sole leggi relative ai circuiti continui e chiusi.

Chimica. — *Preparazione dei complessi $\text{TiCl}_3(\text{C}_5\text{H}_5)$ e del $[\text{TiCl}_2(\text{C}_5\text{H}_5)]_2\text{O}$ e loro struttura* (*). Nota di GIUSEPPE ALLEGRA, PAOLO GANIS, LIDO PORRI, PAOLO CORRADINI, presentata (**) dal Socio G. NATTA.

È stato intrapreso recentemente nel nostro Istituto uno studio strutturale sistematico di complessi di metalli di transizione contenenti i legami $\sigma-\pi$ del tipo di quelli presenti nei metalloceni. In particolare, data la mancanza di dati di letteratura sull'argomento, abbiamo iniziato uno studio sistematico dei composti di formula generale ArMeX_3 , dove Ar è un ligando a carattere aromatico, come il gruppo ciclopentadienilico, il benzene, o il gruppo cicloeptatrienilico e Me un metallo di transizione del 3° periodo del sistema periodico.

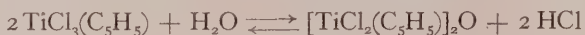
Notizie preliminari sono state da noi comunicate sul tricarbonil cromo-benzene [1], sul triclورو di titanio monociclopentadienile [2], e su di alcuni loro derivati [3]. È stato inoltre intrapreso uno studio roentgenografico della struttura del tricarbonil vanadio cicloeptatrienile. Riferiremo in questa Nota dettagliatamente su di una parte dei risultati da noi ottenuti nello studio chimico e strutturale del triclورو di titanio monociclopentadienile e dell'ossido del dicloruro di titanio monociclopentadienile.

La preparazione del titanio ciclopentadienile triclورو è stata per la prima volta descritta da R. D. Gorsich [4], il quale per reazione tra $\text{TiCl}_2(\text{C}_5\text{H}_5)_2$ e TiCl_4 ottenne un solido giallo cristallino corrispondente alla formula $\text{TiCl}_3(\text{C}_5\text{H}_5)$ ed avente p.f. 185°C con decomposizione.

Successivamente, Sloan e Barber descrivevano un altro modo di preparare lo stesso composto, dandone tuttavia un differente punto di fusione (145°C) [5].

In una precedente comunicazione [2] noi abbiamo chiarito le ragioni della discordanza tra i dati di Gorsich e quelli di Sloan e Barber, dovuta al fatto che il p.f. e lo spettro IR riportati da Sloan e Barber per il composto da loro ritenuto $\text{TiCl}_3(\text{C}_5\text{H}_5)$ (I) erano invece quelli del composto $[\text{TiCl}_2(\text{C}_5\text{H}_5)]_2\text{O}$ (II), prodotto di idrolisi di (I) in conseguenza di ripetute cristallizzazioni da solventi non anidri. L'esistenza di (II) ed alcune sue proprietà cristallografiche erano già state da noi per la prima volta messe in evidenza in una breve comunicazione [3].

Il metodo da noi seguito per preparare (II) è l'ebollizione di (I) in solventi idrocarburici (benzolo, toluolo, xilolo, ecc.) contenenti la quantità di acqua sufficiente per l'idrolisi totale, secondo la reazione:

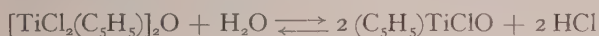


(*) Lavoro eseguito all'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano con il contributo della Soc. Montecatini.

(**) Nella seduta del 14 gennaio 1961.

Poiché esiste un equilibrio è necessario che l'HCl liberatosi a causa dell'idrolisi venga allontanato. Per esempio, g 0,1 di (I) vengono sciolti in 20 cm³ di xilolo saturo di acqua a 20°C e bolliti, in beuta aperta, senza ricadere, per 2-3'; concentrando sotto vuoto fino a piccolo volume cristallizzano per raffreddamento cristalli giallo arancione di (II) i quali dopo ricristallizzazione da xilolo non anidro mostrano un punto di fusione di 148-150°C.

Per ulteriore ebollizione di (II) in solventi non anidri esso si idrolizza dando luogo ad una sostanza cristallina giallo chiaro, p.f. 255-260°C dopo ricristallizzazione da benzolo, che corrisponde alla formula chimica $(\text{C}_5\text{H}_5)\text{TiClO}$ (III); l'idrolisi ha luogo secondo l'equazione:



(III) è meno solubile nei solventi idrocarburici di (II).

$\text{TiCl}_3(\text{C}_5\text{H}_5)$ (I).

I cristalli di (I) hanno colore giallo arancione e aspetto di tozzi prismi leggermente allungati. Un cristallo da noi reso approssimativamente sferico per rendere più semplici le correzioni alle intensità per l'assorbimento è stato da noi spettrato con i consueti metodi Weissenberg in due direzioni ortogonali tra loro, e corrispondenti ad assi razionali semplici (a e b).

Le costanti della cella elementare sono risultate:

$$\begin{aligned} a \sin \beta &= (6,02 \pm 0,03) \text{ \AA} & ; & \quad b = (10,39 \pm 0,05) \text{ \AA} ; \\ c &= (6,65 \pm 0,03) \text{ \AA} & ; & \quad \beta = 115^\circ 18' \pm 20'. \end{aligned}$$

Il volume della cella elementare è $V \cong 416 \text{ \AA}^3$ mentre la densità dei cristalli, misurata per flottazione, è uguale a 1,75 g/cm³.

Se ne deduce che il numero di molecole contenute nella cella elementare è $N = 2$. Dalla sola estinzione sistematica osservata dei riflessi $0k0$ con $k = 2n + 1$, la scelta dei possibili gruppi spaziali resta confinata al gruppo $P 2_1/m$ (nel qual caso la molecola deve contenere un piano di simmetria) o al suo sottogruppo $P 2_1$.

Una decisione tra i due gruppi spaziali insieme con l'assegnazione delle coordinate degli atomi pesanti (titanio e cloro) è stata possibile dall'esame delle proiezioni Patterson (010) e (001).

Tali proiezioni, che forniscono, com'è noto, la mappa dei vettori interatomici presenti nella struttura, sono mostrate nelle figg. 1 e 2.

La proiezione Patterson più indicativa per una preliminare definizione della geometria della molecola è la (001) perché l'asse c è notevolmente più corto dell'asse b e c'è da attendersi pertanto una minor probabilità di sovrapposizione tra vettori interatomici nella mappa risultante.

Inoltre, se il gruppo spaziale è $P 2_1/m$, è pertanto, se la molecola contiene un piano di simmetria cristallografico, necessariamente passante per l'atomo di titanio e uno degli atomi di cloro, c'è da attendersi su tale proie-

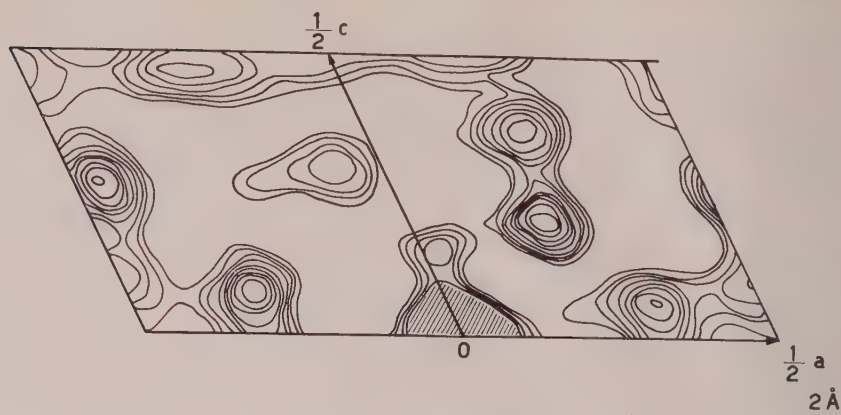


Fig. 1. - Proiezione Patterson *sharpened* sul piano (010) del composto $\text{TiCl}_3(\text{C}_5\text{H}_5)$.

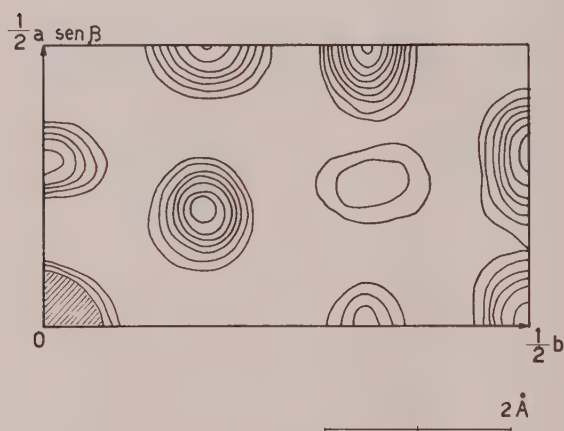


Fig. 2. - Proiezione Patterson *sharpened* sul piano (001) del composto $\text{TiCl}_3(\text{C}_5\text{H}_5)$.

zione un forte vettore di coordinate $x, y = 0$, corrispondente alla proiezione lungo c della distanza tra i due atomi pesanti giacenti sul piano di simmetria, e un vettore di coordinate $x = 0, y$ corrispondente alla distanza tra i due atomi di cloro pianisimmetrici.

TABELLA I.

	x	y	z
Ti170	.250	.034
Cl ₁375	.086	.229
Cl ₂375	.414	.229
Cl ₃	-.135	.250	.111

Questo è quanto effettivamente si constata.

Abbiamo perciò supposto ragionevolmente che il gruppo spaziale fosse il $P 2_1/m$.

Sulla base di tale gruppo, ed a partire dall'assegnazione dei vettori precedentemente proposta, è stato possibile in maniera coerente giustificare tutti i massimi Patterson più importanti presenti tanto nella proiezione (001) che nella proiezione (010).

TABELLA II.

Simbolo del gruppo piano	Coordinate dei punti equivalenti	Gruppo Patterson	Peso	Coordinate frazionali dei massimi Patterson
<p>0 0 1</p> <p>I)</p> <p>$C_{2v}^{\text{III}} - p 2gm$</p>	<p>d) x, y ; $\bar{x}, y + \frac{1}{2}$;</p> <p>\bar{x}, \bar{y} ; $x, \frac{1}{2} - y$</p>	<p>$C_{2v}^{\text{I}} - p 2mm$</p>	<p>$2Z_r^2$</p> <p>Z_r^2</p> <p>$2Z_rZ_s$</p>	<p>$2x_r, \frac{1}{2}$; 0, $2y_r + \frac{1}{2}$</p> <p>$2x_r, 2y_r$</p> <p>$x_r - x_s, y_r - y_s$;</p> <p>$x_r - x_s, y_r + y_s + \frac{1}{2}$;</p> <p>$x_r + x_s, y_r + y_s$;</p> <p>$x_r + x_s, y_r - y_s + \frac{1}{2}$</p>
<p>0 1 0</p> <p>II)</p> <p>$C_2^{\text{I}} - p 2_1$</p>	<p>e) xy ; \bar{x}, \bar{y}</p>	<p>$C_2^{\text{I}} - p 2$</p>	<p>Z_r^2</p> <p>$2Z_rZ_s$</p>	<p>$2x_r, 2y_r$</p> <p>$x_r - x_s, y_r - y_s$;</p> <p>$x_r + x_s, y_r + y_s$</p>

Abbiamo fatto uso per questo di metodi standard già ampiamente descritti, e sui quali non ci dilungheremo oltre [6]. Le coordinate frazionali degli atomi pesanti che sono risultate da questa analisi sono mostrate nella Tabella I. Nella Tabella II sono riportati schematicamente per entrambe le proiezioni da noi eseguite pesi e posizioni dei massimi Patterson corrispondenti alle coordinate della Tabella I, da confrontare con i pesi e le posizioni dedotti dalle mappe Patterson.



I cristalli di questo secondo composto sono di colore giallastro e di forma allungata, quasi aciculare.

Anche per questo composto sono stati eseguiti spettri di cristallo singolo lungo due differenti direzioni razionali.

Le costanti della cella elementare risultano:

$$\begin{aligned} a &= (7,47 \pm 0,03) \text{ \AA} & ; & \quad b = (9,86 \pm 0,04) \text{ \AA} ; \\ c &= (12,58 \pm 0,05) \text{ \AA} & ; & \quad \beta = 127^\circ 56' \pm 20'. \end{aligned}$$

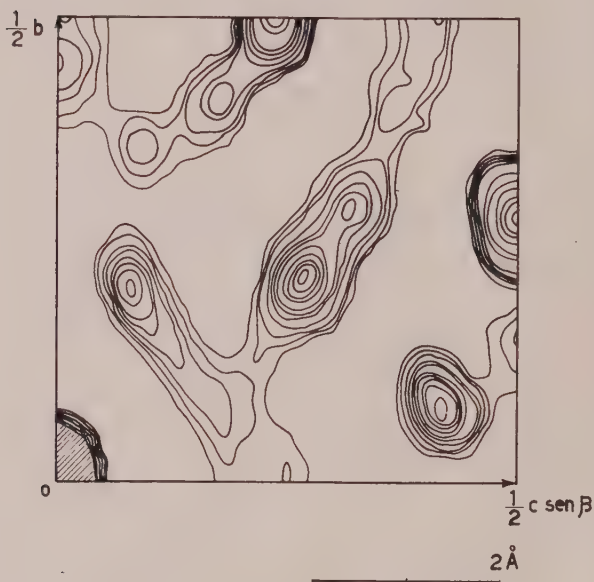


Fig. 3. - Proiezione Patterson *sharpened* sul piano (100) del composto $[\text{TiCl}_2(\text{C}_5\text{H}_5)]_2\text{O}$.

Dalla densità sperimentale ($1,75 \text{ g/cm}^3$) si deduce che nella cella elementare di volume $V \cong 731 \text{ \AA}^3$ sono contenute $N = 2$ molecole. Dalla estinzione sistematica dei riflessi $h0l$ con $l = 2n + 1$ e $0k0$ con $k = 2n + 1$ si deduce univocamente che il gruppo spaziale è $P 2_1/c$.

Le posizioni generali di tale gruppo sono 4 e la molecola deve quindi contenere un elemento di simmetria del gruppo.

L'unico elemento di simmetria del gruppo spaziale $P 2_1/c$ che non comporti traslazione, compatibile quindi con la natura non macromolecolare del composto, è un centro di simmetria. La molecola $[\text{TiCl}_2(\text{C}_5\text{H}_5)]_2\text{O}$ deve essere quindi centrosimmetrica, e il centro deve coincidere necessariamente con l'atomo di ossigeno. L'atomo di ossigeno forma quindi, in questo composto, contrariamente al solido, legami collineari. Questa inusuale circo-

stanza osservata finora in pochissimi composti [7] ci aveva indotto a pubblicare sull'argomento una preliminare lettera all'editore [3], in cui veniva fornita una giustificazione qualitativa del fenomeno.

Anche per questo composto, l'esame delle proiezioni Patterson lungo a e lungo b (figg. 3, 4) consente una assegnazione inequivoca delle coordinate degli atomi pesanti. Tali coordinate sono riportate nella Tabella III. Nella Tabella IV sono riportati pesi e posizioni dei massimi deducibili da tali coordinate, da confrontare con pesi e posizioni sperimentalmente osservati.

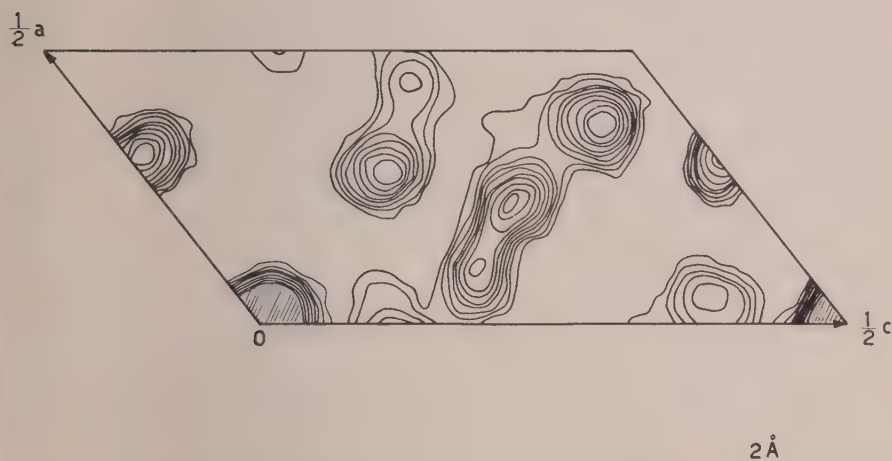


Fig. 4. - Proiezione Patterson *sharpened* sul piano (010) del composto $[\text{TiCl}_2(\text{C}_5\text{H}_5)]_2\text{O}$.

TABELLA III.

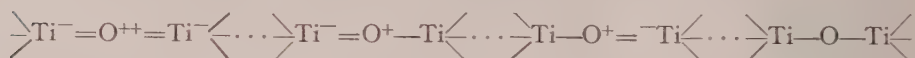
	x	y	z
Ti	0,454	0,132	0,393
Cl ^I	0,767	0,132	0,403
Cl ^{II}	0,178	0,047	0,187

In una Nota successiva, ci riserviamo di riferire sul raffinamento in corso nel nostro Laboratorio attraverso sintesi Fourier della densità elettronica delle due strutture di cui abbiamo intrapreso lo studio.

È possibile già a questo stadio di risoluzione indicare alcune notevoli caratteristiche strutturali dei due composti studiati.

In entrambi i composti la distanza Ti—Cl assume lo stesso valore ($d = 2,25 \text{ \AA}$), da confrontare con la somma corretta per la differenza di elettronegatività dei raggi covalenti riportati da Pauling [8], che è di $2,27 \text{ \AA}$. Viceversa nel composto II, la distanza dell'atomo di titanio dal centro di simmetria, e quindi dall'ossigeno, è uguale a $\sim 1,8 \text{ \AA}$, valore notevolmente inferiore a quello teoricamente attendibile per un legame semplice ($1,96 \text{ \AA}$).

Ciò sarebbe in accordo con la presenza, a stabilizzare la collinearità dei legami dell'ossigeno, di strutture di risonanza del tipo:



A questo stadio di definizione delle coordinate degli atomi pesanti, gli angoli Cl—Ti—Cl sono in entrambi i composti assai prossimi, entro $\pm 3^\circ$, a 104° . La coordinazione attorno agli atomi di titanio è da ritenersi pertanto approssimativamente tetraedrica.

TABELLA IV.

Simbolo del gruppo piano	Coordinate dei punti equivalenti	Gruppo Patterson	Peso	Coordinate frazionali dei massimi Patterson
0 1 0 $C_2^I - p2$	e) x, y ; \bar{x}, \bar{y}	$C_2^I - p2$	Z_r^2 $2Z_rZ_s$	$2x_r, 2y_r$ $x_r - x_s, y_r - y_s$; $x_r + x_s, y_r + y_s$
1 0 0 II) $C_{2v}^{II} - p2gg$	c) y, z ; $\frac{1}{2} - y, \frac{1}{2} + z$; $\bar{y}, \bar{z}, \frac{1}{2} + y, \frac{1}{2} - z$	$C_{2v}^I - p2mm$	$2Z_r^2$ Z_r^2 $2Z_rZ_s$	$2x_r + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} : \frac{1}{2}, 2y_r + \frac{1}{2}$ $2x_r, 2y_r$ $x_r - x_s, y_r - y_s$; $x_r - x_s + \frac{1}{2}, y_r + y_s + \frac{1}{2}$; $y_r + x_s, y_r + y_s$; $x_r - x_s + \frac{1}{2}, y_r - y_s + \frac{1}{2}$

Ciò è confermato da una valutazione dei due angoli O—Ti—Cl presenti nel composto (II) che assumono il valore di $104^\circ \pm 2^\circ$.

Con le coordinate degli atomi pesanti trovate è stato possibile fin dall'inizio dare segni alla maggioranza dei riflessi e le proiezioni Fourier preliminari indicano già in modo chiaro che, in entrambi i composti, il piano dell'anello ciclopentadenilico è perpendicolare alla congiungente titanio-centro dell'anello, mentre il piano dell'anello è presso a poco parallelo alle congiungenti cloro-cloro.

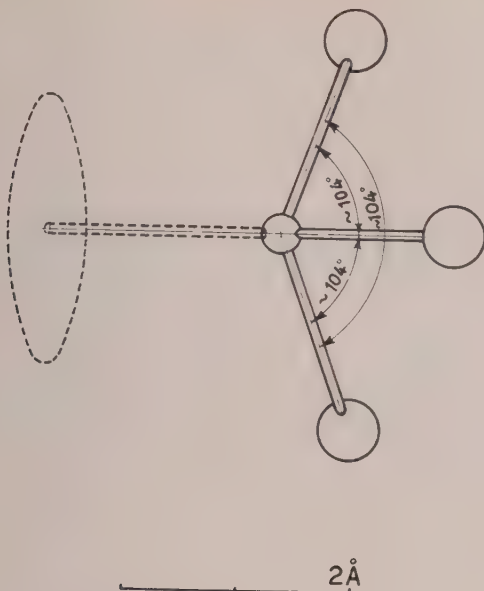


Fig. 5. — Modello stereochimico approssimato della molecola del composto $\text{TiCl}_3(\text{C}_5\text{H}_5)$. L'ellisse tratteggiata rappresenta la probabile disposizione dell'anello ciclopentadienilico.

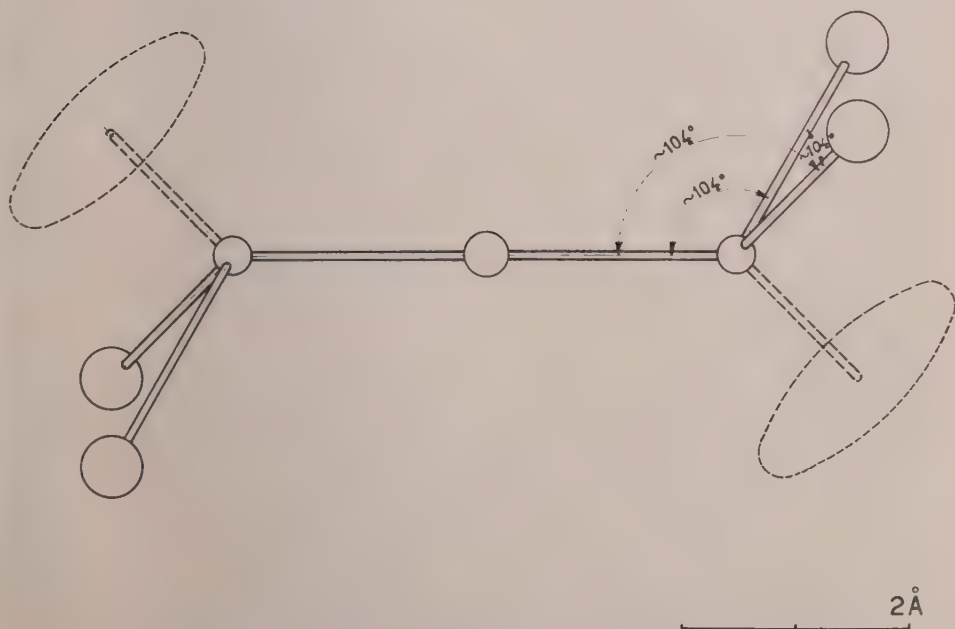


Fig. 6. — Modello stereochimico approssimato della molecola del composto $[\text{TiCl}_2(\text{C}_5\text{H}_5)]_2\text{O}$.

Rimandiamo tuttavia più dettagliate considerazioni su questo ed altri argomenti ad un prossimo lavoro, in cui riferiremo sul raffinamento in corso della struttura.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] P. CORRADINI, G. ALLEGRA, « Journal of the Am. Chem. Soc. », *81*, 2271 (1959).
- [2] L. PORRI, P. CORRADINI, D. MORERO, G. ALLEGRA, « La Chimica e l'Industria », *42*, 487 (1960).
- [3] P. CORRADINI, G. ALLEGRA, « Journal of the Am. Chem. Soc. », *81*, 5510 (1959).
- [4] R. D. GORSICH, « Journal of the Am. Chem. Soc. », *80*, 4744 (1958).
- [5] C. L. SLOAN, W. A. BARBER, « Journal of the Am. Chem. Soc. », *81*, 1364 (1959).
- [6] P. CORRADINI, G. ALLEGRA, « Rend. Acc. Naz. Lincei », *26*, 511 (1959).
- [7] A. McL. MATHIESON, D. P. MELLER, N. C. STEPHENSON, « Acta Cryst. », *5*, 185 (1952).
- [8] L. PAULING, *La Natura del Legame Chimico*.

Chimica. — *Osservazioni preliminari di un particolare effetto delle radiazioni nucleari sui processi elettrodici*^(*). Nota di LORIS BUSULINI, presentata^(**) dal Corrisp. G. SEMERANO.

È noto come le radiazioni ionizzanti, interagendo con la materia, provocano effetti chimici e fisici la cui natura ed entità dipendono in misura precipua dal tipo e dall'energia della radiazione incidente e dal sistema sottoposto ad irradiazione. Allo scopo di approfondire ulteriormente gli studi relativi agli effetti chimici prodotti dalle radiazioni, si è ideata una nuova metodologia atta a permettere il dosaggio dei prodotti di radiolisi, mediante tecniche elettrochimiche di sensibilità e riproducibilità particolari. Alternativamente, si dovrebbero poter ottenere, mediante l'uso di sorgenti di radiazioni, utili informazioni sul meccanismo di numerosi processi elettrodici. Questa Nota preliminare riferisce sui primi risultati ottenuti nel quadro di un più vasto programma di ricerca volto a studiare gli effetti chimici prodotti da radiazioni di diversa natura ed energia su sistemi organici ed inorganici e in ambiente acquoso e no.

Le prime misure effettuate sono state condotte in ambiente acquoso e facendo uso di una sorgente di radiazioni alfa costituita da Polonio-210; dato che in questo caso il percorso delle radiazioni alfa è di 35 micron, si è pensato di rendere radioattivo lo stesso elettrodo di lavoro. In tale maniera, poiché le radiazioni alfa possiedono un elevato grado di ionizzazione specifica, la zona immediatamente circostante l'elettrodo presenta una certa concentrazione di specie molecolari labili a diverso grado di eccitazione. Se quindi l'attività dell'elettrodo è sufficientemente elevata, il meccanismo di alcune particolari reazioni elettrochimiche, che avvengono all'elettrodo stesso, può subire una modificazione più o meno profonda a seconda del sistema allo studio.

Allo scopo di rendere evidente tale fenomeno, si è presa in esame una soluzione acquosa di un sale ferrico, il cui processo di riduzione elettrodica è stato seguito mediante polarografia oscillografica.

Le esperienze sono state condotte con coppie di microelettrodi aventi area uguale e uno dei quali veniva reso radioattivo per deposizione elettrochimica di Polonio. Ovviamente, il Polonio, proveniendo da una soluzione diluitissima, non era presente sull'area elettrodica in quantità tale da alterarne la natura superficiale, come si è potuto constatare al microscopio e concludere in base a considerazioni di carattere elettrochimico. Si è ricorso all'uso di elettrodi di platino vibranti e stazionari e di mercurio del tipo « a goccia pendente ».

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Fisica e la Scuola di Fisica Nucleare Applicata del C.N.E.N. dell'Università di Padova.

(**) Nella seduta del 14 gennaio 1961.

È noto che, in opportune condizioni, la riduzione elettrochimica di un sale ferrico a metallo decorre attraverso la formazione intermedia di ferro bivalente: ad esempio, in polarografia classica e ricorrendo all'uso di soluzioni tampone aventi un opportuno valore di pH, il processo può essere evidenziato dalla presenza di due gradini corrispondenti ai due stati di riduzione.

Nel corso delle esperienze da noi condotte con le singole coppie di elettrodi, si è potuto sempre notare all'elettrodo radioattivo un vistoso aumento di corrente in corrispondenza dei potenziali ai quali avvengono i singoli stadi di riduzione. D'altra parte, è stata anche registrata la presenza di fenomeni di invecchiamento superficiale il cui effetto era quello di fare sparire o di ridurre il fenomeno, di modo che, dopo un certo tempo, l'elettrodo, pur rimanendo radioattivo, si comportava in maniera praticamente identica all'altro. Tali fenomeni di « invecchiamento » potevano essere permanenti o temporanei e la loro entità dipendeva dalla natura dell'elettrodo e dalle condizioni operative dello stesso.

Il fatto che con un elettrodo radioattivo si può constatare un aumento di corrente, può essere tentativamente interpretato nel seguente modo: le radiazioni alfa, anche in ambiente disareato, sono in grado di provocare reazioni di ossidazione attribuite alla formazione di H_2O_2 , e radicali $OH\cdot$, HO_2 ecc.

D'altra parte, è noto anche che in presenza di H_2O_2 la reazione di riduzione elettrochimica di un sale ferrico avviene attraverso un meccanismo di carattere cinetico (attribuito alla riossidazione, ad opera dell'acqua ossigenata, del ferro bivalente prodotto) e che si traduce in un notevole aumento di corrente.

Pertanto, in questo stadio preliminare dei nostri studi, sembrerebbe lecito, in via del tutto ipotetica, mettere in relazione i fenomeni da noi constatati con l'effetto ossidante delle radiazioni alfa e con l'effetto dell'acqua ossigenata sul meccanismo di riduzione di un sale ferrico. Ovviamente, una comprensione più approfondita delle esperienze finora condotte sarà possibile soltanto in seguito ad indagini più accurate ed attraverso lo studio sistematico di numerosi sistemi, cosa che ci si propone di fare in un prossimo futuro.

Ringrazio vivamente la prof.ssa Elena Fornasari che ha collaborato nell'esecuzione delle misure descritte in questa Nota preliminare.

Chimica organica. — *Degradazioni ossidative delle catene alifatiche di sistemi ciclici*^(*). Nota di TIBERIO BRUZZESE, GIUSEPPE CASNATI, FRANCO PIOZZI e PAOLA VITA-FINZI, presentata^(**) dal Socio A. QUILICO.

La determinazione della costituzione dei sistemi alifatici che si innestano o collegano strutture insature aromatiche od alicicliche, è di importanza del tutto particolare nello studio dei prodotti naturali.

Il problema viene di solito affrontato, demolendo, con agenti più o meno drastici, quantitativi spesso rilevanti della sostanza in studio, isolando poi con le tecniche classiche i prodotti della degradazione, e da questi risalendo alle catene alifatiche originali, sempre che sia noto l'andamento demolitivo delle strutture stesse nelle condizioni in cui si viene ad operare.

Recentemente P. Karrer e coll. [1 a] si sono posti il problema su basi più rigorose limitatamente al caso di catene alifatiche laterali; tali Autori ricorrono ad ossidazioni cromatiche del composto, ed all'esame dei prodotti acidi volatili ottenuti, con le tecniche della cromatografia su carta.

Problemi analoghi, limitatamente al caso di acidi grassi ramificati, sono stati affrontati da J. Cason e altri [1 b] e da K. E. Murray [1 c] che ricorrono rispettivamente ad ossidazioni cromatiche in acido acetico ed ad ossidazioni permanganiche in acetone ed esaminano i prodotti di degradazione con la cromatografia in fase gassosa.

Avendo dovuto affrontare ricerche di questo tipo su prodotti naturali [2], si è avuto modo di studiare sistematicamente il problema nel suo insieme, spinti a questo anche dalla possibilità di sfruttare i metodi di analisi estremamente sensibili della cromatografia in fase gassosa e dalla convinzione che tale tecnica è destinata a dare impulso ed un indirizzo nuovo all'indagine strutturale.

Presupposto necessario per potere esattamente dedurre, dai vari prodotti di degradazione, la struttura originale alifatica è la conoscenza rigorosa dell'andamento demolitivo di tali catene agli agenti di degradazione usati.

Infatti un sistema del tipo $C_n H_{2n+2}$ (C), in cui (C) appartiene ad un ciclo, o per ossidazione diretta su qualunque atomo della catena oppure per degradazione del ciclo origina un acido grasso che a sua volta può subire ulteriori degradazioni. Pertanto si è resa necessaria un'indagine preliminare per esaminare anzitutto in modo rigoroso la degradazione degli acidi alifatici che possono prendere origine nel corso della demolizione ossidativa; in base ai risultati raggiunti si è cominciato ad affrontare in qualche caso la risoluzione e di strutture alifatico-aromatiche e di prodotti naturali con catene alchiliche od alcheniliche.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale del Politecnico di Milano.

(**) Nella seduta del 14 gennaio 1961.

In un primo tempo si è presa in esame la degradazione degli acidi grassi per potere interpretare la demolizione di strutture più complesse.

Ci si è limitati a studiare il caso di acidi della serie normale $\text{CH}_3-(\text{CH}_2)_n-\text{COOH}$ ed iso $(\text{CH}_3)_2-\text{CH}-(\text{CH}_2)_n-\text{COOH}$ fino a 7 atomi di carbonio, anche perché tali tipi di catene sono i più frequentemente presenti nei prodotti naturali.

Nelle demolizioni si sono impiegati HNO_3 conc., e KMnO_4 in ambiente acquoso alcalino ed in ambiente acetico. La scelta di questi ossidanti risponde ad un duplice scopo: disporre di un mezzo di degradazione abbastanza energico tale da aggredire anche sistemi aromatici notevolmente stabili sui quali si vengono ad innestare le catene alifatiche, ed usare inoltre ossidanti abbastanza blandi e selettivi tali da rispettare il più possibile la struttura dei sistemi alifatici che si desiderano identificare; evidentemente la degradazione più blanda può essere utilizzata solo nel caso che il sistema ciclico che porta le catene alchiliche possa essere facilmente aggredibile.

L'impiego dell'acido nitrico conc. e del permanganato acetico risponde alla necessità di operare in sistemi in cui i composti organici si dissolvono facilmente; pertanto l'uso del permanganato in ambiente acquoso alcalino è applicabile soprattutto ai composti acidi.

TABELLA I.

Ossidazione permanganica in ambiente acquoso.

Acido di partenza	Composizione percentuale del volatile						
	Ac. C ₇	Ac. C ₆	Ac. C ₅	Ac. C ₄	Ac. C ₃	Ac. C ₂	Vari
n. butirrico . .	—	—	—	95	1,5	3	—
n. valerianico .	—	—	91	1,5	5,5	2	—
n. capronico .	—	93	(tracce)	3,5	1,5	1,5	—
n. enantico . .	94	(tracce)	1,5	1,5	1,5	0,5	—
i. butirrico . .	—	—	—	98,5	—	1,5	—
i. valerianico .	—	—	97	—	—	3	—
i. capronico . .	—	67,5	1	3	—	1,5	27 (*)
i. enantico . .	87	53	1,5	1	—	2,5	3 (**)

(*) Lattone dell'ac. γ -ossi- γ -metil-valerianico.

(**) Non identificato.

Nelle esperienze da noi condotte, i prodotti volatili ottenuti nel corso delle ossidazioni sono stati esaminati direttamente con la cromatografia

in fase vapore, operando con apparecchio Fractovap mod. B su colonne di celite con riempimento di sebacato di isoottile (25 %) ed acido sebacico (3,75 %) a 140°-160°.

L'ossidazione permanganica in ambiente acquoso alcalico degli acidi grassi della serie iso e normale è condotta ad un pH fra 8-9 e ad una temperatura di 70°-80° circa.

Si è evitato di avere un eccesso di KMnO_4 limitandone la quantità a 2,2 moli/mole di acido.

I risultati ottenuti per quanto riguarda la frazione acida volatile proveniente dalla degradazione degli acidi della serie normale ed iso sono riportati in Tabella I.

Le velocità di ossidazione aumentano notevolmente con la lunghezza della catena alifatica per gli acidi sia della serie normale sia della serie iso [3].

Le titolazioni delle frazioni acide volatili provenienti dalle ossidazioni rivelano, per gli acidi della serie normale, un numero di equivalenti di poco inferiori a quelli sottoposti a degradazione; mentre per gli acidi della serie iso si hanno valori che indicano come solo la metà delle molecole vengano degradate ad acidi volatili, e le altre subiscano degradazioni a composti acidi non volatili.

TABELLA II.

Ossidazioni permanganiche in ambiente acquoso.

Serie normale		Serie iso	
Acido di partenza	$\frac{\text{m. eq. acidi volatili}}{\text{m. eq. acido di partenza}}$	Acido di partenza	$\frac{\text{m. eq. acidi volatili}}{\text{m. eq. acido di partenza}}$
n. butirrico . . .	0,83	i. butirrico . . .	0,50
n. valerianico . .	0,83	i. valerianico . .	0,50
n. capronico . . .	0,96	i. capronico . . .	0,45
n. enantico . . .	0,96	i. enantico . . .	0,55

Le degradazioni permanganiche in acetone [1 c] [4] sono condotte alla ebollizione con una quantità di KMnO_4 pari a 2,2 moli/mole di acido; consumato il KMnO_4 , si filtra l' MnO_2 , si aggiunge a freddo una soluzione acquosa alcalina diluita, si allontana completamente l'acetone sotto vuoto in evaporatore rotante e la soluzione residua, acidificata, è distillata con cura in corrente di vapore. Gli acidi volatili sono titolati e la soluzione riacidificata viene estratta con etere; l'estratto eterico, dopo accurata concentrazione, viene esaminato con la cromatografia in fase gassosa.

Con l'ossidazione nelle suddette condizioni degli acidi della serie normale ed iso si è provato che la degradazione in ambiente acetico porta quasi esclusivamente ad acidi volatili e che fra questi sono presenti tutti gli omologhi inferiori al prodotto ossidato.

La degradazione inoltre presenta un andamento che non varia con la lunghezza della catena, a differenza di quanto è stato notato per le ossidazioni permanganiche in ambiente acquoso alcalino e per le ossidazioni nitriche: il prodotto sottoposto ad ossidazione si ritrova nel volatile in percentuale di circa il 70 %, per tutti i termini esaminati, accanto alla serie di tutti gli omologhi inferiori.

Le ossidazioni nitriche sono condotte in HNO_3 conc. a ricadere, distillando poi il volatile in corrente di vapore, dopo aggiunta di acqua; neutralizzando il distillato ed evaporando fino a secchezza, si estraggono selettivamente con alcool assoluto i sali potassici degli acidi grassi eliminando i nitrati alcalini.

La soluzione alcalina evaporata, ripresa con acqua, desalificata su resine scambio-ioniche, è nuovamente distillata in corrente di vapore ed estratta infine con etere. L'estratto eterico concentrato viene esaminato con le consuete tecniche cromatografiche in fase vapore.

Dall'esame della frazione acida volatile si sono ottenuti i seguenti valori:

TABELLA III.

Ossidazioni nitriche di acidi grassi.

Serie normale		Serie iso	
Acido di partenza	% nel volatile dell'ac. di partenza	Acido di partenza	% nel volatile dell'ac. di partenza
n. butirrico . . .	95	i. butirrico . . .	92
n. valerianico . .	88	i. valerianico . .	92
n. capronico . . .	63	i. capronico . . .	37,5
n. enantico . . .	39,5	i. enantico . . .	1,5

Questi dati rappresentano un indice quantitativo abbastanza preciso della diversa ossidabilità di questi composti all'ac. nitrico conc. e sono una misura della loro degradazione crescente con l'aumento della lunghezza della catena.

Tali acidi per ossidazione nitrica si degradano anche profondamente a bicarbosilici e ad ossiacidi, come si è potuto rilevare per cromatografia di ripartizione su colonna di gelo di silice [2 b], mediante la quale dalle frazioni non volatili si sono isolati i seguenti prodotti:

TABELLA IV.

Ossidazione nitrica di acidi grassi normali.

Acido di partenza C_n	Acidi isolati					
	C_n	C_{n-1}	C_{n-2}	C_{n-3}	C_{n-4}	C_{n-5}
n. butirrico . . .	succinico	—	ossalico	—	—	—
n. valerianico . .	glutarico	succinico	—	ossalico	—	—
n. capronico . . .	—	glutarico	succinico	—	ossalico	—
n. enantico . . .	—	—	glutarico	succinico	—	ossalico

Sono state riscontrate sempre piccole percentuali di prodotti nitrati acidi non identificati.

TABELLA V.

Ossidazione nitrica di acidi grassi della serie iso.

Acidi di partenza	Acidi ottenuti
i. butirrico	α -ossi-iso-butirrico
i. valerianico	α -metil-succinico; α -ossi- α -metil-succinico; nitroacido (non identificato)
i. capronico	lattone ac. α -ossi- α -metil-glutarico; ac. succinico
i. enantico	lattone ac. α -ossi- α -metil-adipico; ac. glutarico; ac. succinico

Sulla base di questi primi parziali risultati si sono iniziate le degradazioni permanganiche e nitriche di alcuni sistemi alchil-aromatici e di sostanze di origine naturale. Le frazioni acide volatili sono state poi esaminate con le consuete tecniche della cromatografia in fase gassosa. Dai primi risultati ottenuti si è potuto mettere in evidenza come ad ogni catena laterale corrisponda una serie omologa di acidi grassi il cui capostipite definisce la catena alifatica laterale presente nella molecola in esame: tale serie può essere nettamente evidenziata costruendo un diagramma sulla base del numero degli atomi di carbonio e dei logaritmi dei tempi di ritenzione dei singoli acidi grassi. È così possibile rivelare distintamente la presenza in una stessa sostanza di più catene laterali, come a modo di esemplificazione viene qui riportato per il 2-*i*-amil-5-epitil-fenolo.

La generalità del metodo è stata confermata da una serie di degradazioni eseguite nelle diverse condizioni su prodotti analoghi, quali l'acido 2-ammino-3,5-diisoamil-benzoico, l'idroechinina, l'idroechinulina e relativa base indolica [2 *b*], l'isoamilbenzene e l'eptil-idrochinone-dimetil-etere.

È in corso lo studio e l'ampliamento dei risultati ottenuti per gli acidi grassi sia della serie normale che iso, come pure per i sistemi alchil-aromatici e per altri prodotti naturali.

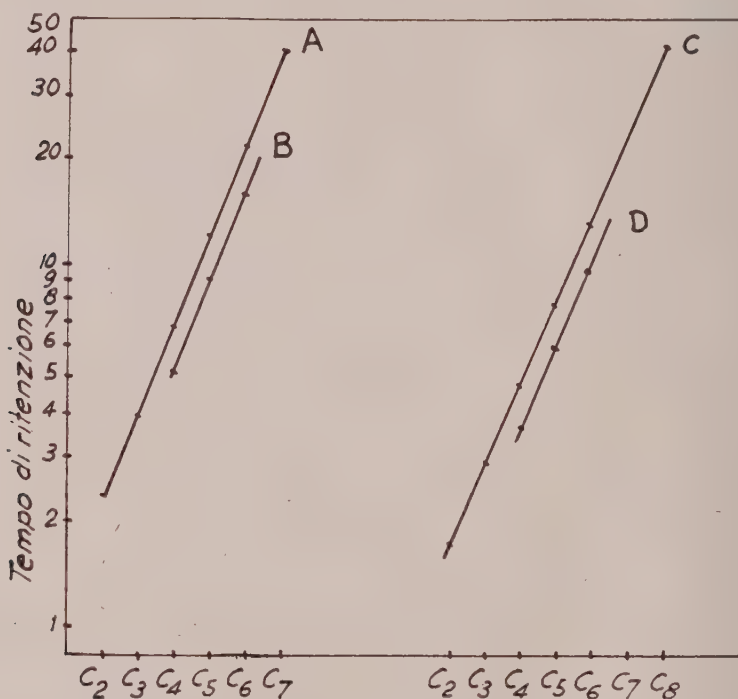


Fig. 1. - Tempi di ritenzione di serie omologhe di acidi grassi da ossidazione dei 2-*i*-amil-5-eptil-fenolo.

Ossidazione nitrica: (A) ac. serie normale; (B) ac. serie iso.

Ossidazione permanganica in acetone: (C) ac. serie normale; (D) ac. serie iso.

In seguito si riferirà più dettagliatamente anche sulle tecniche sperimentali seguite.

Ringraziamo il prof. A. Quilico per l'interesse con cui ha seguito il presente lavoro.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] *a*) C. F. GABERS, H. SCHMID e P. KARRER, « *Helv. Chim. Acta* », 37, 1336 (1954); H. BICHEL, H. SCHMID e P. KARRER, « *Helv. Chim. Acta* », 38, 664 (1955); *b*) J. CASON, J. SEARING FESSENDEN e C. L. AGRE, « *Tetrahedron* », 7, 289 (1959); *c*) K. E. MURRAY, « *Australian J. Chem.* », 12, 657 (1959).

- [2] a) C. CARDANI, G. CASNATI, F. PIOZZI e A. QUILICO, «Tetrahedron Letters», 16, 1 (1959);
b) F. PIOZZI, G. CASNATI, A. QUILICO e C. CARDANI, «Gazz. Chim. It.», 90, 452 (1960); c) G. CASNATI, F. PIOZZI, A. QUILICO e C. CARDANI, «Gazz. Chim. It.», 90, 476 (1960).
- [3] E. W. SMITH, «Proceed. Leeds Philos. Literary Soc.», 1, 195 (1927).
- [4] L'acetone veniva preparato per prolungata ebollizione con KMnO_4 , fintanto che il consumo di ossidante diveniva praticamente trascurabile. Prove in bianco di controllo sono state condotte in parallelo ad ogni degradazione per accertare l'eventuale formazione di prodotti acidi.

Geologia. — *Le sillon des Flyschs du Crétacé supérieur en Méditerranée occidentale.* Nota di MICHEL DURAND DELGA, presentata (*) dal Socio G. B. DAL PIAZ.

Nous avons établi, dans une Note précédente (1960), que, du Tithonique jusqu'à l'Aptien, des formations argilo-gréseuses à faciès flysch s'étaient accumulées dans un long sillon géosynclinal est-ouest, repéré de Tanger à Taormina, sur l'emplacement de l'actuelle Méditerranée. En même temps, plus au nord, dans le sillon subbétique d'Espagne, et plus au sud, dans le sillon tellien d'Afrique du Nord, se déposaient d'épaisses marnes à Ammonites et Aptychus. Entre ces deux sillons vaseux et le sillon à Flysch médian s'interposaient des domaines géanticlinaux, à série sédimentaire réduite et incomplète: ainsi, au sud, sur les « amygdales kabyles » de L. Glangeaud (1932), partie du « bourrelet liminaire africain » de P. Fallot (1932).

A l'Aptien-Albien, une certaine uniformisation se produit entre les trois sillons définis ci-dessus, du fait de l'arrivée, dans les sillons vaseux, d'argiles et de sables provenant soit de la Meseta ibérique (sillon subbétique), soit du socle saharien (sillon tellien). De ce fait l'Albo-Aptien subbétique et tellien est généralement plus argileux (ou « schisteux ») que ne l'était le Néocomien-Barrémien ou que ne le sera le Crétacé supérieur. Quant à la sédimentation du sillon médian, elle a consisté, à l'Albo-Aptien, en une épaisse accumulation d'un Flysch typique à minces alternances schisto-quartzitiques, admettant parfois de grosses lentilles de quartzites gris massifs: ce Flysch, daté par des Orbitolines (souvent dans des microconglomérats) et par de rarissimes Ammonites, est partout en situation allochtone, comme L. Glangeaud l'a prouvé depuis longtemps dans l'Algérois (« nappe du Flysch albo-aptien »). Divers auteurs, postérieurement, ont précisé ou étendu à d'autres points de l'Algérie littorale la notion définie par L. Glangeaud.

Au Maroc, la prolongation de ce Flysch était à rechercher dans la « zone marno-schisteuse » rifaine (Fallot, 1937 et 1952): il y a été en fait retrouvé récemment (Durand Delga et Mattauer, 1959) sous des faciès en tout point identiques à ceux du Flysch albo-aptien « kabyle » (nappe du Jebel Tisighen).

Ces niveaux restent par contre inconnus dans le sud-ouest de l'Andalousie et encore mal précisés dans le nord-est de la Sicile.

Au Maroc (Durand Delga et Mattauer, 1960), et, plus récemment, en Algérie (Caire, Castany, Glangeaud et Mattauer, 1959), les auteurs semblent s'être ralliés à l'idée, que je formulai en 1956, de l'origine « ultra » des nappes de charriage, dans la constitution desquelles entrent ces Flyschs albo-aptiens.

En outre, ces unités charriées comportent, dans le sud-ouest de l'Andalousie, dans le Rif, autour des Kabylies et en Sicile des formations du Cénomanién, du Turonien et du Sénonien, sous des faciès apparentés à des Flyschs,

(*) Nella seduta del 14 gennaio 1961.

quoique moins gréseux et plus calcaireux que ne le sont les Flyschs du Crétacé plus ancien. L'objet principal de cette note est de préciser leur répartition.

1. AU MAROC. — Le sillon prérfain, méridional, a vu le dépôt d'épaisses formations marneuses au Crétacé supérieur: le Cénomanien, par des Ammonites, et surtout le Sénonien, par des microfaunes, y sont depuis longtemps caractérisés. Les marnes sénoniennes de « l'unité de Tanger » (Durand Delga et Mattauer, 1959), riches en Huîtres, se seraient déposées sur une marge épicontinentale du sillon prérfain.

Plus au nord-est, dans la « zone marno-schisteuse », considérée jusqu'en 1958 comme à peu près autochtone, P. Fallot et L. Doncieux (1936) avaient cité des microfaunes sénoniennes en de nombreux points. M. Mattauer et moi (1959 et 1960) avons pu prouver que ce Crétacé supérieur entrait dans la composition d'unités ultra-rifaines, et principalement de la grande « nappe des Beni-Ider », dont le bassin sédimentaire devait se placer au niveau de l'actuel sillon méditerranéen (mer d'Alboran).

Ce complexe allochtone du Crétacé supérieur affleure bien aux abords de Tanger. Le Cénomanien (à *Rotalipora*, *Thalmaninella*, etc.) montre de minces alternances de lits calcaires, plus ou moins détritiques, et de marnes diversement colorées, avec de petits bancs de microconglomérats à galets calcaires (matériel arraché surtout au Jurassique) et des horizons à silexites blondes. Une barre de phtanites argileux et bitumeux, en petits lits blancs et noirs, épaisse au total d'une dizaine de mètres, a fourni une microfaune turonienne à *Globotruncana*. Le Sénonien ressemble beaucoup au Cénomanien mais je n'y ai pas observé de lits siliceux: les marnes schisteuses qui en forment l'essentiel sont riches en lits, épais de quelques dm, de grès calcaireux, de calcaires finement détritiques, de microconglomérats.

L'épaisseur de cet ensemble, intimement lié à l'Eocène, est difficile à évaluer: s'il est souvent laminé, il est ailleurs tectoniquement « engraisé ». L'on peut raisonnablement l'évaluer de 100 à 300 m.

Je rappellerai enfin que, dans la « Dorsale calcaire », qui borde au Nord-est la nappe des Beni-Ider, P. Fallot (1937) a repéré un Sénonien très différent, sous forme de minces marnes, transgressives sur le Jurassique ou sur le Néocomien.

2. EN ANDALOUSIE. — La nappe des Beni-Ider se poursuit dans le Campo de Gibraltar par la « nappe d'Algésiras » (Didon, 1960) dont un Flysch oligocène constitue l'essentiel. Sous ce Nummulitique (ou sur lui, dans des lames traînées à la base d'unités plus élevées), J. Didon a caractérisé le Cénomanien, avec ses alternances de lits calcaires et de marnes, blanches parfois, et le Sénonien, riche en lits de microbrèches calcaires et de grès finement détritiques à phénomènes de «slumping».

En outre, en semelle sous diverses unités (ultrabétiques elles aussi) l'on rencontre des lames d'un Sénonien différent, constitué de marnes grises à nombreux et minces lits de microbrèches calcaires, qui peut provenir du même grand bassin ultrabétique: ainsi au Puerto del Algarrobo, au Nord d'Alcala de los Gazules (Chauve et Didon, 1960).

Rappelons que le « Flysch sénonien » qu'A. Robaux a décrit beaucoup plus au nord-est, entre Ronda et Colmenar, comporte en réalité (Peyre, 1959) des niveaux d'âge très varié, généralement oligocènes, impliqués dans des nappes de glissement superposées: un authentique « Flysch sénonien » a toutefois été noté par Y. Peyre au sud-ouest d'Antequera, au-dessus des marnes roses du Pénibétique de la Sierra del Valle de Abdalagis.

3. EN ALGERIE. - Dans le sillon tellien (comme dans le sillon prérfain) la mer a déposé une série principalement marneuse du Cénomanién à la fin du Crétacé. Dans la « Chaîne calcaire », plus septentrionale, le Sénonien a été individualisé un peu partout sous forme de marnes grises qui, comme dans la Dorsale rifaine, reposent directement sur le Jurassique ou sur le Néocomien. Plus au nord, sur le massif ancien kabyle, Ficheur a signalé le Sénonien aux environs de Dellys, mais il fallut attendre les recherches d'A. Lambert, dans la même région (1948) et beaucoup plus à l'est, dans l'Edough (1946), pour mieux définir ce Sénonien dont le faciès détritique était alors souligné. Les découvertes plus récentes, montrant la généralité de ces Flyschs sénoniens sur les massifs anciens kabyles ou à leur voisinage, seront rapportées ci-après.

En réalité, entre l'Albo-Aptien schisto-gréseux kabyle et les Flyschs calcaireux sénoniens, s'intercalent des niveaux du Vraconien, du Cénomanién et du Turonien. Comme je l'ai indiqué pour les Flyschs éocènes des mêmes zones (Durand Delga, 1961) les microfaunes de ces formations étaient considérées généralement, à tort, comme remaniées dans l'Oligocène.

Le caractère allochtone de ces formations n'a pu être jusqu'ici établi que dans un petit nombre de cas, mais on peut raisonnablement l'étendre à tous les Flyschs littoraux, qui seraient d'origine ultra-kabyle (Durand Delga, 1956).

Le Vraconien-Cénomanién inférieur a pu être daté (Durand Delga et Lambert, 1955) par des *Neohibolites* et par des microfaunes à *Rotalipora appenninica*, *Ticinella roberti*, *Thalmaninella ticinensis* dans des horizons au faciès particulier, repéré tant en Grande qu'en Petite Kabylie: marnes grises avec lits de calcaire fin, conglomérats et phtanites, au sein du Flysch schisto-gréseux.

Le Cénomanién franc n'est encore caractérisé avec certitude qu'en un point, 7 km à l'ouest d'El Milia. Ses faciès rappellent beaucoup ceux du Cénomanién de la nappe rifaine des Beni-Ider: calcaires à lits de silixites claires, passant à microconglomérats à *Orbitolina* gr. *concava* et gr. *lenticularis* et nombreuses « *Lagena* » *sphaerica*. Une barre de phtanites, au voisinage, pourrait, comme dans le Rif, relever du Turonien.

Des faciès analogues ont, en d'autres secteurs de Petite Kabylie (Durand Delga, 1955), livré des *Globotruncana* du Cénomanién supérieur ou du Turonien: « écaille d'El Akbia » au sud du Moul-ed-Demamene, Flysch de la Mechtat Ras-ez-Zen, etc.

Les Flyschs sénoniens montrent une grande diversité. Elle doit tenir tant à la variabilité des faciès de bas en haut au sein de ce grand étage

qu'à des variations latérales dans le bassin marin ultra-kabyle. On peut distinguer trois grands types de faciès. Tout d'abord un *Flysch schisto-gréseux*, d'aspect « albo-aptien », dont la répartition a déjà été esquissée (Duplan, 1953; Durand Delga, 1955, p. 314). Un deuxième type de faciès est celui du *Flysch à microbrèches* gris, montrant l'alternance de marnés et de lits de microbrèches calcaires, parfois à Orbitoïdés. Cette formation, dont j'ai déjà traité (1955, p. 282 et 316), comporte des niveaux allant du Sénonien inférieur au Maestrichtien. Dans le nord du Constantinois, elle constituerait une lame de charriage entre le Crétacé marneux tellien et les grands massifs de grès numidiens (Durand Delga, 1956).

Le troisième faciès du Sénonien kabyle s'écarte quelque peu d'un véritable Flysch: il s'agit de *marnes et argiles schisteuses à nombreux lits* de grès calcaireux, de marno-calcaires détritiques, de microconglomérats, parfois de calcaires fins. Le propre de cette formation est son apparente richesse en blocs disjoints calcaro-gréseux; ils proviennent de la rupture en surface, dans les masses soumises à la solifluction, de bancs initialement continus, et de l'entraînement par les eaux des parties argilo-marneuses qui les environnaient. Ces caractères sont exactement ceux du Sénonien de la nappe rifaine des Beni-Ider. On les retrouve en beaucoup de secteurs du littoral algérien: nord de la Grande Kabylie (Muraour, 1956), ouest et sud de la Petite (Durand Delga, 1955), Kabylie de Collo et Edough (Hilly, 1957), etc.

4. EN SICILE. — Les nappes « sicilides » définies par L. Ogniben (1960) sont formées par la superposition d'unités de glissement empruntées à une série géosynclinale comportant des termes allant du Tithonique au Miocène inférieur. Ces nappes bordent au sud les Monts Péloritains.

Le Crétacé moyen et supérieur de ces unités n'a été encore mentionné qu'en quelques secteurs (Ogniben, 1960) par des niveaux à « Oligostégines » (= « Fissurines ») dont on connaît la répartition du Cénomanien au Maestrichtien, et à *Globotruncana*, inclus dans des argiles schisteuses (« A.S. superiori » de la nappe de Cesarò).

Des faits analogues ont été notés par A. Caire et M. Mattauer (1960) dans le nord-est de la Sicile et en Calabre, aux environs de Plati.

CONCLUSIONS. — Ainsi le sillon géosynclinal qui, du Tithonique à l'Aptien, a pu être défini tout au long de la Méditerranée occidentale, entre l'arc de Gibraltar et celui de Calabre, a continué d'exister pendant le reste des temps crétacés.

On en trouve le témoignage dans les nappes de glissement du sud-ouest de l'Andalousie, du Nord du Rif, des Kabylies et du nord-est de la Sicile. Toutes ces unités, plus ou moins bien définies suivant les régions, sont d'origine « ultra »: ultra-bétiques pour le Flysch gaditan, ultra-rifaines au Maroc, ultra-kabyles en Algérie, ultra-calabraises en Sicile. Elles traduisent l'extravasation, au Miocène, du grand sillon géosynclinal méditerranéen, principalement vers le sud.

A l'Aptien et à l'Albien, se sont accumulées d'épaisses formations à faciès schisto-gréseux. C'est le classique « Flysch albo-aptien » d'Algérie (Glangeaud, 1932), qui a pu être retrouvé dans le Rif.

A partir du Cénomanien et jusqu'à la fin du Sénonien, les formations du sillon méditerranéen sont beaucoup plus calcareuses. Elles montrent néanmoins, même dans leurs horizons calcaires, la rythmicité, le granoclasement, les figures sédimentaires (micro-stratification entrecroisée, « slumping », nodosités de base des bancs) typiques des vrais Flyschs. De plus les niveaux de grès, toujours plus ou moins calcareux, n'y sont pas exceptionnels. Les données actuelles sont insuffisantes pour donner une vue complète de ces formations.

Le faciès marno-calcaire, avec barre de phtanites, du Vraconien ou du Cénomanien inférieur kabyle n'a pu être retrouvé dans le Rif. Quant au Cénomanien et au Turonien qui, dans le nord marocain, sont bien caractérisés, le premier par ses horizons calcaires à lits siliceux clairs, le second par sa barre de phtanites, ils existent évidemment sous les mêmes faciès dans les Kabylies.

Le Sénonien des mêmes régions est riche en niveaux carbonatés. Le faciès de Flysch schisto-gréseux comme aussi celui de marnes et argiles schisteuses à bancs de quartzites, de grès ou de calcaires, pourraient correspondre à l'axe du sillon. Le « Flysch à microbrèches », plus calcareux, se serait déposé plus près d'une bordure du sillon « ultra »: on peut même penser, de sa bordure septentrionale. Ce Flysch à microbrèches est en effet presque toujours lié à la base de la « nappe numidienne » d'Algérie, dont l'origine serait à rechercher au bord septentrional des zones ultra-kabyles (comme M. Mattauer et moi l'avons proposé - 1959 - pour le « Numidien » du Rif).

L'histoire du sillon méditerranéen du Flysch ne s'arrête pas au Sénonien. J'ai exposé ailleurs (1961) comment, à l'Eocène puis à l'Oligocène, se perpétue cette zone paléogéographique capitale de la Méditerranée occidentale, longue de quelque 2500 km et pourtant jusqu'à présent ignorée.

BIBLIOGRAPHIE.

Seuls seront rappelés ici les travaux qui n'ont pas été cités dans ma précédente Note (« Rend. Acc. Lincei », séance du 10 décembre 1960).

- CAIRE A., CASTANY G., GLANGEAUD L. et MATTAUER M., « Bull. Soc. géol. France », 7^e s., t. 1, pp. 787-795 (1959 [1960]).
- CHAUVE P. et DIDON J., « C. R. Ac. Sc. Paris », t. 251, pp. 752-754 (1960).
- DUPLAN L., « C. R. Ac. Sc. Paris », t. 236, pp. 1371-1373 (1953).
- DURAND DELGA M., « Rend. Acc. Lincei », séance du 10 déc. 1960.
- DURAND DELGA M., « C. R. Ac. Sc. Paris », t. 252, pp. 296-298 (1961).
- FALLOT P. et DONCIEUX L., « Bol. Inst. geol. y min. España », t. LIV, pp. 1-198 (1936).
- LAMBERT A. et MARIE P., « C. R. somm. Soc. géol. France », pp. 124-126 (1948).
- MARIE P. et LAMBERT A., « C. R. Ac. Sc. Paris », t. 223, pp. 1161-1162 (1946).
- MURAOUR P., « Publ. Serv. Carte géol. Algérie », bull. n. 7 (1956).
- PEYRE Y., « C. R. Ac. Sc. Paris », t. 249, pp. 2085-2088 (1959).

Geologia. — *Su un deposito lacustre oligocenico nella Nurra di Alghero (Sardegna nord-occidentale)*. Nota di GIUSEPPE PECORINI, presentata (*) dal Corrisp. S. VARDABASSO.

Da parecchi anni mi sto occupando di problemi riguardanti la geologia della Nurra, questa interessante e complessa appendice della Sardegna nord-occidentale. Dei risultati d'una parte delle mie ricerche è già stato riferito anche in questa sede [1] [9] [10].

Per quanto concerne il Terziario antico, e precisamente l'intervallo di tempo tra la fine della sedimentazione marina cretacea (Senoniano) e l'inizio del vulcanismo oligo-miocenico, se si prescinde da una Nota del Franchi [4], non si ha fino ad oggi sul nostro settore alcuna notizia ⁽¹⁾.

Un Terziario più recente si estende soltanto lungo il margine orientale, dove il Miocene sedimentare della grande fossa tettonica sarda (Tavoliere Turritano) giace in discordanza sulle varie formazioni mesozoiche e sulle « trachiti antiche », queste ultime riferite di solito all'Oligocene ed in parte, recentemente, riportate al Miocene inferiore [6] [7].

Il fortunato ritrovamento di un giacimento lacustre fossilifero, dallo studio del quale risulta un'età oligocenica, mi permette di aggiungere una nuova pagina alla storia geologica della Nurra.

La posizione del giacimento, che mi accingo ad illustrare nei suoi particolari stratigrafici ed attraverso i primi dati paleontologici, è indicata nella allegata cartina strutturale con annesso profilo.

La cartina, in complesso, rappresenta un particolare dello stile tettonico regionale ad ampie pieghe fagliate, ormai accertato nella formazione mesozoica [8] [14] [15]. Nel caso specifico siamo, con ogni probabilità, in presenza di una minutissima fossa tettonica, che si è evoluta da una sinclinale colpita da faglie. Questo sprofondamento spiegherebbe da un lato la relativa potenza (come si vedrà appresso) del deposito oligocenico in argomento e dall'altro l'esistenza di marne gessifere del Trias in facies germanica (Keuper), con evidente giacitura diapirica, le quali finora non risultavano segnalate ⁽²⁾.

(*) Nella seduta del 14 gennaio 1961.

(1) Il Prever [4] ha determinato *Nummulites (Paronaea) Heeri* e *Nummulites (Paronaea) sub-Beaumonti*, in un campione di calcare raccolto dal Franchi nella Nurra centrale, presso Case Badde Agliastra. Il rinvenimento del Franchi appare assai problematico, poiché nella località indicata esistono soltanto calcari del Giurese, talora oolitici o pisolitici. Nessun geologo, in seguito, neppure l'OOSTERBAAN [8], che eseguì il rilevamento dettagliato della Nurra, ha confermato la notizia; io stesso, nonostante le indagini minuziose eseguite nella zona, non sono riuscito a trovare alcun calcare nummulitico. Pertanto è da ritenersi che l'Eocene, allo stato attuale delle ricerche, non esista nella Nurra.

(2) Le marne variegiate del Keuper affiorano lungo il tratto di costa fra la Torre del Lazzaretto e la spiaggia omonima, nonché, insieme con calcari dolomitici e dolomie cariate, lungo la scogliera ad est-nord-est di detta spiaggia. Qui, presso l'Hotel dei Pini, un pozzo scavato a mano, per ricerca di acqua, ha raggiunto i gessi a 4-5 m di profondità.

Si tratta qui di un caso di diapirismo presumibilmente paragonabile a quello nel Trias di altre località [15] della Nurra, che sono attualmente oggetto di studio da parte del prof. S. Vardabasso e dello scrivente, studio sul quale ci si ripromette di riferire in seguito ⁽³⁾.

Il deposito lacustre, oggetto della presente Nota, è ubicato entro la Rada di Porto Conte, in territorio di Alghero, presso il km 47 della Strada Statale n. 127 *bis*, all'innesto del tronco stradale per il Capo Caccia. Si tratta di un unico affioramento, visibile con buona evidenza soltanto su una superficie di poche decine di metri quadrati, essendo per il resto ricoperto da depositi quaternari e dal suolo agrario.

I calcari marnosi che lo costituiscono non hanno mai destato una attenzione particolare negli studiosi, che si sono occupati della geologia della Nurra: infatti sono stati generalmente considerati mesozoici, forse per loro apparente affinità litologica con analoghe rocce del Trias o del Cretaceo superiore. Anche dal punto di vista paleontologico questo singolare affioramento non è mai stato oggetto di alcuna citazione.

La serie, che ha una potenza approssimativa di almeno 30 m, come si è già accennato, è essenzialmente calcarea, con intercalazioni marnose, e pare poggi sul Cretaceo superiore organogeno, ad ippuriti e foraminiferi, tanto diffuso in questo settore. Gli strati si presentano dislocati, talora abbastanza fortemente, con pendenza verso est da media a verticale.

I fossili sono rappresentati da molluschi d'acqua dolce e piante, la maggior parte delle quali nuove per la Sardegna.

Fra i molluschi prevalgono i lamellibranchi, costituiti da forme di dimensioni minute, riferibili con ogni probabilità alla famiglia delle *Cyrenidae*: i termini calcarei della serie ne sono ricchissimi. Molto frequenti sono anche i *Planorbis*, con forme di piccola e media taglia. I generi *Limnaea*, *Helix* ed *Ancylus* hanno invece una frequenza minore.

La determinazione specifica di questi molluschi non è stata finora possibile, a causa del cattivo stato di conservazione. Si tratta per lo più di modelli interni compressi e deformati, oppure di conchiglie incomplete. Tuttavia, con le dovute riserve, si può ravvisare fra i *Planorbis* qualche forma assai prossima al *Planorbis declivis*, Al. Br., e rispettivamente fra i modelli interni di *Limnaea* alcuni tipi a forma rigonfia, di dimensioni relativamente notevoli, come si può riscontrare nel gruppo della *Limnaea pachygaster*, Thomae [12]. Questi due molluschi, notoriamente, sono assai diffusi nell'Oligocene europeo.

I resti di piante sono costituiti da impronte di foglie, rami e frutti di conifere e di angiosperme. Frequenti sono anche i resti di alghe, rappre-

(3) Una interpretazione in questo senso della tettonica regionale viene data dal professor Vardabasso, in un suo lavoro in corso di stampa [15], per il sondaggio di Cugiarèddu (eseguito per la ricerca di carbone paleozoico sotto la copertura mesozoica, nella Nurra settentrionale. Del resto, anche i gessi della Punta Ghisciera Mala, a nord della penisola di Capo Caccia, con la loro giacitura caotica, starebbero ad indicare un fenomeno di diapirismo.

sentati in particolare da girogoniti di *Characee*. Gli esemplari che ho rinvenuto appartengono ai seguenti generi e specie:

Glyptostrobus europaeus, Brong.,
Sequoia cfr. *sternbergi*, Heer,
Sequoia, sp.,
Sequoia langsdorfi, Heer,
Pinus sp.,
Cinnamomophyllum scheuchzeri (Heer), Frentz,
Cinnamomophyllum sp. (cfr. *Cinnamomum lanceolatum*, Heer),
Comptonia schranki, Heer,
Myrica, sp.,
Acer cfr. *trilobatum*, Al. Br.,
Alnus sp.

Le due specie di *Cinnamomophyllum* sono rappresentate da numerose foglie molto ben conservate, le quali, insieme con le foglie e i frutti di *Sequoia*, sono i resti vegetali più frequenti entro i calcari. Al genere *Pinus* appartengono diversi strobili e numerose foglie, riunite a due in ciascun fascetto, la cui determinazione è ancora in corso.

Alcuni degli esemplari di *Sequoia* finora raccolti presentano caratteristiche molto simili a quelle della *Sequoia tournali*, Sap. All'*Acer trilobatum*, Al. Br., ho comparato una foglia, non intera ma con le nervature ben delineate.

In complesso, questa flora è alquanto diversa da quelle riscontrate fino ad oggi nei depositi lacustri terziari della Sardegna, avendo in comune soltanto *Glyptostrobus europaeus* e *Pinus* [3].

Le specie ed i generi citati hanno una grande diffusione nel Terziario, massimamente nell'Oligocene e nel Miocene. In particolare, la *Sequoia tournali* e la *Comptonia schranki* sono citate come specie assai comuni nell'Oligocene. L'*Acer trilobatum* pare, inoltre, sia apparso nell'Aquitano; al riguardo si noti però che il riferimento a questa specie è piuttosto incerto, basandosi su un unico esemplare incompleto.

Per concludere, seppure ancora in via preliminare, i dati paleontologici accennano ad una età oligocenica sia per la fauna che per la flora.

La serie stratigrafica, quale risulta in massima parte dalla sezione lungo la trincea stradale, è la seguente, dall'alto in basso (ved. colonna nella tav. allegata):

- m 1 — calcare marnoso tenero, bianco-giallastro;
- m 0,50 — calcare siliceo, compatto, duro;
- m 6 — calcare biancastro, a *Planorbis*, *Sequoia*, *Cinnamomophyllum* e *Characee*, con qualche sottile intercalazione di marna argillosa grigia a piccoli *Planorbis*;
- m 0,10 — sottile intercalazione arenacea, con ciottolini di calcare cretaceo;

- m 2 - marna argillosa grigia, a piccoli *Planorbis*;
- m 8 - calcare biancastro, finemente stratificato, con sottili intercalazioni marnose a *Pinus*, *Sequoia*, *Glyptostrobus* ed *Acer*;
- m 1 - calcare tenero, arenaceo-marnoso, ad Ostracodi, *Helix* e *Planorbis*, con resti carboniosi o ferruginosi di legni e foglie;
- m 1,50 - calcare biancastro a *Planorbis*, *Limnaea*, *Ancylus*, *Pinus*, *Sequoia*, *Glyptostrobus*, *Cinnamomophyllum*, *Comptonia*, e *Myrica*;
- m 2 - calcare tenero, marnoso, biancastro, con sottili intercalazioni marnoso-argillose, a piccoli *Planorbis*, *Sequoia*, *Glyptostrobus*, *Pinus* ed *Alnus* (frutti);
- m 10 - calcare bianco-giallastro, qua e là siliceo.
- ?
- m. 4 - brecce a frammenti di calcare ippuritico, superiormente con qualche raro ciottolo di arenaria quarzoso-micacea ⁽⁴⁾ e di calcare marnoso grigio a *Lacazina elongata*, Mun. Ch.
- Cretaceo superiore: calcari compatti ad Ippuriti e foraminiferi, in parte milonitizzati.

Come è evidente anche dalla annessa colonna stratigrafica, non è stato possibile osservare la sovrapposizione diretta dei calcari lacustri sia sulle brecce che sui calcari cretacei. Tuttavia le brecce sono sicuramente anteriori alla sedimentazione lacustre e ne costituiscono la base, come è dimostrato dalle concrezioni calcaree che rivestono e cementano i singoli frammenti, le quali contengono talora tracce di piante palustri e impronte di *Planorbis*.

Queste brecce affiorano lungo la strada per il Capo Caccia, 70 m circa dopo il bivio ⁽⁵⁾, ed anche lungo tutto il margine settentrionale dell'affioramento terziario, dove sono state messe allo scoperto da lavori di scasso, mediante pesanti trattori, insieme con i calcari e le marne lacustri ⁽⁶⁾.

Alcune considerazioni sulla giacitura e sulla distribuzione delle brecce nella tozza penisola del Lazzaretto, compresa fra la Rada di Porto Conte e la Rada di Alghero, permettono di trarre interessanti deduzioni sulla origine del nostro deposito lacustre. Questi particolari materiali clastici hanno qui infatti una notevole diffusione; ne segnalo la presenza lungo la Strada

(4) È da escludere, data la scarsa affinità litologica e le probabili condizioni paleogeografiche del tempo, che questi ciottoli provengano dalla demolizione delle arenarie quarzoso-micacee del Trias inferiore (Buntsandstein) o del Giurese medio, le uniche esistenti nel settore di Porto Conte. L'arenaria dei ciottoli è probabilmente anch'essa di età cretacea, per quanto non si conoscano, nel Cretaceo attualmente affiorante nella Nurra, depositi psammitici di tal genere, o al più d'età immediatamente successiva (Paleogene?).

(5) Una breccia analoga, fortemente cementata, esisteva probabilmente anche poco lontano dalla Torre del Lazzaretto, 400 m circa a nord di Porto Agra: attualmente se ne ritrovano numerosi massi, aventi un diametro di 1 m e più, sparsi sui calcari del Giurese.

(6) Il settore rientra parzialmente nel Comprensorio di Maristella, che è oggetto di avanzata bonifica da parte dell'ETFAS (Ente di Trasformazione Fondiaria ed Agraria per la Sardegna).



Fig. 1. - Schizzo morfotettonico della depressione terziaria di Porto Conte (Alghero).

- 1) Serie dei terreni: qt, copertura quaternaria; ol, serie lacustre oligocenica; cr₂, Cretaceo superiore: calcari ippuritici inferiormente e marne superiormente; g₃—cr₁, Giurese superiore e Cretaceo inferiore: prev. calcari e dolomie; g₂, Giurese medio: calcari oolitici in prevalenza; t₃, Trias superiore (Keuper): marne variegate, gessi, calcari marnosi o dolomitici; t₂, Trias medio (Buntsandstein): arenarie rosse; br, breccie tettoniche, in parte rimaneggiate; f, faglie visibili o ipotetiche.
- 2) Colonna stratigrafica (Oligocene): 6, marne argillose; 5, calcare arenaceo-marnoso; 4, calcare siliceo; 3, calcare tenero; 2, breccia a frammenti di calcare ippuritico; 1, calcare ippuritico (Cretaceo superiore).

Statale, 250 m dopo il km 46 e 50 m circa dopo il bivio per il Capo Caccia, ed ancora nella piccola collina (q. 55) a sud-est della Cantoniera di Pera Ponte, in regione Lazzaretto e Serra de su Idda, costituiti in tutte queste località esclusivamente da frammenti di calcare del Cretaceo superiore. Altre brecce, di calcare giurese più o meno dolomitico, si ritrovano lungo la costa della Torre del Lazzaretto fino al Capo Galera.

Senza dubbio si tratta, in gran parte, di miloniti in stretta relazione con le dislocazioni tettoniche che hanno colpito il settore. Particolarmente le brecce ubicate in prossimità degli affioramenti triassici, in giacitura diapirica, hanno questo carattere.

I rapporti fra il sostrato cretaceo, visibilmente fratturato, e le brecce basali di Porto Conte inducono a ritenere che queste siano posteriori alla milonitizzazione e che addirittura si siano formate a spese delle miloniti stesse. Si dovrebbe così concludere che il bacino lacustre è successivo ad una notevole fase tettonica; d'altra parte, gli stessi calcari lacustri sono fortemente dislocati e talora fratturati, per cui si deve ammettere una seconda fase tettonica con le medesime direttrici di quella precedente. In tal modo si sarebbe creata la minutissima struttura di sprofondamento, cui si è accennato al principio di questa Nota ⁽⁷⁾.

Riguardo ai ben noti depositi lacustri terziari della Sardegna settentrionale, il giacimento di Porto Conte presenta notevoli differenze di giacitura, di composizione litologica e di caratteristiche paleontologiche.

I depositi lacustri dei bacini dell'Anglona (Castelsardo, Perfugas, Martis) e del Logudoro (Chilivani, Ploaghe, Rebeccu, Banari, Ghilarda, ecc.) giacciono sulle « trachiti antiche », in parte mioceniche [3] [6] [7] [11], mentre quello di Porto Conte, come si è visto, poggia su un sostrato mesozoico.

Litologicamente quei depositi hanno fruito, durante la loro sedimentazione, di un considerevole apporto vulcanico, essendo costituiti per lo più da tufi pomicei, da selci e raramente da calcari.

Dal punto di vista paleontologico, la fauna, alquanto scarsa, pur avendo qualche forma in comune ⁽⁸⁾, non è così varia come nel deposito di Porto Conte e soprattutto non contiene tanto 'abbondanti lamellibranchi ⁽⁹⁾. La flora, inoltre, non offre specie esclusive dell'Oligocene [3] [12] e non ha fra i suoi rappresentanti i generi *Sequoia*, *Cinnamomophyllum*, *Comptonia*, *Myrica*, *Acer* ed *Alnus*, come ho già accennato.

Si noti, inoltre che in seguito a recenti studi stratigrafici e per alcuni dei caratteri ora presi in considerazione, i depositi lacustri terziari della Sar-

(7) Una struttura pressoché simile si è riconosciuta recentemente anche per il bacino lacustre terziario di Oschiri-Berchidda [16].

(8) Il REDINI [12] segnala la presenza nel lacustre di Perfugas di gasteropodi d'acqua dolce assai prossimi al *Planorbis declivis*, Al. Br. e alla *Limnaea pachygaster*, Thomae; anche questo autore, purtroppo, non giunge a determinazioni precise a causa del cattivo stato di conservazione dei fossili.

(9) Per il lacustre di Martis, nell'Anglona, è citato, però, dal LAMARMORA [5] il gen. *Cyclas*, entro i calcari silicei.

degna settentrionale, ritenuti oligocenici fino a poco tempo fa, vengono attualmente riportati al Miocene inferiore [2] [3] [6] [7].

Per quanto riguarda la serie di Porto Conte, nonostante la relativa vicinanza della formazione eruttiva oligo-miocenica, presente con trachiti e tufi entro la Rada di Alghero e presso Fertilia, nonché con uno spessore di quasi 1000 m lungo la costa fra Alghero e Bosa, i suoi termini litologici non racchiudono tufi, ceneri, lapilli o frammenti di rocce di questo vulcanismo, così frequenti, invece, nel lacustre terziario del resto della Sardegna. Questo fatto, insieme con le intense dislocazioni tettoniche subite, può costituire ancora un indizio della sua età oligocenica, anteriore al vulcanismo delle « trachiti antiche ».

Per concludere, l'affioramento di Porto Conte, nella Nurra, può essere considerato con ogni probabilità l'unico giacimento fossilifero lacustre dell'Oligocene nella Sardegna settentrionale, almeno allo stato attuale delle ricerche.

NOTA BIBLIOGRAFICA.

- [1] COCCO G.-PECORINI G., *Osservazioni sulle bauxiti della Nurra (Sardegna)*. Memoria. « Atti Acc. Naz. dei Lincei », serie VIII, vol. V, sez. II, fasc. 7, Roma 1959.
- [2] COMASCHI CARIA I., *Prima segnalazione di Pinuxylon in Sardegna con cenni sulla questione dell'età dei tufi a piante nell'Isola*, « Res. Ass. Min. Sarda », LXII, 1, Iglesias 1958.
- [3] COMASCHI CARIA I., *Le piante fossili della Sardegna*. Memoria della « Riv. It. Pal. Strat. », Milano 1959. (Con ricca bibliografia).
- [4] FRANCHI S., *Appunti sulle ricognizioni geologiche eseguite nel nord della Sardegna nel maggio 1908*, « Boll. Com. Geol. », XLI, Roma 1910.
- [5] LAMARMORA A., *Voyage en Sardaigne*, III e IV par., Turin 1857.
- [6] MORETTI A., *Segnalazione di un giacimento di tufi miocenici nell'Anglona (Sardegna)*, « Boll. Soc. Geol. Ital. », LXI, 3, Roma 1943.
- [7] MORETTI A., *Risultati della campagna geologica compiuta in Sardegna nella primavera del 1950*, « Boll. Serv. Geol. It. », LXXII, 1, Roma 1951.
- [8] OOSTERBAAN A. M., *Etude géologique et paléontologique de la Nurra (Sardaigne)*, Utrecht 1936.
- [9] PECORINI G., *Le dune fossili della Nurra di Alghero (Sardegna)*. « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », serie III, vol. XVI, fasc. 6, Roma 1954.
- [10] PECORINI G., *La facies bauxitica nel Cretaceo della Nurra (Sardegna)*, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », serie VIII, vol. XX, fasc. 2, Roma 1956.
- [11] REDINI R., *Note di geologia sarda*. « Boll. Uff. Geol. It. », LXII, Roma 1937.
- [12] REDINI R., *Sul wolframio connesso a minerali manganesiferi e sull'età di talune formazioni terziarie della Sardegna settentrionale*, « Boll. Uff. Geol. It. », LXV, Roma 1940.
- [13] VARDABASSO S., *Carta geologica della Sardegna*, Scala 1:750.000. Ed. a cura della Soc. Elett. Sarda, Roma 1949.
- [14] VARDABASSO S., *Il Mesozoico epicontinentale della Sardegna*. « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », serie VII, vol. XXVII, fasc. 5, Roma 1960.
- [15] VARDABASSO S., *Diskordanzen und Dislokationen des epikontinentalen Mesozoikums in Sardinien*. Libro giubilare in onore del prof. Ernst Kraus. Berlin (Akademie Verlag) 1960.
- [16] VARDABASSO S.-ATZENI A., *Il bacino oligocenico di Oschiri-Berchidda*. Riassunto della comunicazione. Programma del Convegno sociale sul tema « Il Paleogene in Italia », Soc. Geol. It., Roma 1960.

Mineralogia. — *Hoeferite e Nasinite: due nuovi borati fra i prodotti di Larderello.* Parte I (*). Nota di CURZIO CIPRIANI e PIERO VANNUCCINI, presentata (**) dal Socio G. CAROBBI.

In un miscuglio salino costituente le incrostazioni di un tubo sonda di Larderello è stato trovato un borato (poi risultato un miscuglio di due sali diversamente idratati) con composizione $\text{Na}_2\text{O} : \text{B}_2\text{O}_3 : \text{H}_2\text{O} \sim 2 : 5 : 8$.

L'unico minerale che si avvicinerebbe a tale formula è l'ezcurrite ($2 \text{Na}_2\text{O} \cdot 5 \text{B}_2\text{O}_3 \cdot 7 \text{H}_2\text{O}$) rinvenuta alcuni anni or sono in Argentina [8]. Tuttavia questo composto presenta uno spettro di polveri che non si accorda con quello del miscuglio in esame.

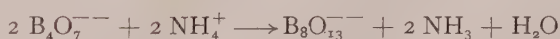
L'impossibilità di separazioni meccaniche per caratterizzare i borati presenti ci ha indotto a svolgere una serie di sintesi per studiare le composizioni chimiche e le proprietà fisiche dei prodotti ottenuti onde poterle confrontare con quelle dei prodotti naturali.

Anticipando le conclusioni, che saranno più ampiamente illustrate nella Nota successiva, si può affermare che queste sintesi hanno consentito la preparazione di due nuovi borati « A » e « B » le cui caratteristiche sono identiche a quelle mostrate dai prodotti naturali che pertanto devono essere considerati due nuove specie minerali per le quali si propongono i nomi di *hoeferite* e di *nasinite*.

Dal sistema $\text{Na}_2\text{O} - \text{B}_2\text{O}_3 - \text{H}_2\text{O}$ dello Sborgi [10] non risulta formarsi, fra 0° e 100° , alcun borato con rapporto $\text{Na}_2\text{O} : \text{B}_2\text{O}_3$ compreso fra $1 : 2$ e $1 : 5$, cioè fra il borace e la tincalconite da un lato e la sborgite dall'altro.

D'altra parte alcuni Autori hanno affermato l'esistenza e la possibilità di preparazione di borati con rapporti intermedi: il Bolley [2] parla di un ottoborato $\text{Na}_2\text{B}_8\text{O}_{13} \cdot 10 \text{H}_2\text{O}$ e lo Spiegel [11] ammette l'esistenza di un esaborato $\text{Na}_2\text{B}_6\text{O}_{10} \cdot x \text{H}_2\text{O}$.

Secondo Bolley, l'ottoborato si formerebbe per reazione fra borace e cloruro ammonico:



si tratterebbe cioè di una reazione di « condensazione » di due ioni tetraborici in un ottoborico con svolgimento di ammoniaca dal sale ammonico.

Si sono tentate due preparazioni, la prima con borace e cloruro ammonico in rapporto $1 : 1$ (come da reazione precedente) e la seconda con rapporti $3 : 2$ per l'eventuale formazione dell'esaborato annunciato dallo Spiegel

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia dell'Università di Firenze. Centro di studio per la Geochimica e la Mineralogia del C.N.R.

(**) Nella seduta del 14 gennaio 1961.

(la reazione potrebbe avere un andamento simile). Anche a freddo si svolge ammoniaca, tuttavia le soluzioni sono state concentrate fino a cessazione dello svolgimento di ammoniaca e si è lasciato raffreddare. In entrambi i casi si sono ottenute miscele di borace e sborgite, oltre a cloruro sodico. È interessante osservare che effettivamente le reazioni di «condensazione» avvengono, ma solo con formazione del pentaborato, la sborgite, cioè col seguente andamento:



Un'altra osservazione interessante è che il cloruro sodico si presenta in cristalli ottaedrici o cubo-ottaedrici: perciò, oltre al borace ed a numerosi altri composti già segnalati dalla letteratura, bisogna annoverare anche la sborgite fra i composti capaci di indurre la modificazione del costante abito cubico del cloruro sodico, come è stato confermato da prove eseguite in presenza di sola sborgite.

In occasione della sintesi della sborgite [3], si era proceduto ad una serie di cristallizzazioni a pressione ambiente da soluzioni con vari rapporti $\text{Na}_2\text{O} : \text{B}_2\text{O}_3$ ottenendo, per rapporti inferiori ad 1 : 2 solo sborgite in accordo col sistema dello Sborgi.

Constatata l'impossibilità di preparare a pressione atmosferica i borati riscontrati nel prodotto naturale, si è proceduto ad una serie di preparazioni a varie temperature con vari rapporti $\text{Na}_2\text{O} : \text{B}_2\text{O}_3$ in autoclave, cioè sotto pressione di vapor d'acqua: in una maniera simile l'Auger aveva ottenuto dei «pentaborati» [1].

SINTESI IN AUTOCLAVE.

Le sintesi dei borati sono state condotte in un'autoclave di acciaio inossidabile riscaldata elettricamente mediante un bagno d'olio fino ad una temperatura massima di circa 270°.

Le sintesi compiute (n. 42) sono state effettuate per i seguenti rapporti $\text{B}_2\text{O}_3/\text{Na}_2\text{O}$: 2, 2,5, 3, 3,5, 4, 4,5 e 5 alle temperature di 100°, 150°, 200° e 250°.

I prodotti di partenza sono stati borace, acido borico ed acqua mantenendo fisso il peso del borace (20 gr), variando la quantità di acido borico a seconda del rapporto considerato e la quantità dell'acqua in modo che questa, sommata a quella presente nei prodotti solidi, fosse costantemente in un rapporto 3/2 con la somma $\text{Na}_2\text{O} + \text{B}_2\text{O}_3$.

I prodotti sono stati tenuti in autoclave alle condizioni stabilite per 9 ore: i cristalli venivano lavati più volte con acqua fredda per sifonamento. Ad eccezione di tre preparazioni si è sempre ottenuto un corpo di fondo, costituito in prevalenza da un solo composto. Il riepilogo dei borati ottenuti in autoclave nelle varie condizioni è dato dalla tabella seguente.

R.M.Na ₂ O : B ₂ O ₃	1 : 2	1 : 2,5	1 : 3	1 : 3,5	1 : 4	1 : 4,5	1 : 5
Temp.							
100°	Ti	B+Bo	B	—	—	—	Sa
150°	Ti+C	B	B	B	B+A	Sb	Sa
200°	Ti+C	A+B	A	A	A	Sb+A	Sa
250°	Ti+A	A	A	A	A	Sb+A	Sa+Sb

Le varie fasi cristalline sono le seguenti: Ti = tincalconite ($\text{Na}_2\text{O} \cdot 2\text{B}_2\text{O}_3 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$), Bo = borace ($\text{Na}_2\text{O} \cdot 2\text{B}_2\text{O}_3 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$), Sa = sassolino (H_3BO_3), Sb = sborgite ($\text{Na}_2\text{O} \cdot 5\text{B}_2\text{O}_3 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$), C una fase dubitativamente riferita all'ezcurrite ($2\text{Na}_2\text{O} \cdot 5\text{B}_2\text{O}_3 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$) ed infine A e B due nuovi borati di composizione rispettivamente $2\text{Na}_2\text{O} \cdot 5\text{B}_2\text{O}_3 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ e $2\text{Na}_2\text{O} \cdot 5\text{B}_2\text{O}_3 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$.

Il prospetto sopra riportato consente alcune considerazioni.

Il borace è completamente sostituito dalla tincalconite, che del resto si forma, a pressione atmosferica, a 61°; borace si è ottenuto in una sola preparazione (1 : 2,5 ; 100°) mescolato al borato B, ma è probabile che si sia formato durante il lavaggio dei cristalli con acqua fredda. In due preparazioni (1 : 2 ; 150° e 200°) accanto a preponderanti quantità di tincalconite si è ottenuta una seconda fase a maggiore contenuto in boro: alcune determinazioni di indici di rifrazione e la presenza di debolissime righe nei diffattogrammi fanno sospettare che possa trattarsi dell'ezcurrite, tuttavia si riferisce questa possibilità molto dubitativamente.

Nel campo di composizione e temperatura studiato predomina la stabilità dei due borati A e B. Il campo di formazione del composto B è abbastanza limitato: a 100° per composizione 1 : 2,5 e 1 : 3, a 150° da 1 : 2 a 1 : 4, a 200° solo per 1 : 2,5; quello del borato A è molto più ampio: a 150° solo per un rapporto 1 : 4, ma a 200° il campo si estende da 1 : 2,5 fino a 1 : 4,5 ed a 250° da 1 : 2 a 1 : 4,5. L'impossibilità sperimentale di operare, con l'autoclave a disposizione, a oltre 250° non consente di osservare i limiti superiori di temperatura per la formazione del borato A. In due diverse condizioni di temperatura e composizione (a 200° per un rapporto 1 : 2,5 ed a 150° per un rapporto 1 : 4) si ha la coesistenza dei due borati, fatto questo di particolare importanza per l'interpretazione delle condizioni ambientali di formazione del prodotto naturale.

Il campo di formazione della sborgite è alquanto limitato. Per cristallizzazione a pressione ambiente, come dimostra il sistema dello Sborgi e come si è potuto controllare durante le prove di sintesi effettuate in occasione del rinvenimento in natura di questo borato, il campo dei rapporti nell'acqua madre è molto vasto: in particolare a 50° si ottennero cristalli di sborgite da rapporti 1 : 3,78 fino a 1 : 6,67. Nelle presenti prove si è ottenuta sborgite sola a 150° con un rapporto 1 : 4,5, insieme al borato A a 200° e 250° sempre con lo stesso rapporto, mentre col rapporto stechiometrico 1 : 5 solo a 250° insieme ad acido borico.

Acido borico, solo od insieme a sborgite, si ottiene ad ogni temperatura per un rapporto 1 : 5 ed è logico supporre che questo avvenga anche per rapporti a maggiore contenuto in boro, anche se non siano state eseguite cristallizzazioni con tali rapporti.

In tre preparazioni effettuate a 100° (rapporti 1 : 3,5; 1 : 4 e 1 : 4,5) non si è ottenuto corpo di fondo. In condizioni simili lo Sborgi ottenne sempre sborgite, nel caso presente la mancata formazione di cristalli deve essere imputata ad una quantità di acqua troppo elevata che ha mantenuto in soluzione il borato.

IL BORATO « A ».

Il borato A allo stato di notevole purezza è stato ottenuto nella VI preparazione (rapporto 1 : 3 e temperatura 250°), esso si trovava in equilibrio con un'acqua madre nella quale il rapporto $\text{Na}_2\text{O} : \text{B}_2\text{O}_3$ era 1 : 3,50. L'analisi chimica, condotta col metodo della doppia titolazione secondo Thomson [12], ha fornito i seguenti risultati:

	%	R.M.	
Na_2O	22,83	0,3683	2,00
B_2O_3	64,05	0,9197	5,00
H_2O	12,68	0,7041	3,82
	99,56		

Risulta in tal modo stabilita la composizione del borato A: $2 \text{Na}_2\text{O} \cdot 5 \text{B}_2\text{O}_3 \cdot 4 \text{H}_2\text{O}$.

Al microscopio il borato A si presenta sotto forma di cristallini minutissimi talvolta come lamelle a contorno esagonale dalle quali emerge poco inclinata la bisettrice acuta, talvolta come bacchette a contorno rettangolare con estinzione retta ed allungamento positivo e dalle quali emerge poco inclinata la bisettrice ottusa.

La determinazione dell'angolo degli assi ottici e della posizione dell'indicatrice è stata effettuata in luce bianca al tavolino universale, mentre gli indici di rifrazione sono stati determinati col normale metodo dell'immersione. I risultati sono i seguenti:

$$\begin{array}{ll}
 \alpha = 1,496 \pm 0,002 & \gamma = \beta \\
 \beta = 1,539 & \text{»} \quad \widehat{\alpha z} = 5,4^\circ \pm 0,6^\circ \\
 \gamma = 1,557 & \text{»} \\
 2 V_a = 62,7^\circ \pm 1,1^\circ & 2 V_{\text{calc.}} = 64,6^\circ
 \end{array}$$

Queste costanti ottiche sono state determinate considerando i cristalli monoclini sulla base delle principali lamine di sfaldatura riscontrate: quelle a sezione esagonale presupposte (001) e quelle a sezione rettangolare considerate (100). Su tali sezioni sono stati determinati i tre indici principali in quanto, a causa del piccolo angolo σ di estinzione, le lamine di sfaldatura potevano essere considerate, senza errore sensibile, come sezioni principali, com'è stato in seguito confermato dall'accordo fra il valore misurato e quello calcolato per l'angolo degli assi ottici.

Nella seguente tabella sono riportati i dati dello spettro di polveri ripreso al diffrattometro. I valori delle distanze reticolari, a causa delle condizioni di ripresa, sono da considerarsi molto precisi, mentre i valori delle intensità relative sono soltanto indicativi in quanto essi possono variare, anche sensibilmente, da ripresa a ripresa a causa del marcato fenomeno della orientazione preferita mostrato da entrambi i borati studiati, ma più vistosamente dal borato B.

Spettro di polveri del borato «A».

Diffattometro G.E. Radiazione Cu/Ni $\lambda = 1,5405$ Å.; vel. $0,2^\circ/\text{''}$; tarato con NaF;
intervallo $5-60^\circ$ 2θ .

d	i	d	i	d	i
10,32	100	3,158	3	2,323	3
7,84	4	3,142	3	2,303	3
5,56	2	3,049	45	2,265	2
5,40	2	2,995	6	2,248	3
5,17	55	2,966	10	2,186	4
5,03	19	2,853	21	2,128	4
4,88	13	2,829	5	2,106	4
4,82	14	2,818	6	2,067	6
4,59	4	2,790	6	2,042	3
4,44	2	2,757	2	2,003	5
4,29	2	2,710	5	1,985	6
4,25	3	2,706	6	1,965	3
4,21	4	2,696	6	1,929	7
4,07	3	2,680	11	1,924	11
3,922	2	2,650	10	1,915	8
3,850	2	2,597	19	1,899	7
3,763	7	2,589	36	1,883	5
3,675	3	2,534	9	1,808	9
3,552	3	2,490	16	1,769	3
3,453	79	2,485	19	1,760	3
3,398	5	2,463	4	1,730	3
3,379	8	2,436	6	1,686	4
3,296	4	2,414	6	1,563	2
3,243	2	2,372	2	1,547	3
3,197	2				

IL BORATO «B».

Nella 5^a preparazione (rapporto 1 : 3; temperatura 150°) si è ottenuto il borato B molto puro. L'analisi chimica ha dato i seguenti risultati:

	%	R.M.	
Na O	20,95	0,3379	2,00
B ₂ O ₃	58,43	0,8390	5,00
H ₂ O	21,13	1,1728	6,98
	100,51		

Al borato B si può pertanto assegnare la composizione $2 \text{Na}_2\text{O} \cdot 5 \text{B}_2\text{O}_3 \cdot 7 \text{H}_2\text{O}$.

Al microscopio il borato B presenta morfologicamente notevoli somiglianze col borato A. Le dimensioni dei cristallini sono forse leggermente superiori, ma si incontrano spesso sezioni a contorno esagonale dalle quali emerge, sempre poco inclinata, la bisettrice acuta negativa, molto meno frequenti le bacchette ad estinzione retta ed allungamento positivo, dalle quali però in questo caso emerge molto inclinata una bisettrice.

La determinazione degli indici di rifrazione, eseguita col solito metodo dell'immersione, è qui resa difficile dalla mancanza di sezioni principali contenenti α , per questa direzione di vibrazione è stato perciò assegnato il più basso indice determinato su frammenti orientati in modo qualsiasi. L'orientazione dell'indicatrice e l'angolo degli assi ottici sono stati determinati al tavolino universale: anche per questo borato le proprietà ottiche indicherebbero una simmetria monoclina.

Spettro di polveri del Borato «B».

Diffrattometro G.E. Radiazione Cu/Ni $\lambda = 1,5405 \text{ \AA}$; vel. $0,2^\circ/\text{s}$; tarato con NaF; intervallo $5-60^\circ 2\theta$.

d	i	d	i	d	i
		2,902	13	2,002	2
7,19	< 1	2,870	1	1,971	1
6,19	1	2,851	2	1,949	< 1
6,01	100	2,836	2	1,940	< 1
5,70	2	2,824	1	1,928	1
5,59	4	2,799	2	1,913	1
5,30	16	2,747	< 1	1,899	1
5,19	1	2,652	2	1,885	1
5,12	1	2,567	2	1,883	1
4,86	2	2,535	1	1,870	1
4,61	1	2,514	1	1,857	< 1
4,43	< 1	2,455	1	1,828	1
4,10	2	2,410	< 1	1,810	2
4,01	1	2,343	1	1,763	< 1
3,942	1	2,306	< 1	1,734	< 1
3,746	< 1	2,257	2	1,718	< 1
3,471	1	2,211	2	1,706	1
3,417	< 1	2,147	< 1	1,702	1
3,242	1	2,092	2	1,698	1
3,169	1	2,084	1	1,642	< 1
3,130	< 1	2,054	2	1,591	< 1
3,006	50	2,011	1	1,582	< 1

Le costanti ottiche risultano le seguenti:

$$\begin{array}{ll} \alpha \leq 1,494 \pm 0,002 & \gamma = \beta \\ \beta = 1,512 & \text{»} \quad \widehat{\alpha\beta} = 6,8^\circ \pm 0,1^\circ \\ \gamma = 1,524 & \text{»} \\ 2V_\alpha = 66,8^\circ \pm 0,7^\circ & 2V_{\text{calc.}} = 77,4^\circ \end{array}$$

Il cattivo accordo per l'angolo degli assi ottici, fra il valore misurato e quello calcolato dai valori riportati per gli indici principali di rifrazione, è indizio che i valori di questi ultimi, ed in particolare quello di α , non sono esatti. Infatti calcolando il valore di α , tenendo costanti quelli di β e γ , dall'angolo degli assi ottici misurato si ottiene $\alpha = 1,485$.

La precedente tabella riporta i dati dello spettro di polveri. Anche in questo caso valgono le considerazioni, già esposte, a proposito dei valori delle intensità relative.

TRATTAMENTI TERMICI.

I due borati artificiali preparati, A e B, sono stati sottoposti ad analisi termica differenziale con apparecchio Leeds e Northrup, dopo essere stati miscelati con caolino calcinato nel rapporto 2 : 1. La curva relativa al borato A presenta intorno ai 100° un doppio apice endotermico e precisamente uno piccolo iniziale a 70° ed uno più marcato a 130° ; si ha poi un lungo tratto rettilineo, un terzo effetto endotermico si presenta a 400° ed un quarto verso 470° , dopo diverse oscillazioni si ha la probabile fusione, indicata dalla rottura della pinza, verso i 650° .

La curva del borato B si presenta identica alla precedente per quanto riguarda i primi due apici, però di intensità molto maggiore, in seguito si hanno due apici molto slargati con massimi rispettivamente a 190° e 330° seguiti da uno netto a 400° ; la curva accenna poi un apice esotermico molto slargato con massimo attorno ai 500° , anche qui il probabile punto di fusione, indicato dalla rottura della pinza, è verso i 650° .

Per controllare l'andamento della disidratazione e per cercare di spiegare i vari effetti termici riscontrati durante l'analisi termica differenziale si sono eseguite alcune riprese diffrattometriche su campioni dei due borati tenuti per 12 ore a varie temperature.

Il borato A presenta uno spettro di polveri inalterato anche dopo riscaldamento a 70° e 130° , ma a 410° , accanto a deboli righe del borato A compaiono altre riflessioni, probabilmente di una nuova fase « D » anidra. Dopo riscaldamento a 490° si ha la scomparsa delle fasi A e D con la formazione di un'altra fase « E » che permane anche a 540° .

Il borato B conserva il suo reticolo dopo riscaldamento a 70° , 130° e 200° ; a 370° lo spettro è molto debole su un fondo già a bande; a 410° il reticolo è totalmente distrutto e si ha una fase amorfa « F » rivelata da uno spettro composto da sole bande, dopo riscaldamento a 490° però si ha la ricostitu-

zione di un nuovo reticolo cristallino: quello già indicato con E, che anche in questo caso, com'è logico, permane anche a 540° e presumibilmente fino alla fusione.

L'analisi termoponderale è stata eseguita per i due borati tenendo i campioni in stufa a temperature via via crescenti per un tempo costante (10 h). Le curve perdita di peso/temperatura non mostrano alcun tratto orizzontale che possa far sospettare la formazione, durante il riscaldamento, di composti meno idrati.

Un tale comportamento al riscaldamento è suffragato dalle riprese diffrattometriche effettuate in parallelo sui campioni scaldati a varie temperature: come la perdita di peso anche la demolizione del reticolo appare graduale per cui man mano che il riscaldamento procede i diffrattogrammi mostrano riflessioni sempre più deboli mentre si fanno più distinte le bande caratteristiche dei borati amorfi.

È interessante osservare che, al pari di altri borati studiati in precedenza [4], il borato B (eptaidrato) non produce per parziale disidratazione il borato A (tetraidrato), benché entrambi formino per totale disidratazione uno stesso composto cristallino (borato E). È da notare il diverso comportamento dei due borati A e B alla completa disidratazione: il risultato finale è il borato E per entrambi, ma si arriva a tale risultato per vie diverse in quanto il borato A produce prima il borato D, probabilmente una modificazione polimorfa molto disordinata del borato E, mentre nel borato B la completa disidratazione implica la demolizione del reticolo fino ad una fase amorfa la quale successivamente ricostituisce il reticolo del borato E senza passare attraverso lo stadio intermedio rappresentato nell'altro caso dal borato D.

Lo spettro del borato D presenta pochissime riflessioni (ben nette solo due: I e II ordine di uno stesso piano reticolato) su un fondo chiaramente a bande, che corrispondono a quelle presentate dal borato F. Il borato D deve essere perciò considerato come una fase solo parzialmente ordinata ed in questo si distingue dal borato F, completamente disordinato.

Il sistema $\text{Na}_2\text{O}-\text{B}_2\text{O}_3$ è stato studiato dal Ponomareff [9], dallo Jenckel [5] e da Morey e Merwin [7]. I composti accertati sono i borati 2 : 1, 1 : 1, 1 : 2, 1 : 3 e 1 : 4 alcuni dei quali risulterebbero polimorfi. In particolare lo Jenckel riporta nella sua Nota i fotogrammi di polvere di queste fasi solide, ma sfortunatamente non sotto forma di tabelle di distanze reticolari, ma come riproduzione fotografica dei fotogrammi stessi così che la esatta misura di questi risulta molto difficile. Dai valori molto approssimati ricavabili sembrerebbe di poter riconoscere una certa somiglianza fra gli spettri delle due fasi polimorfe del composto 1 : 3 cioè $\text{Na}_2\text{O} \cdot 3 \text{B}_2\text{O}_3$ e quelli delle due fasi anidre ottenute per riscaldamento dei borati A e B cioè delle fasi contraddistinte con D ed E. Tali fasi sarebbero quindi polimorfe dello stesso composto $\text{Na}_2\text{O} \cdot 3 \text{B}_2\text{O}_3$ ed a questa trasformazione polimorfa sarebbe imputabile l'effetto endotermico registrato nella curva termodifferenziale del borato A verso 470° .

Per quanto riguarda le proprietà ottiche dei borati anidri, cioè i cosiddetti borati D, E ed F, si possono dare solo dati approssimati a causa della mancanza fra i frammenti cristallini di sezioni ottiche principali (ovviamente per D e E).

Il borato D appare birifrangente biassico con $\alpha' = 1,510$ e $\gamma' = 1,515$, il borato E è anch'esso birifrangente biassico con $\alpha' = 1,490$ e $\gamma' = 1,535$, mentre il borato F è naturalmente isotropo con qualche raro puntino birifrangente: $n = 1,505$.

Questi dati non sono in contrasto con quelli ottenuti da Morey e Merwin durante lo studio del sistema $\text{Na}_2\text{O}-\text{B}_2\text{O}_3$: infatti essi riportano, per l'unico composto 1:3 da loro identificato (qui il borato E), i valori $\alpha = 1,453$, $\beta = 1,525$ e $\gamma = 1,551$.

Spettro di polveri del borato «E» ()*

<i>d</i>	<i>i</i>	<i>d</i>	<i>i</i>	<i>d</i>	<i>i</i>
11,7	18	3,02	33	2,174	6
6,15	19	2,93	46	2,121	3
5,04	4	2,64	20	2,052	13
4,84	9	2,56	6	2,022	9
4,56	100	2,422	5	1,959	9
3,92	12	2,370	5	1,905	9
3,73	38	2,276	8	1,881	12
3,49	7	2,229	3		

(*) Radiazione Cu/Ni $\lambda = 1,5405$; vel. 2° /'; tarato con NaF; intervallo $5-50^\circ$ 2θ . Difrattometro G. E.

Borato «D»

$2\theta_{\text{Cu}}$	<i>d</i>
9,09	9,72
18,38	4,83
(29)	3,1 <i>b</i> (**)
(44)	2,0 <i>b</i>

Borato «F»

$2\theta_{\text{Cu}}$	<i>d</i>
(19)	4,6 <i>b</i>
(28)	3,2 <i>b</i>
(45)	2,0 <i>b</i>

(**) *b* = bande con massimo approssimativamente in corrispondenza ai valori indicati.

Nella seconda Nota verrà dimostrata l'esistenza in natura, dei borati A e B.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] AUGER V., *Sur un nouveau type de borates alcalins: les pentaborates*, «C. R. Acad. Sci., Paris», 180, 1602 (1925).
- [2] BOLLEY P., *Ueber eine neue Verbindung von Borsäure mit Natron und die wahrscheinliche Bildungsweise der natürlichen Borsäure*, «Ann. Chem. u. Pharm.», 68, 122 (1848).
- [3] CIPRIANI C., *Un nuovo minerale fra i prodotti boriferi di Larderello*, «Rend. Accad. Naz. Lincei» (VIII) 22, 519 (1957).

- [4] CIPRIANI C., *Ricerche sulla disidratazione di alcuni borati naturali*, « Atti Soc. Tosc. Sci. Nat. », 65, 284 (1958).
- [5] JENCKEL E., *Das Schmelzdiagramm der Borsäureanhydrid- und Natriummetaborat-schmelzen*, « Zeit. anorg. Chem. », 227, 214 (1936).
- [6] KEMP P. H., *The chemistry of borates*, Part 1 - Londra 1956.
- [7] MOREY G. W. e MERWIN H. E., *Phase equilibrium relationship in the binary system, sodium oxide-boric oxide, with some measurements of the optical properties of the glasses*, « J. Amer. Chem. Soc. », 58, 2248 (1936).
- [8] MUESSIG S. e ALLEN R. D., *Ezcurrite* ($2 \text{Na}_2\text{O} \cdot 5 \text{B}_2\text{O}_3 \cdot 7 \text{H}_2\text{O}$), *a new sodium borate from Argentina: occurrence, mineralogy and associated minerals*, « Econ. Geol. », 52, 426 (1957).
- [9] PONOMAREFF J., *Ueber saure Natriumborate*, « Zeit. anorg. Chem. », 89, 383 (1914).
- [10] SBORGI U., *Sui borati. Sistema $\text{Na}_2\text{O}-\text{B}_2\text{O}_3-\text{H}_2\text{O}$. Isoterme a 35°, 20°, 0° e diagramma politermico*, « Gazz. Chim. Ital. », 62, 3 (1932).
- [11] SPIEGEL L., *Ueber anormal zusammengesetzten Borax (Natriumtriborat)*, « Chemik. Zeit. », 28, 750 (1904).
- [12] THOMSON in SUTTON F., *A systematic handbook of volumetric analysis*, Londra 1956.

Citofisiologia. — *Osservazioni sull'attività citologica di alcune furocumarine e sul loro comportamento di fronte all'acido desossiribonucleinico*^(*). Nota di GIOVANNI RODIGHIERO, GIUSEPPE CAPORALE e TULLIO DOLCHER, presentata ^(**) dal Corrisp. C. CAPPELLETTI.

È noto che le furocumarine, numeroso gruppo di sostanze diffuse in natura, sono dotate di varie proprietà biologiche. Spiccatissima è la capacità, che alcune di esse posseggono, di produrre la fotosensibilizzazione della cute umana, proprietà che è stata ed è tuttora oggetto di estese ricerche nello Istituto di Chimica Farmaceutica dell'Università di Padova da parte di L. Musajo e coll. [1-9] ed anche in altri laboratori [10]. È noto inoltre che le furocumarine inibiscono la germinazione dei semi e lo sviluppo dei germogli e delle radici [11, 12]; si rivelano in generale molto tossiche per i piccoli pesci di acqua dolce [13] ed alcune di esse sono anche state studiate come agenti disinfestanti nei confronti di molluschi responsabili della diffusione di malattie (bilharziosi) nelle zone tropicali [14, 15].

Mentre numerose cumarine sono state studiate dal punto di vista della loro attività citologica ed in particolare della loro capacità di provocare rotture cromosomiche, svolgendo perciò azione mutagenica [16-21], nessuna ricerca approfondita invece è stata finora comunicata sulle furocumarine⁽¹⁾; si è ritenuto perciò interessante estendere le conoscenze sulle proprietà biologiche di tali sostanze, studiandole anche da questo punto di vista.

Le ricerche sono state compiute su un gruppo di sette furocumarine naturali (psoralene, angelicina, bergaptene, bergaptolo, xantotoxina, xantotoxolo, imperatorina, ossipeucedanina) e cinque derivati di sintesi (5-etossipsoralene, 5-nitroxantotoxina, 5-amminoxantotoxina, 5-acetilamminoxantotoxina) e, come sostanza di confronto, sulla cumarina.

Le osservazioni, eseguite su apici radicali di cipolla con la tecnica generalmente usata per queste ricerche e che vengono dettagliatamente descritte in altra sede da uno di noi [23], hanno mostrato che alcuni dei composti saggiati agiscono sulle cellule vegetali provocando frammentazione dei cromosomi (attività mutagenica) ed agglutinazione dei cromosomi stessi (effetto stickiness) a concentrazioni notevolmente inferiori a quelle necessarie alla cumarina per produrre gli stessi effetti.

Delle furocumarine sperimentate, il bergaptene è risultato il più attivo; esso infatti produce frammentazioni cromosomiche anche in concentrazione $2,5 \cdot 10^{-5}$ Mol ($25 \mu\text{Mol}$), ed effetto stickiness in concentrazione $5 \cdot 10^{-5}$ Mol

(*) Istituto di Chimica Farmaceutica e Istituto Botanico dell'Università di Padova.

(**) Nella seduta del 14 gennaio 1961.

(1) GORI [22] ha osservato gli effetti citologici dell'essenza di bergamotto, attribuendoli alle furocumarine in essa contenute.

(50 μ Mol). La cumarina provoca gli stessi effetti a concentrazioni rispettivamente 40 e 20 volte superiori.

Al bergaptene seguono, con attività un po' minore, psoralene, xantotossina ed angelicina, quindi xantotossolo, quest'ultimo poco più attivo della cumarina (vedi Tabella I); il bergaptolo ha rivelato un'azione mutagena assai debole, ed un effetto di agglutinazione cromosomica paragonabile a quello del xantotossolo.

TABELLA I.

Attività citologica di alcune furocumarine ().*

Sostanze	Frammentazione cromosomica (attività mutagena)		Agglutinazione cromosomica (effetto stickiness)			
	Concentrazione soluzioni (**)	Attività relativa (cumarina = 1)	Concentrazioni delle soluzioni che provocano agglutinazione			Attività relativa media (cumarina = 1)
			fortissima	media	debole	
Cumarina	1000 μ Mol	1	2000 μ Mol	1000 μ Mol	750 μ Mol	1
Xantotossolo . . .	250 »	4	250 »	150 »	125 »	7
Angelicina	180 »	5,5	250 »	125 »	62,5 »	10
Xantotossina . . .	90 »	11	250 »	125 »	62,5 »	10
Psoralene	45 »	22	250 »	125 »	62,5 »	10
Bergaptene	25 »	40	— (***)	50 »	— (***)	20

(*) Per i dettagli sperimentali vedi [23].

(**) Sono qui riportate le concentrazioni delle furocumarine che provocano un effetto mutageno paragonabile a quello prodotto da una soluzione 1000 μ Mol di cumarina (1 μ Mol = 10^{-6} Mol).

(***) La soluzione satura di bergaptene (50 μ Mol) ha provocato una agglutinazione giudicata « media »; la concentrazione inferiore saggiata (25 μ Mol) non ha provocato invece alcun « effetto stickiness ».

Le altre sostanze sperimentate sono risultate inattive o quasi; va notato però che alcune di esse (ossipeucedanina, 5-etossipsoralene, 5-nitroxantotossina) sono così poco solubili in acqua, che non è stato possibile stabilire un confronto con quelle risultate attive.

Per quanto riguarda l'azione mutagena delle furocumarine, va rilevato che, se essa si manifesta a concentrazioni molto piccole, quali sono raggiunte solo da pochi altri mutageni sintetici, è in generale di entità piuttosto modesta; intenso invece è l'effetto stickiness da esse prodotto a concentrazioni un po' superiori.

Aumentando ancora la concentrazione delle soluzioni, le furocumarine (almeno quelle la cui solubilità in acqua lo permette) provocano l'inibizione

completa delle mitosi. Anche questo effetto mitotossico si manifesta a concentrazioni notevolmente inferiori a quella della cumarina.

TABELLA II.

Aumento di viscosità delle soluzioni di DNA provocato dalle sostanze aggiunte.

Il DNA usato è stato da noi estratto dal timo di vitello; rapporto azoto/fosforo = 1,68; a 260 m μ ϵ (P) = 5,719; a 232 m μ ϵ (P) = 2,442; in soluzione acquosa 0,1 %: η = 5,05. Venivano impiegate soluzioni di DNA allo 0,1 %; le sostanze, aggiunte in soluzione acetonica concentrata, avevano una concentrazione finale 10^{-4} Mol; la viscosità veniva misurata con viscosimetro di Höppler a 20°.

Sostanze aggiunte		Aumento della viscosità %
<i>Cumarine:</i>	cumarina	0,59
	umbelliferone	0,99
	erniarina	0
	citroptene	0,59
	ostrutina	1,25
	seselina	0
	dafnetina	1,98
<i>Furocumarine:</i>	psoralene	3,36
	angelicina	4,75
	xantotoxina	6,43
	xantotoxolo	3,96
	4-metilxantotoxina	6,25
	imperatorina	3,36
	bergaptene	6,53
	5-etossipsoralene	5,74
	5-isopropilossipsoralene	4,35

In relazione con queste ricerche, riferiamo alcune altre osservazioni effettuate sul comportamento di alcune cumarine e furocumarine di fronte all'acido desossiribonucleinico (DNA). Precisamente è stato constatato che le furocumarine, addizionate alle soluzioni di DNA, ne provocano un evi-

dente aumento della viscosità, mentre con le cumarine l'aumento è più limitato o manca del tutto (vedi Tabella II).

Questo effetto è da attribuire con ogni probabilità alla formazione di legami fra DNA e sostanze aggiunte. Infatti in numerosi casi che abbiamo esaminato con la tecnica della dialisi ad equilibrio, già usata da vari Autori per ricerche analoghe [24-27], abbiamo potuto mettere in evidenza che nelle predette soluzioni in cui si è verificato un aumento della viscosità, una parte della sostanza aggiunta risulta legata al DNA (vedi Tabella III). Si nota in linea generale che la quantità che si lega è sensibile nel caso delle furocumarine, molto più modesta nel caso delle cumarine.

TABELLA III.

Risultati ottenuti con la dialisi ad equilibrio.

Venivano usati dializzatori a membrana di cellophan, nella parte interna dei quali erano posti 10 cm³ di soluzione acquosa 0,2 % di DNA e nella parte esterna 40 cm³ di soluzione $6,2 \cdot 10^{-5}$ Mol della sostanza in esame. La determinazione spettrofotometrica della concentrazione della sostanza nel liquido esterno veniva eseguita dopo 48 ore di permanenza in termostato a 30°.

Sostanze	Quantità che si lega al DNA nelle condizioni sopra indicate	
	mg/g di DNA	gmol/g di DNA
<i>Cumarine:</i> cumarina	0,475	$3,25 \cdot 10^{-4}$
erniarina	1,35	7,62 »
4-metilumbelliferone . . .	1,57	8,87 »
<i>Furocumarine:</i> xantotoxina	4,25	19,65 »
angelicina	4,75	25,53 »
psoralene	6,45	34,67 »
bergaptene	7,75	35,88 »

Se ora confrontiamo le Tabelle I, II e III, notiamo che il bergaptene, che ha la massima attività nel produrre frammentazione ed agglutinazione cromosomica, è anche la sostanza che provoca il maggior aumento di viscosità e si lega al DNA in quantità maggiore.

Viceversa la cumarina, che ha un'attività citologica assai più debole, provoca solo un piccolo aumento della viscosità e si lega al DNA in quantità molto piccola.

Se si considerano le tre furocumarine xantotoxina, psoralene, angelicina, si constata che ad un'attività citologica intermedia corrisponde pure un intermedio comportamento di fronte al DNA.

Ci limitiamo per ora a far rilevare questo parallelismo fra proprietà citologiche e capacità di legarsi al DNA, che abbiamo riscontrato in questo gruppo di sostanze, considerando prematuro fare delle considerazioni sul suo possibile significato. Ci riserviamo infatti di sperimentare, oltre che con l'acido desossiribonucleinico (DNA), anche con il ribonucleinico e con le corrispondenti nucleoproteine, e di estendere queste osservazioni ad altri gruppi di sostanze citologicamente attive, per accertare se tale parallelismo è limitato alle cumarine o può avere una più larga validità.

Notiamo infine che le proprietà delle furocumarine ora osservate non si possono mettere in relazione con la loro attività fotodinamica; esse infatti si manifestano indipendentemente dall'azione della luce. Inoltre non si trova una corrispondenza con l'attività fotodinamica, che, valutata con un metodo proposto da L. Musajo, G. Rodighiero e G. Caporale [1], è la seguente:

psoralene	attività relativa	100
xantotoxina	» »	37,5
4-metilxantotoxina	» »	30
bergaptene	» »	27,5
angelicina	» »	12
xantotoxolo, bergaptolo, imperatorina e tutte le cumarine	inattive	

Gli effetti studiati e descritti in questa Nota non rispettano questo ordine.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] L. MUSAJO, G. RODIGHIERO e G. CAPORALE, « La Chimica e l'Industria », 35, 13 (1953); « Bull. Soc. Chim. Biol. », 36, 1213 (1954).
- [2] G. RODIGHIERO e G. CAPORALE, « Il Farmaco », Ed. Sci., 10, 760 (1955); 13, 373 (1958).
- [3] G. RODIGHIERO e C. ANTONELLO, « Il Farmaco », Ed. Sci., 10, 889 (1955).
- [4] L. MUSAJO, G. RODIGHIERO e L. SANTAMARIA, *Le sostanze fotodinamiche con particolare riguardo alle furocumarine*, « Atti Soc. Ital. Patologia », 5, 1 (1957).
- [5] L. MUSAJO, G. RODIGHIERO, G. CAPORALE e C. ANTONELLO, « Il Farmaco », Ed. Sci., 13, 355 (1958).
- [6] G. RODIGHIERO e C. BERGAMASCO, « Il Farmaco », Ed. Sci., 13, 368 (1958).
- [7] E. FORNASARI e G. RODIGHIERO, « Il Farmaco », Ed. Sci., 13, 379 (1958); 14, 734 (1959).
- [8] C. ANTONELLO, « Gazz. Chim. Ital. », 88, 415, 430 (1958).
- [9] G. CAPORALE, « Il Farmaco », Ed. Sci., 13, 784 (1958); « Annali di Chimica », 50, 1135 (1960).
- [10] Vedi *Symposium « Psoralens and radiant energy »* tenuto a Kalamazoo, Michigan (U.S.A.) il 27-28 marzo 1958 e pubblicato in « J. Investig. Dermatol. », 32, 135-391 (1959).
- [11] G. RODIGHIERO, « Giornale di Biochimica », 3, 138 (1954).
- [12] F. MOEWUS, citato da L. REPPE, « Die Pharmazie », 9, 278 (1954).
- [13] E. SPÄTH e F. KUFFNER, « Monatsh. », 69, 75 (1936).
- [14] A. SCHÖNBERG e NAZIH LATIF, « J. Am. Chem. Soc. », 76, 6208 (1954).
- [15] Per una rassegna sulle interessanti proprietà delle furocumarine vedi: L. MUSAJO, « Il Farmaco », Ed. Sci., 10, 539 (1955).

- [16] I. CORNMAN, « Amer. Journ. of Bot. », 33, 217 (1946); « Journ. Exp. Biol. », 23, 292 (1947).
- [17] G. OESTERGREN, « Bot. Not. », 1948, 376.
- [18] G. OESTERGREN e T. WAKONING, « Caryologia », suppl. 6, 838 (1953).
- [19] F. D'AMATO, « Caryologia », 6, 160 (1954).
- [20] F. D'AMATO e M. G. AVANZI, « Caryologia », 6, 134 (1954).
- [21] E. QUERCIOLO, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 16, 645 (1954); 18, 313 (1955); « Caryologia », 7, 350 (1955); 9, 177 (1957).
- [22] C. GORI, « Caryologia », 11, 68 (1958).
- [23] T. DOLCHER, « Nuovo Giorn. Bot. Ital. », 67° (1960) in corso di stampa.
- [24] I. M. KLOTZ e coll., « J. Am. Chem. Soc. », 68, 1486 (1946); « Arch. Biochem. », 9, 109 (1946).
- [25] Z. VODRAZKA e J. SPONAR, « Collection Czechoslov. Chem. Commun. », 20, 1275 (1955).
- [26] A. C. ANDREWS e T. D. LYONS, « Science », 126, 561 (1957).
- [27] C. D. JARDETSKY, « J. Am. Chem. Soc. », 80, 1125 (1958).

Citologia. — *I cromosomi di Chalcides ocellatus (Forsk)* (*). Nota di LUCIA MENDIETTA, presentata (**) dal Corrisp. G. MONTALENTI.

1. Grande utilità per determinare la posizione sistematica di una forma può ricavarsi dalla formula cromosomica; la quale, se rilevata su gruppi di famiglie, generi e specie, può essere di grande vantaggio anche per il problema della evoluzione dei gruppi.

Nei Rettili questa ricerca è stata in parte compiuta, ma in essa vi sono ancora numerose lacune: i dati più accurati e più abbondanti sono quelli del Matthey e quelli dei ricercatori giapponesi (Nakamura, Makino, Oguma): in totale sono state esaminate circa 50 specie appartenenti a 15 famiglie diverse.

Per quanto concerne i Sauri, in base alla formula cromosomica, Matthey [1] li distingue in tre gruppi: *a*) Gekonidi; *b*) Iguanidi; *c*) Scinco-lacertidi. In genere essi hanno 12 cromosomi grandi e 24 piccoli: i cromosomi grandi sono, alcuni a V (metacentrici), altri a bastoncino (acrocentrici): i microcromosomi sono puntiformi. In totale sarebbero 48, poiché i cromosomi a V, secondo Matthey [2], risulterebbero da due cromosomi acrocentrici uniti per le estremità.

La formula $12M + 24m$ esprimerebbe uno stato di equilibrio realizzatosi per evoluzione convergente in una serie di famiglie; questa formula, secondo lo stesso autore [3], non sarebbe però primitiva: in realtà fa difetto nei tipi più arcaici (Gekonidi, Sphenodon).

Negli Scinco-Lacertidi si hanno 36 macrocromosomi e due microcromosomi; degli Scincidi sono stati studiati: *Scincus officinalis* (28 acrocentrici e 4 metacentrici); *Chalcides tridactylus* (20 acrocentrici e 8 metacentrici); *Eumeces latiscutatus* (14 acrocentrici e 12 metacentrici); *Mabuya macularia* (16 acrocentrici e 10 metacentrici). Contando per due i metacentrici si raggiunge il numero di 36 oppure 38.

2. Nei Rettili è discusso se la omogametia debba attribuirsi al maschio o alla femmina.

In *Lacerta vivipara*, Oguma [4] ha contato 36 cromosomi nel maschio e 35 nella femmina: questa, dunque, sarebbe digametica (X—O). Alla stessa conclusione è arrivato Oguma [5] su *Amyda japonica*, e Nakamura [6] e Makino [7] su *Caretta caretta* e *Chelonia japonica*.

D'altra parte Matthey [8] sostiene che non vi è differenza cromosomica tra maschio e femmina, o almeno che non vi sono cromosomi sessuali, mor-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia della Università di Palermo, sotto la Direzione del prof. G. Reverberi.

(**) Nella seduta del 14 gennaio 1961.

fologicamente distinguibili. Così in *Chamaleon vulgaris* [2] [9]: tanto i maschi quanto le femmine posseggono 12 macrocromosomi a V e 24 microcromosomi. Neppure Margot [10] in *Lacerta vivipara* è riuscito a mettere in evidenza alcuna differenza cromosomica fra i due sessi.

MATERIALE E TECNICA.

Dai dati riportati, compare l'utilità di stabilire la formula cromosomica anche in altre specie di Sauri.

A tale scopo ho portato la ricerca su di una specie del genere *Chalcides*, frequente in Sicilia, il *Chalcides (Gongylus) ocellatus*, su cui finora non fu eseguita alcuna ricerca del genere.

Gli individui studiati provengono tutti dagli *immediati* dintorni di Palermo e costituiscono morfologicamente un gruppo omogeneo, sicuramente un'unica specie (in pubbl.).

Lo studio citologico fu condotto per il momento, esclusivamente sui *maschi*, giovani e adulti, catturati in tutte le epoche dell'anno.

Le gonadi, prelevate nelle condizioni migliori, vennero utilizzate tanto per preparati temporanei che permanenti.

I frammenti dei testicoli, convenientemente sbrigliati dalla membrana avvolgente, vennero prima trattati con orceina acetica (per circa 1/2 ora) a freddo; successivamente si procedette allo schiacciamento. I preparati temporanei così ottenuti furono studiati immediatamente. I preparati permanenti furono ottenuti nel modo seguente:

I pezzi furono sbrigliati e dissezionati in acqua distillata: furono poi passati in carminio acetico a freddo, dove vennero lasciati almeno 30'; successivamente vennero posti su un vetrino albuminizzato, ricoperti con un pezzo di cellophan anch'esso albuminizzato, e finalmente schiacciati. Il vetrino venne poi riscaldato leggermente per produrre la coagulazione della albumina; poi fu passato in acqua distillata: in queste condizioni il cellophan si stacca e il vetrino è pronto per essere disidratato e montato in balsamo.

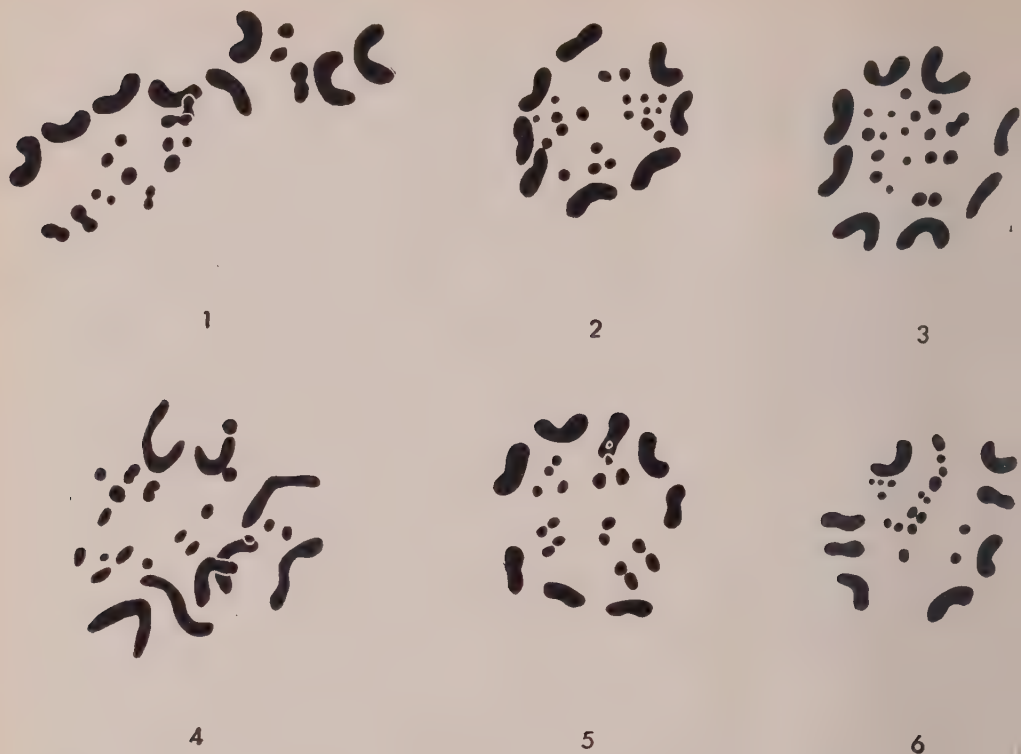
I preparati per schiacciamento così ottenuti, vennero successivamente studiati al microscopio e le figure più chiare vennero fotografate e disegnate.

RISULTATI.

I risultati più rilevanti di questa ricerca possono essere così riassunti:

a) allo stadio diploide sono presenti 26 cromosomi; questo numero fu dedotto dallo studio di numerose figure di spermatogoni in metafase (figure 1, 2, 3, 4, 5 e 6). Negli spermatociti sono invece presenti 13 cromosomi ($n = 13$) (figg. 7 e 8);

b) si hanno cromosomi grandi a V e cioè metacentrici e cromosomi medi e piccoli, acrocentrici; i metacentrici sono disposti alla periferia, gli acrocentrici al centro (figg. 2, 3, 5 e 6);



Figg. 1, 2, 3, 4, 5 e 6. - *Gongylus ocellatus* - metafasi da spermatogoni. Ingrandimento 2000 \times .



Figg. 7 e 8. - *Gongylus ocellatus* - anafasi da spermatociti. Ingrandimento 2000 \times .

c) negli spermatogoni i cromosomi metacentrici o a V sono 8; gli acrocentrici sono 18; di questi, alcuni sono a bastoncino, altri puntiformi.

Alcuni cromosomi a bastoncino sembrano essere costituiti da due unità congiunte per le estremità.

Nel caso degli 8 cromosomi metacentrici è facile identificare gli omologhi; non altrettanto facile è invece per gli acrocentrici;

d) le diverse osservazioni fatte portano ad affermare che nel maschio il numero dei cromosomi è pari. Tra gli omologhi delle singole coppie non vi sono differenze notevoli.

DISCUSSIONE.

1° Degli Scincidi, cui il *Chalcides ocellatus* appartiene, conosciamo come fu detto la formula cromosomica solo per alcune forme; *Scincus officinalis* con 32 cromosomi ($2n$) di cui 4 metacentrici e 28 acrocentrici (Matthey [11]); *Chalcides tridactylus* con 28 cromosomi ($2n$) di cui 8 metacentrici e 20 acrocentrici (Matthey [11]); *Eumeces latiscutatus* (Nakamura [12], con 26 cromosomi, di cui 14 acrocentrici e 12 a V metacentrici; *Mabuya macularia* (Asana e Mahabale [13]) con 26 cromosomi di cui 10 a V, 6 a bastoncino e 10 metacentrici.

Il *Chalcides ocellatus* ha 8 metacentrici a V e 18 acrocentrici. Se ora contiamo per due i cromosomi metacentrici si ottiene: per *Scincus officinalis*, per *Chalcides tridactylus*, per *Eumeces latiscutatus*, per *Mabuya macularia* 36 cromosomi; per *Chalcides ocellatus* 34; questo numero potrebbe portarsi però a 36, ammettendo che due microcromosomi, come suggerisce lo studio di alcune metafasi, si siano uniti per gli estremi (cfr. figg. 3 e 4).

2° Un altro dato che si ricava da queste ricerche è che il maschio possiede un numero di cromosomi pari, e che non vi è una coppia di cromosomi identificabili come sessuali. In assenza di un esame su gonadi femminili sarebbe però prematuro l'affermare che il maschio è omogametico e la femmina eterogametica.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] R. MATTHEY, « Adv. in Genetica », IV, 159 (1951).
- [2] R., MATTHEY, *Les cromosomes des Vertébrés* (Lausanne 1949).
- [3] R. MARRHEY & J. M. VAN BRINK, « Rev. Suisse Zool. », 63, 241 (1956).
- [4] K. OGUMA, « Arch. Biol. », 45, 27 (1934).
- [5] K. OGUMA, « J. Genet. », 34, 247 (1937).
- [6] K. NAKAMURA, « Chromosoma », 5-6, 205 (1949).
- [7] S. MAKINO, « Annot. zool. Japon. », 25, 250 (1952).
- [8] R. MATTHEY « Arch. J. Klaus Stift. », 18, 1 (1943).
- [9] R. MATTHEY & J. M. BRINK, « Exper. », 12, 53 (1956).
- [10] A. MARGOT, « Rev. Suisse Zool. », 53, 555 (1946).
- [11] R. MATTHEY, « Rev. Suisse Zool. », 38, 117 (1931).
- [12] K. NAKAMURA, « Cyt. », 2 (1931) (Cit. da MATTHEY, 1949).
- [13] J. J. ASANA & T. S. MAHABALE, « Curr. Sc. », 10 (1941) (Cit. da MATTHEY, 1949).

Zoologia. — *Correlazione del numero di metameri toracici fra schizonte e schizozooide in Salmacina dysteri*^(*). Nota di ENRICO VANNINI e FULVIO RANZOLI, presentata^(**) dal Socio U. D'ANCONA.

Le osservazioni, che esponiamo in via preliminare nella presente Nota, si riallacciano a nostri precedenti risultati, che già avemmo occasione di comunicare⁽¹⁾ per un'altra specie del medesimo genere di Policheti Serpulidi: *Salmacina incrustans* Clap., pure essa ermafrodita e schizogonica, il cui ciclo riproduttivo metagenetico ed i cui ampi poteri rigenerativi sono ormai ben conosciuti in seguito ad estese ricerche compiute da noi stessi⁽²⁾ e da altri studiosi di cui citiamo i più recenti⁽³⁾.

Salmacina dysteri (Huxley) della quale attualmente ci occupiamo, il cui sviluppo larvale dall'uovo fecondato è stato oggetto di un recentissimo lavoro⁽⁴⁾, diversifica dalla congenere *S. incrustans* soltanto per pochi dettagli morfologici, per le maggiori dimensioni (fino a 4-7 mm di lunghezza), per il tipo di aggregazione dei sottili tubi calcarei in cui vivono gli animali e per l'*habitat* a maggiore profondità: nel Golfo di Napoli, da cui provengono gli esemplari che abbiamo esaminato nel settembre 1960, le colonie di *S. dysteri* venivano dragate alla profondità di 40-45 metri (Vico Equense, Gaiola, Pozzuoli), mentre quelle di *S. incrustans* venivano raccolte alla profondità di 1-3 metri in vicinanza della costa rocciosa (Castel dell'Uovo, Mergellina, Capo Posillipo).

(*) Istituto di Zoologia dell'Università di Bologna e Centro di Studio per la Biologia del C.N.R. presso la Stazione Zoologica di Napoli.

(**) Nella seduta del 14 gennaio 1961.

(1) E. VANNINI e F. RANZOLI, *Osservazioni sui fenomeni di toraccizzazione negli schizozoidi di Salmacina incrustans*, « Boll. Zool. », vol. XXIV, pp. 145-151 (1957).

(2) E. VANNINI, *Studi sulla sessualità e sui poteri rigenerativi nel Polichete ermafrodita Salmacina incrustans*. — I. *Osservazioni sul ciclo riproduttivo sessuale e asessuale*, « Pubbl. Staz. Zool. Napoli », vol. XXII, pp. 211-256 (1950); E. VANNINI e F. RANZOLI, *Studi sulla sessualità e sui poteri rigenerativi nel Polichete ermafrodita Salmacina incrustans*. — II. *Poteri rigenerativi, schizogonia e maturazione sessuale*, « Pubbl. Staz. Zool. Napoli », vol. XXX, pp. 210-259 (1957).

(3) M. LA GRECA, *Autotomia, moltiplicazione e rigenerazione in Salmacina incrustans Clap.*, « Arch. Zool. Ital. », vol. XXXI, pp. 239-275 (1947). J. Cresp, *Régénération et bourgeonnement chez la Salmacine (Annélide Polychète)*, « C. R. Soc. Biol. Paris », t. CXLVII, pp. 844-846 (1953); *Thorax supplémentaire par morphallaxie chez l'Annélide Salmacina incrustans (Clap.)*, « C. R. Acad. Sci. Paris », t. CCXXXVI, pp. 2441-2443 (1953); *Inversion de polarité dans le bourgeonnement de Salmacina incrustans (Clap.)*, « C. R. Acad. Sci. Paris », t. CCXXXIX, pp. 1148-1151 (1954); *Sur les processus normaux et anormaux du bourgeonnement chez le Serpulide Salmacina incrustans (Clap.)*, « Bull. Soc. Zool. France », t. CXXXI, pp. 183-191 (1956); *Sur l'histogénèse dans la régénération antérieure de Salmacina incrustans (Clap.)*, « Bull. Soc. Zool. France », t. CXXXII, pp. 255-258 (1957).

(4) F. RULLIER, *Développement de Salmacina dysteri (Huxley)*, « Cahiers Biol. Mar. », t. I, pp. 37-46 (1960).

Gli esemplari adulti di *S. dysteri*, che venivano esaminati *in vivo* dopo averli fatti uscire dai loro tubi aggiungendo all'acqua di mare il 2-3 % di alcool etilico assoluto, erano provvisti di un numero di metameri toracici variante da 6 a 10: numero che, come abbiamo potuto direttamente constatare nel corso dei nostri allevamenti, cresce gradatamente entro i limiti suddetti, man mano che aumenta l'età degli animali, ad opera di una progressiva trasformazione in metameri toracici (per morfallassi) dei metameri della zona acheta e dei primi addominali.

Gli esemplari con 6-9 metameri toracici (ma non quelli con 10, che del resto erano molto rari nelle popolazioni esaminate) non di rado apparivano in ripro-



Fig. 1.

a: esemplare di *Salmacina dysteri* in riproduzione schizogonica; lo schizozoide (indicato dalla freccia), formatosi nel tratto caudale dell'addome dello schizonte, ha già ben differenziato la regione cefalica con i tentacoli branchiali. b: schizozoide appena distaccatosi dallo schizonte.

duzione asessuale (fig. 1): stavano cioè generando uno schizozoide, formatosi a spese del tratto posteriore dell'addome dello schizonte. Come è ben noto da molto tempo ⁽⁵⁾, in tale schizozoide la regione cefalica e i due primi metameri toracici si costituiscono *ex novo*, per epimorfosi, da un blastema che sporge prevalentemente sulla faccia ventrale dell'addome dello schizonte; gli altri metameri toracici dello schizozoide derivano invece da trasformazione, o morfallassi, di un certo numero di metameri addominali preesistenti dello schizonte.

Lo scopo della nostra ricerca è stato quello di appurare se, in modo analogo a quanto avevamo constatato per *S. incrustans*, anche in *S. dysteri*

(5) A. MALAQUIN, *L'accroissement et les phases sexuelles de Salmacina dysteri Huxley*, « Zool. Anz. », Bd. XXXVII, pp. 197-208 (1911).

gli schizozoidi ormai completamente sviluppati presentino, al momento del distacco dall'individuo che li ha generati, un numero variabile di metameri toracici, statisticamente correlato con quello dei metameri toracici presenti nello schizonte.

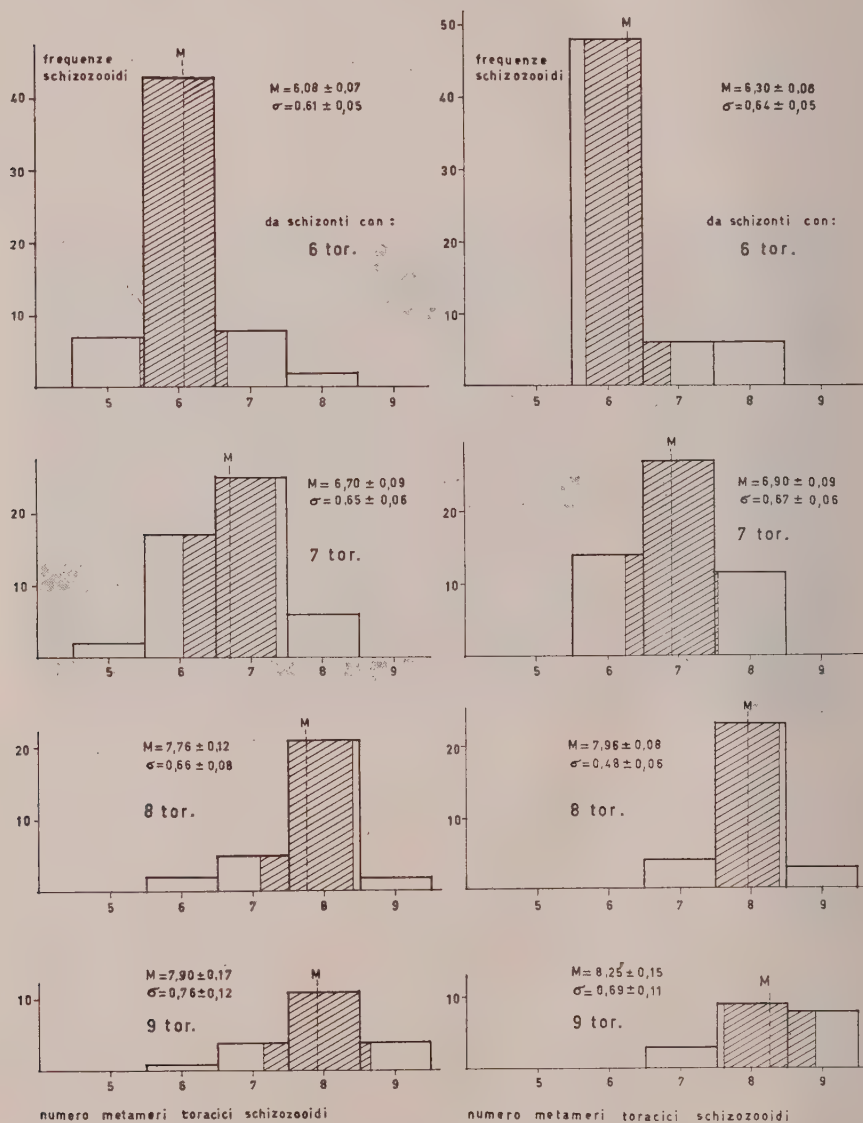


Fig. 2. - Istogrammi esprimenti la correlazione del numero di metameri toracici fra gli schizozoidi e gli schizonti rispettivi.

In ordinate, le frequenze degli schizozoidi; in ascisse, il numero dei loro metameri toracici. Dall'alto in basso, dati relativi a schizozoidi derivati da schizonti con 6, con 7, con 8 o con 9 metameri toracici; la serie di istogrammi a sinistra riguarda gli schizozoidi al momento del distacco dallo schizonte, quella a destra i medesimi schizozoidi dopo la perdita dell'aspetto giovanile. Le linee verticali a tratto interrotto indicano le medie; le parti tratteggiate degli istogrammi corrispondono ai limiti di σ ai due lati delle medie.

Pertanto, abbiamo scelto e allevato separatamente, estratti dai loro tubi calcarei, un buon numero di esemplari di *S. dysteri* con 6, con 7, con 8 o con 9 metameri toracici, in una fase avanzata del processo di schizogonia; essi sono stati mantenuti in acqua di mare filtrata, in un ambiente a temperatura costante di 16–18° C, nutrendoli con culture di *Chlamydomonas*. Si trattava sempre di schizonti sessualmente immaturi; in *S. dysteri*, nel mese di settembre, gli esemplari in schizogenesi in fase sessuata (maschile o ermafrodita) erano molto rari e non li abbiamo usati nei nostri esperimenti. Poiché la riproduzione schizogonica non si verifica con uguale frequenza in animali dotati di un torace diversamente lungo, abbiamo potuto disporre di 60 schizonti provvisti di 6 metameri toracici, 50 che ne possedevano 7, 30 che ne avevano 8 e solo 20 che ne mostravano 9.

Man mano che gli schizozoidi si staccavano dagli schizonti rispettivi, venivano esaminati al microscopio, annotando il numero dei loro metameri toracici e di quelli addominali. Quindi gli schizozoidi venivano allevati ulteriormente per un periodo di circa un paio di settimane, necessario per l'acquisizione di un aspetto adulto, connesso con la completa scomparsa di un particolare tessuto di riserva, che all'inizio infarcisce il celoma dei segmenti addominali in forma di masse opache roseo-aranciate. Via via che gli schizozoidi avevano oltrepassato tale fase giovanile, assumendo un aspetto identico a quello degli esemplari nati dall'uovo fecondato, venivano ancora una volta osservati al microscopio, per un nuovo conteggio dei metameri del torace e dell'addome.

I risultati che abbiamo conseguito, per quanto riguarda il numero dei metameri toracici sia degli schizonti che degli schizozoidi da questi generati, sono riassunti nelle annesse tabelle I e II e nella loro elaborazione statistica anche in forma di istogrammi (fig. 2). Da questi dati ci sembra che risulti in modo chiaro la risposta al quesito che ci eravamo posti.

All'epoca del distacco degli schizozoidi dagli schizonti, la variabilità del numero di metameri toracici negli schizozoidi infatti è distribuita in modo tale da rivelare, statisticamente, una netta tendenza alla ripetizione del numero di metameri toracici di cui è provvisto lo schizonte. Come risulta dalla Tabella I, per quanto riguarda gli esemplari derivati rispettivamente da schizonti con 6, con 7 o con 8 metameri toracici, con perfetta regolarità la classe più frequente è sempre quella degli schizozoidi provvisti di un torace altrettanto fornito di segmenti; che il torace dell'animale che li ha generati; soltanto negli schizozoidi nati da schizonti con 9 metameri toracici, la tendenza alla ripetizione del numero appare attenuata, la massima frequenza degli schizozoidi rimanendo sul numero di 8.

L'elaborazione grafica dei dati statistici (istogrammi nella parte sinistra della fig. 2) mette ancora meglio in evidenza che la media del numero dei metameri toracici degli schizozoidi aumenta gradualmente, di pari passo con l'aumento del numero dei metameri toracici che erano presenti nello schizonte rispettivo; la differenza fra le medie risulta statisticamente significativa, sia nei riguardi del confronto fra gli schizozoidi derivati da schizonti

con 6 e quelli derivati da schizonti con 7 metameri toracici, sia nel confronto successivo fra gli schizozoidi derivati da schizonti con 7 e da schizonti con 8 segmenti del torace; invece non è significativa nell'ultimo confronto, fra gli schizozoidi provenienti da schizonti con 8 e con 9 metameri suddetti.

TABELLA I.

Frequenze degli schizozoidi con diverso numero di metameri toracici, al momento del distacco dai rispettivi schizonti con 6, con 7, con 8 o con 9 segmenti del torace. Sono anche indicate le medie e le deviazioni quadratiche medie del numero di metameri toracici degli schizozoidi.

Metameri toracici dello schizonte	Metameri toracici dello schizozooide						Numero di esemplari esaminati
	5	6	7	8	9	M, σ	
6	7	43	8	2	—	M = 6,08 \pm 0,07 σ = 0,61 \pm 0,05	60
7	2	17	25	6	—	M = 6,70 \pm 0,09 σ = 0,65 \pm 0,06	50
8	—	2	5	21	2	M = 7,76 \pm 0,12 σ = 0,66 \pm 0,08	30
9	—	1	4	11	4	M = 7,90 \pm 0,17 σ = 0,76 \pm 0,12	20

Un'ottima conferma di tutti questi risultati si ricava dall'esame dei medesimi schizozoidi, ripetuto non appena essi avevano perduto il loro aspetto giovanile (Tabella II ed istogrammi nella parte destra della fig. 2). Le frequenze delle varie classi di esemplari ed i valori delle medie risultano spostati verso destra, in conseguenza di un aumento del numero dei metameri toracici, verificatosi in alcuni esemplari nel breve tempo intercorso fra i due esami; in complesso risulta rafforzata la conclusione che *il numero medio dei metameri toracici degli schizozoidi aumenta, mano a mano che si considerino schizozoidi derivati da schizonti con numero via via più elevato di segmenti del torace.*

La correlazione che abbiamo rilevata, del numero dei metameri toracici fra lo schizonte e lo schizozooide che da questo si distacca, è cosa della quale è necessario tener conto per la corretta interpretazione del ciclo riproduttivo metagenetico del nostro Serpulide. Il fatto che molti degli animali originatisi per schizogonia inizino il loro ciclo vitale già provvisti di un numero relativamente elevato di segmenti del torace, può infatti spiegarci la ragione per la quale, nelle popolazioni di *S. dysteri*, si incontrano esemplari tuttora ses-

sualmente immaturi, benché dotati fino di 10 metameri toracici, accanto ad altri già perfettamente sessuati, benché ne abbiano soltanto 7: condizione (rilevabile anche in *S. incrustans*) sulla quale ritorneremo in ricerche successive. È evidente, da quanto si è descritto, che il numero dei metameri toracici non è un indice sicuro dell'età relativa degli animali; pertanto appare giustificato ritenere che gli esemplari a maturazione sessuale più tardiva corrispondano a quelli schizozoidi, che sino dall'inizio risultavano dotati di un torace molto ricco di segmenti.

TABELLA II.

Frequenze dei medesimi schizozoidi della tabella precedente, dopo la perdita dell'aspetto giovanile.

Metameri toracici dello schizonte	Metameri toracici dello schizozooide						Numero di esemplari esaminati
	5	6	7	8	9	M, σ	
6	—	48	6	6	—	M = $6,30 \pm 0,08$ $\sigma = 0,64 \pm 0,05$	60
7	—	14	27	9	—	M = $6,90 \pm 0,09$ $\sigma = 0,67 \pm 0,06$	50
8	—	—	4	23	3	M = $7,96 \pm 0,08$ $\sigma = 0,48 \pm 0,06$	30
9	—	—	3	9	8	M = $8,25 \pm 0,15$ $\sigma = 0,69 \pm 0,11$	20

L'influenza del numero dei metameri toracici dello schizonte sul grado di toracizzazione dello schizozooide, è un fatto la cui causalità morfogenetica ci pare che possa venire interpretata, sulla scorta di quanto noi stessi in ricerche precedenti, del 1957, abbiamo potuto dimostrare sperimentalmente a proposito di fenomeni analoghi constatati in *S. incrustans*. Ma anche su questo argomento intendiamo diffonderci in lavori successivi, già in corso di elaborazione.

Fisiologia. — *Attività elettrica del diaframma durante respirazione a pressione positiva* (*) (**). Nota di EMILIO AGOSTONI, presentata (***) dal Socio R. MARGARIA.

Durante respirazione a pressione positiva rispetto all'ambiente (PPB) l'inspirazione tende a diventare passiva e l'espirazione attiva. Dal diagramma pressione-volume toracopolmonare (Rahn e coll., 1946) risulta che l'inspirazione dovrebbe essere completamente passiva respirando ad una pressione positiva superiore a circa 12 cm H₂O. D'altra parte l'attività dei muscoli respiratori in queste condizioni non è nota ed, in particolare, per quanto riguarda il diaframma, data la sua posizione, l'analisi del diagramma pressione-volume toracopolmonare non fornisce informazioni sull'attività di questo muscolo. Si è perciò voluto studiare l'attività elettrica del diaframma in condizione di PPB.

Si è usata una derivazione bipolare per via esofagea secondo la tecnica descritta (Agostoni e coll., 1960) che permette di rilevare l'attività della parte vertebrale del diaframma. Il soggetto, in posizione seduta, respirava in un cassone di grande capacità (760 l), in cui si manteneva una pressione positiva rispetto all'ambiente varia da 0 a 30 cm H₂O. Contemporaneamente all'elettromiogramma veniva registrato, sulla seconda traccia di un oscillografo a raggi catodici, il flusso respiratorio, che era rilevato mediante un pneumotacografo a bassa resistenza (0,4 cm H₂O/l/sec).

In tutti i soggetti esaminati, 5 uomini ed 1 donna, l'attività elettrica del diaframma persisteva in condizioni di PPB (vedi fig. 1), per tutti i valori di pressione usati e per tutta la durata di ogni prova (4 o 5 minuti). L'attività era prevalentemente manifesta nella seconda parte dell'inspirazione e persisteva all'inizio dell'espirazione.

Questo reperto indica probabilmente la persistenza dell'attività del centro respiratorio anche quando la pressione a cui si respira è sufficiente ad espandere il torace. In questo caso l'attività potrebbe persistere anche in altri muscoli inspiratori; comunque tale attività non si potrebbe differenziare con sicurezza da quella dei muscoli espiratori, che, in queste condizioni, sono attivi anche durante l'inspirazione. D'altra parte potrebbe anche darsi che l'attività persista nel solo diaframma in rapporto ad un eventuale riflesso che regoli le relazioni meccaniche tra cavità toracica ed addominale: la contrazione del diaframma potrebbe essere condizionata dal grado di attività dei muscoli della parete addominale.

(*) Dall'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Milano.

(**) Questo lavoro è stato eseguito con il contributo del programma NATO di sovvenzione per la ricerca scientifica.

(***) Nella seduta del 14 gennaio 1961.

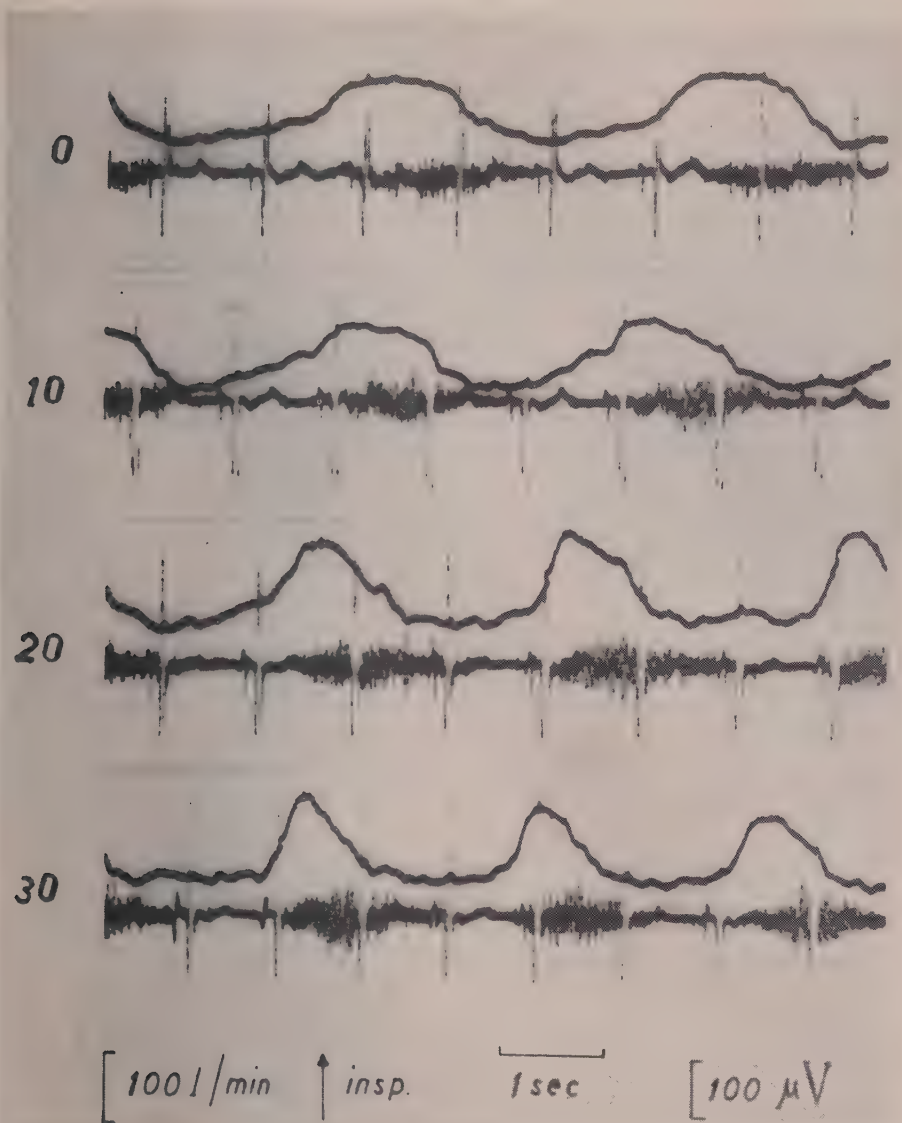


Fig. 1. — Flusso respiratorio ed attività elettrica del diaframma durante respirazione a pressione ambiente ed a pressione positiva di 10, 20 e 30 cm H₂O.

Se l'attività elettrica del diaframma non fosse accompagnata da una pressione transdiaframmatica, ciò indicherebbe che il diaframma, durante PPB, si contrae senza compiere lavoro esterno: cioè l'energia prodotta dalle fibre attive sarebbe completamente spesa a vincere le resistenze interne all'accorciamento dell'intero muscolo. Questo potrebbe verificarsi solo se la velocità di accorciamento fosse elevata: è quindi probabile che il diaframma

prenda parte attiva, anche dal punto di vista meccanico, all'inspirazione, e che il gradiente pressorio addomino-toracico, che ne deriva, si riduca con l'aumentare del valore di pressione a cui si respira, in rapporto alla più rapida inspirazione che questo aumento comporta. In effetti questa ipotesi sembra confermata da rilievi preliminari di pressione intratoracica ed addominale durante PPB. Vi sarebbe perciò anche a PPB un certo gradiente pressorio addomino-toracico durante una parte del ciclo respiratorio: tale gradiente favorisce il ritorno venoso al cuore che, in condizioni di PPB, è ostacolato.

BIBLIOGRAFIA.

- H. RAHN, A. B. OTIS, L. E. CHADWICK and W. O. FENN, « Am. J. Physiol. », 146, 161 (1946).
E. AGOSTONI, G. SANT'AMBROGIO e H. DEL PORTILLO CARRASCO, « J. Appl. Physiol. », 15, 1093 (1960).

Patologia. — *Differenze immunologiche delle desossiribonucleoproteine delle cellule bianche normali e leucemiche umane* ^(*) ^(**). Nota di LUIGI MESSINEO ^(***), presentata ^(****) dal Socio G. BOMPIANI.

Differenze morfologiche ^(1,2) e metaboliche ⁽³⁾ sono state riscontrate tra le cellule bianche di uomini normali e leucemici. Qui si vuol porre in evidenza che esiste anche una differenza specifica di ordine immunologico tra le nucleoproteine (DNP) estratte dai nuclei delle cellule bianche di uomini normali e di uomini leucemici.

Le nucleoproteine di individui normali e leucemici sono indicate rispettivamente con NDNF e LDNF. I sieri controlli di individui umani normali e leucemici e di conigli sono indicati con NCS, LCS e RCS. Gli anticorpi presenti nel siero di conigli iniettati con NDNF e LDNF sono indicati da NAB e LAB. I differenti individui normali e leucemici, i vari conigli usati e i vari sieri sono indicati da numeri scritti in basso in ordine progressivo.

Sono stati investigati tre aspetti dello stesso problema generale: 1° se i sieri normali e leucemici presentino una reazione di tipo immunologico con le loro relative nucleoproteine delle cellule bianche normali e leucemiche; e se i sieri di individui normali interreagiscano con le nucleoproteine delle cellule bianche di individui leucemici e i sieri di individui leucemici interreagiscano con le nucleoproteine delle cellule bianche di individui normali; 2° se le nucleoproteine delle cellule bianche di individui normali e leucemici abbiano la capacità di indurre la formazione di anticorpi quando vengano iniettate nei conigli; 3° se gli anticorpi prodotti nei conigli contro le nucleoproteine estratte dalle cellule bianche di individui normali interreagiscano immunologicamente con le nucleoproteine estratte dalle cellule bianche di individui leucemici; e se gli anticorpi prodotti contro le nucleoproteine estratte

(*) Numero di serie delle pubblicazioni del Department of Biophysics, University of Pittsburgh, Pittsburgh 13, Pennsylvania, U.S.A.: 83.

(**) Il metodo di estrazione delle nucleoproteine con glicina usato in questo lavoro è stato ideato ed attuato dall'autore nel 1958 nel Department of Zoology, University of California, Berkeley 4, California, U.S.A. Gli studi immunologici sono stati sviluppati durante la sua permanenza nel Department of Biophysics, University of Pittsburgh.

(***) Damon Runyon Post-doctoral Fellow, 1958. Questa ricerca è stata sovvenzionata dal Health Research and Services Foundation, Grant Number C-2.

(****) Nella seduta del 14 gennaio 1961.

(1) D. S. BOCCIARELLI, L. TENTORI e G. VIVALDI, « Rendiconti dell'Istituto Superiore di Sanità », XXII, 1059 (1959).

(2) D. S. BOCCIARELLI e A. VIOLANTE, « Rendiconti dell'Istituto Superiore di Sanità », XXII, 1068 (1959).

(3) W. S. BECK e W. N. VALENTINE, « Cancer Research », 12, 818 (1952).

dalle cellule bianche di individui leucemici interreagiscono con le nucleoproteine estratte dalle cellule bianche di individui normali.

MATERIALE E METODI.

I sieri umani sono stati ottenuti da sangue prelevato dalla vena omerale; i sieri di coniglio sono stati ottenuti da sangue prelevato da una vena dell'orecchio. Il sangue, coagulato a temperatura ambiente, è stato lasciato per una notte a 4°C. Il siero quindi, dopo essere stato centrifugato e dializzato in 0,1 M glicina per mezz'ora, era conservato a -10°C.

La separazione delle cellule bianche fu effettuata secondo il metodo di Beck e Valentine⁽³⁾. Altre volte, onde recuperare le cellule bianche, dopo la sedimentazione delle cellule rosse, il plasma umano in citrato di sodio veniva centrifugato a 1000 rpm per 4 minuti.

L'estrazione delle nucleoproteine (DNP) veniva effettuata con 0,01 M glicina per circa 10 ore, dopo che le cellule bianche erano state lavate con una soluzione 0,01 M di citrato di sodio e di 0,01 M di glicina. La purificazione dell'estratto delle nucleoproteine è stata ottenuta per centrifugazione a $24.000 \times g$ per 25 minuti.

Durante la separazione delle cellule bianche e l'estrazione delle nucleoproteine la temperatura è stata mantenuta a 4°C.

Ulteriori particolari di questo metodo di estrazione delle nucleoproteine ed ulteriori risultati di studi biofisici e biochimici su di esse verranno riferiti in seguito.

Gli anticorpi sono stati ottenuti praticando iniezioni intravenose nei conigli di un totale di 25-30 mgr di DNP, per tre volte, alla distanza di una settimana ciascuna. Per la preparazione dei sieri immunizzati, il sangue veniva prelevato dai conigli una settimana dopo l'ultima iniezione. Il titolo degli anticorpi e l'*optimum* di concentrazione delle DNP necessarie per la neutralizzazione degli anticorpi sono stati determinati in tubi da saggio sia a temperatura ambiente che a 4°C.

Per lo studio delle reazioni di precipitazione è stata usata la tecnica della diffusione in agar di Outchterlony^(4,5) con piccole varianti; l'agar (1%) dopo lavaggio con acqua distillata è stato sciolto in 0,1 M glicina. Come controllo l'agar è stato sciolto in 0,01 M tampone fosfato di potassio e in 0,1 M glicina a pH 6,8. Le capsule Petri con agar incubate sia a temperatura ambiente che a 4°C hanno dato sempre gli stessi risultati. Ogni prova di precipitazione è stata ripetuta 10-15 volte.

In questa ricerca sono stati usati 9 conigli, 11 individui umani normali e 16 individui umani leucemici.

(4) Ö. OUTCHTERLONY, « Archiv. Kemi, Mineral. Geol. Bank », 26 B: 14, 1 (1949).

(5) Ö. OUTCHTERLONY, Comunicazione presentata al VI Congresso Internazionale di Microbiologia, Roma, settembre 1953.

RISULTATI.

Gli esperimenti di controllo tra RCS e NCS, LCS, NDNF, LDNP sono stati sempre negativi. Non è stata mai riscontrata una reazione immunologica tra NCS e LCS, tra NCS e NDNF o LDNP, tra LCS e LDNP o NDNF, e tra NDNF e LDNP.

TABELLA I.

Interazioni delle desossiribonucleoproteine estratte dai nuclei delle cellule bianche (CB) di individui umani normali (NDNF) e leucemici (LDNP) con i loro relativi anticorpi (NAB, LAB).

Antigeni	Anticorpi						Conteggio delle CB
	NAB ₄	NAB ₅	NAB ₆	LAB ₇	LAB ₈	LAB ₉	
N ₄ DNP	+			—			6,800 (*)
N ₅ DNP		+			—		6,500
N ₆ DNP		+	+		—	—	6,500
N ₇ DNP			+			—	8,200
N ₈ DNP			+			—	5,200
N ₉ DNP			+			—	9,300
N ₁₀ DNP			+			—	7,300
N ₁₁ DNP			+			—	6,700
L ₄ DNP	—			+			150,000
L ₅ DNP	—			+			75,000
L ₆ DNP		—			+		342,000
L ₇ DNP		—			+		202,000
L ₈ DNP		—			+		83,000
L ₉ DNP		—			+		151,000
L ₁₀ DNP		—	—		+	+	46,000
L ₁₀ DNP			—			+	
L ₁₀ DNP			+			—	
L ₁₁ DNP			—			+	200,000
L ₁₁ DNP			—			+	
L ₁₂ DNP			—			(**)	5,000
L ₁₃ DNP			—			+	50,000
L ₁₄ DNP			—			+	72,000
L ₁₅ DNP			—			+	82,000
L ₁₆ DNP			—			+	150,000

L₆ = leucosi mieloica cronica; L₈, L₁₂ = leucemia mieloblastica acuta; L₄, L₅, L₇, L₉, L₁₀, L₁₁, L₁₃, L₁₄, L₁₅, L₁₆ = leucosi linfatica cronica.

(*) Individui considerati normali in base al conteggio delle CB e in base ad esame sierologico dalla Central Blood Bank, Pittsburgh, 13, Pennsylvania, U.S.A.

(**) Insufficiente quantità di L₁₂DNP.

Questi risultati escludono l'esistenza dimostrabile di un sistema immunologico che controlli in natura l'aumento delle cellule bianche nel sangue sia di individui normali che leucemici.

Sia le NDNP che le LDNP si sono dimostrate sperimentalmente ottimi antigeni nei conigli. NDNP e LDNP danno in agar una sola linea di precipitazione quando sono stati usati preparati freschi.

Dallo studio della reazione immunologica nello spettro specifico delle nucleoproteine nell'ultravioletto, risulta che le nucleoproteine e l'acido desossiribonucleico in particolare partecipano chiaramente ed esclusivamente nella reazione immunologica. Questi studi verranno riferiti ulteriormente.

NAB non interreagiscono con le LDNP e LAB non interreagiscono con le NDNP (Tabella I). Questi risultati dimostrano che gli anticorpi indotti nel coniglio da iniezioni di NDNP e LDNP sono specifici per ciascuna di loro. In un solo caso, una preparazione di DNP da una persona con leucosi cronica linfatica ha dato una reazione positiva con NAB e una reazione negativa con LAB; tuttavia, due altre preparazioni di DNP, ottenute dalla stessa persona 6 mesi prima, sono state conformi ai risultati generali.

La proprietà che NDNP e LDNP estratte dai nuclei delle cellule bianche di individui umani normali e leucemici hanno di indurre la formazione di anticorpi specifici, non è ristretta solamente a queste nucleoproteine, ma è una proprietà delle DNP estratte da sorgenti molto differenti (riccio di mare, timo di vitello, tumori umani, ecc.).

Questi risultati saranno riferiti in una prossima pubblicazione.

Differenze di natura biochimica di già osservate tra NDNP e LDNP fan sorgere la possibilità della identificazione dei gruppi attivi interessati nella reazione immunologica.

La specificità degli anticorpi contro le NDNP e le LDNP indica l'esistenza di una differenza strutturale tra le NDNP e le LDNP. Allo stesso tempo questa specificità dà l'idea dello stato nativo in cui le DNP sono conservate da questo nuovo metodo di estrazione. Essa implica inoltre una influenza della differenziazione nucleare delle DNP nello sviluppo delle cellule bianche ⁽⁶⁾.

Mi propongo di proseguire in queste ricerche che possono portare nuove acquisizioni nello studio della leucemia e del cancro.

(6) L. MESSINEO, *Immunological Differences of Desoxyribonucleoproteins from White Blood Cells of Normal and Leukemic Humans*, letter to the Editor of Nature, presentata il 20 luglio 1960.

Biologia. — *Sui fenomeni regolativi dell'abbozzo genitale in Bufo bufo, dopo asportazione del territorio presuntivo dell'organo di Bidder* ^(*). Nota di ENRICO VANNINI e ELVEZIO GHIRARDELLI, presentata ^(**) dal Socio U. D'ANCONA.

Nostre precedenti ricerche ^(*) furono dedicate allo studio delle conseguenze della precoce asportazione di tratti più o meno estesi di mesoderma urogenitale presuntivo, in embrioni di *Bufo bufo* (L.).

Lo scopo era quello di indagare sulla natura dei fenomeni morfogenetici che, nei Bufonidi, determinano quella regionalità longitudinale della cresta genitale, che si rende manifesta con lo sviluppo dell'organo di Bidder nel suo tratto più cefalico e della gonade propriamente detta in quello più caudale. Le operazioni, da un solo lato del corpo, vennero eseguite ad uno stadio abbastanza precoce dello sviluppo degli embrioni, prima che le cellule germinali primordiali fossero migrate dall'entoderma al mesoderma; ma l'esame istologico dei risultati conseguiti venne effettuato generalmente ad uno stadio molto più tardivo, quando i girini derivati dagli embrioni operati si trovavano in metamorfosi avanzata e gli organi urogenitali erano ormai ben differenziati.

Il risultato più importante che allora raggiungemmo fu la dimostrazione che, asportando il mesoderma della sede presuntiva dell'organo di Bidder, si verifica un fenomeno di regolazione nel mesoderma genitale retrostante, a spese del cui tratto anteriore infatti si sviluppa un organo di Bidder di aspetto consueto, sebbene ectopico perché arretrato rispetto alla sua sede abituale; la gonade, pertanto, risulta fortemente raccorciata, in confronto a quella del lato del corpo non interessato dall'operazione.

Questo reperto ci ha invogliato a continuare le ricerche, per indagare ulteriormente sul meccanismo di un tale potere regolativo, che assicura lo sviluppo di un organo di Bidder nella parte cefalica del tratto residuo di mesoderma genitale, anche quando quest'ultimo sia stato sperimentalmente raccorciato mediante ablazione del suo originario pezzo più craniale.

Pertanto su molti embrioni di *Bufo bufo* all'inizio della schiusa dalle capsule gelatinose dell'uovo (stadi III₂-III₄ delle tavole cronologiche normali di Cambar e Gipouloux 1956, corrispondenti allo stadio 17, di contra-

(*) Istituto di Zoologia dell'Università di Bologna. Indagini eseguite con un contributo del C.N.R.

(**) Nella seduta del 14 gennaio 1961.

(1) E. VANNINI e M. P. REGGIANI, *Primi risultati di esperimenti di asportazione parziale dell'abbozzo genitale in embrioni di Bufo bufo*, « Arch. Ital. Anat. Embr. », vol. LXIV, pp. 301-317 (1959); E. VANNINI e E. GHIRARDELLI, *Esperimenti di asportazione parziale dell'abbozzo genitale presuntivo in embrioni di Bufo bufo*, « Boll. Zool. », vol. XXVI, pp. 515-522 (1959).

zione muscolare, delle tavole di Rossi 1959)⁽²⁾ abbiamo ripetuto le medesime operazioni, che ci avevano condotto al risultato già descritto.

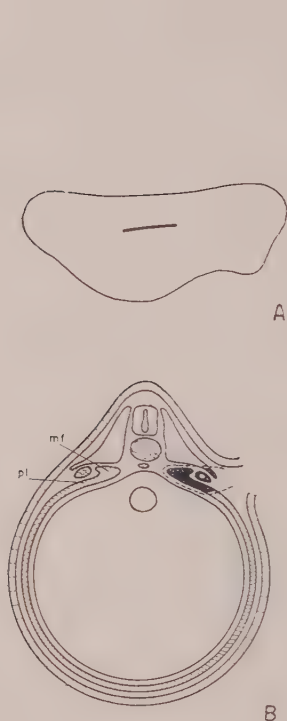


Fig. 1. - Schema delle operazioni.

A: profilo dell'embrione; l'anello punteggiato corrisponde alla prominenza del pronefro e la linea retrostante indica il territorio lungo il quale venne asportato il mesoderma urogenitale presuntivo. *B*: sezione trasversale a livello del tratto operato; a destra, sotto l'epidermide incisa e sollevata, le parti in nero delimitate dal tratteggio rappresentano le formazioni mesodermiche asportate. - *mf*: territorio presuntivo del mesonefro; *pl*: estremità dorsolaterale della piastra laterale; lateralmente a queste formazioni, sezione trasversale del dotto di Wolff.

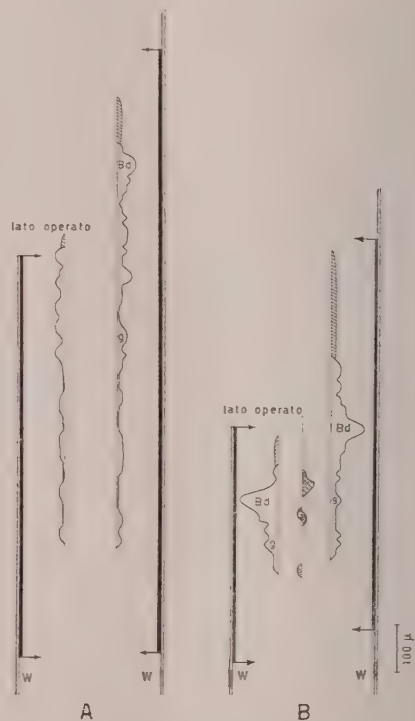


Fig. 2. - Ricostruzioni diagrammatiche dell'apparato urogenitale in due animali alla fine del periodo embrionale uccisi, rispettivamente, 18 giorni (esemplare *A*) e 23 giorni (esemplare *B*) dopo l'operazione.

Ai lati di ciascuna ricostruzione, estensione longitudinale del dotto di Wolff (*W*) sino al suo sbocco caudale in cloaca (corrispondente al lato basso della figura) e del mesonefro (linea ingrossata fra due frecce); al centro, con indicazione delle parti corrispondenti all'organo di Bidder (*Bd*) e alla gonade propriamente detta (*g*), le creste genitali, il cui profilo festonato indica il diverso numero di elementi germinali, contati a ciascun livello, e la cui estremità cefalica a tratteggio rappresenta la porzione sterile pregenitale. Nella ricostruzione dell'esemplare *B* la linea verticale mediana, a tratto interrotto, rappresenta il mesenterio in cui sono comprese (aree a reticolo) poche cellule germinali ectopiche, non ancora migrate nelle creste. Il dotto di Wolff, il mesonefro e la cresta genitale di un lato sono interrotti cefalicamente, a livello del territorio operato.

(2) R. CAMBAR et J.-D. GIPOULOUX, *Table chronologique du développement embryonnaire et larvaire du Crapaud commun: Bufo bufo L.*, « Bull. Biol. France Belgique », t. XC. pp. 198-217 (1956); A. ROSSI, *Tavole cronologiche dello sviluppo embrionale e larvale del Bufo bufo (L.)*, « Monit. Zool. Ital. », vol. LXVI, pp. 133-149 (1959).

Come appare dalla fig. 1, incisa e sollevata l'epidermide, dal lato destro dell'embrione abbiamo asportato un territorio corrispondente al mesoderma intermedio, al dotto di Wolff e alla parte dorsomediale della piastra laterale, dietro alla prominenza del pronefro, per un breve tratto lineare di circa 0,8 mm, lungo il quale più tardi si sarebbero dovuti organizzare la parte più cefalica del mesonefro e l'organo di Bidder. La parte caudale del mesoderma urogenitale non è stata lesa dall'operazione.

A differenza di quanto avevamo fatto negli esperimenti precedenti, non abbiamo ritardato sino all'epoca della metamorfosi dei girini lo studio istologico dei risultati conseguiti, ma abbiamo eseguito i nostri esami in una serie di stadi di sviluppo embrionale assai ravvicinati. In tale maniera abbiamo potuto controllare, tappa per tappa, le conseguenze più immediate dell'intervento operatorio, il che ci ha permesso di ricavare utili informazioni sui meccanismi del potere regolativo, che permette lo sviluppo dell'organo di Bidder nella cresta genitale del lato operato.

Difatti, abbiamo potuto analizzare la situazione che si viene ben presto a stabilire quando le cellule germinali primordiali, spostandosi dall'entoderma attraverso il mesenterio, da pochissimo tempo si sono collocate nella loro sede definitiva, e cioè nel mesoderma generatore delle creste genitali: periodo che approssimativamente corrisponde⁽³⁾ allo stadio IV₁ nelle tavole cronologiche di Cambar e Gipouloux o circa allo stadio 25, con cui termina lo sviluppo embrionale, nelle tavole di Rossi.

Già in quest'epoca (fig. 2, *A* e *B*), sul lato non operato, la cresta genitale mostra un netto gradiente cefalocaudale nei riguardi dell'intensità di affollamento delle cellule germinali primordiali; già infatti si accenna la futura distinzione fra l'organo di Bidder situato cranialmente, in cui le cellule germinali sono più fitte e numerose, e la gonade propriamente detta collocata caudalmente, lunga e sottile, con cellule germinali più rarefatte. Ma anche dal lato operato la cresta genitale, sensibilmente raccorciata perché privata sperimentalmente del suo tratto craniale, presenta sino da questi precoci stadi di sviluppo un analogo gradiente nella distribuzione degli elementi germinali, l'affollamento dei quali va diminuendo in direzione cefalocaudale.

In un primo tempo (ad esempio nell'embrione cui si riferisce la ricostruzione della fig. 2 *A*, che appartiene esattamente allo stadio IV₁ delle tavole cronologiche citate) nella cresta genitale del lato operato il grado di affollamento delle cellule germinali, in effetti, è paragonabile a quello che possiamo riscontrare nella gonade del lato illeso, ai medesimi livelli; pertanto, dal lato operato, non si nota per ora un ammassamento cefalico di elementi germinali, paragonabile a quello di un sicuro abbozzo di organo di Bidder.

Però subito dopo, in embrioni circa del medesimo stadio, ma a sviluppo un po' più progredito (come quello ricostruito nella fig. 2 *B*, che era andato un po' più avanti dello stadio IV₁ pur non avendo ancora raggiunto lo stadio

(3) M. P. REGGIANI, *Osservazioni sull'organogenesi dell'apparato urogenitale in embrioni ed in girini di Bufo bufo*, « Boll. Zool. », vol. XXIV, pp. 201-209 (1957).

IV₂ delle tavole di Cambar e Gipouloux), gli abbozzi dell'apparato urogenitale, un po' più differenziati, in genere risultano più contratti e raccorciati che nella fase precedente, con ispessimento delle creste genitali; ed allora la situazione

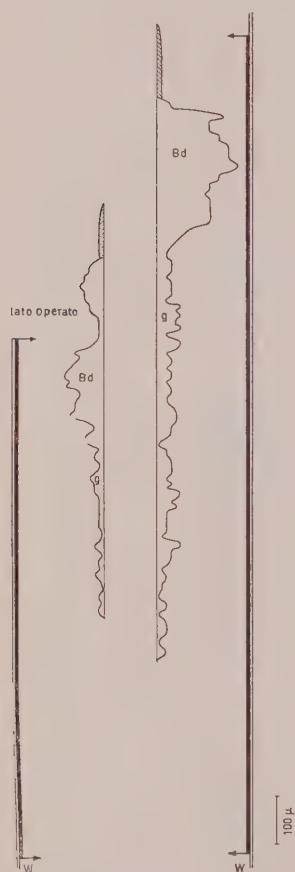


Fig. 3. - Ricostruzione diagrammatica dell'apparato urogenitale, in un esemplare allo stadio di girino con zampe posteriori già abbastanza accresciute, ucciso 40 giorni dopo l'operazione.

Spiegazioni, come per la figura precedente.

si chiarisce. Infatti diviene più evidente che anche dal lato operato, nella cresta genitale sperimentalmente accorciata, le cellule germinali sono fin d'ora ripartite secondo un gradiente cefalocaudale di decrescente affollamento, altrettanto netto e pronunciato che nella cresta genitale del lato illeso. Come in quest'ultima (benché lo spazio disponibile sia assai più limitato), vi si distinguono un tratto cefalico ingrossato, popolatissimo di elementi germinali, ed uno caudale assottigliato, nel quale detti elementi sono molto più scarsi e distanziati: il primo è l'abbozzo di un organo di Bidder, arretrato rispetto alla sua sede consueta e il secondo è l'abbozzo di una gonade, ovviamente assai più corta rispetto a quella del lato non sottoposto a operazione.

L'esame di animali più vecchi, ormai giunti alla fase di girino, conferma quanto abbiamo ora affermato. Ciò appare dalla ricostruzione della fig. 3, di un esemplare (dello stadio IV₇, secondo le tavole cronologiche di Cambar e Gipouloux, VI del periodo larvale nelle tavole di Rossi) ucciso 40 giorni dopo l'operazione, quando le zampe posteriori erano già a forma di paletta. Qui il numero delle cellule germinali è ormai fortemente aumentato negli abbozzi genitali, che perciò sono distinti ancor più chiaramente in organo di Bidder cefalico ed in gonade caudale; una tale distinzione si rileva non solo dal lato indenne, ma anche da quello operato, ove è ovvio che l'organo di Bidder (costituito da due lobi) si è formato a spese del tratto cefalico di un territorio presuntivo che, in assenza dell'intervento operatorio, si sarebbe dovuto differenziare in gonade propriamente detta.

L'aspetto dell'apparato genitale in quest'ultimo esemplare è distintamente intermedio tra quelli riscontrati per gli esemplari cui si riferiscono

le due ricostruzioni precedenti e quello rappresentato nella fig. 7 a p. 310 del lavoro di Vannini e Reggiani (1959), riferito a un esemplare di uno stadio più avanzato, alla fine della metamorfosi. Pertanto ci sembra di avere rintracciato tutte le tappe più essenziali, percorse dall'organogenesi dell'apparato genitale negli animali che sono stati sottoposti all'operazione da noi descritta.

Da quanto si è veduto, ci sembra dunque che risultino chiare le ragioni che rendono possibile quella capacità regolativa, in virtù della quale un organo di Bidder può organizzarsi anche a spese di un tratto di mesoderma genitale normalmente destinato alla gonade propriamente detta. Il diverso destino organogenetico dei vari tratti della cresta genitale dei Bufonidi sembra infatti dipendere, in larga misura, dalla quantità relativa di elementi germinali che vi immigrano all'inizio. Anche in una cresta genitale, che sia stata sperimentalmente raccorciata mediante la precoce distruzione di un pezzo cefalico del suo mesoderma presuntivo, le cellule germinali primordiali presentano, come di norma, sino dall'inizio una ripartizione numerica non uniforme in senso longitudinale; per questo motivo, da quel tratto di essa che è divenuto il più cefalico, in cui le cellule germinali sono più numerose ed affollate, deriva pertanto un organo di Bidder, che è dotato di una struttura istologica normale, benché sia collocato in una sede arretrata rispetto a quella consueta.

COMMEMORAZIONI

Commemorazione del Corrispondente *Ciro Andreatta*

tenuta (*) dal Socio ANGELO BIANCHI

Non è trascorso un decennio dal giorno in cui ebbi la lieta ventura, come relatore, di presentare alla Classe l'opera scientifica di *Ciro Andreatta*, proposto per il Premio Nazionale dell'Accademia dei Lincei che con unanime voto gli avete assegnato nel 1951.

Ed oggi ancora a me spetta il compito doloroso di rievocare in questa stessa sala la memoria dell'allievo carissimo troppo presto scomparso a soli 54 anni, lasciando un vuoto così grande nella sua casa in lutto, nell'Istituto mineralogico di Bologna ravvivato dal suo fervore di Maestro, nell'ambiente della Mineralogia e Petrografia italiana, che in Lui ebbe un insostituibile cultore dei problemi di petrogenesi e di petrotettonica.

Ciro Andreatta era nato a Pergine il 23 gennaio 1906 e fra i monti della sua bella e forte regione Trentina aveva forgiato la temprata salda del carattere, raddolcita da una grande mitezza dell'animo; aveva coltivato la tendenza naturalistica così sviluppata in Lui e tutta permeata di slancio alpinistico, di curiosità scientifica, di passione purissima d'artista.

La vita fu ben presto assai dura per Lui: a Milano per intraprendere gli studi universitari doveva cercare impiego al Credito Italiano. Trasferitosi poi a Padova vi conseguiva la laurea in Scienze naturali nel 1928; ma già negli anni che la tradizione goliardica vorrebbe festosi e sereni, aveva la sventura di perdere entrambi i genitori e di trovarsi, come primogenito d'una famiglia numerosa, il carico di responsabilità e di guida dei sei fratelli minori.

Il fervore di attività didattica e scientifica si esaltava già negli anni dell'assistentato ed io trovavo in Lui non solo un allievo tanto affezionato e devoto, ma anche un indimenticabile compagno di lavoro, ed un prezioso collaboratore nella ricostituzione e nella vita quotidiana dell'Istituto mineralogico patavino.

Aveva conseguito nel 1932 la libera docenza e nel 1936, non ancora trentenne, aveva ottenuto la cattedra di Mineralogia a Messina.

Chiamato due anni dopo a Bologna vi portava l'impulso fecondo della sua dinamica attività e dedicava le spiccate doti di organizzazione ad ingrandire e potenziare l'Istituto di Mineralogia e Petrografia affidato alle Sue cure.

(*) Nella seduta del 14 gennaio 1961.

Si circondava di giovani allievi attratti ed illuminati dalla sua stessa passione, dando vita ad una fiorente Scuola che ha offerto motivi nuovi di prestigio all'antico e glorioso Ateneo.

Il trattato di Mineralogia e Cristallografia pubblicato a Bologna nel 1946 e rinnovato in seconda edizione dieci anni dopo è chiaro documento del suo alto magistero.

Quando nel 1951 la nostra Accademia gli assegnava il premio nazionale, meritato riconoscimento dell'opera scientifica svolta, la somma che s'accompagnava all'alto valore morale del premio serviva per l'acquisto d'una piccola casetta in mezzo ai prati, al limite del bosco sui morbidi dossi dell'altipiano di Piné; e lassù nella terra dov'era nato, fra i suoi monti, Egli si foggiava un nido semplice ed accogliente, espressione tangibile dell'animo suo; in quella pace trovava i momenti più sereni di riposo fra i suoi famigliari; e di là nei mesi estivi, che per i cultori delle Scienze geologiche sono i mesi del più intenso lavoro di campagna, muoveva i passi per nuove ricerche, con i suoi allievi, fra le filladi di Val Sugana, fra i graniti della Cima d'Asta, fra i porfidi quarziferi del Lagorai, fra le impervie cime dell'Ortles e dell'Alto Adige.

L'attività scientifica di Ciro Andreatta si inizia con una serie di studi su minerali del Trentino e con la definizione di una nuova specie mineralogica rinvenuta fra i prodotti della miniera piombo zincifera di Raibl: il solfato esaidrato di ferro e zinco (*bianchite*) le cui caratteristiche fisico-cristallografiche saranno poi dall'autore stesso precisate con lo studio di perfetti cristalli ottenuti sinteticamente.

Si inserisce quindi nel campo petrografico con una prima interessante Memoria sulle rocce della *massa granitica di Cima d'Asta* in Val Sugana.

Nel 1932 Egli ottiene dalla « Fondazione Volta » una borsa di studio per l'estero allo scopo di perfezionarsi nelle indagini di « petrografia strutturale » alla scuola di Bruno Sander, lo Scienziato che la nostra Accademia ha solennemente riconosciuto come fondatore della moderna « Petrotettonica » attribuendogli nel 1956 il premio internazionale Feltrinelli per le Scienze geomineralogiche.

Con singolare prontezza, come mi scriveva allora lo stesso Sander, l'Andreatta si impossessava dei fondamenti teorici e delle tecniche sperimentali della strutturistica petrografica, e ne formava strumento vivo ed operante del nuovo orientamento scientifico.

Rientrato dopo pochi mesi a Padova intraprendeva così un ciclo sistematico di lavori sulle orientazioni regolate di minerali vari in rocce scistoso-cristalline.

Le regole di orientazione della tormalina e del quarzo, dell'olivina, della cianite e dell'anidrite, e le disposizioni regolate dei microliti micacei nei plagioclasì, da lui stabilite in base ad accurate indagini microscopiche e statistiche, vennero accolte con particolare favore nel nostro mondo scientifico e riportate in alcuni dei più autorevoli trattati moderni di Petrografia in Europa ed in America.

I motivi più avvincenti che derivano da queste ricerche riguardano: da un lato le intime relazioni fra piani fondamentali del reticolo cristallino nei singoli componenti mineralogici e piani di deformazione e di taglio delle compagini rocciose; dall'altro le relazioni conseguenti tra filari densi di particelle atomiche dei minerali e direzioni principali di compressione e di movimento delle rocce, sottoposte a processi di ricristallizzazione e di trasformazione cinematica, che accompagnarono i grandi fenomeni orogenetici nella costruzione e nella degradazione delle catene montuose.

E va riconosciuto all'Andreatta il merito di avere, non soltanto portato a nuovi progressi, con risultati originali, indirizzi di studio promossi dai tedeschi Sander e Schmidt, ma anche e soprattutto di aver saputo applicare le accurate indagini microstrutturali allo studio geologico-petrografico di importanti gruppi montuosi dell'Alto Adige e della Sicilia.

Una larga messe di dati sperimentali viene così rivolta alla determinazione di atti metamorfici successivi registrati nell'intimo quadro delle deformazioni cristalline e riferita a varie fasi orogenetiche, in modo da portare essenziali contributi positivi alla interpretazione tettonica ed alla complessa storia geologica d'un massiccio cristallino: in un ambiente cioè dove il profondo rimaneggiamento subito dalle formazioni rocciose ha cancellato le abituali documentazioni di carattere paleontologico-stratigrafico.

L'essenziale motivo che illumina e collega la vasta e profonda indagine di campagna e di laboratorio si riassume dunque nella constatazione fondamentale che « le stesse cause che produssero le grandi strutture d'una regione montuosa originarono anche le più intime strutture microscopiche, nelle quali dobbiamo quindi cercare documenti obiettivi che valgano a chiarire l'architettura e la storia geologica regionale ».

Muovono e si sviluppano da queste basi teoriche e sperimentali la Memoria su *La formazione gneissico-kinzigitica e le olivinit di Val d'Ultimo* con la quale si conclude nel 1936 il periodo di attività padovana; lo studio petrografico del complesso eruttivo del Monte Croce in Alto Adige già iniziato a Padova e concluso a Messina; e gli *Studi geologici e petrografici sul Cristallino dei Monti Peloritani* che valgono a testimoniare la prontezza di orientamento dell'autore nell'ambiente siciliano, dove per due anni tenne la cattedra di Messina con immediata e totale dedizione.

Il ritorno nell'Italia settentrionale con la chiamata a Bologna gli consente di riprendere a pieno ritmo le ricerche geologico-petrografiche sul massiccio dell'Ortles. E per altri vent'anni le superbe vette nevose, le aspre rupi, i morbidi pascoli lo ritrovano in ogni angolo, assieme alla fedele, appassionata Compagna della Sua vita, o seguito dalle sue figlie, o scortato da qualche giovane allievo: armato per lo più di martello e tavolette di rilevamento; ma talvolta anche munito di tavolozza e pennelli per fissare gli spettacoli incomparabili delle cime nevose alle tenui luci dell'aurora o agli infuocati tramonti.

Questo lungo, accuratissimo e poderoso lavoro di campagna e di laboratorio si conclude nel 1951 con la stampa del foglio « *Monte Cevedale* » della

Carta Geologica delle Tre Venezie, che comprende quasi tutto il massiccio dell'Ortles e che possiamo considerare un modello di rilevamento ben difficilmente superabile; e trova poi nel 1954 la sua integrazione con la monografia dal titolo *La Val di Peio e la catena Vioz-Cevedale* che è opera di grande valore, tutta permeata di risultati nuovi, e di interpretazioni originali sulla complessa struttura della Regione.

Avverte il sottotitolo della Memoria che si tratta dello studio geopetrotettonico di una parte del massiccio dell'Ortles: il settore cioè centro-meridionale.

Altri volumi analoghi aveva concepito e già stava preparando l'autore, cosicché resta in noi oggi il rimpianto della vana attesa di nuove opere fondamentali come questa.

Forse il volume successivo ci avrebbe condotti nel settore settentrionale dove la bella conca di Val Solda è dominata dalle cime incombenti dell'Ortles e del Gran Zebrù. Là dove è ancora ben vivo in noi il ricordo delle escursioni del XIII Congresso di Mineralogia guidate dall'Andreatta, come presidente della Società Mineralogica Italiana, nel settembre del 1956.

Varie pubblicazioni che affiancano e seguono la Memoria sulla Valle di Peio già chiariscono altri problemi essenziali della storia geologica dell'Ortles ed assurgono a considerazioni di carattere generale. Si tratta di strutture a vortici individuate nei monti della Val di Sole, di rapporti intercorrenti fra azioni dinamiche e manifestazioni magmatiche a carattere sintettonico e postettonico, di relazioni fra processi metamorfici e stile tettonico nelle formazioni scistoso-cristalline.

Le cure del rilevamento geologico e le indagini di petrografia strutturale, di petrogenesi e di petrotettonica, pur rappresentando il corpo fondamentale dell'opera scientifica di Ciro Andreatta, quello che dà risalto internazionale alla Sua personalità e che ha pienamente giustificato la istituzione a Bologna di un «Centro di Studio per la Petrotettonica» del Consiglio Nazionale delle Ricerche, affidato alla Sua direzione e da Lui portato ad alto ritmo produttivo, non esauriscono tuttavia il quadro della sua complessa e feconda attività scientifica.

Lo attraggono in particolare i problemi della minerogenesi, ed in questo campo suggestivo di studi noi troviamo fra il 1948 ed il 1955 tutta una serie di contributi, presentati a congressi e convegni nazionali ed internazionali in Italia ed in Australia, in Germania e in Inghilterra, che investono interessanti motivi di trasformazione e di paragenesi mineralogica: sia trattando problemi di alterazione dei feldispati e delle miche; sia indagando sull'*origine dei reticoli a strati* nella alterazione dei minerali costituenti le rocce; sia esaminando la *mobilizzazione di sostanze* e la migrazione selettiva di ioni o di soluzioni ioniche nel metamorfismo delle rocce e nella rigenerazione di giacimenti minerari.

Un altro settore a cui l'Andreatta ha rivolto particolare attenzione fra il 1943 ed il 1950 è quello riguardante i minerali delle argille ed i loro

giacimenti. Appartengono a questo gruppo di lavori lo studio su alcune argille montmorillonitiche della Regione di Lucera in Puglia, che hanno trovato largo impiego pratico come materiali bentonitici, e le Memorie sui *Giacimenti di argille montmorillonitiche idrotermali* di Vallortigara, del Posina e della zona di Schio nelle Prealpi Vicentine.

Notevole interesse in tale campo ha assunto la determinazione di un nuovo componente illitico nel giacimento a minerali argillosi di Capalbio presso Orbetello, che ha consentito al Nostro di stabilire una graduale successione di prodotti idrotermali che va dalle miche, alle illiti, alle idromiche ed alle montmorilloniti: interpretazione paragenetica, annunciata nel 1948 al Congresso geologico internazionale di Londra, che ha trovato un anno dopo precisa conferma da analoghe ricerche di tre Autori inglesi.

Piace ancora ricordare che in quest'ultimo triennio troviamo l'Andreatta mobilitato con otto giovani allievi a guidare personalmente un brillante gruppo di lavoro per assolvere il compito del rilevamento geologico-petrografico nell'area dei fogli Ozieri e Tempio Pausania affidatogli dalla Regione Autonoma della Sardegna.

Ma nell'opera scientifica di Ciro Andreatta, che, aveva mente e cuore sempre rivolti ai problemi della sua Regione natia, non potevano mancare anche contributi vari riguardanti *le risorse del suolo del Trentino* (1957), nonché ricerche originali sui *Giacimenti ferriferi della regione di Boai-Comasine in Val di Peio* (1939), sull'*origine dei giacimenti metalliferi nel Permiano superiore del Trentino* (1949), sulla *genesì dei giacimenti metasomatici di magnesite di Zumpanel in Val Solda* (1957).

Né possiamo trascurare i suoi interventi diretti ed autorevoli al Congresso internazionale dei porfidi che ebbe luogo a Trento nel 1950 ed al Simposio internazionale per lo studio del Vulcanismo permiano, organizzato dalla Geologische Vereinigung di Bonn, che venne inaugurato a Karlsruhe nel 1958 e concluso a Trento e Bolzano nel 1959.

Questo convegno, al quale hanno preso parte un centinaio di studiosi di dieci diverse nazioni, aveva particolarmente impegnato l'Andreatta nei Suoi ultimi anni di vita.

Già nel 1949 la nostra Accademia aveva accolto fra i « Rendiconti » alcune note preliminari che offrivano i risultati di nuove osservazioni e nuove idee sulla costituzione della serie basale di lave e tufi del complesso porfirico meridionale atesino. E dopo un decennio di approfondite ricerche, il Nostro poteva presentare in prima bozza al Convegno di Trento una bella *Carta geologico-petrografica dell'Altipiano di Piné*.

È l'ultima sua creazione scientifica che sta nascendo sotto gli auspici del Consiglio Nazionale delle Ricerche, con un ricco corredo di analisi e con linee conclusive già tracciate dall'autore.

Portare a compimento questo lavoro postumo è debito di riconoscenza e di affetto per tutti noi che gli fummo cari e vicini.

E mentre Organizzazioni scientifiche e Società mineralogiche ravvivano in questi mesi la sua memoria in Italia ed all'Estero, dall'Accademia

Nazionale dei Lincei, che lo ebbe attivo corrispondente dal 1948 in poi, noi rivolgiamo a Lui il pensiero commosso con viva gratitudine per tutto quanto di opere e di esempi Egli ha saputo dare alla Famiglia, alla Scuola, alle Scienze geo-mineralogiche, con piena dedizione, fino agli ultimi giorni della sua vita generosamente prodigata e troppo presto perduta.

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI DEL PROF. CIRO ANDREATTA.

1. *Sull'arsenopirite di Nogarè (Trentino)*. « Studi Trentini di Scienze Naturali », 9, pp. 139-148, Trento 1928.
2. *Sulle arsenopirite dei giacimenti minerari di Calceranica e Caldonazzo nel Trentino*. « Studi Trentini di Scienze Naturali », 9, pp. 90-102, Trento 1928.
3. *Di un'interessante roccia filoniana dei Laghi d'Aje nel Lagorai Trentino*. « Studi Trentini di Scienze Naturali », 9, pp. 173-184, 1 tav., Trento 1928.
4. *Bibliografia Mineralogica della Venezia Tridentina*. « Archivio per l'Alto Adige », 23, pp. 1-44, Gleno 1929.
5. *Su alcune calcopirite della Venezia Tridentina*. « Atti dell'Accademia Veneto-Trentino-Istriana », 20, pp. 21-28, Città di Castello 1929.
6. *Pickeringite di Canezza (Trentino)*. « Studi Trentini di Scienze Naturali », 11, pp. 62-68, Trento 1930.
7. *Alcuni interessanti filoni nella massa intrusiva di Cima d'Asta*. « Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti », 89, pp. 827-862, Venezia 1930.
8. *Bianchite, nuovo minerale*. « Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei », Classe di Scienze fis., mat. e nat., 11, pp. 760-769, Roma 1930.
9. *Ricerche petrografiche sulla Regione di Cima d'Asta*. « Memorie dell'Istituto Geologico della R. Università di Padova », 10, pp. 1-62, Padova 1932.
10. *Nuove ricerche sulla bianchite: bianchite sintetica*. « Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei », Classe di Scienze fis., mat. e nat., 16, pp. 62-69, Roma 1932.
11. *Analisi strutturale di rocce metamorfiche*, I. « Periodico di Mineralogia », 3, pp. 181-196, Roma 1932.
12. *Rilevamenti geologici e notizie petrografiche sulla regione Cevedale-Val d'Ultimo (Alto Adige)*. « Atti dell'Accademia Veneto-Trentino-Istriana », 23, pp. 3-16, Selci Umbro 1933.
13. *Analisi strutturali di rocce metamorfiche*. - II. (*Quarzo-tettoniti*). « Periodico di Mineralogia », 4, pp. 15-24, Roma 1933.
14. *Analisi strutturali di rocce metamorfiche*. - III. *La disposizione dei microliti micacei nei plagioclasti di ortogneiss*. « Periodico di Mineralogia », 4, pp. 375-392, Roma 1933.
15. *Ricerche di petrografia strutturale*. « Viaggi di Studio ed Esplorazione », Fondazione Alessandro Volta, Reale Accademia d'Italia, pp. 37-43, Roma 1933.
16. *Disposizione dei microliti micacei in plagioclasti di rocce intrusive (Analisi strutturali di rocce, IV)*. « Periodico di Mineralogia », 5, pp. 217-235, Roma 1934.
17. *Analisi strutturali di rocce metamorfiche*. - V. *Oliviniti*. « Periodico di Mineralogia », 5, pp. 237-253, Roma 1934.
18. *La Catena Cevedale-Venezia-Giovaretto-Orecchia. Note geologico-alpinistiche*. « Rivista del Club Alpino Italiano », 1934, pp. 469-476, Roma 1934.
19. *Un esempio di pieghe di taglio*. « Atti dell'Accademia Scientifica Veneto-Trentino-Istriana », 25, pp. 145-149, Padova 1936.
20. *La formazione gneissico-kinzigitica e le oliviniti di Val d'Ultimo (Alto Adige)*. « Memorie del Museo di Storia Naturale della Venezia Tridentina », 5, pp. 87-245, con 7 tav. e 2 carte, Trento 1936.
21. *Relazioni sul rilevamento geologico nell'Alto Adige Occidentale*, pp. 15, Padova 1935.

22. *Analisi strutturali di rocce metamorfiche*. - VI. *Regola d'orientazione della cianite*. « Periodico di Mineralogia », 6, pp. 205-212, Roma 1935.
23. *Il sottogruppo Angelo-Vertana nel gruppo Ortles-Cevedale. Note alpinistiche geologiche*. « Rivista mensile del Club Alpino Italiano », 1936, pp. 30-34, Roma 1936.
24. *Ueber die quantitative mineralogische Klassifikation der Eruptivgesteine und ihre diagrammatische Darstellung*. « Zentralblatt für Mineralogie, etc. », 1937, pp. 303-314 e 321-343, Stuttgart 1937.
25. *Studio petrografico del complesso eruttivo del Monte Croce in Alto Adige*. « Periodico di Mineralogia », 8, pp. 311-446, Roma 1937.
26. *Petrografia strutturale e Petrotettonica*. « Bollettino della Società Geologica Italiana », 56, pp. 517-530, Roma 1937.
27. *Basalti della Valle dell'Alpone e loro inclusi peridotitici*. « Bollettino della Società Geologica Italiana », 57, pp. 239-264, Roma 1938.
28. *Giacimenti di granato almandino ai contatti del massiccio intrusivo di Cima d'Asta e loro paragenesi*. « Studi Trentini di Scienze Naturali », 19, pp. 105-134, Trento 1938.
29. *Analisi strutturali di rocce metamorfiche*. - VII. *Anidrite*. « Periodico di Mineralogia », 9, pp. 305-321, Roma 1938.
30. *Sui cosiddetti « Scisti del Verrucano » dell'Alto Adige occidentale*. « Studi Trentini di Scienze Naturali », 20, pp. 213-253, Trento 1939.
31. *I giacimenti ferriferi della regione Boai-Comasine in Val di Peio (Trentino)*. « La Ricerca Scientifica », 10, pp. 515-531, Roma 1939.
32. *Ricerche sui giacimenti minerari della Venezia Tridentina. Relazione sulle indagini svolte nell'anno 1939*. « La Ricerca Scientifica », 11, pp. 159-165, Roma 1940.
33. *Appunti geologico-petrografici su alcuni problemi dello zoccolo cristallino dell'Eritrea*. « Rendiconti della R. Accademia d'Italia », Classe di Scienze fis., mat. e nat., 2, pp. 766-776, Roma 1941.
34. *Il contributo della petrografia alla risoluzione dei problemi inerenti la ricerca e lo sfruttamento dei giacimenti di idrocarburi*. « IV Convegno Nazionale del Metano », pp. 8, Bologna 1941.
35. *Studi geologici e petrografici sul cristallino dei Monti Peloritani*. « Bollettino del R. Ufficio Geologico d'Italia », 66, Nota IV, pp. 1-98, con carta geologica e tavole, Roma 1942.
36. *Sulle rocce eruttive del gruppo Ortles-Cevedale*. « Rendiconti della R. Accademia d'Italia », Classe di Scienze fis., mat. e nat., 3, pp. 289-304, Roma 1942.
37. *Successioni nelle manifestazioni magmatiche nel massiccio Ortles-Cevedale*. « Studi Trentini di Scienze Naturali », 23, pp. 161-187, Trento 1943.
38. *Studio petrografico di alcune argille montmorillonitiche pugliesi*. « L'Industria Mineraria d'Italia e d'Oltremare », 17, pp. 73-81, Roma 1943.
39. *Rilevamento geologico della zona di Serra Marapintan del foglio « Cagliari » della Carta Geologica d'Italia al 100.000*. A cura dell'Ufficio Geologico d'Italia, Roma 1943.
40. *Mineralogia*. Volume di pp. XII-710, Bologna 1943.
41. *La regola di orientazione dei cristalli di olivina delle tettoniti*. « Rendiconti della Società Mineralogica Italiana », 3, pp. 41-42, Pavia 1946.
42. *Appunti sopra l'origine dei graniti*. « Rendiconti della Società Mineralogica Italiana », 3, pp. 43-48, Pavia 1946.
43. *La Mineralogia deve essere insegnata da chi la conosce* (in collaborazione con A. BIANCHI). « Rendiconti della Società Mineralogica Italiana », 3, pp. 65-86, Pavia 1946.
44. *Giovanni Boeris*. « Rendiconti della Società Mineralogica Italiana », 3, pp. 14-16, Pavia 1946 e « Rendiconti dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna », 1945-46, pp. 60-64, Bologna 1946.
45. *Energia nucleare e magmatismo*. « Scientia », 40, pp. 77-83, Anno 1940.
46. *Cristalli di ghiaccio*. « Rivista Mensile della S.A.T. », nn. 19-20, pp. 291-294 e 315-317, Trento 1948.
47. *L'origine dei reticoli a strati nell'alterazione dei minerali costituenti le rocce*. « Periodico di Mineralogia », 16, pp. 269-297, Roma 1948 e « Memorie dell'Accademia delle Scienze

- dell'Istituto di Bologna », Classe di Scienze fisiche, 4, 1946-47, pp. 25-43, Bologna 1948.
48. *Ricerche geologico-petrografiche nella regione Vegaia-Tremesca, al margine sud-orientale del gruppo dell'Ortles*. Relazione 1947 del Centro di Studio per la petrografia e geologia del C.N.R. « La Ricerca Scientifica », 18, pp. 543-544, Roma 1948.
49. *La tettonica « a vortici » nei monti della Val di Sole*. « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », Classe di Scienze fis., mat. e nat., 5, pp. 60-67, Roma 1948.
50. *La Linea di Peio nel massiccio dell'Ortles e le sue miloniti*. « Acta Geologica Alpina », 1, pp. 2-63, Bologna 1948.
51. *Sull'alterabilità dei minerali delle rocce*. « International Geological Congress » Report of the Eighteenth Session, Great Britain, 1948, Part II, pp. 5-8, London 1948.
52. *Studio del giacimento idrotermale di minerali argillosi di Capalbio (Orbetello)*. « Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna », Classe di Scienze fisiche, 5, 1947-1948, pp. 51-65, Bologna 1949 e « L'Industria della Ceramica e Silicati », 2, pp. 17-21, Milano 1949.
53. *Studio di un interessante giacimento di riempimento di argille montmorillonitiche idrotermali (Vallortigara-Posina-Schio)*. « Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna », Classe di Scienze fisiche, 6, 1948-49, pp. 16, Bologna 1949.
54. *Studio di un nuovo termine della serie illiti-idromiche in giacimento idrotermale e considerazioni sui passaggi miche-idromiche-montmorillonite*. « Periodico di Mineralogia », 18, pp. 12-31, Roma 1949.
55. *Origine dei giacimenti nel permiano superiore del Trentino e influenza del manganese sulla metallizzazione a galena argentifera*. « Memorie dell'Istituto Geologico dell'Università di Padova », 16, pp. 13, Padova 1949.
56. *A new type of illite-hydromica in a hydrothermal deposit*. « Clay Minerals Bulletin », 3, pp. 96-99, Galashiels 1949.
57. *Rapporti fra colate laviche e coperture di tufi in una zona meridionale del sistema dei porfidi atesini (altopiano di Pinè)*. « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », Classe di Scienze fis., mat. e nat., 6, pp. 563-569, Roma 1949.
58. *Le coltri di tufi del sistema porfirico dell'altipiano meridionale di Pinè*. « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », Classe di Scienze fis., mat. e nat., 7, pp. 37-42, Roma 1949.
59. *Sopra l'alterazione delle miche*. « Rendiconti della Società Mineralogica Italiana », VI, pp. 9, Pavia 1949.
60. *Notizie sulla costituzione del complesso effusivo permiano del Trentino-Alto Adige*. « Rendiconti della Società Mineralogica Italiana », VI, pp. 48-53, Pavia 1949.
61. *Il complesso dei porfidi quarziferi atesini*. « Congresso Internazionale del Porfido », pp. 8, Trento 1950.
62. *Studio petrografico e geologico dei giacimenti e delle argille montmorillonitiche idrotermali della Valle di Mogentale presso Posina (Vicenza)*. « Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna ». Classe di Scienze fisiche, 7, 1949-50, pp. 31, Bologna 1950.
63. (con R. PIRANI): *I Minerali del gruppo dell'Ortles*. - I. *Actinolite e biotite di Val Madriccio*. « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », Classe di Scienze fis., mat. e nat., 9, pp. 320-324, Roma 1950.
64. *Il metamorfismo delle formazioni del gruppo dell'Ortler*. « La Ricerca Scientifica », 21, pp. 190-196, Roma 1951.
65. *Nel cuore della Vedretta di Cedèch sotto il ghiacciaio del Gran Zebrù alla ricerca del ferro*. « Montagne e uomini », pp. 4, Trento 1950.
66. *Foglio « Monte Cevedale » della Carta Geologica delle Tre Venezie a scala 1 : 100.000*, edita dal Ministero dei Lavori Pubblici, Magistrato alle Acque di Venezia, Firenze 1951.
67. *Polymetamorphose und Tektonik in der Ortlergruppe*. « Neues Jahrbuch für Mineralogie, Monatshefte », 1952, pp. 13-28, Stuttgart 1952.
68. (con I. FORNI). *Ricerche roentgenografiche sul componente minerale dell'osso umano naturale non polverizzato e sull'osso demineralizzato*. « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », Classe di Scienze fis., mat. e nat., 13, pp. 14-18, Roma 1952.

69. *Sulla rigenerazione di soluzioni metallifere e di magmi.* « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », Classe di Scienze fis., mat. e nat., 13, pp. 215-222, Roma 1952.
70. *Syntektonische und posttektonische magmatische Erscheinungen der Ortler-gruppe in Beziehung zum alpinen Magmatismus.* « Tscherma's mineralogische und petrographische Mitteilungen », 3, pp. 93-114, Wien 1953.
71. *Ueber die Entstehung regenerierter Lagerstätten durch Magmatismus und tektonisch-metamorphe Mobilisierung.* « Neues Jahrbuch für Mineralogie, Monatshefte », 1953, pp. 131-142, Stuttgart 1953.
72. (con I. FORNI). *Confronto fra spettrogrammi Debye di cartilagine umana naturale, di osso demineralizzato e di osso naturale.* « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », Classe di Scienze fis., mat. e nat., 15, pp. 147-149, Roma 1953.
73. (con I. FORNI). *Studio roentgenografico sul componente minerale ed organico dell'osso e della cartilagine umana naturale.* « Bollettino delle Scienze Mediche », pp. 1-5, Bologna 1953.
74. *Sulla rigenerazione di soluzioni metallifere e di magmi.* « Rendiconti della Società Mineralogica Italiana », IX, pp. 1-5, Pavia 1953.
75. *Sull'origine dei giacimenti e delle argille montmorillonitiche idrotermali della zona di Schio nell'Italia settentrionale.* « Comité International pour l'Etude des Argiles », pp. 149-161, Alger 1952.
76. *Stoffmobilisierung und Stoffbewegungen bei der tektonischen Metamorphose.* « Neues Jb. Mineral., Mh. », pp. 2-17, Stuttgart 1954.
77. *Ueber die Verglimmerung der Plagicklase in der tektonischen Metamorphose.* « Tscherma's mineralogische und petrographische Mitteilungen », pp. 350-359, Wien 1954.
78. *Appunti sul metamorfismo: I. - Mobilizzazione e movimenti di materia nel metamorfismo tettonico.* « Rendiconti della Società Mineralogica Italiana », X, pp. 3-18, Pavia 1954.
79. *Commemorazione dell'Accademico Corrispondente Straniero Paul Niggli.* « Rendiconti dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna », pp. 1-3, Bologna, 1954.
80. *La Val di Peio e la Catena Vioz-Cevedale.* « Acta Geologica Alpina », 5, pp. 337, con 3 tavole e 2 carte e 107 figure, Bologna 1954.
81. *Bemerkungen über Metamorphose. - I. Stoffmobilisierung und Stoffbewegungen bei der tektonischen Metamorphose.* « Fortschritte der Mineralogie », Referate, pp. 56-57, Stuttgart 1953.
82. *Foglio M. Adamello della Carta Geologica al 100.000, zona di Mezzana.* Ministero dei Lavori Pubblici, Roma 1953.
83. *Analisi strutturali di rocce metamorfiche. - VIII. Compagini di parascisti di catazona (Val di Peio, gruppo dell'Ortles).* (In collaborazione con R. PIRANI). « Periodico di Mineralogia », XXIII, pp. 125-145, Roma 1954.
84. *Relazione sui danni derivati dalla variazione dell'equilibrio idrologico dell'alto Frignano in conseguenza della diversione delle acque prevista dal progetto « Abetone » della Soc. Terni.* « Camera di Commercio Industria e Agricoltura di Modena », Modena 1955.
85. *Noch einmal über die Regeneration von Lagerstätten und über die Stoffmobilisierung.* « Neues Jahrbuch für Mineralogie », Monatshefte 1955, pp. 112-117, Stuttgart 1955.
86. *Attuali problemi sul metamorfismo, la tettonica e la metallogenese nel cristallino dei Peloritani.* « Rendiconti della Società Mineralogica Italiana », XI, pp. 38-45, Pavia 1955.
87. *Un raro anfibolo manganesifero, dannemorite, nel giacimento ferriero di Comasine in Val di Peio (gruppo dell'Ortles).* (In collaborazione con R. PIRANI). « Rendiconti della Società Mineralogica Italiana », XI, pp. 343, Pavia 1955.
88. *Il metamorfismo tettonico e la granitizzazione del cristallo di Cima d'Asta.* « Rendiconti della Società Mineralogica Italiana », XI, pp. 343, Pavia 1955.
89. *Centro di studio per la petrotettonica. Attività svolta durante gli anni 1953-1954.* « La Ricerca Scientifica », 25, 9, pp. 2511-2550, Roma 1955.
90. *Polimetamorfismo e stile tettonico in rapporto alla metallogenese nel cristallo dei Peloritani.* « Rivista Mineraria Siciliana », 33, pp. 99-105, Palermo 1955.

91. *Monografia sulla Val di Peio e la catena Vioz-Cevedale*. « La Ricerca Scientifica », 25, 9, pp. 2527-2545, Roma 1955.
92. *Sulla poligenesi delle rocce*. « Atti dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna », Classe Scienze fisiche, XI, II, pp. 59-63, Bologna 1955.
93. *Discorso tenuto a Bologna in occasione del XII Congresso Nazionale di Mineralogia*. « Rendiconti della Società Mineralogica Italiana », XII, pp. 13-19, Pavia 1956.
94. *Discorso tenuto a Trieste in occasione del XII Congresso Nazionale di Mineralogia*. « Rendiconti della Società Mineralogica Italiana », XII, pp. 21-24, Pavia 1956.
95. *Il problema delle facies metamorfiche e delle fasi petrogenetiche nelle formazioni del cristallino antico alpino*. « Rendiconti della Società Mineralogica Italiana », XII, pp. 42-48, Pavia 1956.
96. *L'economia industriale della regione Trentino-Alto Adige*. - Parte I. *Il sottosuolo e le sue possibilità*. « Assessorato Industria, Commercio, Turismo e Trasporto. Ufficio Coordinamento Statistico e Studi », pp. 93, Trento 1956.
97. *L'alterazione dei minerali delle rocce in rapporto alla messa in circolazione del potassio*. « Kalium-Symposium 1955 », Istituto Internazionale della Potassa, Berna, pp. 107-119, Berna 1956.
98. *Recensione critiche*. « Acta Geologica Alpina », 6, pp. 5, Bologna 1956.
99. *I crolli della parete della Paganella ed il convogliamento di detriti su Zambana (Trento) del periodo agosto 1955-aprile 1960*. « Acta Geologica Alpina », 6, pp. 30, Bologna 1956.
100. *Les Sciences Mineralogiques dans le dernier Demi-Siècle*. « Scientia », pp. 6, Asso (Como) 1957.
101. *Petrographische und petrotektonische über die Entstehung der Magnesitlagerstätten des Zumpans (Ortlergruppe) und über die geologische Geschichte der ungrenzenden Dolomitformationen*. « Neues Jb. Mineral. Abh. », pp. 585-622, Stuttgart 1957.
102. *XIII Congresso della Società Mineralogica Italiana. Trento-Gruppo dell'Ortles 2-8 settembre 1956*. « Rendiconti della Società Mineralogica Italiana », XIII, pp. 13-44, Pavia 1957.
103. *Mineralogia e Cristallografia*, II ediz., vol. di pp. XII-880, con 640 figure, Bologna, Libr. Univers., Bologna 1957.
104. *Un contributo alla conoscenza dell'origine dei giacimenti di magnesite: giacimenti metasomatici di Zumpans (Ortles)*. « Rendiconti della Società Mineralogica Italiana », XIII, pp. 71-106, Pavia 1957.
105. *Le facies metamorfiche e il polimetamorfismo delle tettoniti alpine*. « Rendiconti della Società Mineralogica Italiana », XIII, pp. 107, Pavia 1957.
106. (con GUIDICINI). *Nota preliminare di ricerche pretettoniche sulle filladi feldspatizzate di Tenna (Trentino)*. « Rendiconti della Società Mineralogica Italiana », XIII, pp. 108-113, Pavia 1957.
107. *Centro di studio per la petrotettonica. Attività svolta durante gli anni 1955 e 1956*. « La Ricerca Scientifica », pp. 2092-2102, Roma 1957.
108. *Le risorse del sottosuolo*. Settimana Culturale in Economia applicata alla Regione Trentino-Alto Adige « Centro di Studi in Trento dell'Università di Bologna », III, 1956, pp. 15, Bologna 1957.
109. *La costituzione geologica dell'altipiano e l'origine delle acque minerali di Pinè*. « Economia Trentina », 5, pp. 10, Trento 1957.
110. *XIV Congresso della Società Mineralogica Italiana*. « Rendiconti della Società Mineralogica Italiana », XIV, pp. 1-24, Pavia 1958.
111. (con altri). *Notizie preliminari sul rilevamento al 25.000 dei quadranti orientali dei fogli 181 (Tempio Pausania) e 194 (Ozieri) nella Sardegna nord-orientale*. « Rendiconti della Società Mineralogica Italiana », XIV, pp. 37, 46, Pavia 1958.
112. *Nuove osservazioni sulla serie basale della zona meridionale del sistema vulcanico atesino*. « Rendiconti Accademia Nazionale dei Lincei », XXVI, pp. 172-178, Roma 1959.
113. *Parole di presentazione alle conferenze sulla meccanica celeste e satelliti artificiali*. « Centro di Studio in Trento dell'Università di Bologna », Trento 1958.

114. *Importanza della protezione del suolo e delle falde acquifere*. « Natura e Montagna », VI, pp. 25-29, Bologna 1959.
115. *Aufeinanderfolge der magmatischen Tätigkeiten in Grössten Permisch-Vulkanischen Schild der Alpen*. « Geologischen Rundschau », 48, pp. 99-111, Stuttgart 1959.
116. *Zwangsweise Ionenwanderung bei der tektonischen Metamorphose*. « Geologische Vereinigung », Jubil. z. 50 jār. Best., Würzburg, 12. 14 März 1960.
117. *Carta geologica e petrografica dell'Altipiano di Pinè (Trentino)* a scala 1 : 25.000. « Consiglio Naz. delle Ricerche - Centro di Studio per la Petrotettonica », Bologna 1960.
118. *Successione delle attività magmatiche nella grande piattaforma porfirica Atesina* (Opera postuma). In corso di stampa in « Acta Geologica Alpina », Bologna 1961.
119. *Il polimetamorfismo nel quadro dei problemi concernenti la poligenesi delle rocce* (Opera postuma). In corso di stampa in « Acta Geologica Alpina », Bologna 1961.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente dà la parola al Socio Bianchi che commemora il compianto Collega *Ciro Andreatta*.

Sono presenti i famigliari dello Scienziato scomparso, il Geometra *Barbagallo*, in rappresentanza del Sindaco di Trento; il prof. *Tomasi* del Museo di Storia Naturale di quella Città: il Socio *Dore*, in rappresentanza dell'Università di Bologna, e il prof. *Pasquini* della Università di Roma.

Hanno inviato messaggi di adesione la Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche dell'Accademia, i Soci *Panichi*, *Gortani* e *Desio*, il Direttore Generale dell'Istruzione Superiore dott. *Marchese* e numerosissimi colleghi, amici e discepoli del compianto Socio.

Il Socio *Anziano Cassinis* ringrazia il Collega *Bianchi* per la sua elevata orazione e rinnova ai familiari del prof. *Andreatta* l'espressione del più vivo cordoglio dell'Accademia e suo personale per l'imatura scomparsa del giovane e valoroso Scienziato.

Il Socio *Anziano Cassinis* informa la Classe che il 25 dicembre u. s. è deceduto il Socio Corrispondente *Gustavo Brunelli*, della Categoria V (Sezione Zoologia). Comunica inoltre che soltanto ora è pervenuta all'Accademia la notizia della morte dei Soci Stranieri *Jones Harold Spencer*, della Categoria II (Astronomia, Geodesia, Geofisica e applicazioni), deceduto il 3 febbraio 1960 e *Osvald Veblen*, della Categoria I (Matematica, Meccanica e applicazioni), deceduto il 10 agosto dello stesso anno.

Gustavo Brunelli, Corrispondente dal 1° luglio 1937, fu libero docente di anatomia e fisiologia comparata. Vincitore di due terne universitarie in anatomia comparata e in zoologia e chiamato alla cattedra di zoologia dell'Università di Perugia, vi rinunciò per ragioni familiari e per continuare a dirigere il Laboratorio Centrale di Idrobiologia. Diresse per molti anni l'Ispettorato della Pesca al Ministero di Agricoltura, promuovendo la legge 24 marzo 1921 in favore della pesca e dei pescatori e la fondazione del Laboratorio Centrale di Idrobiologia.

Jones Harold Spencer, Socio Straniero dal 5 ottobre 1947, già Astronomo reale al Capo di Buona Speranza, Astronomo reale d'Inghilterra e Presidente dell'Unione Astronomica Internazionale, fu uno dei più insigni cultori dell'astronomia classica. A lui si deve particolarmente la discussione minuziosa delle osservazioni di *Eros*, fatte in tutto il mondo nel 1931-32, allo scopo di determinare un valore più esatto della parallasse del Sole, strettamente connessa con la costante di nutazione e con la determinazione della massa della Terra e della Luna. Così pure si debbono a lui altri studi di grande importanza sopra le irregolarità della rotazione terrestre. Fu Presidente della Commissione Internazionale dei movimenti del polo.

Osvald Veblen, anch'egli Socio Straniero dal 1947, fu internazionalmente noto per i suoi contributi di alto valore alla teoria degli spazi a connessione e alla topologia.

Questi contributi e la sua azione animatrice di Maestro nell'Università e nello « Institute for advanced Study » di Princeton lo posero in prima linea nella scuola matematica e nella cultura statunitense.

Alla memoria dei tre illustri studiosi, il prof. Cassinis eleva un pensiero di reverente omaggio.

Il Presidente comunica quindi che il Collega Tonzig ha accettato di commemorare i Soci Pavari e Chiarugi, impegnandosi a tenere la prima delle suddette commemorazioni nella seduta ordinaria del prossimo febbraio e la seconda in quella di giugno.

Il Presidente prega poi il Collega Boaga di voler fissare la data della commemorazione del Socio Mineo e il prof. Boaga assicura che tale commemorazione potrà aver luogo nella seduta di aprile.

La Classe, infine, dà mandato ai Colleghi della Sezione Chimica di proporre i nomi degli oratori per le commemorazioni dei Soci Maria Bakunin e Luigi Rolla e, su proposta del Socio Cotronei, delibera di officiare il prof. Remotti per la commemorazione del Socio Brunelli.

Il Presidente comunica infine che il Collega Pupilli, il quale era stato interpellato in merito alla commemorazione del Socio Gilberto Rossi, ha fatto presente l'opportunità di affidare tale compito al Collega Spadolini che del compianto prof. Rossi fu diretto allievo.

La proposta del Socio Pupilli è approvata all'unanimità.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Tonzig presenta, illustrandone brevemente il contenuto, il VII volume dei « Lavori dell'Istituto Botanico dell'Università di Milano », da lui diretto, che comprende 30 studi eseguiti nel periodo 1959-60, tra i quali numerosi lavori dello stesso Socio Tonzig e di suoi collaboratori sulla fisiologia dell'acido ascorbico.

Il Socio Dore presenta il fascicolo speciale, edito in onore del Collega Cassinis, del « Bollettino di Geodesia e scienze affini », nel quale sono raccolti gli articoli che studiosi italiani e stranieri hanno voluto compilare per il 75° compleanno dell'illustre Scienziato. Il volume è dovuto all'iniziativa della Commissione Geodetica Italiana e dell'Istituto di Geodesia, Topografia e Fotogrammetria del Politecnico di Milano, diretto dal Collega Solaini, ed è stato stampato dall'Istituto Geografico Militare, che ha voluto così associarsi all'affettuoso omaggio reso al prof. Cassinis da amici e discepoli.

Il Socio Dore, dopo aver ricordato le grandi benemeritenze acquisite dal Collega Cassinis nel lungo periodo in cui tenne la direzione dell'Istituto di Geodesia, Topografia e Fotogrammetria del Politecnico stesso, mette in evidenza che egli fu un precursore e uno dei principali protagonisti del rin-

novamento avvenuto nelle scienze geodetiche nell'ultimo cinquantennio e che a lui va il grande merito di avere affrontato e risolto alcuni dei problemi fondamentali di quella scienza, che sembravano già definiti e che invece, anche per opera sua, si ripropongono ora in forma del tutto rinnovata.

L'oratore è lieto di rendersi interprete dei sentimenti di riconoscenza che tutti i geodeti hanno verso il prof. Cassinis e di presentare in sede accademica questo volume che fu già offerto all'insigne Maestro il 12 novembre, in una solenne cerimonia svoltasi al Politecnico di Milano, in occasione del suo ritiro dall'insegnamento attivo per limiti di età.

Il Socio Anziano Cassinis ringrazia commosso l'amico Dore e tutti coloro che hanno voluto manifestargli il loro affettuoso ricordo.

Il Socio Cappelletti presenta cinque memorie appartenenti a una collana di lavori, iniziati già da qualche anno, dal titolo: « Ricerche sull'ecologia e sul popolamento delle dune del litorale di Venezia ». Tale collana rientra nella serie di studi sulla flora e sulla vegetazione delle Venezia, a cura dell'Istituto Botanico dell'Università di Padova e contiene i risultati di ricerche eseguite con il contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

Delle presenti memorie, una dal titolo « Ricerche sul deficit d'acqua », è dello stesso Socio Cappelletti, mentre una seconda, anche essa del prof. Cappelletti in collaborazione con Margherita Pastori-Birti, tratta delle « Prove di traspirazione con piante *in toto* ». Le altre tre, rispettivamente di Sandro Pignatti, Margherita Pastori-Birti e Paola Colombo Mariani, sono intitolate, nell'ordine, « Il popolamento vegetale », « Ricerche sulla traspirazione e sul ritmo del movimento degli stomi » e « Ricerche ecologiche sul ricambio di alcune piante di duna ».

Il Socio D'Ancona presenta la II edizione della sua « Zoologia » che fa seguito alla I, uscita nel 1953.

L'oratore mette in evidenza come i progressi compiuti dalle discipline biologiche in sette anni lo abbiano indotto a rifare quei capitoli in cui si sono avute maggiori acquisizioni di fatti nuovi e formulazione di nuove idee: quelli cioè della citologia, della embriologia generale, della genetica, della ecologia. Ma anche nella zoologia speciale, suscettibile di un più lento progresso, si sono avute scoperte tali da rendere opportune alcune modifiche dell'ordinamento sistematico e necessario l'inserimento di nuovi gruppi, prima sconosciuti o poco conosciuti, come, ad esempio, i gruppi dei Misticocaridi, dei Monoplacofori e dei Pogonofori.

Il Socio D'Ancona, dopo aver ricordato che la nuova edizione non si distacca sostanzialmente dalla formula precedente, anche per quanto riguarda le dimensioni dell'opera, osserva che un notevole rinnovamento è stato però apportato alle parte iconografica, sostituendo alcune figure con altre migliori e aumentando il numero delle figure originali.

Conclude esprimendo il suo ringraziamento alla Casa Editrice U.T.E.T. per la premura con cui ha curato la nuova edizione, migliorandola nella veste tipografica e illustrativa.

Il Socio A. Terracini presenta il 1° volume delle « Opere scelte » di Leonida Tonelli, pubblicate a cura dell'Unione Matematica Italiana con il contributo del C.N.R. La pubblicazione è curata da una Commissione costituita dai prof. E. Baiada, L. Cesari, S. Cinquini (Presidente della Commissione, e instancabile animatore dell'impresa), S. Faedo, L. Giuliano, D. Graffi A. Mambriani, E. Magenes, tutti discepoli del grande Scienziato scomparso.

L'oratore illustra il presente volume che contiene 46 lavori dedicati alla teoria delle funzioni di variabile reale e che sarà seguito da altri tre, dei quali due dedicati al calcolo delle variazioni e l'ultimo alle altre pubblicazioni aventi come oggetto le serie trigonometriche, le equazioni differenziali ordinarie, le equazioni integrali, le funzioni analitiche e argomenti vari.

Il Socio Terracini conclude ricordando che l'impresa costituisce un degno tributo d'omaggio alla memoria di Leonida Tonelli che fu uno dei più grandi Maestri della Matematica italiana.

Il predetto Socio Terracini presenta anche il volume, pure esso edito dall'Unione Matematica Italiana con il contributo del C.N.R., contenente gli Atti del Convegno Internazionale di teoria dei gruppi finiti e applicazioni, promosso dall'Università di Firenze e svoltosi in quella città dall'11 al 13 aprile 1960.

Al Convegno, che è stato finanziato dal C.N.R., dal Primo Gruppo di Istituti e Seminari Matematici e dall'Università di Firenze, hanno partecipato numerosi scienziati italiani e stranieri – tra i quali i Soci Sansone e Segre – che hanno svolto nove conferenze e dieci comunicazioni.

Il Presidente ringrazia i Colleghi che hanno presentato le suddette opere.

Il Segretario Accademico illustra le pubblicazioni pervenute in dono all'Accademia.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci Margaria, Cambi, Carobbi, Tonzig, Cappelletti, Montalenti, Leonardi, D'Ancona, G. Bompiani, Vardabasso, G. B. Dal Piaz, Quilico e Semerano.

Il Socio Picone presenta una Memoria dal titolo « Criteri sufficienti per il minimo assoluto di un integrale unidimensionale del primo ordine », ricordando che l'argomento in essa trattato era già stato oggetto di suoi studi in età giovanile. Ora, ormai libero dai gravosi impegni inerenti alla direzione dell'Istituto Nazionale del Calcolo, è lieto di poter occuparsi nuovamente, dopo molti anni, di questi problemi che, a suo avviso, sono suscettibili di ulteriori importanti sviluppi.

Il Socio Cassinis si congratula vivamente con il Collega Picone ed esprime il sincero voto che egli possa ancora per lungo tempo dedicarsi alla ricerca scientifica, accrescendo così le già tante alte e numerose benemerienze da lui acquisite nel campo delle matematiche.

Viene letto l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

ALBERGHINA F. e MARRÈ E. – Aumento dell'attività glucosio-6-fosfato deidrogenasica in fettine di organi di riserva pres. dal Socio S. TONZIG.

CORRADINI P. e ALLEGRA G. – Calcolo della diffrazione ai raggi X dovuta ad una struttura con impacchettamento disordinato di strati aventi struttura ordinata (pres. dal Socio G. NATTA).

SOMMAVILLA E. – Tettonica eruttiva nel gruppo del Buffaure a sud di Fontanazzo-Campestrin in Val di Fassa (pres. dal Corresp. P. LEONARDI).

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente dà notizia di un Seminario Internazionale indetto dalla Harvard University per il periodo 3 luglio-18 agosto 1961 e riservato a giovani studiosi di età non inferiore a 26 anni e non superiore a 45.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 14 gennaio 1961

- AFANAS'EV A. V. — *Zoogeografija Kazahstana. (Na osnove rasprostraneniija mleko-pitajuših)*. Alma-Ata, Izdatel'stvo Akademii Nauk Kazahskoj SSR, 1960. Pp. 260, in-8°, con figg.
- ATAEV S. S. — *Pod'emno - transportnye raboty v sbornom žiliščnom stroitel'stve*. Minsk, Izdatel'stvo Akademii Nauk BSSR, 1960. Pp. 120, in-8°, con figg.
- Bollettino di Geodesia e Scienze Affini*. A. XIX, 1960, n. 4 (numero speciale). Fascicolo in onore del prof. Gino Cassinis.
- CAPPELLETTI Carlo. — *Ricerche sul deficit d'acqua*. Estr. da « Bollettino del Museo Civico di Storia Naturale di Venezia », vol. XII, 1959 (Ricerche sull'Ecologia e sul Popolamento delle Dune del Litorale di Venezia).
- CAPPELLETTI Carlo e PASTORI-BIRTI Margherita. — *Prove di traspirazione con piante « in toto »*. Estr. da « Bollettino del Museo Civico di Storia Naturale di Venezia », vol. XII, 1959 (Ricerche sull'Ecologia e sul Popolamento delle Dune del Litorale di Venezia).
- CASSINIS Gino. — Vedi: *Bollettino di Geodesia e Scienze Affini*.
- CIUCU George și THEODORESCU Radu. — *Procese cu legături complete*. București, Editura Academiei Republicii Populare Romîne, 1960. Pp. 231, in-8° (Colecția « Theoria Probabilităților », I).
- CLARK Dana K. — Vedi: GRAHAM Joseph J.
- COLOMBO MARIANI Paola. — *Ricerche ecologiche sul ricambio di alcune piante di duna*. Estr. da « Bollettino del Museo Civico di Storia Naturale di Venezia », vol. XII, 1959 (Ricerche sull'Ecologia e sul Popolamento delle Dune del Litorale di Venezia).
- Convegno Internazionale di teoria dei gruppi finiti e applicazioni*. Promosso dalla Università di Firenze, 11-13 aprile 1960. Editto dalla Unione Matematica Italiana con il contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Roma, Edizioni Cremonese, 1960. Pp. VII-157, in-8°.
- D'ANCONA Umberto. — *Trattato di Zoologia*. 2ª ed. Torino, Unione Tipografico-Editrice Torinese, 1960. Pp. XXVII-1157, in-8°, con figg.
- DOLGUŠIN I. A. — *Pticy Kazahstana*. T. I. Alma-Ata, Izdatel'stvo Akademii Nauk Kazahskoj SSR, 1960. Pp. 470, in-8°, con figg.
- FUGLISTER F. C. — *Atlantic ocean atlas of temperature and salinity profiles and data from the International Geophysical Year 1957-1958*. Woods-Hole, Woods-Hole Oceanographic Institution, 1960. Pp. 209 figurate, in-f° (The Woods-Hole Oceanographic Institution Atlas Series, vol. I).
- GRAHAM Joseph J. — Vedi: SCHENCK Hubert and GRAHAM Joseph J.
- GRAHAM Joseph J. and CLARK Dana K. — « *Lacosteina paynei*, a new species from the upper cretaceous of California. Estr. da « Contributions from the Cushman Foundation for Foraminiferal Research », vol. XI, 1960, p. 4.
- HARBAUGH John W. — *Small scale cross-lamination in limestones*. Estr. da « Journal of Sedimentary Petrology », 1959, marzo.
- HOWARD Arthur David. — *Audienceship*. Estr. da « American Scientist », vol. XLVIII, 1960, n. 1.
- *Photogeology at Stanford University*. Estr. da « Photogrammetric Engineering », 1960, marzo.
- IRWIN John B. — *I. Cepheids in galactic clusters*. Estr. da « Transactions of the International Astronomical Union », vol. X, 1960.
- KORNILOVA V. S. — *Nižnemiocenovaja flora Kušuka. (Turgajskij progib)*. Alma-Ata, Izdatel'stvo Akademii Nauk Kazahskoj SSR, 1960. Pp. 112, in-8°, con tavv.
- Lavori dell'Istituto Botanico dell'Università di Milano*. Direttore prof. Sergio Tonzig. Vol. VII, 1960.

- LUYTEN Willem J. — Vedi: *Search (A) for faint blue stars*.
Methody ljuminescentnogo analiza. Materialy VIII soveščanija po ljuminescencii (19-24 oktjabrja 1959 g.). Minsk, Izdatel'stvo Akademii Nauk BSSR, 1960. Pp. 148, in-8°.
- MORELLI Carlo. — *Gravità assoluta. Stato attuale e necessità metrologiche*. Estr. da « Bollettino di Geodesia e Scienze Affini », vol. XIX, 1960, n. 4.
- MUSEO (II) Documentario, nel giudizio di competenti italiani e stranieri. Nel XX Anniversario della sua fondazione. Roma, Arti Grafiche E. Cossidente, 1960. Pp. 136, in-4°, con tavv. (Istituto di Storia della Medicina dell'Università di Roma).
- OSNOVNYE IDEI M. A. USOVA v geologii. *Sbornik posvjaščen svetloj pamjati akademika Mihaila Antonoviča Usova*. Alma-Ata, Izdatel'stvo Akademii Nauk Kazahskoj SSR, 1960. Pp. 541, in-8°, con figg.
- OUCHI Koji. — *Magnetochemical studies of coals and their related substances (Second Report). On carbonization and graphitization (P. I.)*. S. I., Resources Research Institute [of] Japan, 1955. Pp. 151, in-8°, con tavv. (Report of the Resources Research Institute, n. 31).
- PASTORI-BIRTI Margherita. — *Ricerche sulla traspirazione e sul ritmo del movimento degli stomi*. Estr. da « Bollettino del Museo Civico di Storia Naturale di Venezia », vol. XII, 1959 (Ricerche sull'Ecologia e sul Popolamento delle Dune del Litorale di Venezia).
- PASTORI-BIRTI Margherita. — Vedi: CAPPELLETTI Carlo e PASTORI-BIRTI Margherita.
- PICONE Mauro. — *Sulla vita e sulle opere di Eugenio Elia Levi*. Roma, Istituto Nazio-
- nale per le Applicazioni del Calcolo, 1959. Pp. XIX, in-8° (Pubblicazioni, n. 546).
- PIGNATTI Sandro. — *Il popolamento vegetale*. Estr. da « Bollettino del Museo Civico di Storia Naturale di Venezia », vol. XII, 1959 (Ricerche sull'Ecologia e sul Popolamento delle Dune del Litorale di Venezia).
- REY PASTOR Julio. — *Apuntes de teoría de los conjuntos abstractos*. San Luis, Facultad de Ciencias de la Educación, Instituto de Matemáticas, 1957. Pp. 55, in-8° (In litografia).
- SCHENCK Hubert G. and GRAHAM Joseph J. — *Subdividing a Geologic Section*. Estr. da « The Science Report of the Tohoku University », ser. 2ª (Geologia), vol. speciale (Hanzawa Memorial Volume), 1960, n. 4.
- SEARCH (A) for faint blue stars. XXI: *Proper motions for 150 faint stars*. By Willem J. Luyten. Minneapolis, The Observatory, University of Minnesota, s. d. Pp. 4, in-8°.
- THALMANN Hans E. — *Bibliography and index to new genera, species and varieties of foraminifera for the year 1956*. Estr. da « Journal of Paleontology », vol. XXXIII, 1959, n. 6.
- THEODORESCU Radu. — Vedi: CIUCU George și THEODORESCU Radu.
- TIHOV G. A. — *Osnovnye trudy. (V p'jati tomah)*. T. V: *Botanika, Mars, žizn' vo Vselennoj, fizika, astrofizika i atmosfernaja optika (1912-1958)*. Alma-Ata, Izdatel'stvo Akademii Nauk Kazahskoj SSR, 1960. Pp. 339, in-8°, con figg. e tavv.
- TONELLI Leonida. — *Opere scelte*. A cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Vol. I: *Funzioni di variabile reale*. Roma, Edizioni Cremonese, 1960. Pp. vi-604, in-8°, con figg.

A. SIGNORINI' e G. COTRONEI. •

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta dell'11 febbraio 1961

Presiede il Socio anziano GINO CASSINIS

NOTE DI SOCI

Meccanica. — *Moltiplicatore critico λ_{cr} per volte autoportanti.*
Nota I del Socio GIULIO KRALL e di DOMENICO CALIGO, presentata (*)
dal Socio G. KRALL.

§ 1. — LE VOLTE CILINDRICHE AUTOPORTANTI.

1. — a) Riprendiamo due antiche Note ⁽¹⁾ su questi « Rendiconti » dove abbiamo trattata la sempre aperta questione della stabilità dell'equilibrio delle volte autoportanti. Si allude a quelle volte cilindriche su direttrici particolari, necessariamente sovralzate, come si dimostra, sull'ideale catenaria dei carichi diffusi passante per il loro vertice e per i loro due estremi liberi. Liberi, perché queste volte sono prive di imposta proprio in corrispondenza alle generatrici di bordo $\psi = -\psi_0$, $\psi = +\psi_0$ ⁽²⁾. Naturalmente, per sostenersi, queste volte devono essere timpanate agli estremi $x = 0$, $x = L$ delle generatrici. I timpani sorreggono tutto: trasmettono i carichi verticali ai pilastri su cui poggiano, prendono le spinte che avrebbero dovuto essere prese

(*) Nella seduta dell'11 febbraio 1961.

(1) *Moltiplicatore critico λ_{cr} di una distribuzione di carico su una volta autoportante*, Nota I di G. KRALL (« Rend. Acc. Naz. dei Lincei », Classe di Scienze fisiche, ser. VIII, vol. I, fasc. 12, pp. 1281-1295 (dicembre 1946)) e Nota II di D. CALIGO (ibidem, vol. IV, fasc. 1, pp. 15-21 (gennaio 1948)).

(2) Come si vede in fig. 2 e come sarà meglio precisato più avanti, indichiamo con ψ la coordinata angolare misurata dal colmo e con x la coordinata nel senso delle generatrici.

dalle mancanti imposte o, in luogo di queste, dai tiranti in corrispondenza ai pilastri che in duplice filare si distribuiscono nelle volte ordinarie lungo le generatrici di bordo. L'assenza di imposte o di pilastri e tiranti (cfr. fig. 1⁽³⁾) giustifica sempre ampiamente la denominazione di *volta autoportante*.



Fig. 1. - Officina montaggio torri (Ansaldo-Genova).

Il gioco statico secondo cui tutti i carichi si trasmettono ai timpani non è quello della trave ordinaria, attesa la generale sottigliezza della volta e attese le dimensioni globali della direttrice, più o meno dell'ordine della luce L . Non è un gioco statico semplice a meno che non si riesca a semplificarlo considerando i soli sforzi T_2 , S , T_1 nella superficie (cfr. fig. 2) per arrivare ad un equilibrio estensionale puro che soddisfi sufficientemente le *condizioni al contorno*: in particolare T_2 ed S nulli sulle generatrici di bordo, T_1 nullo in corrispondenza ai timpani, se questi non reagiscono per loro natura normalmente al loro piano, oppure condizioni più complicate se invece tale reattività sussiste, come ad esempio nel caso della volta continua su più od infinite campate.

b) Tipi classici di direttrici sono il semicerchio, la cicloide, la semielisse, tutte curve per cui la tangente ai bordi risulta parallela ai carichi se

(3) G. KRALL, *Le volte autoportanti*, in *Manuale dell'Ingegnere Civile* (ed. Cremonese, Roma 1959), pp. 739-771; cfr. anche in « *Tecnica Italiana* », Trieste, dicembre 1946, da dove sono tratti gli esempi illustrativi, su progetti dell'autore, qui ed in seguito riportati.

questi derivano dal peso proprio od accidentale quindi verticale. Là, dove la tangente è parallela ai carichi è intuibile che T_2 , sforzo assiale nella direttrice, si annulla; infatti se Z è la componente del carico sulla normale in un punto ed R il raggio di curvatura, è $T_2 = RZ$. Se è facile annullare T_2 sulle generatrici di bordo ed è quindi possibile far a meno dell'imposte o dei pilastri e tiranti ordinari non sempre è facile annullare il taglio S .

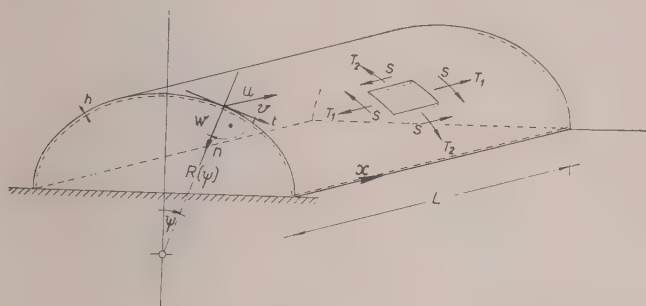


Fig. 2.

Ove non si riesca c'è però un modo che il calcolo dell'equilibrio tenso-flessionale di cui si dirà in appresso dimostra⁽⁴⁾ accettabile, di salvare egualmente la soluzione che soddisfa le altre condizioni. Precisamente, si pensa applicato, solidale lungo il bordo, un elemento-tirante capace di assorbire, procedendo da $x = 0$ sino al mezzo ed oltre sino all'estremo $x = L$, l'integrale del taglio $\int_0^x S(t, \frac{\pi}{2}) dt$. Ciò dà luogo a discontinuità delle sollecitazioni

se l'elemento-tirante è, diciamo, filiforme, ma, ove si pensi diffuso su più fili in un conveniente intorno (dei bordi), tutto va sempre per il meglio.

c) Si dà, in generale, la direttrice nella forma $R = R(\psi)$ con R raggio di curvatura, in un punto generico, definito dall'angolo ψ che la normale in questo fa con una direzione assegnata. Questa direzione sia la verticale e gli archi della direttrice siano simmetrici rispetto ad un asse verticale, dal quale si inizi il conteggio della coordinata angolare ψ ; allora sui bordi si ha $\psi = \mp \psi_0$. Per la base semicircolare è $\psi_0 = \pi/2$ e tale direzione verticale caratterizza le generatrici di bordo, nelle quali la tangente è verticale (quindi la normale è orizzontale) e si annulla T_2 .

Se indichiamo con a il raggio del cerchio, o del cerchio generatore della cicloide, con a e b ($0 < b/a = k < 1$) i due semiassi dell'ellisse, risulta:

$$(1) \quad R = a, \quad \text{per il cerchio;}$$

$$R = a \cos \psi, \quad \text{per la cicloide;} \quad R = ak^2 (\sin^2 \psi + k^2 \cos^2 \psi)^{-3/2}, \quad \text{per l'ellisse.}$$

(4) D. CALIGO e M. J. DE SCHWARZ, *Calcolo delle volte cilindriche circolari sottili*, nella collana: *Manuali per applicazioni tecniche del calcolo* [IV], dell'Ist. Naz. per le Applicazioni del Calcolo (ed. Cremonese, Roma 1960).

2. *Elementi geometrici, spostamento, sforzi, carichi.* - a) Sia P un punto generico dalla superficie mediana della volta, superficie che sarà indicata con Ω (attribuendo ovvii contrassegni in relazione alle sue diverse configurazioni; ad esempio Ω_0 alla configurazione C_0 , Ω' alla C' , ecc.).

Gli *elementi geometrici* della volta (cilindrica) sono (cr. ffig. 2).

L, lunghezza (distanza fra due timpani);

R, raggio di curvatura ($= a$, per il semicerchio);

h , spessore (supposto piccolo, rispetto ad L e ad R ⁽⁵⁾);

φ_0 , apertura angolare; ψ_0 , semiapertura (in condizioni di simmetria).

Stabiliamo un sistema di coordinate x, ψ sulla Ω in modo che

ψ , coordinata angolare, cresca fra $-\psi_0$ e $+\psi_0$, ruotando in senso orario sull'arco di volta, nel passare da un bordo all'altro;

x , coordinata nel senso delle generatrici cresca fra 0 ed L nel passare da un timpano all'altro;

l'origine di questo sistema è dunque fissata su uno dei timpani al colmo della volta (pensata simmetrica).

b) Abbiamo indicato con

u, v, w la terna (sinistra) di *componenti dello spostamento* in direzione e verso, rispettivamente, di x , di ψ , della normale interna ad Ω ⁽⁶⁾;

T_1, T_2 : *sforzi normali* alle sezioni $x = \text{costante}$, rispettivamente $\psi = \text{costante}$ (per unità di lunghezza); per abituale convenzione essi sono negativi se nel verso crescente della variabile x , risp. ψ , è esercitata una compressione;

S *sforzo di taglio* (per unità di lunghezza) corrispondente al valore comune degli sforzi di taglio tangenziali S_{12} ed S_{21} (che assumono eguale valore nell'ipotesi di un equilibrio « a membrana » e sono differenti per le soluzioni « flessionali »); si è adottata la convenzione che sia $S > 0$ rivolto verso l'alto per chi guardi nel verso delle x crescenti la sezione della volta $x = \text{costante}$ ⁽⁷⁾;

Z , tiro nell'elemento di bordo (cfr. n. 1 b e n. 3);

X, Y, Z , *componenti del carico* agenti sulla volta, con direzione e verso di u e, rispettivamente, di v e w ; perciò se sulla volta agisce un *carico permanente* g , costante per unità di area della Ω , distribuito uniformemente a manto sulla sua superficie (come il peso proprio, quando la volta sia di materiale omogeneo) si ha

$$(2_g) \quad X = 0, \quad Y = g \sin \psi, \quad Z = g \cos \psi;$$

se, invece, la ripartizione è dovuta ad un *carico accidentale* p (peso per unità di area) la consideriamo regolata dalla seguente legge

$$(2_p) \quad X = 0, \quad Y = p \sin \psi \cos \psi, \quad Z = p \cos^2 \psi,$$

(5) Nei lavori citati in ⁽¹⁾, lo spessore è indicato con d_0 .

(6) In opp. citt. ⁽³⁾, ⁽⁴⁾ si è assunto per w il verso della normale esterna ad Ω .

(7) Si veda op. cit. ⁽⁴⁾ §§ 8, 9, 13, 19, 20, 28; Tavole 3, 4; Tabelle XXIX e sgg.

c) Per una volta, di cui la direttrice sia data nella forma $R = R(\psi)$ (cfr. n. 1 c), si hanno ⁽⁸⁾ le seguenti componenti T_2, S, T_1 dello sforzo per le due considerate distribuzioni di carico sopra considerate:

$$(3) \quad \begin{array}{cc} \text{Carico permanente } g & \text{Carico accidentale } p \\ \left\{ \begin{array}{l} T_2 = ga t_2(\psi) \\ S = \mp gt(x) s(\psi) \\ T_1 = \frac{g}{a} m(x) t_1(\psi) \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} T_2 = pa t'_2(\psi) \\ S = \mp pt(x) s'(\psi) \\ T_1 = \frac{p}{a} m(x) t'_1(\psi) \end{array} \right. \end{array}$$

$$(0 \leq x \leq L, -\psi_0 \leq \psi \leq \psi_0).$$

Il segno «meno» valendo, per le convenzioni fatte, per x contato da un estremo (timpano), il segno «più» per x contato dal mezzo. Ivi per la base circolare ($R = a$) è da porre:

$$(4_g) \quad t_2(\psi) = -\cos \psi, \quad s(\psi) = -2 \sin \psi, \quad t_1(\psi) = -2 \cos \psi;$$

$$(4_p) \quad t'_2(\psi) = -\cos^2 \psi, \quad s'(\psi) = -\frac{3}{2} \sin 2\psi, \quad t'_1(\psi) = -3 \cos 2\psi.$$

Per le altre basi (ellittiche, cicloidiche, ecc.) si veda la voce «Volte autoportanti», citata in ⁽³⁾, alle pp. 745 e 748 con l'avvertenza che *qui riferiamo la x a contare da un estremo*, anziché dal mezzo (fig. 12 a p. 745 di ⁽³⁾).

Nelle (3) compaiono anche le funzioni $t(x)$ ed $m(x)$. Esse sono il taglio e, rispettivamente, il momento che il carico 1 per unità di lunghezza provoca su una trave di luce L : semplicemente appoggiata se il timpano non reagisce trasversalmente al piano, incastrata se il timpano è un piano rigido, inamovibile, ideale. Pertanto, posto

$$(5) \quad x = \xi L, \quad (0 \leq \xi \leq 1)$$

è, per il carico g come per quello p :

$$(6) \quad t(\xi) = \frac{L}{2} (1 - 2\xi), \quad m(\xi) = \frac{L^2}{2} (\xi - \xi^2)$$

per la volta isolata semplicemente appoggiata, ed invece

$$(7) \quad t(\xi) = \frac{L}{2} (1 - 2\xi), \quad m(\xi) = \frac{L^2}{2} \left(\xi - \xi^2 - \frac{1}{6} \right)$$

per la volta su infinite campate uguali.

Le (3) - tenuto conto delle (4), (6) e (7) - rispecchiano le proprietà di simmetria di ciascuno sforzo rispetto alla direttrice mediana ($x = L/2$) e rispetto al colmo ($\psi = 0$) della volta. La convenzione per il segno di S è stata

(8) Cfr. op. cit. in ⁽³⁾ p. 748.

enunciata poco sopra al comma *b*); si constata anche che se $\psi_0 = \pi/2$ la T_2 si annulla sui bordi.

3. *Il tiro Z.* - *a*) Manifestamente per il carico p risulta $S(x, \pi/2) = 0$, mentre S non si annulla sul bordo $\psi = \pi/2$ per il carico g . In questo caso - come si è avvertito più sopra - si introduce un tiro Z su ognuno dei due bordi, che per il semplice appoggio è

$$(6') \quad Z(x) = \int_0^x S(x, \pi/2) dx = 2gm(x) = gL^2(\xi - \xi^2)$$

e per l'incastro

$$(7') \quad Z(x) = gL^2(\xi - \xi^2 - 1/6).$$

Si osservi che $Z(x)$ non dipende dalle dimensioni trasversali della volta, cioè dalle dimensioni della direttrice e che, secondo la (7'), negli intervalli $0 - 0,211$; $0,789 - 1$ il tirante di bordo va trasformato in puntone di bordo.

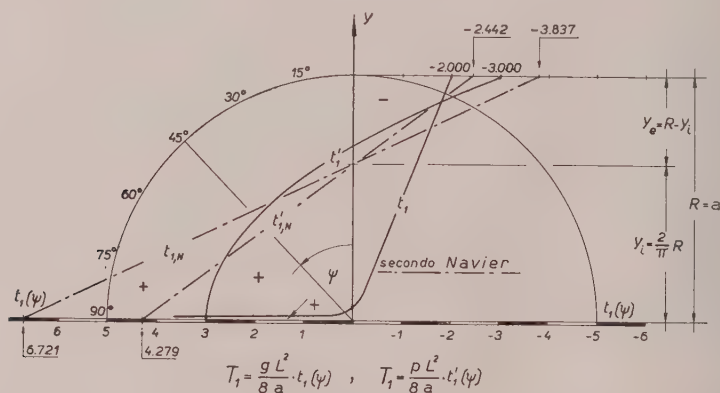


Fig. 3.

L'espressione (7') del tiro $Z(x)$ risulta sovrapponendo al tiro, che chiameremo $Z_0(x)$, della volta con i timpani snodati un $\Delta Z(x)$ equilibrante, con gli sforzi T_x diffusi sulla direttrice, il momento M_0 degli incastri. Quanto alla distribuzione di T_x è spontaneo ammettere che essa sia affine, salvo il segno opposto, a quella che si ha in mezzeria, quindi del tipo indicato in fig. 3, ben discosta, come si vede, da quella di Navier. A questa invece si avvicina di più la distribuzione di T_x nel caso del carico accidentale p .

I momenti di incastro risultano $-2 R \psi_0 g L^2 / 12$ e il momento al mezzo per il semplice appoggio è $+2 R \psi_0 g L^2 / 8$. Ora, avendosi in questo caso un tiro $Z_0 = g L^2 / 4$, poiché $Z_0(0) = Z_0(L) = 0$, ai timpani, per l'incastro, sarà in conformità $Z(0) = Z(L) = \Delta Z = -g L^2 / 6$. Resta così giustificato il passaggio dalla (6') alla (7') (cfr. fig. 4).

b) Qui va rilevato che, più in generale, per una volta autoportante continua corrente su più appoggi-timpani l'espressione di $t(x)$ e di $m(x)$ (secondo le (6)) del taglio e del momento per carico uniforme unitario sulla

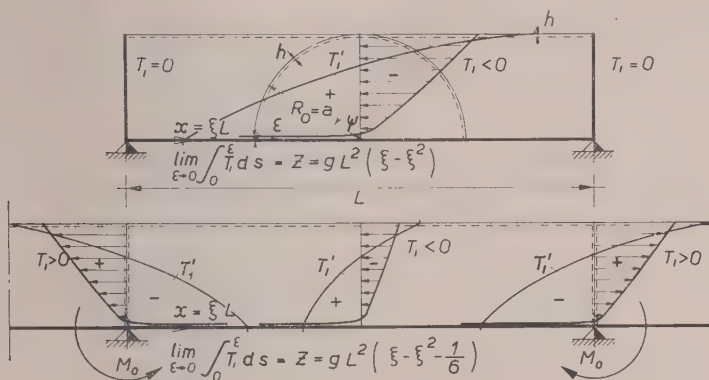


Fig. 4.

trave semplicemente appoggiata agli estremi va sostituita con quella del taglio e del momento per carico uniforme unitario sulla trave continua su più campate corrispondente alla serie di volte che si considera. Ciò almeno se la freccia H della volta (nel caso della volta semicircolare $H = R = a$) è sensibilmente inferiore alla generica luce L di campata, poniamo,

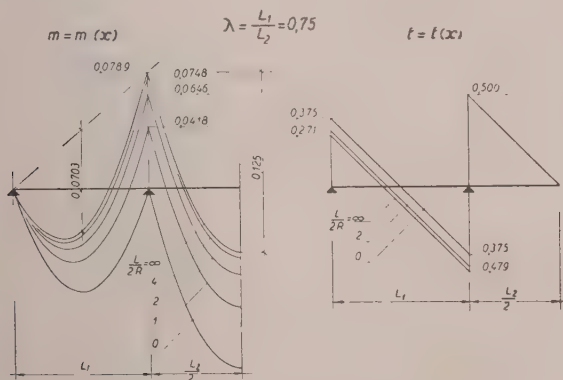


Fig. 5.

$L/H > 2,5$. In caso diverso, le deformazioni provocate dal taglio S attenuano i momenti agli appoggi; come è, del resto, intuibile per analogia con la teoria ordinaria della trave continua su parete sensibilmente alta ⁽⁹⁾.

(9) W. RITTER, *Anwendungen der graphischen Statik*, Bd. III (Zürich 1888).

Per il caso della volta circolare chiusa, cioè per la trave tubolare a direttrice circolare, l'attenuazione dei momenti di appoggio in funzione del rapporto $L/2R$ è illustrata nelle figure 5 e 6 - disegnate (cfr. op. cit. ⁽³⁾ pp. 758-763) secondo le deduzioni di F. Dischinger ⁽¹⁰⁾.

Per la teoria ordinaria della trave è $L/2R = \infty$. Non occorre dire che, noti i momenti agli appoggi, i momenti in campata sono senz'altro determinati.

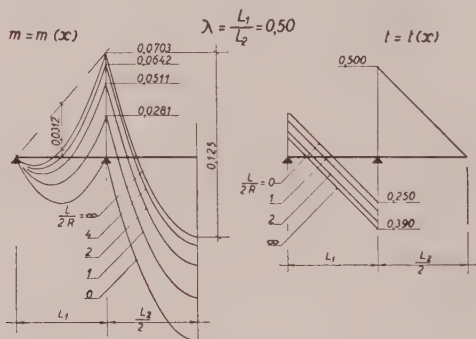


Fig. 6.

Dischinger stesso osserva che i dati, di cui si tratta, si possono estendere alle volte cilindriche aperte sostituendo $2R$ con $R = a$ od H . A conclusioni analoghe perviene Flügge ⁽¹¹⁾.

Vanno fatti in più i seguenti rilievi:

1° Per il carico g diffuso sul manto (*peso proprio*) lo sforzo $Z(x)$ nei tiranti di bordo - al quale non si allude nelle op. cit. ⁽¹⁰⁾, ⁽¹¹⁾ - si calcola per la volta a base semicircolare (e, sia detto per inciso, anche per la volta a base ellittica indipendentemente dal rapporto dei semiassi) con la relazione - ovvia dopo quanto si è esposto -

$$(*) \quad Z(x) = 2g \int_0^x t(x) dx,$$

con x variabile nell'intervallo compreso fra gli estremi di tutta la serie di volte, contata ad esempio dall'estremo di sinistra. In luogo della (*) conviene calcolare $Z(x)$ con la assai più semplice relazione, che ne consegue direttamente:

$$(*) \quad Z(x) = 2g \cdot m(x).$$

(10) F. DISCHINGER, *Das durchlaufende ausgesteifte zylindrische Rohr oder Zeiss-Dywidag-Dach* («Mém. Ass. Int. Ponts et Charpentes», IV, pp. 227-248 (Zürich 1936)).

(11) W. FLÜGGE, *Statik und Dynamik der Schalen* (Springer, Berlin 1934), pp. 76-80.

Quì è $m(x)$ il momento dianzi definito (desumibile, ad esempio, dai grafici) calcolato nella generica sezione $x = \text{costante}$, e l'ascissa x è valutata, come ordinariamente si fa, campata per campata, a partire da uno degli estremi della campata considerata (ad esempio da quello di sinistra).

Tale tiro $Z(x)$, che nella volta semplicemente appoggiata è sempre di trazione, nella volta continua cambia segno in un intorno degli appoggi, e là, in luogo di un tirante occorre un puntone di bordo.

2° Se la volta è *infinite* campate tutte egualmente caricate, sicché ogni campata si può pensare incastrata agli estremi (nel senso che i timpani non possono rotare per ragioni di simmetria), allora il taglio non ha più influenza sui momenti di appoggio, che risultano indipendenti dal rapporto L/R o L/H . Questo risultato non molto noto vale naturalmente anche per la trave continua in parete alta, beninteso sempre che si segua l'impostazione ordinaria ⁽⁹⁾, ⁽¹⁰⁾, ⁽¹¹⁾ del calcolo delle deformazioni per flessione e taglio.

Per le volte tutto questo risulta confermato anche per via più ortodossa, ossia quando si ricorre alle equazioni generali dell'equilibrio della membrana e si impongono le opportune condizioni sui timpani, vale a dire:

L'annullarsi dello spostamento u , normale al timpano, e di quello v , tangente alla direttrice nel piano del timpano, nel caso dell'incastro (impedita rotazione del timpano stesso), ovvero

L'annullarsi dello spostamento v e dello sforzo T_x nel caso del semplice appoggio (timpano che può uscire dal suo piano, senza restare necessariamente piano).

Per quanto riguarda il tiro $Z(x)$ ai bordi occorre calcolarlo con la (*) e non con la (*); infatti — poiché il taglio $t(x)$ della volta incastrata risulta eguale a quello della volta semplicemente appoggiata agli estremi (cfr. (6), (7)) — la (*) estesa a tutte le infinite campate di destra o di sinistra risulta indeterminata mentre estesa ad una sola campata — data l'equivalenza fra di esse — porta alla espressione di Z valida per il semplice appoggio, ma per

questa non si ha l'equilibrio interno con gli sforzi $\int_0^{\psi_0} T_x R d\psi$.

Nella prossima Nota, prima di affrontare il problema della *stabilità*, tratteremo degli equilibri tensoflessionali.

Idrodinamica. — *Sopra le onde di traslazione nei canali.* — B) *Il caso non lineare.* Nota (*) del Corrisp. GIULIO SUPINO.

1. Le due equazioni dell'idraulica, relative al moto variabile col tempo in alveo rettangolare molto largo, possono essere scritte nella forma seguente (1):

$$(1) \quad \begin{cases} Y^3 \left(i_f - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) = \frac{Q^2}{C^2} + \frac{QY}{g} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{Q^2}{g} \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{Y^2}{g} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{QY}{g} \frac{\partial Y}{\partial t} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

Poniamo, al solito, $Y = Y_0 + y$, $Q = q_0 + q$ essendo Y_0 e q_0 profondità e portata di un moto base uniforme. Dato che Y_0 e q_0 sono costanti, la seconda delle (1) si scrive

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

e quindi si può porre

$$q = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad y = \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Introduciamo questi valori nella prima delle (1) considerando y e q e le loro derivate come termini piccoli del primo ordine insieme ad i_f e $1/C^2$. Limitiamoci poi a tener conto soltanto dei termini del primo e secondo ordine, e scriviamo per brevità $F = \frac{q_0^2}{gY_0^3}$.

Posto

$$(2) \quad \begin{cases} L = (1 - F) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{2q_0}{gY_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} - \frac{1}{gY_0} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{3i_f}{Y_0} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{2i_f}{q_0} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \\ M = \left(\frac{3}{Y_0} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{2q_0}{gY_0^3} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{2}{gY_0^3} \left(Y_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \right. \\ \left. - q_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} - \frac{2}{gY_0^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \end{cases}$$

le due equazioni (1) si riducono, con l'approssimazione fissata, alla equazione

$$(3) \quad L + M = 0$$

e per risolvere la (3) indicheremo, nei numeri che seguono, un procedimento approssimato che ha inizio da una soluzione della $L = 0$.

(*) Presentata nella seduta dell'11 febbraio 1961.

(1) Si adottano i simboli usuali, già utilizzati nelle mie Note precedenti sul caso lineare. Ved. « Rendiconti della Accademia Naz. dei Lincei », Novembre e Dicembre 1960. Nel seguito queste Note saranno indicate con A-I e A-II.

2. Questa equazione, alle derivate parziali del 2° ordine, ammette due funzioni arbitrarie. Si possono assegnare all'origine (cioè per $x = 0$) i valori della profondità e della portata al variare del tempo⁽²⁾ ottenendo una soluzione ben determinata della φ . Se i valori di y e q sono assegnati ad arbitrio, allora la celerità delle altezze d'acqua differisce, in generale, dalla celerità delle portate⁽³⁾; se si impone che le due celerità siano eguali allora non si possono fissare ad arbitrio le condizioni ai limiti e le sole onde che soddisfano a questa condizione si possono ricondurre al tipo:

$$(4) \quad \varphi = \frac{A}{2} e^{\lambda x} \sin v \left(t - \frac{x}{\omega} \right)$$

dove $v \left(= \frac{2\pi}{T} \right)$ si intende assegnato, mentre λ ed ω risultano determinate dalla $L = 0$, nel modo che ho indicato nelle Note A-I e A-II.

Si ricorderà che si ottengono due tipi di onde: quando è $F < 1$ un tipo è costituito da onde ascendenti (cioè procedenti verso le x negative: è allora $\lambda > 0$ e $\omega < 0$) e un secondo tipo di onde discendenti (con $\lambda < 0$ e $\omega > 0$); quando invece è $F > 1$ tutti e due i tipi di onde seguono la corrente, ma uno ammette celerità $\omega < U_0$, l'altro la celerità $\omega > U_0$. Quando sia $F > 4$, quest'ultimo tipo dà luogo ad un $\lambda > 0$ e quindi le onde tendono ad esaltarsi. Su ciò ritorneremo in seguito.

3. Supponiamo di avere scelto un'onda del tipo (4) soddisfacente alla $L = 0$. Con essa non si è soddisfatto alla (3) perché resta il termine $M(\varphi_1, \varphi_1)$ cioè la M riferita alla φ_1 . Aggiungiamo ora alla φ_1 una φ_2 soluzione della

$$(5) \quad L(\varphi_2) + M(\varphi_1, \varphi_1) = 0.$$

La funzione $\varphi_1 + \varphi_2$ non sarà ancora una soluzione della (3) perchè introducendo in questa $\varphi_1 + \varphi_2$ si otterrebbe

$$L(\varphi_1 + \varphi_2) + M(\varphi_1, \varphi_1) + M(\varphi_2, \varphi_1) + M(\varphi_1, \varphi_2) + M(\varphi_2, \varphi_2) = 0$$

(2) Ciò costituisce, come è noto, anche il dato richiesto dal punto di vista fisico almeno nel campo delle correnti veloci ($F > 1$). Non è il caso di discutere qui in dettaglio le eventuali modifiche per le correnti lente ($F < 1$).

(3) Fissato v la $L = 0$ determina due coppie di valori λ e ω . La $\varphi = e^{\lambda_1 x} (A \sin \eta_1 + B \cos \eta_1) + e^{\lambda_2 x} (C \sin \eta_2 + D \cos \eta_2)$ con $\eta_1 = v \left(t - \frac{x}{\omega_1} \right)$ e $\eta_2 = v \left(t - \frac{x}{\omega_2} \right)$ consente di soddisfare nell'origine alle condizioni $y = H_1 \sin vt + K_1 \cos vt$, $q = H_2 \sin vt + K_2 \cos vt$. Risulta

$$\lambda_1 A + \lambda_2 C + B \frac{v}{\omega_1} + D \frac{v}{\omega_2} = H_1$$

$$\lambda_1 B + \lambda_2 D - A \frac{v}{\omega_1} - C \frac{v}{\omega_2} = K_1$$

$$(B + D)v = H_2$$

$$(A + C)v = -K_2.$$

Si ottiene così una combinazione di due onde semplici ma l'onda risultante, dati i diversi valori di λ ed ω non si propaga con velocità costante, né mantiene uno sfasamento costante tra portate e altezze d'acqua.

dove si indica con $M(\varphi_1, \varphi_2)$ la seconda delle (2) quando nelle derivate prime si ponga φ_1 e nelle derivate seconde la φ_2 (mentre $M(\varphi_2, \varphi_1)$ contiene nelle derivate prime la φ_2 e nelle derivate seconde la φ_1).

Peraltro il procedimento può essere proseguito determinando la funzione φ_3 che soddisfi alla equazione:

$$(6) \quad L(\varphi_3) + M(\varphi_2, \varphi_1) + M(\varphi_1, \varphi_2) = 0$$

nella quale non si è introdotto il termine $M(\varphi_2, \varphi_2)$ perché più piccolo dei precedenti.

Dovremo allora considerare una φ_4 che soddisfi alla

$$(7) \quad L(\varphi_4) + M(\varphi_1, \varphi_3) + M(\varphi_3, \varphi_1) + M(\varphi_2, \varphi_2) = 0.$$

La (7) tiene conto del termine $M(\varphi_2, \varphi_2)$ che è dello stesso ordine di grandezza degli altri ora introdotti, ma trascura i termini $M(\varphi_3, \varphi_2)$ e $M(\varphi_2, \varphi_3)$ che saranno considerati dalla φ_5 . Così si potrebbe proseguire.

Dobbiamo ora mostrare il carattere delle funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ ed avvertire che fermandosi ad una φ_m (con m finito) si può chiudere il procedimento con una soluzione sufficientemente piccola.

4. Scriviamo perciò:

$$\varphi_1 = \alpha e^{\lambda x} \sin v \left(t - \frac{x}{\omega} \right).$$

Poiché la φ_1 soddisfa alla $L=0$, così λ ed ω soddisfano alle equazioni [A-I (5)]:

$$(8) \quad \begin{cases} (1-F) \left(\lambda^2 - \frac{v^2}{\omega^2} \right) - \frac{2g_0 v^2}{g Y_0^2 \omega^2} + \frac{3ifv}{g Y_0} + \frac{2if\lambda}{g_0} = 0 \\ (1-F) \frac{2\lambda v}{\omega} + \frac{2g_0}{g Y_0^2} v\lambda - \frac{3ifv}{Y_0 \omega} + \frac{2ifv}{g_0} = 0 \end{cases}$$

nelle quali, come si è detto, v è assegnato.

Data φ_1 calcoliamo ora $M(\varphi_1, \varphi_1)$. Si trova, tenendo conto delle formule di prostaferesi,

$$M(\varphi_1, \varphi_1) = \alpha^2 e^{2\lambda x} \left(A_1 \sin 2v \left(t - \frac{x}{\omega} \right) + B_1 \cos 2v \left(t - \frac{x}{\omega} \right) + C_1 \right)$$

essendo

$$A_1 = \frac{3}{2 Y_0} \left(\frac{v^3}{\omega^3} - \frac{3\lambda^2 v}{\omega} \right)$$

$$B_1 = -\frac{3}{2 Y_0} \left(\lambda^2 - \frac{3v^2}{\omega^2} \right)$$

$$C_1 = \frac{3\lambda}{2 Y_0} \left(\lambda^2 + \frac{v^2}{\omega^2} - \frac{4}{3} \frac{Fv^2}{U_0 \omega} + \frac{4}{3} \frac{Fv^2}{U_0^2} \right).$$

Poniamo ora

$$\varphi_2 = \alpha^2 e^{\lambda_2 x} \left(H \sin v_2 \left(t - \frac{x}{\omega_2} \right) + K \cos v_2 \left(t - \frac{x}{\omega_2} \right) + N \right)$$

e vediamo se con una φ_2 di questo tipo si può soddisfare alla (5). Costruendo la $L(\varphi_2)$ si ottengono le condizioni

$$(9a) \quad \left\{ (I-F) \left[\lambda_2^2 - \frac{v_2^2}{\omega_2^2} \right] - \frac{2q_0}{gY_0^2} \frac{v_2^2}{\omega_2} + \frac{v_2^2}{gY_0} - \frac{3if\lambda_2}{Y_0} \right\} H\alpha^2 e^{\lambda_2 x} \sin \eta_2 - \\ + \left\{ (I-F) \frac{2\lambda_2 v_2}{\omega_2} + \frac{2q_0}{gY_0^2} v_2 \lambda_2 - \frac{3if}{Y_0} \frac{v_2}{\omega_2} + \frac{2ifv}{q_0} \right\} K\alpha^2 e^{\lambda_2 x} \sin \eta_2 = \\ = -A_r \alpha^2 e^{2\lambda x} \sin 2\eta_1$$

$$(9b) \quad \left\{ -(I-F) \frac{2\lambda_2 v_2}{\omega_2} - \frac{2q_0}{gY_0^2} v_2 \lambda_2 + \frac{3if}{Y_0} \frac{v_2}{\omega_2} - \frac{2ifv}{q_0} \right\} H\alpha^2 e^{\lambda_2 x} \cos \eta_2 + \\ + \left\{ (I-F) \left[\lambda_2^2 - \frac{v_2^2}{\omega_2^2} \right] - \frac{2q_0}{gY_0^2} \frac{v_2^2}{\omega_2} + \frac{v_2^2}{gY_0} - \frac{3if\lambda_2}{Y_0} \right\} K\alpha^2 e^{\lambda_2 x} \cos \eta_2 = \\ = -B_r \alpha^2 e^{2\lambda x} \cos 2\eta_1$$

$$(9c) \quad \left[(I-F) \lambda_2^2 - \frac{3if}{Y_0} \lambda_2 \right] N e^{\lambda_2 x} = -C_r \alpha^2 e^{2\lambda x}$$

avendo posto

$$\eta_2 = v_2 \left(t - \frac{x}{\omega} \right), \quad \eta_1 = v_1 \left(t - \frac{x}{\omega} \right).$$

Da queste relazioni risulta subito che in φ_2 si deve porre $\lambda_2 = 2\lambda_1$ e $\eta_2 = 2\eta_1$, (cioè $v_2 = 2v_1$, $\omega_2 = \omega_1$). Dalla (9c) si ricava

$$N = \frac{-C_r}{2\lambda_1 \left[(I-F) 2\lambda_1 - \frac{3if}{Y_0} \right]}$$

e quindi il denominatore è certamente diverso da zero perché dalla prima delle (8) si ricava che $\lambda_1 = 0$ implicherebbe necessariamente $v = 0$ (cioè onde con periodo infinitamente lungo) mentre $\lambda_1 = \frac{3if}{2(I-F)Y_0}$ richiederebbe (per le (7) della Nota A-I) che fosse $N = 0$ cioè (per la (8) della A-II, che fosse $\omega = 0$ ⁽⁴⁾).

Determiniamo ora H e K. Dalla (9a) tenuto conto della (8) deduce

$$\frac{6if\lambda_1}{Y_0} H + \left(\frac{6if}{Y_0} \frac{v_1}{\omega_1} - \frac{4ifv_1}{q_0} \right) K = -A_r \\ \left(-\frac{6ifv_1}{Y_0\omega_1} + \frac{4ifv_1}{q_0} \right) H + \frac{6if\lambda_1}{Y_0} K = -B_r$$

e quindi, posto

$$d = \left(\frac{6if\lambda_1}{Y_0} \right)^2 + \left(\frac{6ifv_1}{Y_0\omega_1} - \frac{4ifv_1}{q_0} \right)^2$$

(4) Ciò potrebbe accadere soltanto per le onde ascendenti in corrispondenza della profondità critica. Ma allora manca la propagazione ondosca.

risultano determinati

$$(10) \quad \begin{cases} K = -\frac{B_1 \left(\frac{6 i_f v}{Y_0 \omega} - \frac{4 i_f v}{q_0} \right) - A_1 \frac{6 i_f \lambda}{Y_0}}{d} \\ K = -\frac{A_1 \left(\frac{6 i_f v}{Y_0 \omega} - \frac{4 i_f v}{q_0} \right) + B_1 \frac{6 i_f \lambda}{Y_0}}{d} \end{cases}$$

sicch  la φ_2   completamente determinata.

Dovremmo ora considerare $M(\varphi_2, \varphi_1) + M(\varphi_1, \varphi_2)$ e si otterrebbe una espressione del tipo

$$\alpha^3 e^{3\lambda x} (A_3 \sin 3\eta + B_3 \cos 3\eta + A'_3 \sin \eta + B'_3 \cos \eta), \quad \eta = v \left(t - \frac{x}{\omega} \right)$$

e a questa si potrebbe soddisfare, in base alla (6), con una φ_3 di tipo analogo. Cos  si potrebbe proseguire.

5. Ma   facile rendersi conto che il procedimento, pur dando luogo nei primi termini ad una rapida diminuzione nei valori assoluti delle successive φ , porterebbe poi, se proseguito indefinitamente, ad una serie eccessivamente complicata e che non sembra convergere.

Partendo infatti dalla $\varphi_1 = \alpha e^{\lambda x} \sin \eta$ si ottiene una φ_2 con termini assai piccoli, come risulta dalle (10) ove si tenga conto che i valori usuali di λ , v e v/ω sono dell'ordine di qualche millesimo (e spesso anche meno - si veda la Nota A-II). Se poi consideriamo il prodotto di due funzioni elementari $\varphi_n = \alpha^n e^{n\lambda x} (H_n \sin n\eta + K_n \cos n\eta)$ e φ_m (dello stesso tipo) si osserva che la $M(\varphi_n, \varphi_m)$ contiene i prodotti $H_m H_n$, $H_m K_n$, $K_m H_n$, $K_m K_n$ i quali sono moltiplicati per $n \cdot m^2$, e ci  d  la sensazione che la serie diverga perch  H_m , H_n , K_m , K_n sono alla lor volta formati con prodotti di termini precedenti e sono anch'essi moltiplicati per fattori dello stesso tipo.

A parte ci  il procedimento diviene eccessivamente complicato per l'accrescersi continuo del numero dei termini in ogni posto della serie. Dobbiamo perci  mostrare come si pu  chiudere il procedimento.

Supponiamo di avere calcolato φ_1 e φ_2 e vediamo quale   la forma della equazione residua da soddisfare. Indicando con ψ tale funzione si ha dalla (3):

$$L(\varphi_1 + \varphi_2 + \psi) + M(\varphi_1 + \varphi_2 + \psi, \varphi_1 + \varphi_2 + \psi) = 0$$

e tenuto conto che   $L(\varphi_1) = 0$ e che   soddisfatta anche la (5) si deduce che resta l'equazione

$$\begin{aligned} L(\psi) + M(\varphi_1 + \varphi_2 + \psi) + M(\psi, \varphi_1 + \varphi_2) + M(\psi, \psi) + \\ + M(\varphi_1, \varphi_2) + M(\varphi_2, \varphi_1) + M(\varphi_2, \varphi_2) = 0 \end{aligned}$$

e questa pu  essere esplicitata scrivendo

$$(11) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{B(\psi, q, x, t)}{A(\psi, q, x, t)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} + \frac{C(\psi, q, x, t)}{A(\psi, q, x, t)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{D(\psi, q, x, t)}{A(\psi, q, x, t)}.$$

Qui si è posto $p = \frac{\partial \psi}{\partial x}$, $q = \frac{\partial \psi}{\partial t}$ (secondo l'uso della teoria delle equazioni alle derivate parziali: q portata ha segno opposto rispetto a q derivata parziale rispetto a t).

I valori di A, B, C, D quali risultano dalle (2) e dalla (3) sono

$$\begin{aligned} A &= 1 - F + \frac{3}{Y_0} p + \frac{2q_0}{gY_0^2} q + \frac{3}{Y_0} \frac{\partial(\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial x} + \frac{2q_0}{gY_0^3} \frac{\partial(\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial t} \\ B &= \frac{2q_0}{gY_0^2} + \frac{2}{gY_0^3} (q_0 p - Y_0 q) + \frac{2}{gY_0^3} \left(q_0 \frac{\partial(\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial x} - Y_0 \frac{\partial(\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial t} \right) \\ C &= \frac{1}{gY_0} \left(1 + \frac{2}{Y_0} p \right) + \frac{2}{gY_0^2} \frac{\partial(\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial x} \\ D &= \frac{3}{Y_0} \frac{\partial f}{\partial x} p + \frac{2}{q_0} q - \frac{\partial^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial x^2} \left(\frac{3}{Y_0} p + \frac{2q_0}{gY_0} q \right) + \\ &\quad + \frac{\partial^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial x \partial t} \cdot \frac{2}{gY_0^3} (q_0 p - Y_0 q) + \frac{2}{gY_0^3} \frac{\partial^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial t^2} p - f(x, t) \end{aligned}$$

avendo posto $f(x, t) = M(\varphi_1, \varphi_2) + M(\varphi_2, \varphi_1) + M(\varphi_2, \varphi_2)$.

Per risolvere la (11) basta ricordare il teorema di Cauchy nelle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine di tipo iperbolico ⁽⁵⁾. Esso può essere applicato direttamente al caso presente. Infatti la ψ cercata è nulla insieme a $\partial\psi/\partial x$ per $x = 0$. Le derivate successive fatte rispetto alla sola t sono tutte nulle, le derivate miste e le successive derivate rispetto ad x dipendono dai valori del secondo membro della (11) e delle sue derivate. Ma questo secondo membro dipende da $B/A, C/A, D/A$ e per $x = 0$ la A è certamente diversa da zero se si sceglie, in φ_1 , un opportuno valore di α , in particolare se α è sufficientemente piccolo (perché è $1 - F \neq 0$). In queste condizioni $B/A, C/A$ hanno una parte indipendente da α , ma ciò non ha interesse perché alla parte del secondo membro della (11) che contiene $\partial^2\psi/\partial x \partial t$ e $\partial^2\psi/\partial t^2$ si potrebbe soddisfare con una $\psi = 0$.

Quello che porta necessariamente ad una $\psi \neq 0$ è il termine $f(x, t)$ di D . Ma questo termine è in parte di 3° grado, in parte di 4° grado in α ; la soluzione $\psi(x, t)$ è dunque funzione, almeno di α^3 e per $\alpha \rightarrow 0$ si riduce a $\psi = 0$.

Concludiamo perciò che, quando nella soluzione cercata si è tenuto conto di φ_1 e φ_2 rimane da soddisfare ad una equazione con coefficienti sufficientemente piccoli. La ψ dipende da questi coefficienti ed ha a fattore almeno α^3 mentre φ_1 e φ_2 hanno a fattore rispettivamente α e α^2 . Ciò ci autorizza, in un campo sufficientemente ristretto, a trascurare la ψ .

7. Siamo ora in grado di discutere i risultati che si ottengono fermanoci a considerare $\varphi_1 + \varphi_2$. Queste funzioni danno luogo ad una soluzione

(5) Si veda per esempio E. GOURSAT, *Traité d'Analyse*, vol. III, cap. XXIV.

del tipo

$$y = \frac{\hat{c}\varphi}{\partial x} = \alpha e^{\lambda x} \left\{ \lambda \sin \eta - \frac{v}{\omega} \cos \eta \right\} + \alpha^2 e^{2\lambda x} \left\{ H_2 \left[2\lambda \sin 2\eta - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2v}{\omega} \cos 2\eta \right] + K_2 \left[2\lambda \cos 2\eta + \frac{2v}{\omega} \sin 2\eta \right] + 2\lambda N \right\} \\ q = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\alpha e^{\lambda x} v \cos \eta - \alpha^2 e^{2\lambda x} \left\{ 2v E_2 \cos 2\eta - \right. \\ \left. - 2v K_2 \sin 2\eta \right\} \quad \eta = v \left(t - \frac{x}{\omega} \right)$$

e si constata facilmente:

1° che nella soluzione linearizzata l'attenuazione dell'onda è più lenta che nella soluzione che tenga conto dei termini di 2° grado. Infatti nella sezione origine si ha:

$$y = \alpha \left\{ \sin vt - \frac{v}{\omega} \cos vt \right\} + \alpha^2 \left\{ H_2 \left[2\lambda \sin 2vt - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2v}{\omega} \cos 2vt \right] + K_2 \left[2\lambda \cos 2vt + 2v \sin 2vt \right] + 2\lambda N \right\}$$

e se si vuole soddisfare a queste oscillazioni con una soluzione linearizzata si trova che il primo termine di questa è uguale al primo termine dell'equazione non lineare, mentre il secondo termine contiene a fattore $e^{\lambda_2 x}$ in luogo di $e^{2\lambda x}$ ed è $\lambda_2 < 2\lambda$. Per rendersi conto di questa disuguaglianza basta prendere in esame le espressioni approssimate di λ date nella Nota A-II. Se si proseguisse nello sviluppo con le funzioni $\varphi_3, \varphi_4, \dots$ si troverebbe sempre $\lambda_3 < 3\lambda, \lambda_4 < 4\lambda$ ecc.

2° La presenza del termine

$$(13) \quad 2\lambda N = - \frac{2\lambda \left(\lambda^2 + \frac{v^2}{\omega^2} - \frac{4}{3} \frac{Fv^2}{U_0 \omega} + \frac{4}{3} \frac{Fv^2}{U_0^2} \right)}{2Y_0 \left[(1-F)2\lambda - \frac{3if}{Y_0} \right]}$$

mostra che la oscillazione non avviene intorno al livello del moto uniforme preso per base. Precisamente si osserva

a) che per $F < 1$ ed onde ascendenti essendo $\lambda > \frac{3if}{(1-F)Y_0} > 0$ il denominatore della (14) è positivo.

Poiché al numeratore tutti i termini tra parentesi sono positivi (perché è $\omega < 0$) così $2\lambda N$ è negativo ed il livello medio a regime è più basso del livello del moto base uniforme;

b) che quando sia $\omega > U_0$ (e tanto per $F > 1$ che per $F < 1$) allora il denominatore è negativo (perché è $|\lambda| < \frac{3if}{2(1-F)Y_0}$) mentre i termini tra parentesi del numeratore sono nell'insieme positivi. Essendo $\lambda < 0$ il numeratore è positivo. Dunque è $2\lambda N < 0$ e quindi anche in questi casi il livello medio è inferiore al livello del moto base uniforme;

c) quando sia $F > 1$ e $\omega < U_0$ (cioè X negativo - ved. note A) allora è $\lambda < 0$ e $|\lambda| > \frac{3if}{2(F-1)Y_0}$. Segue che il denominatore della (13) è positivo.

Si può mostrare che anche il termine fra parentesi del numeratore è sempre positivo⁽⁶⁾, e quindi $2\lambda N$ è positivo. Dunque in questo caso il livello a regime è più alto del livello del moto base uniforme.

3° Si aggiunga che la φ_1 , la φ_2 e le successive funzioni danno luogo tutte alla stessa celerità. Perciò, mentre considerando la y nell'origine e risolvendola con l'equazione linearizzata, si trova che le onde corrispondenti alle varie armoniche si propagano con celerità diversa e per $v \rightarrow 0$ si giungerebbe alla celerità che si deduce dalla teoria delle caratteristiche, qui l'onda complessa che risulta dalla soluzione dell'equazione non lineare corrisponde alla frequenza fondamentale. Ma l'onda si deforma ugualmente perché si rileva una attenuazione differente quando si passi da un'onda sinusoidale ad altra di frequenza doppia o tripla.

Per altro, il fatto che la celerità resti la stessa sia nella soluzione non lineare che in quella linearizzata consente di richiamare quanto si è già osservato relativamente a quest'ultima e cioè che con onde periodiche, non si riesce, in generale, a raggiungere la celerità rappresentata dalla teoria delle caratteristiche.

4° Infine vogliamo prendere in esame il caso di $F > 4$. Nella soluzione linearizzata tutte le onde si propagano in questo caso verso valle, ma quella che ha celerità maggiore tende ad esaltarsi. Si è discusso più volte sulla validità di questa soluzione, ma i risultati della presente Nota non consentono una conclusione definitiva perché qui si prende le mosse da una soluzione linearizzata al modo solito. Si può solo osservare che quando il λ sia

(6) Se si considera l'espressione $\left(\frac{2\sqrt{F}}{\sqrt{3}U_0} - \frac{\sqrt{F}}{\sqrt{3}\omega} \right)^2$ si ottiene $\frac{4}{3} \frac{F}{U_0^2} + \frac{F}{3\omega^2} - \frac{4}{3} \frac{F}{U_0\omega} > 0$ e questa mostra che è $\frac{1}{\omega^2} + \frac{4}{3} \frac{F}{U_0^2} - \frac{4}{3} \frac{F}{U_0\omega} > 0$ finché sia $F < 3$.

Per $F > 3$ consideriamo la espressione di λ^2 quale si deduce dalla prima delle (8). Si trova

$$\lambda^2 = \frac{v^2}{\omega^2} + \frac{F}{F-1} \left(\frac{v^2}{U_0^2} - \frac{2v^2}{U_0\omega} \right) - \frac{3if\lambda}{(F-1)Y_0}.$$

Dalle (7) della Nota A-I si deduce che per

X negativo è $\lambda > \frac{3if}{2(F-1)Y_0}$ sicché risulta $\frac{-3if\lambda}{(F-1)Y_0} < 2\lambda^2$. Si può allora scrivere

$$0 < \frac{v^2}{\omega^2} + \frac{F}{F-1} \left(\frac{v^2}{U_0^2} - \frac{2v^2}{U_0\omega} \right) + \lambda^2 \text{ e per } 3 < F < 4 \text{ si trova } \lambda^2 + \frac{v^2}{\omega^2} + \frac{F}{3} \frac{v^2}{U_0^2} -$$

$$- \frac{2}{3} \frac{Fv^2}{U_0\omega} > 0. \text{ D'altra parte dalle limitazioni date per } \omega \text{ si deduce (per } X \text{ negativo}$$

$$\text{ed } F \geq 3): \frac{\omega}{U_0} > \frac{12}{17} > 2/3. \text{ Quindi è } \frac{Fv^2}{U_0^2} - \frac{2}{3} \frac{Fv^2}{U_0\omega} > 0 \text{ e sommando } \lambda^2 + \frac{v^2}{\omega^2} +$$

$$+ \frac{4}{3} \frac{Fv^2}{U_0^2} - \frac{4}{3} \frac{Fv^2}{U_0\omega} > 0 \text{ c.d.d.}$$

positivo per le onde discendenti queste nella soluzione attuale si esalterebbero piuttosto rapidamente (per la presenza dei termini $e^{2\lambda x}$, $e^{3\lambda x}$ ecc.) portando come conseguenza alla previsione di una « instabilità » di questo tipo di onde (perché l'esaltazione rende ad un certo punto inaccettabile il rapporto ampiezza/lunghezza d'onda).

Ma si potrebbe anche accettare per la espressione di L la linearizzazione che ho proposto altra volta (« *Révue générale de l'Hydraulique* », 1950) ed allora col procedimento ora esposto si otterrebbero onde che si attenuano o almeno che non si esaltano. Quest'ultima questione resta perciò tuttora aperta.

Elettrochimica. — *Sovratensione di idrogeno su monocristalli di zinco* ^(*). Nota di ROBERTO PIONTELLI, LUISA PERALDO BICELLI, MARIAROSA GRAZIANO, presentata ^(**) dal Corrisp. R. PIONTELLI.

Nel quadro delle nostre ricerche sistematiche sui fenomeni di sovratensione di idrogeno su catodi monocristallini ⁽¹⁾, abbiamo studiato il comportamento di elettrodi di zinco.

In base ai risultati riportati in letteratura ^(2,3), lo zinco in soluzione H_2SO_4 1 M ed in NaOH segue la 6 M legge di Tafel tra 10^{-10} – 10^{-3} A/m² con valori di $b \simeq 0,17$ V in soluzione acida.

Le misure di sovratensione di idrogeno: sia su zinco metallico (in H_2SO_4 0,005 M–2,5 M) ^(4,5), sia su amalgama di zinco (in HCl 1 M e 8 M ed in HBr 1 M e 5 M) ⁽⁶⁾, hanno rivelato che la sovratensione di idrogeno è indipendente dalla d.c., per valori bassi di d.c., a causa del passaggio in soluzione degli ioni di zinco; mentre, in seguito, vale la legge di Tafel, con valori di $b \simeq 0,12$ V; 0,11 e 0,15 V e 0,11 e 0,28 V rispettivamente.

Le nostre determinazioni hanno riguardato elettrodi di zinco (99,999 %); sia policristallini, sia monocristallini, a superfici orientate secondo i piani: (0001) e (11 $\bar{2}$ 0) ⁽⁷⁾, in bagni: HClO_4 0,01 M e HCl 0,01 M a 25°C e 40°C.

(*) Istituto di Chimica Fisica, Elettrochimica e Metallurgia del Politecnico di Milano, Laboratorio del Gruppo di ricerca «Elettroliti e processi elettrochimici» del C.N.R.

La presente ricerca è stata finanziata in parte dall'ARDC, USAF mediante il Contratto AF 61 (052)–144, tramite l'European Office ARDC, Bruxelles. Parte dell'apparecchiatura è stata procurata con fondi del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'11 febbraio 1961.

(1) Cu: R. PIONTELLI, U. BERTOCCI e C. TAMPLENIZZA, «Istituto Lombardo (Rend. Sc.)», *A* 91, 378 (1957).

Ag: I. MARTIN TORDESILLAS, L. PERALDO BICELLI e B. RIVOLTA, «Ann. Chim.», *49*, 1585 (1959).

Pb: I. MARTIN TORDESILLAS e L. PERALDO BICELLI, «Z. f. Elektrochem.», *63*, 1049 (1959).

Sn: R. PIONTELLI e L. PERALDO BICELLI, questi «Rendiconti», VIII, 27, 162 (1959).

Ni: R. PIONTELLI, L. PERALDO BICELLI e A. LA VECCHIA, id., VIII, 27, 312 (1959).

Cd: id., VIII, 28, 139 (1960).

Bi: id., VIII, 28, 777 (1960).

(2) A. G. PECHERSKAYA e V. V. STENDER, «Zhur. Fiz. Khim.», *24*, 856 (1950).

(3) M. O. ZHOLUDER e V. V. STENDER, «Zhur. Priklad. Khim.», *31*, 719 (1958).

(4) A. L. ROTINYAN, N. P. FEDOT'EV e SOK-LI UN, «Zhim. Fiz. Khim.», *31*, 1295 (1957).

(5) SOK-LI UN, A. L. ROTINYAN e N. P. FEDOT'EV, «Zhur. Fiz. Khim.», *32*, 2514 (1958).

(6) YA. V. DURDIN e E. G. TSVENTARNYI, «Vestnik Leningrad. Univ.», *14*, 119 (1959).

(7) Cioè gli stessi, per i quali, in questo laboratorio sono state studiate le sovratensioni inerenti agli scambi (anodici e catodici) di ioni Zn^{2+} (ved. L. PERALDO BICELLI: «Istituto Lombardo (Rend. Sc.)», *A* 94, 503 (1960)).

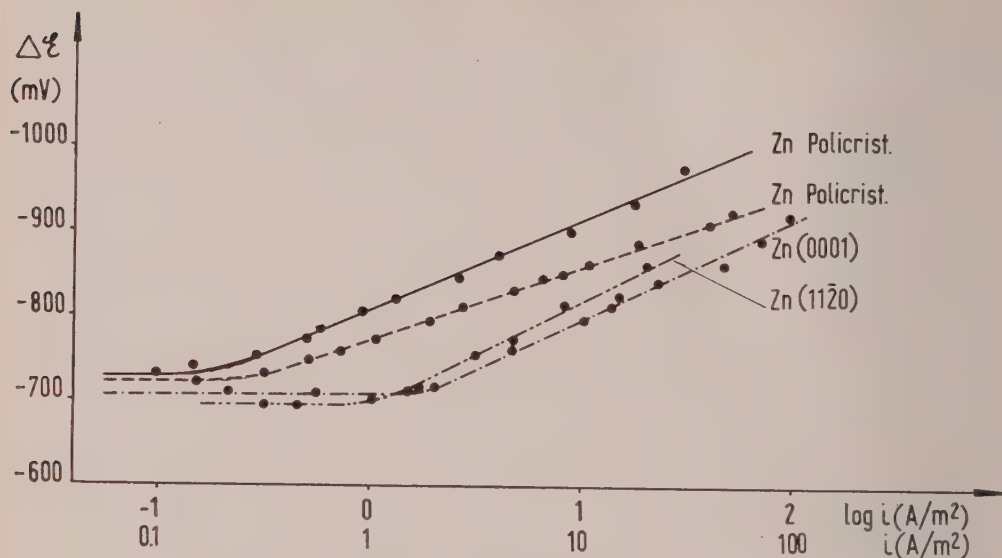


Fig. 1. - Sovratensione di idrogeno su elettrodi di zinco in HClO_4 0,01 M; $t = 25^\circ\text{C}$.

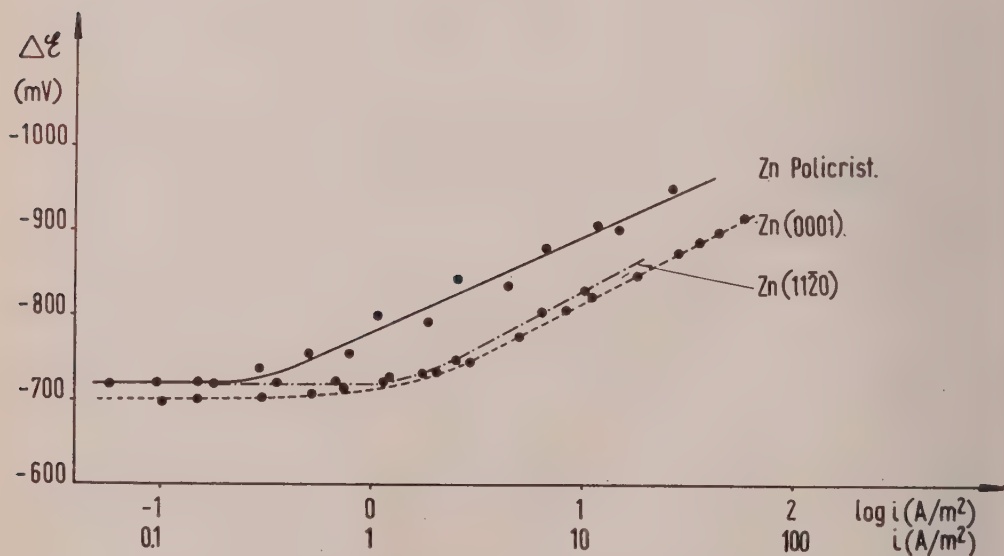
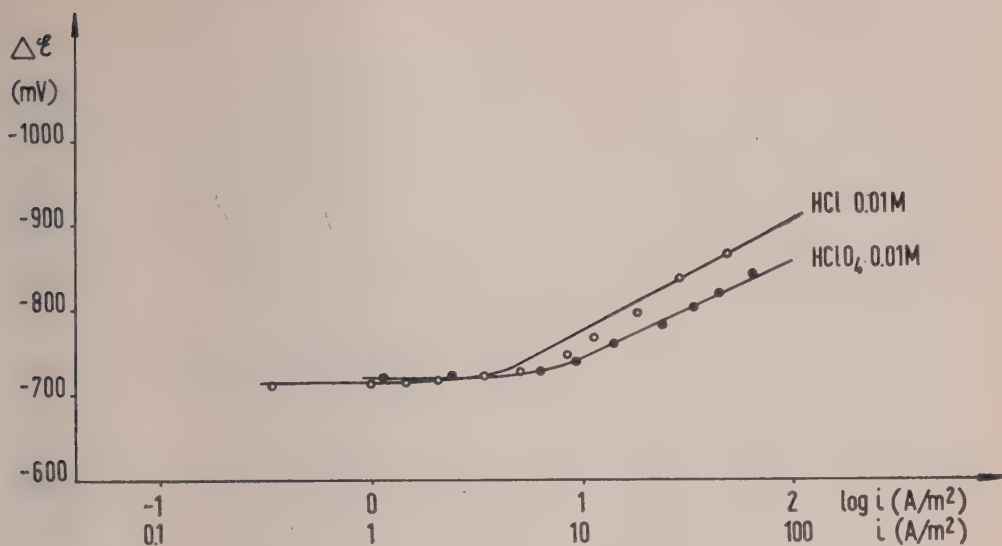
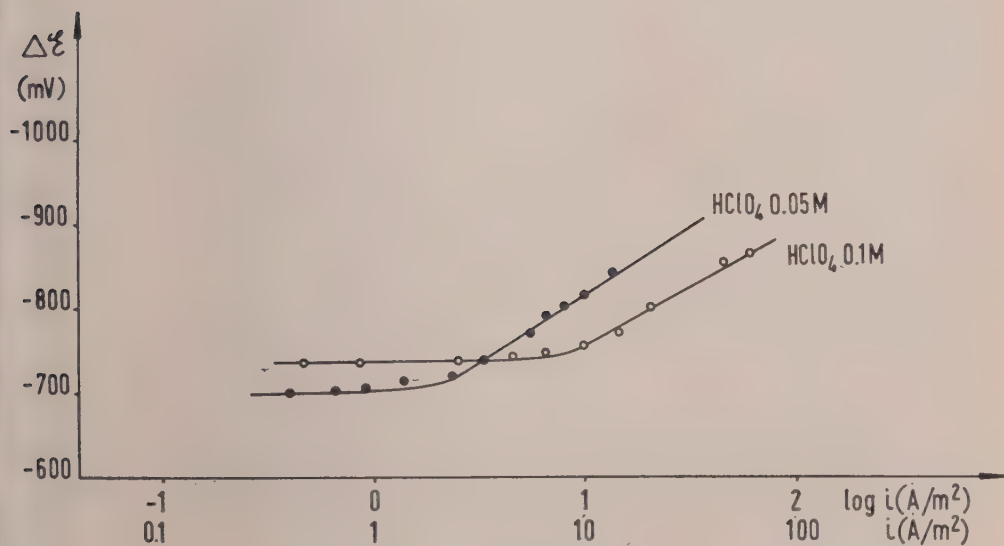


Fig. 2. - Sovratensione di idrogeno su elettrodi di zinco in HCl 0,01 M; $t = 25^\circ\text{C}$.

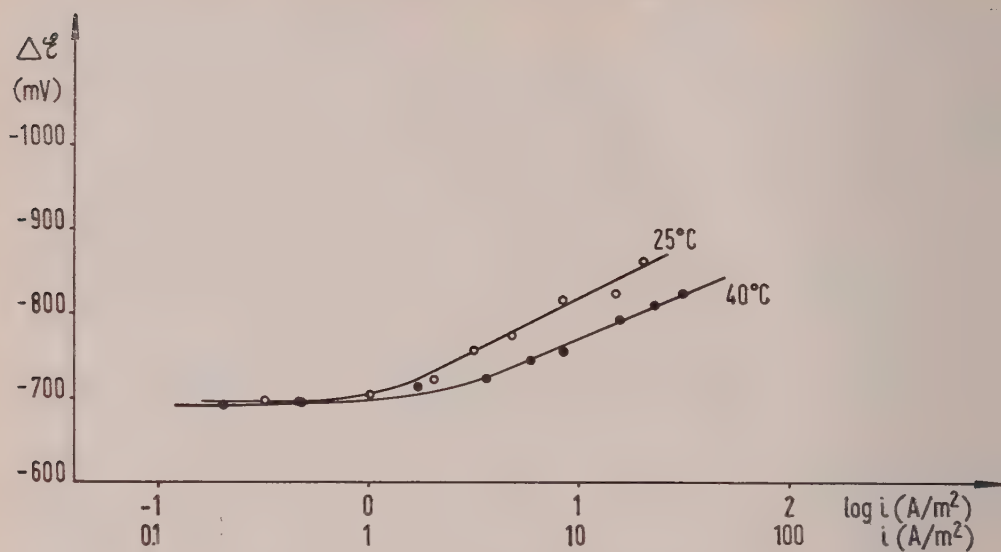
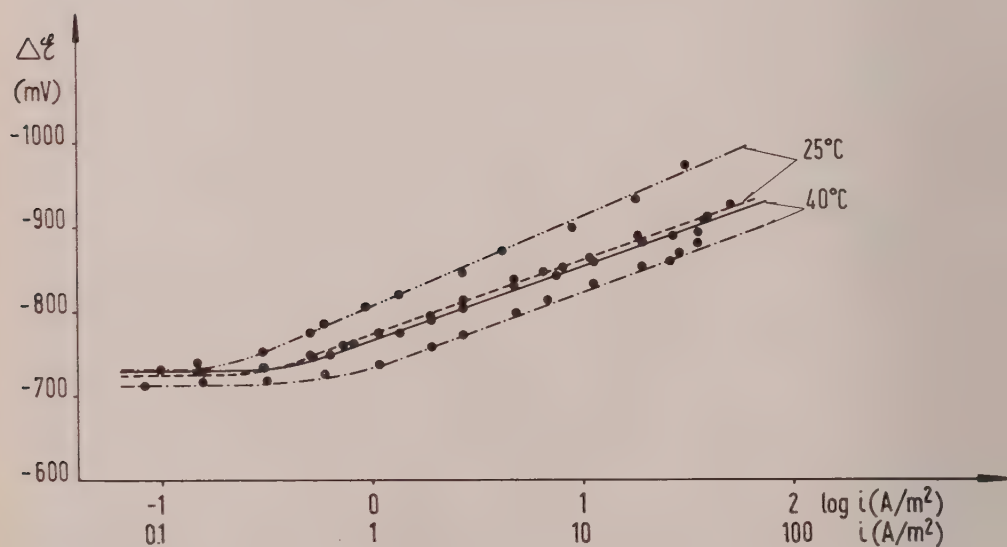
Per la tecnica sperimentale, rimandiamo alle precedenti Note. Precisiamo però che, in questo caso:

1° le superfici elettrodiche sono state lucidate anodicamente in bagno contenente 92,5 parti in volume di H_3PO_4 (85 % in peso) e 157, p. di $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$

Fig. 3. - Zn (0001); $t = 40^\circ\text{C}$.Fig. 4. - Zn (0001); $t = 25^\circ\text{C}$.

(95 %), a 300 A/dm^2 , con successivo brevissimo funzionamento catodico nel bagno stesso;

2° l'elettrodo è stato prepolarizzato, in cella, per 1^h a 25 A/m^2 , e non è stato lasciato a contatto delle soluzioni senza esser polarizzato;

Fig. 5. - Zn (HClO_4 0,01 M).Fig. 6. - Zn Policrist./HClO₄ 0,01 M.

3° le condizioni di preelettrolisi del bagno sono state: 50 a 100 Coulomb/cm² a 0,2 A.

I principali nostri risultati sono riassunti in Tabella I e nelle figg. 1 a 8⁽⁸⁾. Essi conducono alle conclusioni seguenti:

(8) Per gli elettrodi policristallini, la mediocre riproducibilità consente solo di assegnare una fascia di valori.

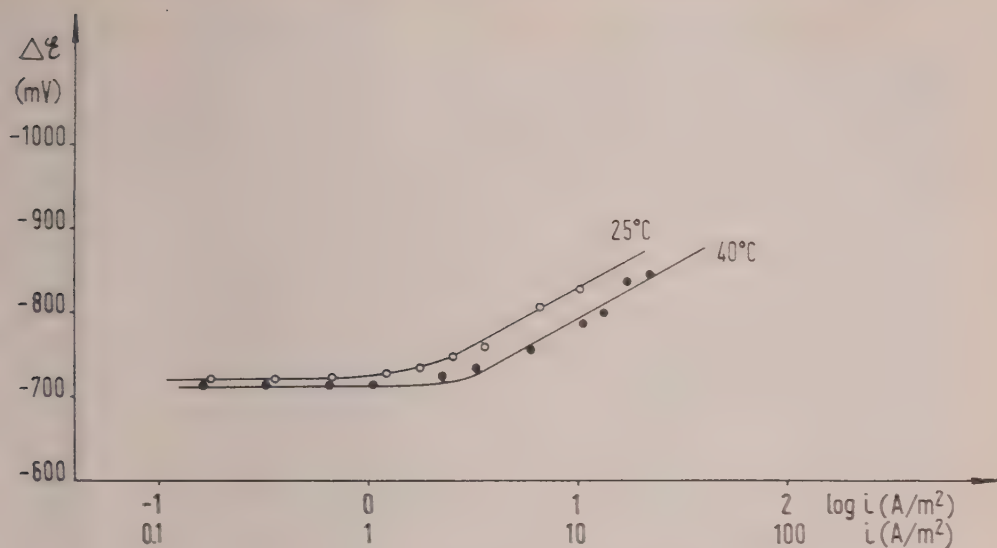
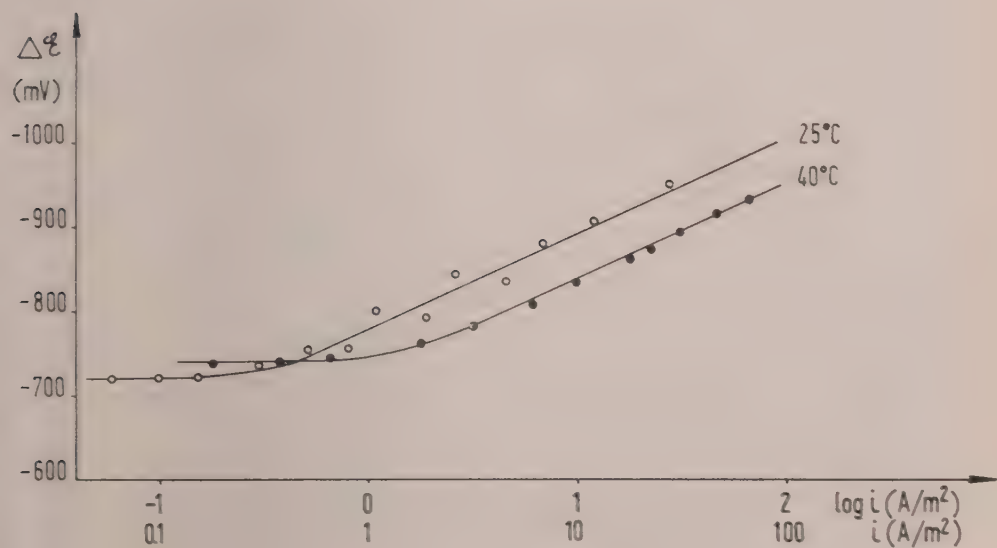
Fig. 7. - Zn (11 $\bar{1}$ 20)/HCl 0,01 M.

Fig. 8. - Zn Policrist./HCl 0,01 M.

È come riscontrato dagli altri Autori citati, per valori bassi della d.c., la tensione di elettrodo si mantiene pressoché invariata al variare della d.c.; mentre, successivamente, vale la legge di Tafel, con parametri aventi i valori indicati in Tabella I;

2° le sovratensioni misurate sono poco influenzate dall'orientamento ⁽⁹⁾ (figg. 1 e 2), benché, in tutte le condizioni studiate, i valori assoluti vadano decrescendo nell'ordine:

$$\text{Zn Policrist.} > (11\bar{2}0) > (0001);$$

3° le sovratensioni sono poco influenzate dalla natura dell'acido (a pari concentrazione) (fig. 3);

4° al crescere della concentrazione dell'acido, la sovratensione decresce, mentre il campo di condizioni di indifferenza della tensione di elettrodo nei confronti della d.c. si allarga (fig. 4);

5° le sovratensioni decrescono regolarmente (in valore assoluto) al crescere della temperatura (figg. 5 a 8).

TABELLA I.

Piano	Soluzione	Temperatura (°C)	a (mV)	b (mV)	Sovratensione a	
					1 A/m ² (in mV)	10 A/m ² (in mV)
Zn (0001)	HClO ₄ 0,01 M	25°	685	120	675	795
		40°	625	115	710	745
Zn (0001)	HCl 0,01 M	25°	735	130	730	815
		40°	655	135	710	775
Zn (11 $\bar{2}$ 0)	HClO ₄ 0,01 M	25°	680	130	705	810
		40°	685	90	700	775
Zn (11 $\bar{2}$ 0)	HCl 0,01 M	25°	670	135	705	810
		40°	650	140	710	790
Zn Policrist.	HCl 0,01 M	25°	770	115	770	885
		40°	740	115	760	845

Rinviando, ancora una volta, alla nota finale di questa serie, la discussione dettagliata di questo comportamento, ci limiteremo a rilevare, fin da ora, che le peculiarità di comportamento riscontrate per lo zinco, sono, almeno in parte, connesse con la sua condizione di elettrodo misto (a scambi riguardanti gli ioni Zn²⁺ e H⁺) e con la probabile esistenza di uno strato di idrogeno, anche in assenza di correnti imposte.

(9) Ricordiamo che, per quanto concerne gli scambi di ioni Zn²⁺ (ved. nota ⁽⁷⁾), l'influenza dell'orientamento è risultata inapprezzabile.

Geologia. — *Contributo allo studio geologico-tecnico del problema dell'attraversamento dello Stretto di Messina*^(*). Nota di FRANCESCO PENTA e FRANCO CAPOZZA, presentata^(**) dal Corrisp. F. PENTA.

PREMESSA.

Da oltre un decennio uno di noi si occupa dell'aspetto geologico-tecnico del problema dell'attraversamento dello Stretto di Messina; problema che presenta eccezionali difficoltà in dipendenza del pronunziato carattere sismico della regione.

In un secondo tempo ha avuto la collaborazione dell'altro (Capozza), col quale ha redatto la Nota presente.

Varie indagini e ricerche ed alcuni studi sono stati eseguiti allo scopo di stabilire i presupposti indispensabili per la scelta razionale del sistema più idoneo a collegare la Sicilia al continente con un'opera permanente e transi- tabile da veicoli di ogni sorta.

Le soluzioni ancora in esame sono quelle di un ponte del tipo adatto, di una galleria appoggiata sul fondo, di una diga a scogliera e di una galleria da scavare al disotto del fondo dello Stretto, alla profondità rispondente allo scopo.

L'attraversamento aereo con cavi elettrici fu, a suo tempo (1952), deciso e poi (1952-55) realizzato sulla base dei risultati di varie indagini, prove e ricerche, molte delle quali furono suggerite (a partire dal 1950) da uno di noi, in considerazione specialmente dei terremoti e maremoti della località.

Tale sistema si dovette accettare senza che si fosse potuto stabilire, in mancanza del tempo e dei mezzi necessari, un basato confronto con l'altro sistema, quello della galleria profonda, sul quale anche si era appuntata l'attenzione di alcuni tecnici.

L'opera, però, così come fu progettata, offriva la massima garanzia compatibile con l'*habitus* sismico della regione.

Riferiamo ora qui sinteticamente sullo stato delle conoscenze raggiunto, grazie specialmente alle indagini promosse dalla Regione Siciliana ed egregiamente condotte dai geologi e geofisici incaricati.

Comunichiamo i risultati degli studi eseguiti e delle conclusioni da noi tratte anche dall'esperienza diretta e personalmente acquisita delle particolari caratteristiche geologico-tecniche dei terreni calabro-siculi.

(*) L'impostazione del problema e i suggerimenti dati per la sua risoluzione, che qui si riportano, sono dovuti ad ambedue gli Autori. Capozza ha curato, inoltre, la raccolta, l'ordinamento e la rielaborazione delle notizie e dei dati.

(**) Nella seduta dell'11 febbraio 1961.

Esponiamo, quindi, i termini nei quali abbiamo impostato e prospettato il problema; accenniamo anche al programma di indagini, di prove e di osservazioni da noi redatto per la Commissione Regionale siciliana e per la Commissione Ministeriale di cui uno di noi fa parte. Questo programma, in buona parte in corso di sviluppo, mira a concretizzare un quadro obbiettivo dell'ambiente naturale nel quale ricadrà l'opera che in conseguenza sarà prescelta per il collegamento.

I. - SINTESI DELLE CONOSCENZE ACQUISITE SULLE CARATTERISTICHE GEOLOGICHE DELLA REGIONE.

A) *Notizie preliminari.*

I primi tentativi di impostare il problema dell'attraversamento dello Stretto sulla base delle conoscenze geologiche della regione possono riportarsi praticamente alla fine del secolo scorso, prima ancora che fosse eseguito il rilevamento sistematico della Sicilia e della Calabria, iniziato verso il 1880 dagli ingegneri del Servizio Geologico.

A quell'epoca risale infatti un progetto di galleria sottomarina redatto dall'ing. Navone, per il quale fu richiesta una sezione geologica attraverso lo Stretto.

In tale sezione (tracciata dal prof. Seguenza e dagli ingegneri Pellati e Mazzetti del Corpo delle Miniere) si immaginava che il fondo dello Stretto fosse costituito da una sinclinale di terreni terziari e quaternari; si ammetteva, quindi, in sostanza, una continuità, al disotto delle acque dello Stretto, dei terreni terziari e quaternari affioranti sulle due sponde e qui appoggiati direttamente sui terreni metamorfici, e cristallini in genere, costituenti il Peloro, da una parte, e l'Aspromonte, dall'altra.

Di concezione diversa è la sezione geologica attraverso il Peloro, lo Stretto di Messina e l'Aspromonte illustrata dall'ing. Cortese in una Memoria pubblicata sul Bollettino della Società Geologica nel 1909, cioè non molto tempo dopo il grave evento sismico del dicembre 1908. In questa Memoria si sosteneva che il fondo dello Stretto doveva considerarsi costituito dai terreni del basamento cristallino e non dai terreni sedimentari del Terziario e del Quaternario, i quali sarebbero stati presenti, sui fondali dello Stretto, solo nelle immediate prossimità delle due coste. Si sosteneva inoltre la presenza di una importante faglia lungo lo Stretto di Messina e, in dipendenza di questa, la « non solidarietà » delle due parti dello Stretto medesimo.

B) *Sondaggi A.A.S.S.*

Il primo atto concreto inteso ad accertare direttamente la natura dei terreni presenti nelle profondità delle due sponde dello Stretto risale al 1942, epoca in cui la A.A.S.S., in fase di studio di una camionabile sottomarina, fece eseguire alcuni sondaggi profondi in prossimità di Ganzirri e di Punta Pezzo.

Sulla sponda sicula (presso Ganzirri), furono portati a termine tre sondaggi (eseguiti dalla S.A.C.O.P.) della profondità di m 77,20 (foro n. 1), 96,00 (foro n. 1 *ter*) e 230,45 (foro n. 2). Tutti questi tre sondaggi avrebbero incontrato soltanto terreni sedimentari, rappresentati pressoché esclusivamente da ghiaie e sabbie, allo stato sciolto o, più raramente, cementate⁽¹⁾.

Sulla sponda calabra (presso Punta Pezzo) furono invece eseguiti due soli sondaggi (ad opera della Rodio), i quali, peraltro, raggiunsero entrambi sensibili profondità (203 metri, il sondaggio n. 1, e 304 metri, il sondaggio n. 2) fornendo indicazioni anche sulle condizioni idrogeologiche della zona.

Riguardo ai terreni attraversati dal primo sondaggio, i rapporti della ditta sondatrice parlano di ghiaie, sabbie e conglomerati⁽²⁾ per i materiali incontrati sino alla profondità di 120 metri; per i materiali attraversati dalla restante parte del sondaggio si parla invece di « trovanti » e detriti di granito « friabile », talvolta mescolati con sabbie e sabbie argillose e, nel tratto estremo del foro (fra 187 e 202 metri di profondità), di « presunto granito in posto in parte decomposto ».

Con questo sondaggio, a differenza degli altri eseguiti in sponda sicula, sembra quindi sia stato incontrato il basamento cristallino, a profondità che potrebbe anche essere limitata a soli 120-130 metri.

Nella descrizione dei terreni attraversati dal sondaggio n. 2 si ritrovano ancora indicazioni di sabbie e ghiaie (e più raramente di conglomerati) per i materiali incontrati fino a profondità di 58 metri; nel tratto a profondità comprese fra i 58 e 156 metri si sarebbero invece ritrovate argille e sabbie argillose con rare intercalazioni di sabbia, ghiaia e « trovanti » di granito. Più sotto, fino a profondità di 236 metri, viene indicata la presenza di « trovanti di granito più o meno duri » e poi di sabbie, sabbie argillose e argille con « trovanti » e ciottoli di granito.

Per questo secondo sondaggio (che pure è notevolmente più profondo del precedente) mancano quindi accenni specifici relativi all'incontro con il basamento cristallino, mentre si dà notizia di livelli argillosi di sensibile potenza, mai segnalati a proposito degli altri quattro sondaggi.

Quanto alle informazioni di carattere idrogeologico desumibili dai rapporti relativi alle due perforazioni di Punta Pezzo, esse conducono concordemente ad ammettere l'esistenza di falde o « vene » acquifere risalenti e indipendenti fra loro e dal livello del mare⁽³⁾.

(1) Livelli ghiaiosi con un certo grado di cementazione sarebbero stati incontrati dal sondaggio n. 1 *ter* negli ultimi 20 metri e dal sondaggio n. 2 nei tratti a profondità 43,00-45,00; 59,00-61,00; 80,00-84,20; 85,00-96,00; 96,50-140,00. In questo ultimo tratto i livelli di ghiaie più o meno cementate risultano alternati con sabbia grossa. A profondità di 172÷174 metri sono segnalate tracce di lignite entro il materiale sabbioso attraversato.

(2) Sabbie e ghiaie cementate e conglomerati più o meno consistenti sarebbero stati attraversati nel tratto iniziale (fino a circa 30 m di profondità) e nel tratto compreso fra i 95 e i 120 metri di profondità.

(3) Nel rapporto relativo al sondaggio n. 1 sono segnalate tre manifestazioni di acque salate o leggermente salate incontrate a profondità di 165, 177 e 183 metri e risa-

C) *Scavi di saggio in corrispondenza dei terreni di fondazione dei piloni dell'elettrodotto attraversante lo Stretto di Messina.*

Altri lavori di indagine diretta furono compiuti nel 1951, nella fase di studio dei terreni di fondazione dei piloni di sostegno della linea aerea attraversante lo Stretto. In questa occasione furono eseguiti scavi di saggio consistenti in sondaggi (profondi una quarantina di metri) sulla sponda sicula e pozzi e cunicoli sulla sponda calabra.

Questi ultimi hanno interessato i terreni del basamento cristallino, dei quali è stato riconfermato il ben noto stato di degradazione fisica e chimica.

I sondaggi eseguiti sulla sponda sicula hanno invece incontrato terreni sedimentari, costituiti da ghiaie e sabbie sostanzialmente allo stato sciolto.

D) *Ricerche promosse dalla Regione Siciliana.*

Nel 1955 l'Assessorato dei LL. PP. della Regione Siciliana promosse una indagine mirante ad accertare le possibilità di effettuare il collegamento fra la Sicilia e la Calabria mediante ponte sospeso e in questa occasione affidò alla Fondazione Lerici lo studio geologico e geofisico della zona dello Stretto.

Del rilievo geologico veniva incaricato l'ing. Enzo Beneo, Direttore del Servizio Geologico, il quale si giovò, nello svolgimento del lavoro, della collaborazione di altri tre geologi dello stesso Servizio.

Le ricerche geologiche e geofisiche in questione avevano come scopo la ricostruzione dell'assetto stratigrafico e strutturale dei terreni costituenti il fondale dello Stretto sulla direttrice Ganzirri-Punta Pezzo. Il lavoro di ricerca fu impostato sul concetto di approntare anzitutto una buona base stratigrafica e tettonica attraverso uno studio geologico di dettaglio dei terreni affioranti sulle due sponde dello Stretto, in modo che essa potesse servire a raggiungere una interpretazione quanto più possibile corretta e verosimile dei risultati delle misure geofisiche che sarebbero state eseguite in mare e in terraferma.

Seguendo questi criteri la campagna geologica ha preceduto di qualche tempo l'inizio della campagna geofisica ed è stata estesa a due vaste zone comprese fra Capo Spartivento e Capo Vaticano, in Calabria, e fra Taormina e Milazzo, in Sicilia.

Lo studio geofisico (attuato dal prof. ing. Luigi Solaini e prof. ing. Roberto Cassinis e collaboratori) è stato realizzato utilizzando i procedimenti dei sondaggi elettrici e della sismica a riflessione e a rifrazione, gli ultimi dei quali sono stati impiegati, oltre che sulle sponde, anche in corrispondenza della zona occupata dalle acque dello Stretto.

lienti sino alla quota del piano di campagna, o poco al disopra, con portate di $1,0 \div 1,5$ l/min.

Riguardo al sondaggio n. 2 sono segnalate nove manifestazioni di acque dolci (probabilmente non tutte distinte), incontrate a profondità di 122, 170, 183, 187, 218, 237, 240, 246 e 254 metri e risalenti a quote variabili da circa 1 metro a 10,50 metri s.l.m. con portate anche notevoli (con un massimo di 88 l/min).

I risultati dell'indagine geologica e geofisica compiuta, non ancora pubblicati ⁽⁴⁾, porterebbero a conclusioni generali di notevole interesse nei riguardi della natura dei terreni costituenti il fondo dello Stretto, i quali risulterebbero rappresentati dagli stessi terreni sedimentari presenti nella parte più profonda del sottosuolo delle due coste.

L'indagine in questione ha lasciato aperto, ovviamente, qualche problema riguardante soprattutto la più esatta posizione stratigrafica e natura di tali terreni, come pure la loro effettiva potenza, rimasta imprecisata a causa della mancanza di una netta differenziazione fra le proprietà fisiche dei terreni in questione e quelle della parte alterata del basamento cristallino ad essi sottostante.

Peraltro, poiché è stato possibile stabilire una giustificata correlazione, sotto l'aspetto geofisico, fra i terreni che costituiscono il fondo dello Stretto e le corrispondenti formazioni presenti nel sottosuolo delle due sponde, è lecito attendersi che, accertate con sondaggi ⁽⁵⁾ la natura e la posizione stratigrafica di queste ultime, le accennate riserve possano essere risolte.

II. — DEDUZIONI SULLE CARATTERISTICHE GEOLOGICO-TECNICHE DEI TERRENI COSTITUENTI LA ZONA DELLO STRETTO.

Con riferimento a quanto in precedenza esposto si può affermare che allo stato attuale delle conoscenze si possiede indubbiamente un deciso orientamento sulla situazione geologica della zona dello Stretto.

Informazioni più dettagliate e dirette si dispongono riguardo al sottosuolo delle due sponde a seguito delle perforazioni effettuate nel 1942 per conto dell'A.A.S.S., sebbene non sempre sia agevole dedurre dalle informazioni che si sono avute su queste perforazioni, notizie senz'altro utilizzabili ai fini della ricostruzione della reale situazione geologica e idrogeologica.

Quanto ai terreni presenti sul fondo dello Stretto, si resta nel campo delle ipotesi, basate peraltro sui risultati di metodi dei quali ormai da tempo è stata collaudata l'efficacia.

Comunque, l'assieme delle conoscenze acquisite condurrebbe a fissare i seguenti punti fondamentali:

1° l'immediato sottosuolo delle due sponde dello Stretto è da ritenere costituito da terreni sedimentari prevalentemente ghiaioso-sabbiosi, per profondità che dovrebbero raggiungere l'ordine di grandezza dei $100 \div 200$ metri per la sponda calabra e di almeno 300 metri per la sponda sicula.

(4) Notizie preliminari sullo studio geofisico sono state pubblicate nel 1958 da R. CASINIS (*Studi geofisici nello Stretto di Messina*, « Boll. del Serv. Geol. d'Italia », vol. LXXX, 1° fasc., pp. 1-7).

(5) A questo scopo furono proposte dalla Fondazione Lerici, a conclusione dello studio geologico e geofisico da essa eseguito, due perforazioni profonde 500 metri, da ubicare una su ciascuna sponda dello Stretto.

Si tratta di terreni prevalentemente di natura detritica, talvolta cementati, ma per lo più allo stato sciolto e notevolmente permeabili, i quali debbono ritenersi sede di falde o vene acquifere risalenti qualche decina di metri al disopra del livello del mare;

2° l'immediato sottosuolo del fondale dello Stretto dovrebbe essere costituito da terreni sedimentari analoghi, per natura e caratteristiche tecniche, ai terreni sedimentari presenti nella parte più profonda del sottosuolo delle due sponde. Lo spessore di questi terreni, benché non precisabile, non dovrebbe risultare inferiore ai 200 metri;

3° i terreni cristallini che costituiscono il substrato della zona tutta sembrerebbero caratterizzati da condizioni di accentuata degradazione per spessori dell'ordine di grandezza di qualche centinaio di metri, specialmente sotto lo Stretto e in corrispondenza della sponda calabra.

Si confermerebbe quindi la situazione riscontrata più volte in Calabria dagli scriventi in occasione di lavori in sotterraneo spinti a profondità anche di molte centinaia di metri entro i terreni cristallini del massivo silano ridotti allo stato cataclastico; terreni ai quali corrisponde un comportamento meccanico ancora riportabile a quello delle rocce lapidee, finché il materiale in sede e indisturbato è sollecitato a « dilatazioni laterali impedito », ma che si comportano a simiglianza dei terreni sciolti quando sono rimossi dalla loro sede e quando sono sollecitati a « dilatazioni laterali libere ».

Quanto alla permeabilità dei terreni cristallini presenti al disotto delle sponde e del fondo dello Stretto non si posseggono allo stato delle indagini elementi diretti di giudizio. Non si può escludere comunque che essi possano essere caratterizzati da una permeabilità ancora avvertibile e possano essere sede di falde o vene acquifere in pressione, al pari dei terreni sedimentari sovrastanti.

Tuttavia, sulla base delle conoscenze acquisite sulle caratteristiche idrogeologiche di questi terreni sia in superficie sia in corrispondenza di scavi profondi, è da ritenere che, in ogni caso, dovrebbe trattarsi di permeabilità estremamente modesta e, comunque, di ordine di grandezza del tutto diverso rispetto a quello che potrebbe invece caratterizzare i materiali ghiaiosi e sabbiosi sovrapposti al basamento cristallino.

III. - IMPOSTAZIONE GEOLOGICO-TECNICA DEL PROBLEMA DELL'ATTRAVERSAMENTO DELLO STRETTO.

Una scelta ragionata del sistema di attraversamento più sicuro, a parità di costo, non è pensabile possa prescindere dalla conoscenza, quanto più ampia possibile, dell'ambiente fisico destinato ad accogliere l'opera, diga o galleria o ponte che sia.

Sulla base di questa convinzione uno degli scriventi (Penta), in qualità di membro di un comitato scientifico nominato dal Governo Regionale siciliano per lo studio delle possibilità di effettuare mediante ponte sospeso il

collegamento fra la Sicilia e la Calabria, concordò sulla necessità di eseguire i due sondaggi profondi proposti dalla Fondazione Lerici, la cui realizzazione fu poi sollecitata anche successivamente, nell'ambito di una Commissione ministeriale (Ministero dei Lavori Pubblici) interessata dello stesso problema dell'attraversamento dello Stretto.

Con questi sondaggi ci si proponeva di ottenere, innanzi tutto, una conferma diretta dell'interpretazione compiuta, sulla base dell'indagine geofisica, in merito alla natura ed alla successione dei terreni presenti nel sottosuolo delle due sponde, così da poter legittimare, e quindi rendere utilizzabili, anche le ipotesi avanzate, sulla scorta dei risultati della stessa indagine geofisica, in riguardo alla costituzione geologica del fondo dello Stretto; in secondo luogo si intendeva raccogliere una più ampia serie di informazioni sulle caratteristiche geologico-tecniche ed idrogeologiche dei terreni costituenti il sottosuolo delle due sponde, ed acquisire, quindi, le stesse nozioni anche sui terreni presenti sul fondo dello Stretto, sia pure per estensione analogica, in forza delle correlazioni fra gli uni e gli altri terreni accertate con l'indagine geofisica.

Da questi sondaggi ci si attendevano, in breve, elementi obbiettivi di giudizio su cui basare previsioni generali, ma più immediate, sui problemi tecnici da affrontare nell'ipotesi della realizzazione di uno qualsiasi dei proposti sistemi di attraversamento dello Stretto (galleria sottomarina o altre soluzioni non in galleria, quali ponti, dighe, ecc.).

Sulle caratteristiche tecniche dei terreni interessati dall'una o dall'altra delle soluzioni prospettate ci si riservava poi di indagare in dettaglio, e con mezzi più idonei, in una fase successiva, dopo, cioè, che una prima valutazione comparativa dei vari sistemi, basata anche sui dati raccolti con i due sondaggi, avesse consentito un orientamento più deciso sulla soluzione da prescegliere ⁽⁶⁾.

(6) Nel caso di attraversamento mediante ponte, ad esempio, è da prevedere l'esecuzione di assaggi preliminari diretti ad ottenere informazioni esaurienti sulle caratteristiche meccaniche dei terreni che costituiscono il sottosuolo delle due sponde (compressibilità e « moduli elastici » sotto carico, agli effetti anche della trasmissibilità di onde elastiche).

Gli assaggi in questione dovrebbero consentire il prelevamento di campioni indisturbati dei terreni di fondazione dell'opera, così da poter procedere allo studio delle caratteristiche geotecniche di questi; essi, pertanto, dovrebbero essere realizzati con sondaggi di grosso diametro o meglio ancora, fin dove possibile, con pozzi accessibili.

Tali sondaggi o pozzi dovrebbero assicurare la possibilità di prelevare campioni indisturbati fino alla profondità di almeno una cinquantina di metri al disotto della presumibile quota dei piani di fondazione; essi però, in vista dell'eccezionalità delle dimensioni orizzontali delle fondazioni stesse (e quindi della dimensione verticale del bulbo delle pressioni), dovrebbero essere approfonditi per almeno altri cinquanta metri, anche se con diametro ridotto, per assicurarsi che a maggiori profondità non si manifestino circostanze che possano far variare qualitativamente i giudizi sulle caratteristiche dei terreni di fondazione dell'opera raggiunti sulla base degli accertamenti compiuti sui terreni attraversati nei primi 50 metri.

Il numero dei sondaggi (o pozzi) da effettuare dovrebbe essere stabilito in relazione all'ampiezza della fascia entro la quale, in sede di progetto, potrebbe essere spostato l'asse

In accordo con questi criteri l'Assessorato dei Lavori Pubblici del Governo Regionale della Sicilia ha autorizzato l'esecuzione dei due sondaggi consigliati ⁽⁷⁾, uno dei quali (ubicato sulla costa sicula, presso Ganzirri) è già in corso di avanzata perforazione e si prevede possa essere ultimato entro il corrente mese di febbraio.

Quanto all'aspetto sismico del problema, già da alcuni anni è stata proposta da uno degli scriventi (Penta) la istituzione di centri di osservazione in punti opportunamente scelti allo scopo di ottenere indicazioni su una eventuale differenza dell'*habitus* sismico delle due sponde dello Stretto, basandosi, però, sul comportamento di queste in occasione di eventi macrosismici, s'intende, non catastrofici.

A questo riguardo informazioni estremamente utili sono da attendersi anche dai risultati di osservazioni, prolungate nel tempo, sul comportamento dei due piloni dell'elettrodotto attraversante lo Stretto, per i quali il problema si era già imposto a suo tempo (1950-55) ed era stato risolto, con criteri molto cautelativi (in mancanza di criteri di valutazione basati su accertamenti specifici) tenendo conto, nella progettazione delle strutture, di un evento sismico « disastrosissimo ».

del ponte, tenendo presente l'opportunità di non distanziare troppo l'uno dall'altro i singoli assaggi.

Occorrerebbe prevedere, comunque, almeno due sondaggi (o pozzi) su ciascuna sponda, nell'intenzione di caratterizzare (per interpolazione) dal punto di vista geologico e geotecnico tutta la fascia di terreno compresa fra i due scavi di saggio. Se però questi dovessero fornire risultati troppo diversi tra di loro, verrebbe meno la possibilità di caratterizzare in modo unico i terreni compresi in detta fascia e pertanto si renderebbe necessaria l'esecuzione di sondaggi intermedi (anche semplicemente geognostici) per poter circoscrivere con maggiore approssimazione le aree entro le quali sarebbero da estendere i risultati dell'uno e dell'altro dei due sondaggi estremi.

(7) Il programma esecutivo di questi sondaggi, redatto su indicazione degli scriventi, prevede il prelevamento di carote di fondo, sistematico (ogni 30 metri), e, a richiesta, ogni qualvolta se ne manifesti l'opportunità.

È prevista inoltre l'esecuzione di misure geofisiche in pozzo, quali carotaggio sismico, carotaggio elettrico, microlog, laterolog, termometria ecc.

L'insieme degli esami e delle operazioni rese possibili con l'esecuzione dei due sondaggi dovrebbe consentire accertamenti di natura petrografica e paleontologica e indicazioni sulla porosità, permeabilità e « moduli di elasticità » dei terreni attraversati, l'osservazione dei livelli statici delle varie falde acquifere incontrate e, possibilmente, delle loro portate, nonché una « taratura » dei risultati delle indagini geofisiche già effettuate in superficie.

Istologia. — *Effetto delle lesioni traumatiche sulla attività mitotica dei fibroblasti coltivati in vitro* (*). Nota di OLIVIERO MARIO OLIVO e ISABELLA GALLIANI, presentata (**) dal Socio O. M. OLIVO.

I fattori di preparazione e di stimolazione delle cellule alla mitosi non sono ancora esaurientemente conosciute. La tecnica della coltivazione dei tessuti *in vitro* offre la possibilità di affrontare il problema su stipiti cellulari omogenei, sottratti agli innumerevoli e simultanei fattori nervosi, umorali, ormonali, di correlazione con elementi di altra natura ecc. operanti nell'organismo di un metazoo. Il problema è già stato affrontato da vari punti di vista anche con questo metodo (vedi Bibl. in G. Levi [1], E. Mayer [2], A. Ficher [3], M. R. Murray e G. Kopech [4]). A. Fischer e E. Mayer in particolare si sono occupati con molta acutezza dei processi di rigenerazione, almeno così intesi da questi Autori, nelle colture in goccia pendente e in piastra di Carrel, mettendo in luce molti fatti interessanti che hanno notevole analogia con quanto abbiamo osservato negli esperimenti sui quali stiamo per riferire.

È noto che nelle normali colture di fibroblasti in goccia pendente, mantenuti in terreno di plasma e estratto embrionale nelle condizioni più favorevoli all'accrescimento un numero difficilmente valutabile di cellule muoiono e si dissolvono senza lasciar traccia di sé. Quale è il destino delle sostanze che le costituivano e degli enzimi endocellulari che si disperdono fra le cellule sopravvissute? Sono semplicemente materiali metabolizzabili o hanno particolari azioni stimolanti il metabolismo, la migrazione, la moltiplicazione delle cellule superstiti? Se provochiamo artificialmente, per via traumatica la morte di un certo numero di cellule, è dato constatare un qualche effetto sull'attività mitotica delle restanti cellule? È quanto abbiamo cercato di stabilire.

Abbiamo impiegato fibroblasti provenienti da tendini plantari di embrioni di pollo di 14 giorni di incubazione e una volta da pulcino di 3 giorni dopo la schiusa, coltivati da più di due anni in goccia pendente i primi e per un mese i secondi. Abbiamo impiegato sempre coppie di colture gemelle in condizioni apparentemente eguali di accrescimento. Gli espianti venivano tutti trapiantati in una goccia di plasma omologo col 20%, di siero di cavallo e una goccia di estratto embrionale al 33%, su doppio copri oggetti di mica secondo il metodo di Maximow. I supporti delle colture erano circolari, del diametro di 2 cm. Dopo 48 ore di sviluppo a 38°, di ogni coppia ad una coltura venivano praticate 15-20 incisioni per mezzo di un coltellino del Gräfe; soltanto

(*) Lavoro eseguito col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche nell'Istituto di Istologia e Fisiologia generale dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta dell'11 febbraio 1961.

nel primo esperimento si praticarono invece circa 50 punture con un sottile ago da dissociazione. Dopo l'operazione tanto queste colture quanto le gemelle di controllo venivano addizionate di una goccia di plasma-siero e una di estratto embrionale, che venivano distese in strato uniforme su tutta la superficie del precedente coagulo, senza previo lavaggio. In precedenza O. M. Olivo e M. A. Gliozzi [5], Olivo, Gliozzi e P. R. Carraro [6] hanno dimostrato che il lavaggio in soluzione di Ringer fatto precedere al rifornimento di materiale nutritizio riduce la velocità di migrazione e l'attività mitotica in misura rilevante. Dopo questo trattamento, che metteva tutte le colture nelle condizioni più favorevoli per l'ulteriore accrescimento, esse venivano mantenute ulteriormente a 38° per tempi vari, e precisamente per 8 ore, 12 ore, e 24 ore. Quindi si fissavano in liquido di Carnoy e si coloravano con ematossilina Delafield. Si procedeva quindi al conteggio di tutte le figure mitotiche e alla misurazione dell'ampiezza dell'area di migrazione su disegni all'ingrandimento di 25 diametri. Il numero totale di mitosi per coltura e il numero medio di mitosi per mm² di area di migrazione sono riportati nella Tabella. Le microfotografie delle Tavv. I-VI sono riprodotte all'ingrandimento di 180 ×.

Dopo 8 ore dal trattamento le colture operate presentano in media una riduzione costante tanto del numero globale di mitosi quanto della loro frequenza media per unità di superficie.

Dopo 12 ore il numero totale di mitosi è molto variabile, in due colture è inferiore e in due superiore a quello dei controlli, in modo che nella media globale si compensano, ma la densità di mitosi, meno che in una coppia, supera dal 47 % al 66 % quella dei controlli.

Dopo 24 ore infine, tanto il numero totale di mitosi per coltura, quanto la loro densità per unità di superficie è in misura rilevante superiore nei preparati operati (vedi Tabella I).

La distruzione traumatica di un certo numero di cellule eseguita con le modalità descritte esercita a distanza di 12-24 ore un chiaro e costante effetto stimolante sull'attività mitotica delle colonie. L'interpretazione di questi risultati non è così semplice come potrebbe sembrare. In prima istanza vien fatto di pensare ai necroormoni di Haberland, e l'idea è molto suggestiva. Non si può trascurare però di considerare alcune circostanze e fatti che si vengono a realizzare col tipo di lesioni inferte alle colture.

Dopo 8 ore dall'intervento, l'effetto è deprimente, sensibilmente negativo. Non possiamo dire quante cellule sieno state direttamente colpite e uccise dal taglio. Nel primo esperimento le semplici punture del coagulo di plasma hanno determinato in questo la formazione di brecce larghe 100-250 μ × 100-400 μ (vedi figg. delle Tavv. I-III) Quindi c'è stata compressione sui bordi delle ferite e retrazioni per sineresi del coagulo; retrazione e sineresi sono anche più evidenti dove si sono praticati dei tagli lunghi 1-2 mm e più, i margini di questi si sono divaricati per più di 1 mm. Ciò ha determinato certamente una spremitura delle cellule contenute nei bordi con probabile morte di molte di esse. È quanto avviene notoriamente anche quando si ritagliano e staccano gli espianti per trapiantarli. Con ciò si ha

TABELLA I.

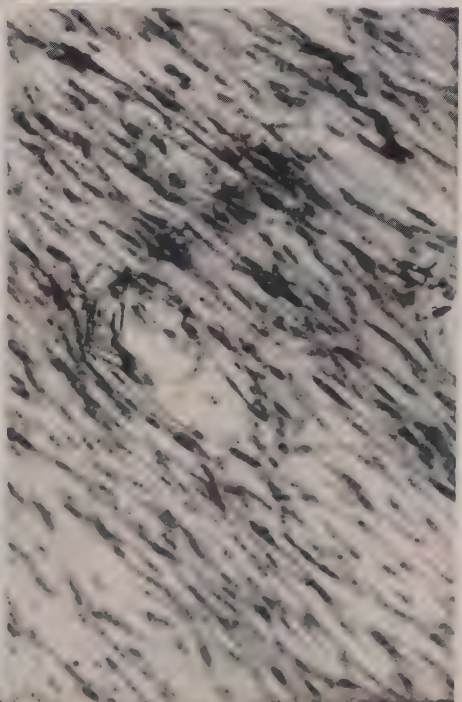
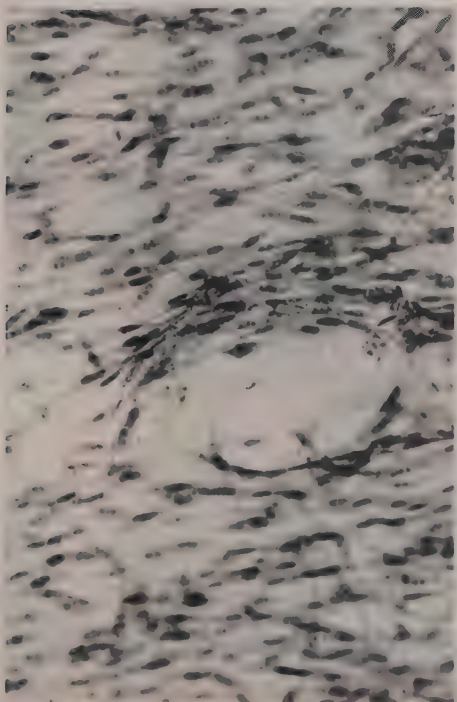
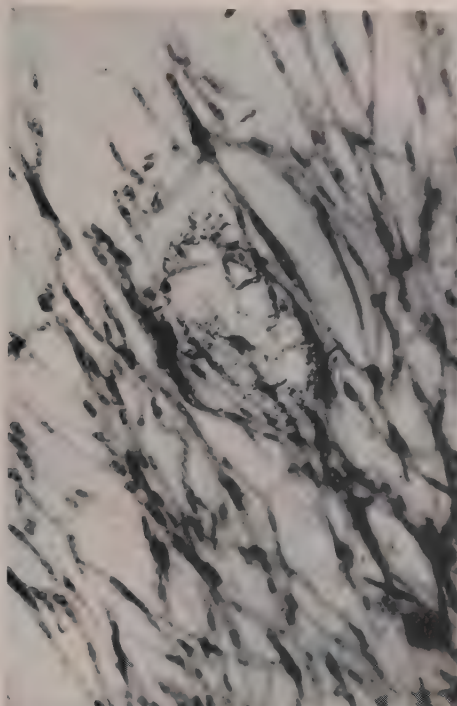
352° Trap. h 48 + 8	CONTROLLI		TEST		Tct. mitosi Test/Contr.	Mit. mm ² Test/Contr.
	N° Totale mitosi	Mitosi per mm ²	N° Totale mitosi	Mitosi per mm ²		
53415-16	1.438	40,10	932	23,20	— 35 %	— 42 %
53417-18	984	31,37	544	20,60	— 45 %	— 34 %
53419-20	530	16,72	323	15,52	— 39 %	— 8 %
53421-22	401	18,84	425	17,36	+ 6 %	— 8 %
	3.353	26,76	2.224	19,17	— 34 %	— 38 %
364° Trap. h 48 + 12						
53965-66	963	21,49	611	35,68	— 36 %	— 66 %
53967-68	836	18,66	1.060	29,80	+ 27 %	+ 60 %
53969-70	735	16,23	601	16,33	— 18 %	0 %
53971-72	616	16,81	828	24,76	+ 34 %	+ 47 %
	3.150	18,30	3.100	26,64	— 2 %	+ 46 %
12° Trap. h 48 + 24						
58245-46	377	7,34	657	15,61	+ 74 %	+ 113 %
58247-48	478	8,42	765	16,37	+ 60 %	+ 94 %
58249-50	1.312	27,80	1.170	30,22	— 11 %	+ 9 %
58251-52	590	13,26	857	23,91	+ 45 %	+ 80 %
	2.757	14,21	3.449	21,53	+ 25 %	+ 52 %
283° Trap. h 48 + 24						
54845-46	267	6,39	345	8,01	+ 33 %	+ 52 %
54847-48	323	9,61	448	13,27	+ 39 %	+ 38 %
54849-50	222	7,54	192	9,30	— 14 %	+ 23 %
	812	7,85	994	10,19	+ 22 %	+ 30 %

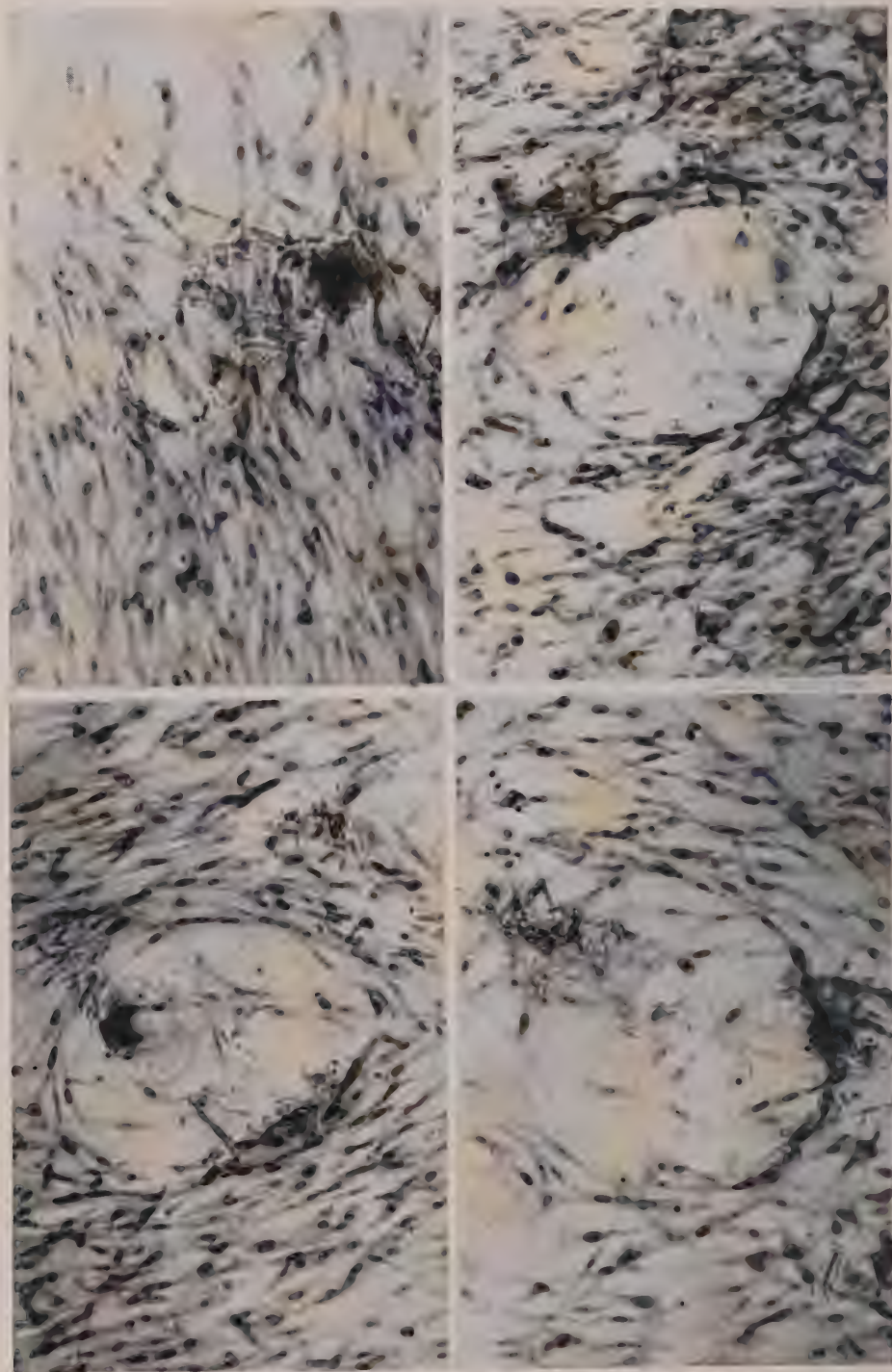
necessariamente un'improvvisa riduzione delle popolazioni di cellule viventi della colonia che non possiamo valutare quantitativamente, ma certamente superiore al numero di cellule direttamente colpite dai tagli. È evidente che in un primo tempo ne deve conseguire una proporzionale riduzione nel numero di mitosi. La diminuzione della popolazione e la sineresi del coagulo lungo tutti i margini delle ferite sono elementi sufficienti a spiegare la notevole diminuzione di mitosi constatata dopo 8 ore. Sono probabilmente gli stessi fattori che determinano ad ogni trapianto su nuovo terreno il periodo di latenza della migrazione e proliferazione cellulare. Però già all'8ª ora nelle brecce aperte dalle ferite e colmate da coagulo fresco sono migrate cellule, ancora rade, ma frequentemente in mitosi (figg. delle Tavv. I-III).

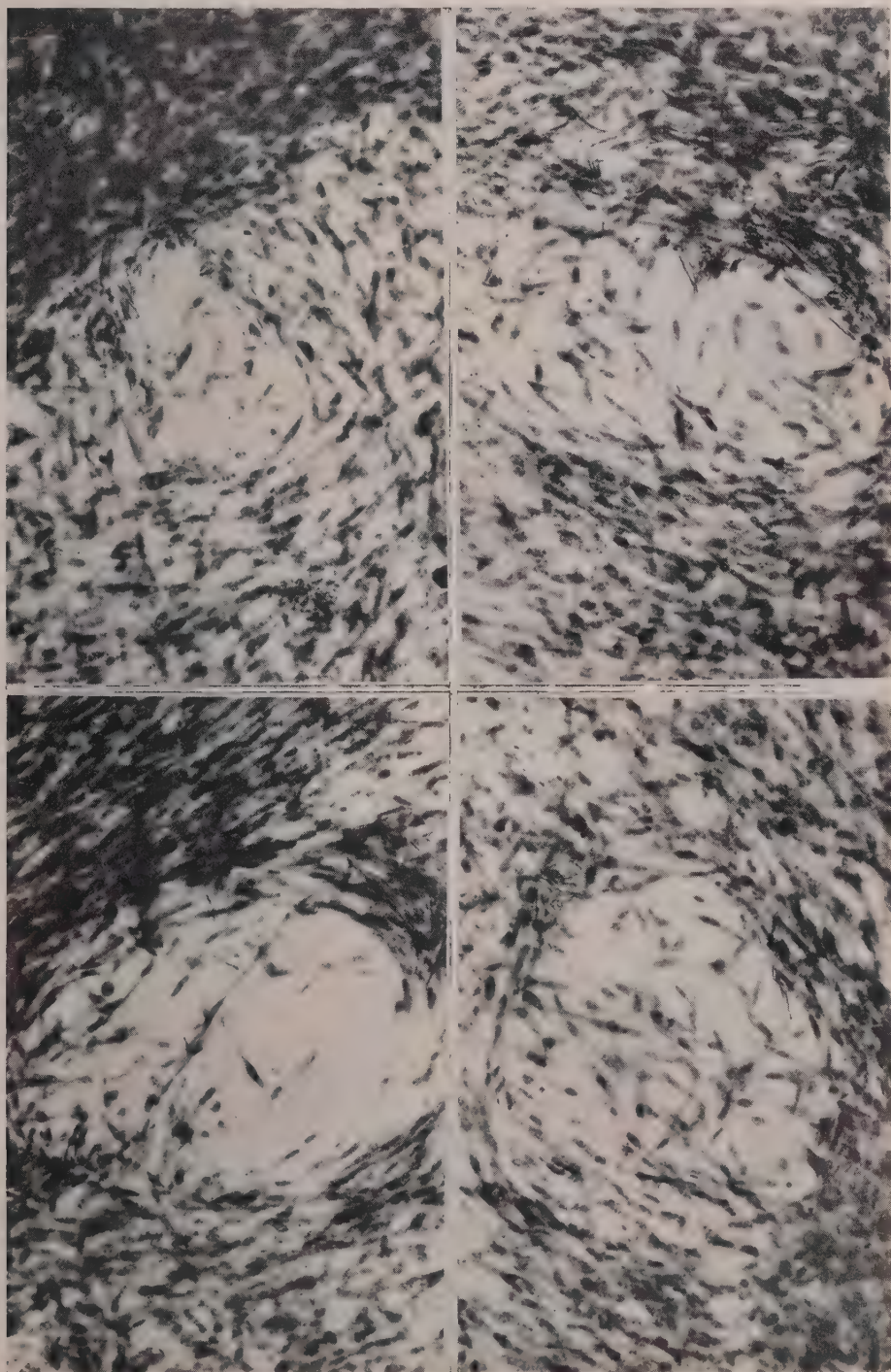
Alla 12ª, e più alla 24ª ora (figg. delle Tavv. IV-VI) queste aree sono riccamente popolate di cellule, con densità poco inferiore a quella delle aree non lese. Il questo momento il numero assoluto e relativo di mitosi è nettamente superiore nelle colonie traumatizzate in confronto ai controlli. La popolazione globale di ogni colonia è diventata più numerosa, ed è ovvio che aumenti il numero assoluto di mitosi, se in tale condizione si trova una percentuale costante delle cellule; ma il numero di mitosi è aumentato in senso assoluto e relativo anche in confronto dei controlli. Ed è questo il punto sul quale non possiamo dare per il momento una risposta e una interpretazione sicure, poiché si potrebbe trattare tanto dell'effetto stimolante la mitosi provocato da particolari sostanze liberate dalle cellule distrutte, quanto dalla temporanea artificiale rarefazione delle cellule della colonia operata. Non va dimenticato che tanto test quanto controlli si trovano nelle identiche condizioni per quanto si riferisce alla disponibilità dell'abituale materiale metabolizzabile, che è stato aggiunto in misura certamente esuberante dopo 48 ore di sviluppo, perciò riesce difficile individuare quale differente equilibrio si determini fra colonia cellulare e il suo ambiente nelle colture di controllo e in quelle lesionate. Una indicazione potremo ottenerla soltanto quando e se riusciremo a rimuovere dalle colture traumatizzate le sostanze che vengono rese libere dalle cellule distrutte e presumibilmente possono agire da stimolo alla divisione cariocinetica.

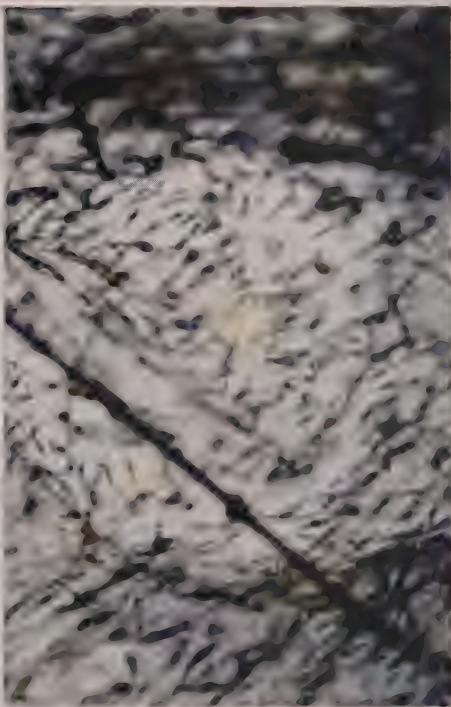
BIBLIOGRAFIA.

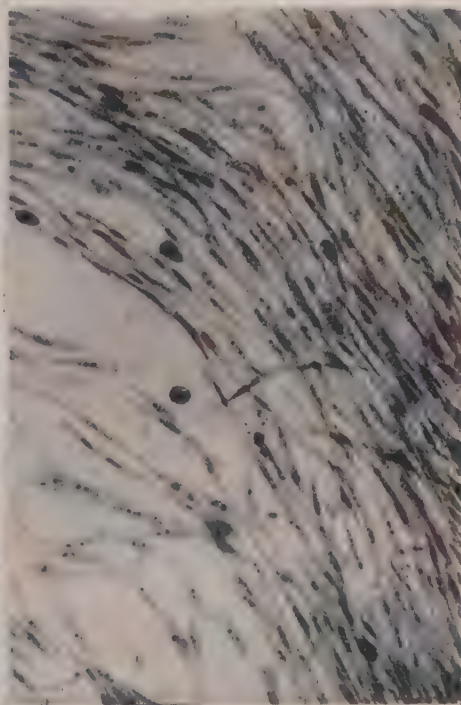
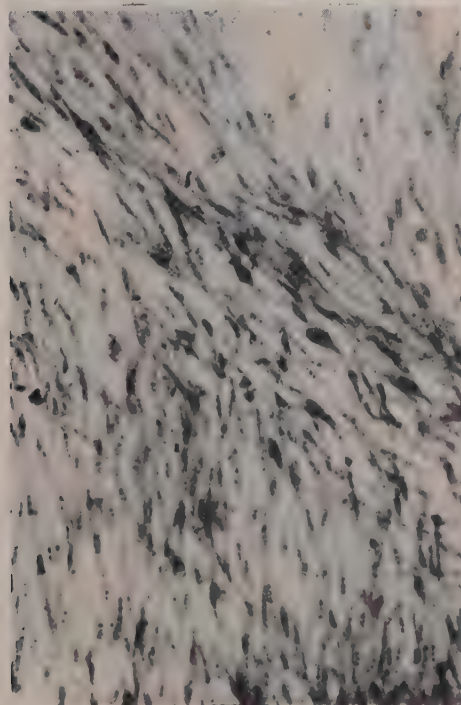
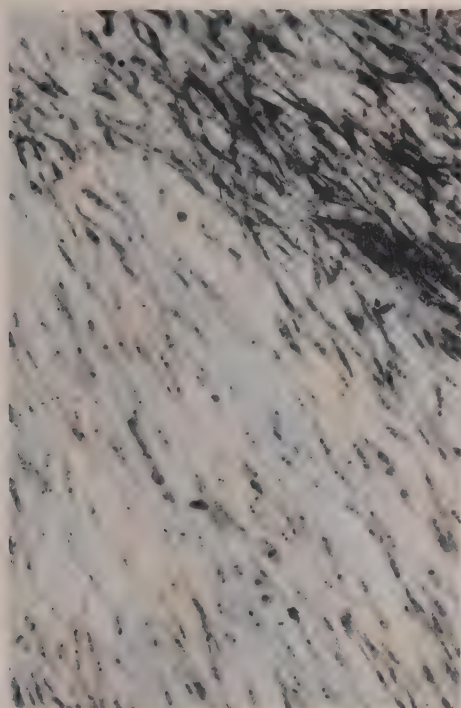
- [1] G. LEVI, *Explantation, besonders die Struktur und die biologischen Eigenschaften der in vitro gezüchteten Zellen und Gewebe*, «Erg. d. Anat. u. Entw. gesch.», 31, 125-707 (1934).
- [2] E. MAYER, *Tissue Cell Colonies in vitro*, «Tabulae Biologicae», 19 [1], 65-275 (1939).
- [3] A. FISCHER, *Biology of Tissue Cells*. Cambridge University Press, 1946.
- [4] M. R. MURRAY and G. KOPECH, *A Bibliography of the Research in Tissue Culture*. Academic Press, New-York 1953.
- [5] O. M. OLIVO e M. A. GLIOZZI, *Cataboliti e accrescimento dei fibroblasti in vitro*, «Boll. Soc. It. Biol. Sper.», 36, 257-259 (1960).
- [6] O. M. OLIVO, M. A. GLIOZZI e P. R. CARRARO, *Cataboliti e mitosi nei fibroblasti coltivati in vitro*, «Boll. Soc. It. Biol. Sperim.», 36, 737-739 (1960).

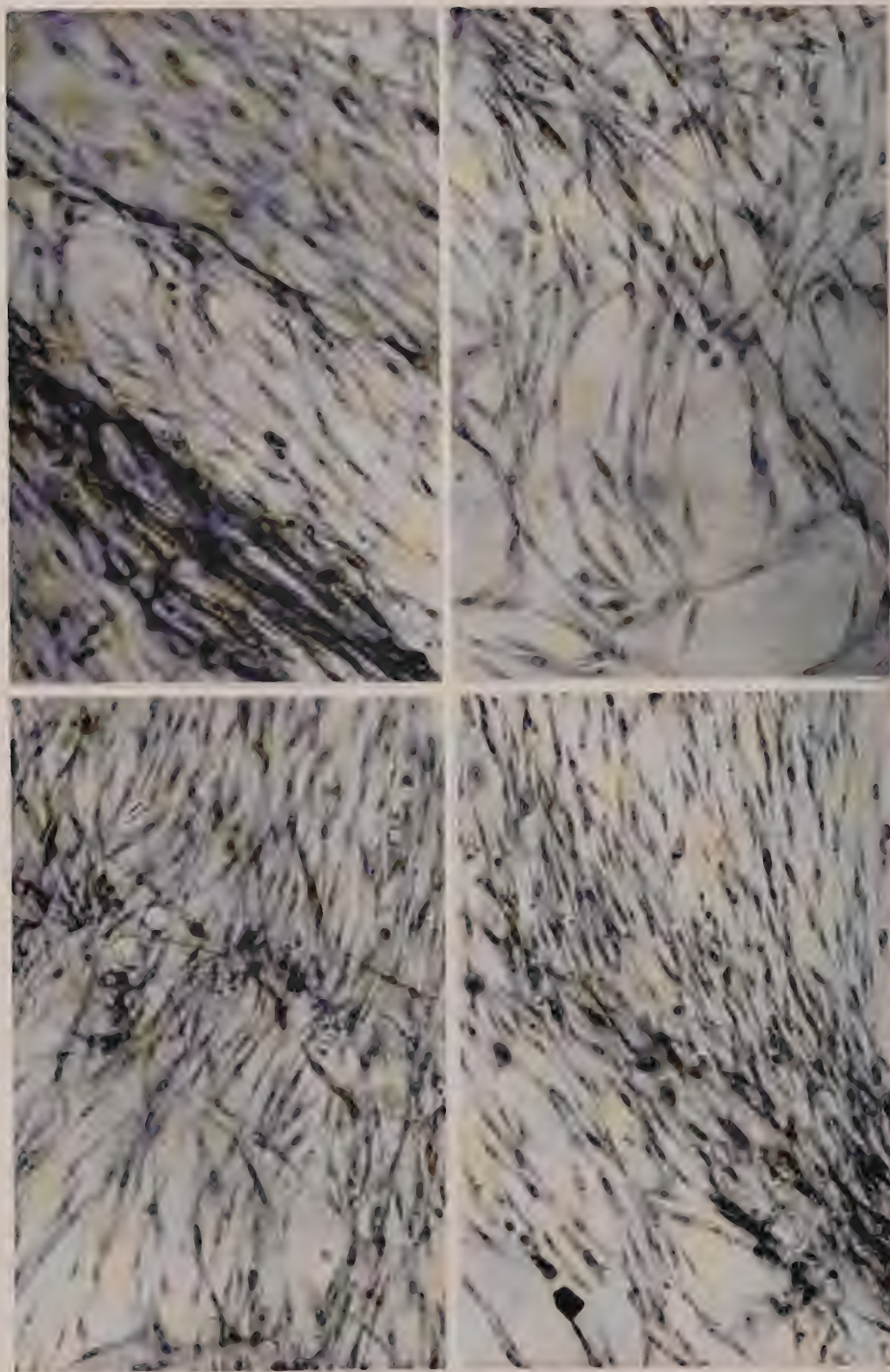












NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sur le calcul symbolique à une ou plusieurs variables, pour une algèbre localement convexe.* Nota di JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

Les résultats que nous présentons dans cette Note donnent une synthèse de plusieurs types de calcul symbolique que nous avons considérés dans des travaux précédents (cf. Bibliographie). Il s'agit d'un schéma assez général et assez simple, où rentrent, comme cas particuliers, toutes les formes usuelles de calcul symbolique, depuis le calcul des électrotechniciens à celui des opérateurs hermitiens, et qui, en outre, présente de nouvelles possibilités d'application. Cette généralisation nous a été suggérée récemment par une conférence de M. L. Waelbroeck [9]. Les résultats annoncés dans cette Note seront exposés en détail dans quelques travaux, dont le premier va paraître dans les « Annali di Matematica Pura ed Applicata » ⁽¹⁾.

1. Soit **A** une algèbre localement convexe, munie d'élément unité, et d'une topologie localement convexe, par rapport à laquelle le produit soit séparément continu. Pour commodité, nous désignerons par 1 l'élément unité de **A** et nous poserons $\lambda 1 = \lambda$, pour tout nombre complexe λ .

Suivant L. Waelbroeck [10], nous nommerons *ensemble spectral* d'un élément **a** de **A** tout ensemble S de nombres complexes vérifiant les deux conditions suivantes:

- a) l'élément $\mathbf{a} - \lambda$ est régulier pour tout λ n'appartenant pas à S;
- b) la fonction $(\mathbf{a} - \lambda)^{-1}$ de λ , à valeurs dans **A**, est bornée sur le complémentaire, $\mathbf{C} - S$, de l'ensemble S.

On voit aisément que la famille de tous les ensembles spectraux de **a** est un filtre [10]. Nous l'appellerons le *filtre spectral* de **a**.

2. Une base de filtre $\{F_k\}$, constituée par des sous-ensembles F_k du plan **C**, avec $k = 1, 2, \dots$, sera dite *régulière*, si elle vérifie les conditions suivantes:

- R 1. Pour tout k , $\mathbf{C} - F_k$ est un ouvert non vide de **C**.
- R 2. Quel que soit k , la distance de $\mathbf{C} - F_k$ à F_{k+1} est > 0 .
- R 3. Quels que soient k et $\rho > 0$, la frontière de F_k , dans le disque $|z| \leq \rho$, est formée par un nombre fini de lignes simples rectifiables.

(*) Nella seduta dell'11 febbraio 1961.

(1) Une partie de ces résultats ont été déjà annoncés au « Congresso Luso-Espanhol » tenu à Seville, de 23 à 26 novembre 1960.

R 4. *Étant c un point quelconque de $\mathbf{C} - F_k$ et F_k^* l'image de F_k par la transformation $z \rightarrow 1/(z - c)$, la longueur de l'intersection de F_k^* avec le disque $|z| \leq \rho$ tend vers une limite finie lorsque $\rho \rightarrow 0$ (quel que soit k).*

De R 2 il résulte évidemment que l'intérieur de F_k contient F_{k+1} pour tout k .

Un filtre \mathfrak{F} est dit *régularisable*, s'il admet une base $\{F_k\}$ régulière.

EXEMPLES. — I. Soit F_k , pour tout $k = 1, 2, \dots$, le demi-plan droit $\operatorname{Re}(z) \geq k$. On voit aussitôt que $\{F_k\}$ est une base de filtre régulière.

II. Soit F_k , pour tout k , l'ensemble des points de \mathbf{C} dont la distance au demi-axe réel positif est $\leq 1/k$. On voit encore, immédiatement, que cette base $\{F_k\}$ est régulière.

III. Soit \mathfrak{F} le filtre des voisinages d'un compact F de \mathbf{C} . On voit aisément que le filtre \mathfrak{F} est régularisable.

3. Soit \mathfrak{F} un filtre régularisable de sous-ensembles de \mathbf{C} et soit $\{F_k\}$ une base régulière de \mathfrak{F} . Pour tout k , nous désignerons par $\mathfrak{A}(F_k)$ l'espace des fonctions complexes φ , définies et continues sur F_k , holomorphes dans l'intérieur de F_k et telles que

$$|\varphi(z)| \leq M |z|^k, \quad \text{sur } F_k,$$

où M est une constante dépendante de φ . L'espace $\mathfrak{A}(F_k)$ est une algèbre complexe, relativement aux notions naturelles de somme et de produit de deux fonctions. D'autre part, étant c un point arbitraire de $\mathbf{C} - F_1$, nous considérons l'espace $\mathfrak{A}(F_k)$ muni de la topologie \mathfrak{T}_k définie par la norme

$$\|\varphi\|_k = \sup_{z \in F_k} \left| \frac{\varphi(z)}{(z - c)^k} \right|.$$

On démontre que $\mathfrak{A}(F_k)$, muni de cette norme, est un espace de Banach et que la topologie \mathfrak{T}_k ne change pas, quand on remplace c par un autre point de $\mathbf{C} - F_1$.

Si l'on identifie chaque fonction $\varphi \in \mathfrak{A}(F_k)$ à sa restriction à l'ensemble F_{k+1} , on a évidemment $\mathfrak{A}(F_k) \subset \mathfrak{A}(F_{k+1})$, pour tout k . Nous posons alors

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{F}) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathfrak{A}(F_k).$$

Dans $\mathfrak{A}(\mathfrak{F})$ on définit, de façon naturelle, des notions de somme et de produit, qui rendent cet ensemble une algèbre complexe, munie d'élément unité. D'autre part, il est naturel d'introduire dans $\mathfrak{A}(\mathfrak{F})$ la topologie, \mathfrak{T}_{∞} , de la limite inductive des espaces normés $\mathfrak{A}(F_k)$. Or on démontre que:

Quel que soit k , tout sous-ensemble de $\mathfrak{A}(F_k)$, borné par rapport à \mathfrak{T}_k , est relativement compact par rapport à \mathfrak{T}_{k+1} .

Il en résulte que:

L'espace vectoriel topologique $\mathfrak{A}(\mathfrak{F})$ est un espace du type (S_2) (ou un espace $(L N^)$, comme nous disons dans [1]).*

En outre, il est immédiat que le produit $\varphi \cdot \psi$ dans $\mathfrak{A}(\mathfrak{F})$ est continu. D'ailleurs on voit sans difficulté que:

L'élément \hat{z} de $\mathfrak{A}(\mathfrak{F})$ (c'est-à-dire la fonction $\varphi(z) \equiv z$) a pour filtre spectral précisément \mathfrak{F} .

EXEMPLES. — Les exemples de filtres régularisables que nous avons donnés au n° 2 nous fournissent des exemples correspondants d'espaces $\mathfrak{A}(\mathfrak{F})$. Le premier cas est celui des « espaces de fonctions holomorphes à croissance lente à droite » (cf. [2], [4] et [6]). Le second cas rentre dans le type d'espaces que nous avons considérés à propos des opérateurs à spectre non borné [7]. Le troisième cas est celui des espaces $\mathfrak{A}[F]$ des germes de fonctions analytiques sur F , concernant le calcul symbolique des opérateurs à spectre borné, que nous avons étudié dans notre Thèse (« Portugaliae Math. », 1950).

Tous les cas considérés dans nos antérieurs travaux sur le calcul symbolique sont donc compris dans ce nouveau schéma général.

4. Soit encore \mathbf{A} une algèbre topologique vérifiant les conditions indiquées au n° 1. Supposons en outre que \mathbf{A} est séparée et semi-complète. Soit d'autre part \mathfrak{F} un filtre de sous-ensembles de \mathbf{C} , admettant une base $\{F_k\}$ régulière. Dans ces conditions:

THÉORÈME. — *Il existe une correspondance biunivoque $\mathfrak{H} \longleftrightarrow \mathbf{a}$ entre les homomorphismes continus \mathfrak{H} de l'algèbre $\mathfrak{A}(\mathfrak{F})$ dans \mathbf{A} , qui font correspondre à l'unité de $\mathfrak{A}(\mathfrak{F})$ l'unité de \mathbf{A} , et les éléments \mathbf{a} de \mathbf{A} , dont le filtre spectral est plus fin que \mathfrak{F} (i. e. tels que tout F_k soit un ensemble spectral de \mathbf{a}). Cette correspondance est donnée par les formules réciproques*

$$\mathbf{a} = \mathfrak{H}(\hat{\mathcal{E}})$$

$$\mathfrak{H}(\varphi) = \frac{(\mathbf{a} - \lambda_0)^p}{2\pi i} \int_{\tilde{F}_k} \frac{\varphi(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^p} (\mathbf{a} - \lambda)^{-1} d\lambda, \quad \text{pour toute } \varphi \in \mathfrak{A}(\mathfrak{F}),$$

λ_0 étant un point arbitraire de $\mathbf{C} - F_k$ et k, p des entiers tels que $\varphi \in \mathfrak{A}(F_k)$ et que $\varphi(\lambda)/(\lambda - \lambda_0)^p$ soit bornée sur \tilde{F}_k ; on considère la frontière de F_k orientée de façon à laisser à droite les points de F_k .

Ce théorème justifie que l'on pose

$$\varphi(\mathbf{a}) = \mathfrak{H}(\varphi), \quad \text{pour toute } \varphi \in \mathfrak{A}(\mathfrak{F}),$$

pourvu que le filtre spectral de \mathbf{a} soit plus fin que \mathfrak{F} . On établit ainsi un calcul symbolique qui comprend, comme cas particuliers, tous les types de calcul symbolique considérés dans nos travaux précédents.

Le cas le plus intéressant est celui où les F_k ne sont pas bornés. Alors la formule antérieure présente une intégrale généralisée, que l'on peut définir correctement dans le cas le plus général des bases régulières.

REMARQUE. — Au lieu des homomorphismes continus de $\mathfrak{A}(\mathfrak{F})$ dans \mathbf{A} , on peut déterminer, plus généralement, l'expression de toutes les applications linéaires continues de $\mathfrak{A}(\mathfrak{F})$ dans un espace localement convexe E quelconque, séparé et semi-complet. Dans le cas où les ensembles $\mathbf{C} - F_k$ sont

non bornés, les « indicatrices » de ces applications sont des fonctions à valeurs dans E , holomorphes et « à décroissance presque rapide » dans chacun de ces ensembles.

5. Il se peut que l'homomorphisme continu $a \rightarrow \varphi(a)$ de $\mathfrak{A}(\mathfrak{F})$ dans \mathbf{A} soit prolongeable à une sur-algèbre $\tilde{\mathfrak{A}}(\mathfrak{F})$ de $\mathfrak{A}(\mathfrak{F})$, munie d'une topologie localement convexe telle que l'injection $\mathfrak{A}(\mathfrak{F}) \rightarrow \tilde{\mathfrak{A}}(\mathfrak{F})$ soit continue. L'un des buts du calcul symbolique sera, précisément, l'étude de tels prolongements.

Considérons par exemple le cas où \mathfrak{F} est le filtre des voisinages d'un compact K de \mathbf{C} , sans points intérieurs. Certaines fonctions f , holomorphes dans $\mathbf{C} - K$ et nulles à l'infini, s'identifient à des distributions sur \mathbf{R}^2 (que l'on peut désigner par le même symbole). Alors, si l'on pose

$$f^* = d_z f \quad , \quad \text{avec } d_z = \frac{\partial}{\partial y} - i \frac{\partial}{\partial x} ,$$

f^* sera une distribution sur \mathbf{R}^2 ; à support contenu dans K (cf. [2], pp. 48-49). Réciproquement, la formule intégrale de Cauchy et le théorème de Stokes montrent que l'on peut passer de f^* à f moyennant la « transformation de Stieltjes généralisée »:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbf{C}} \frac{f^*(\lambda)}{\lambda - z} d\zeta d\eta, \quad \text{avec } \lambda = \xi + i\eta,$$

pour tout $z \in \mathbf{C} - K$. Ce résultat s'étend, évidemment, aux fonctions f à valeurs dans un espace localement convexe semi-complet. Or, il peut arriver que la fonction $(a - \lambda)^{-1}$ de λ s'identifie à une distribution $R(\lambda; a)$ sur \mathbf{R}^2 . Alors, si l'on pose, suivant l'ordre d'idées de L. Waelbroeck [10]:

$$\varphi(a) = \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbf{C}} \varphi(\lambda) d_z R(\lambda; a) d\zeta d\eta,$$

on voit aisément que le calcul symbolique relatif à l'élément a se prolonge aux fonctions (ou même distributions) φ définies dans K , pour lesquelles cette intégrale existe.

Dans le cas général d'un filtre régulier \mathfrak{F} quelconque, on peut établir des résultats analogues, en s'appuyant sur une théorie semblable à celle des ultra-distributions tempérées [7], ce qui, en particulier, permettra d'éclaircir les rapports entre notre calcul symbolique et celui de Waelbroeck. D'ailleurs, dans le cas où l'intersection des ensembles F_k est contenue dans l'axe réel ou, plus généralement, dans une ligne analytique L , on peut être conduit au cas des ultra-distributions sur L , comme nous l'avons déjà signalé dans [9], n° 6, pour montrer comment le calcul symbolique des opérateurs hermitiens rentre dans notre schéma général.

6. Considérons n bases de filtre régulières F_k^1, \dots, F_k^n , de sous-ensembles de \mathbf{C} , et désignons par \mathfrak{F} le filtre engendré par les produits cartésiens

$$F_k = F_k^1 \times F_k^2 \times \dots \times F_k^n, \quad k = 1, 2, \dots$$

On peut définir l'algèbre $\mathfrak{A}(\mathfrak{F})$ des fonctions complexes $\varphi(z_1, \dots, z_n)$, holomorphes et à croissance lente sur les ensembles F_k , à peu près exactement comme on l'a fait dans le cas d'une seule variable. La généralisation du théorème antérieur au cas de n variables est alors presque immédiate, en permettant de définir des « fonctions symboliques »

$$\varphi(a_1, \dots, a_n) \quad \text{avec } \varphi \in \mathfrak{A}(\mathfrak{F}) \text{ et } a_1, \dots, a_n \in \mathbf{A},$$

dans le cas où les a_s sont permutable deux à deux et le filtre spectral de a_s est plus fin que le filtre de base $\{F_k^s\}$, pour $s = 1, \dots, n$.

Plus généralement encore, on peut établir ce théorème, dans le cas où les fonctions φ prennent leurs valeurs dans un espace localement convexe E (semi complet et séparé, en supposant donnée une application bilinéaire $(a, u) \rightarrow a \odot u$ de $\mathbf{A} \times E$ dans un autre espace E_A , hypocontinue relativement aux parties compactes.

On en déduit une généralisation du « théorème d'isomorphisme » de Lions (cf. [1], p. 99, qui peut s'appliquer à la résolution de problèmes mixtes relatifs à des équations fonctionnelles de types très généraux.

REMARQUES. — I. Dans cette étude, on peut se passer complètement de la notion de produit tensoriel topologique et même des structures d'espace localement convexe, en les remplaçant par celles, plus commodes, de « espace à bornés » et de « algèbre à bornés », proposées par L. Waelbroeck dans le Colloque de Louvain.

II. Un autre but essentiel du calcul symbolique sera celui d'étendre les résultats précédents au cas d'espaces $\mathfrak{A}(\mathfrak{F})$, où \mathfrak{F} est un filtre de sous-ensembles de \mathbf{C}'' n'admettant pas de base constituée par des produits cartésiens de parties de \mathbf{C} . Nous obtenons une telle extension du calcul symbolique, spécialement utile pour des problèmes de Cauchy, en employant certaines formules à « noyau exponentiel », comme celles considérées dans [5], [6] et [8], et en utilisant les ultra-distributions. C'est là, évidemment, un point de vue différent de celui de Waelbroeck dans [11].

NOTE AJOUTÉE PENDANT LA CORRECTION DES ÉPREUVES. Si K est un compact de \mathbf{C} , on peut employer, pour la représentation canonique des éléments φ de $\mathfrak{A}[K]$, la formule

$$\varphi(z) = \iint \delta(z - \lambda) \varphi(\lambda) d\xi d\eta, \quad \lambda = \xi + i\eta,$$

en interprétant $\delta(z - \lambda)$ comme ultra-distribution en λ à valeurs dans $\mathfrak{A}[K]$, pouvant être approchée par des fonctions entières à valeurs dans $\mathfrak{A}[K]$. Ce point de vue pourrait être utile dans le cas de n variables, en permettant de résoudre les problèmes ouverts.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] J. L. LIONS, *Les problèmes aux limites en théorie des distributions*, « Acta Mathematica », 94, pp. 1-153 (1935).
- [2] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, I. « Actual. Scient. Ind. », n. 1245, Paris Hermann (1957).

- [3] J. SEBASTIÃO E SILVA, *Su certe classi di spazi localmente convessi importanti per le applicazioni*, « Rendiconti Mat. Univ. Roma » (5), 14, pp. 338-410 (1955).
- [4] — *Le calcul opérationnel au point de vue des distributions*, « Portugaliae Math. », 14, pp. 105-132 (1955).
- [5] — *Sobre o cálculo simbólico geral para n elementos duma álgebra topológica*, Congresso Luso-Espanhol de 1958 (Madrid).
- [6] — *Sur l'espace des fonctions holomorphes à croissance lente à droite*, « Portugaliae Math. », 17, pp. 105-132 (1958).
- [7] — *Les fonctions analytiques comme ultra-distributions dans le calcul opérationnel*, « Math. Annalen », 136, pp. 58-96 (1958).
- [8] — *Sur le calcul symbolique des opérateurs différentiels à coefficients variables*, « Rend. Accad. Lincei » (8), 27, pp. 42-47, 118-122 (1959).
- [9] — *Le calcul opérationnel pour des opérateurs à spectre non borné*, « Memorie Accad. Lincei » (8), 6, pp. 1-13 (1960).
- [10] L. WAELEBROECK, *Locally convex algebras: spectral theory. Seminar on complex algebras*, « IAS » (1957-58).
- [11] — *Étude spectrale de certaines algèbres complètes*, « CBRM », Colloque sur l'Analyse Fonctionnelle à Louvain (1960).

ERRATA DE L'ARTICLE [7].

Nous profitons de cette opportunité pour indiquer quelques rectifications à faire dans l'article [7] de cette bibliographie.

Page	Ligne	Au lieu de	On doit écrire
4	17	nombre k	nombre K
4	17	$k z ^k$	$K z ^k$
4	34	converge vers ψ	converge vers 0
11	15	$\sinh z(t - \tau)$	$\frac{\sinh \sqrt{z} (t - \tau)}{\sqrt{z}}$
11	18	$\sinh t \Theta$	$\frac{\sinh t \sqrt{\Theta}}{\sqrt{\Theta}}$

Page 8, ligne - 10, on doit ajouter « semi-complet et séparé » à « localement convexe ».

Page 7, ligne 14, on doit supposer l'origine extérieur à V (ce qui ne diminue pas la généralité du résultat).

Analisi matematica. — *Sopra il prolungamento di misure in reticoli d'insiemi a struttura normale.* Nota (*) di UGO BARBUTI, presentata (**) dal Corrisp. CARLO MIRANDA.

Sia \mathfrak{R} un reticolo d'insiemi relativamente \cup -normale ⁽¹⁾ di un prefissato insieme sostegno S . Sia μ una funzione finita e isotona ⁽²⁾ su \mathfrak{R} .

In relazione al problema del prolungamento di μ in una misura sul più piccolo δ -anello d'insiemi \mathfrak{S} , contenente \mathfrak{R} , provo, in questa Nota, la seguente proposizione:

A) *Se la funzione μ isotona su \mathfrak{R} è ivi finitamente additiva ⁽³⁾ e numericamente subadditiva ⁽⁴⁾, allora essa è univocamente prolungabile in una misura su \mathfrak{S} .*

La proposizione A ammette come corollario il seguente teorema di prolungamento di F. Cafiero ⁽⁵⁾:

B) *Se la funzione μ isotona su \mathfrak{R} è ivi finitamente additiva, finitamente subadditiva e continua verso l'alto ⁽⁶⁾, allora essa è univocamente prolungabile in una misura su \mathfrak{S} .*

(*) Questo lavoro fa parte della realizzazione del programma del gruppo di ricerca n° 20 del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'11 febbraio 1961.

(1) Cfr. F. CAFIERO in [1] (si veda la bibliografia alla fine della Nota), alle pp. 133-135. Un reticolo \mathfrak{R} è detto relativamente \cup -normale se contiene l'insieme vuoto e se, per ogni $X \in \mathfrak{R}$, esistono: una successione $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ($\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$) d'insiemi appartenenti al sottoreticolo \mathfrak{R}_x ed una successione d'insiemi $\{X'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ appartenenti al reticolo \mathfrak{R}'_x , complementare di \mathfrak{R}_x (vale a dire formato dagli insiemi che sono complementi di quelli di \mathfrak{R}_x rispetto a X), per i quali è:

$$X_n \subseteq X'_n \subseteq X_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \lim_n X_n = X.$$

(2) Vale a dire non decrescente su \mathfrak{R} rispetto alla relazione di inclusione. Supporremo sempre, per il seguito, di considerare funzioni finite, anche se non sarà esplicitamente detto.

(3) Cioè $\mu(X \cup Y) = \mu(X) + \mu(Y)$ se $X, Y \in \mathfrak{R}$ e $X \cap Y = \emptyset$. Va notato che l'essere μ finita implica, per la precedente identità, $\mu(\emptyset) = 0$. Essendo poi μ isotona, ne consegue che essa è non negativa.

(4) Vale a dire risulta:

$$\mu(X) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(X_n)$$

se $X, X_n \in \mathfrak{R}$, $n \in \mathbb{N}$ e $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$. La numerabile subaddittività implica, ovviamente, la finita subaddittività.

(5) In loc. cit. in [1], a p. 208.

(6) Vale a dire:

$$\lim_n \mu(X) = \mu(X),$$

per ogni successione (X_n) non decrescente d'insiemi di \mathfrak{R} convergente all'insieme $X \in \mathfrak{R}$. È facile verificare che tale condizione implica, tenendo conto della finita subaddittività di μ , la numerabile subaddittività della medesima. Si veda la nota (4).

Naturalmente i due teoremi A e B sono equivalenti, in quanto ambedue condizione necessaria e sufficiente affinché μ sia prolungabile in una misura su \mathfrak{S} ; ma le ipotesi del teorema A appaiono meno restrittive di quelle del teorema B.

La proposizione A mi è stata utile in un lavoro, in corso di redazione, sul problema della esistenza di misure invarianti, rispetto a trasformazioni misurabili. Seguendo un metodo ideato J. C. Oxtoby e S. M. Ulam ⁽⁷⁾ e utilizzando la A ho, fra l'altro, provato che:

Se S è uno spazio topologico perfettamente normale ⁽⁸⁾ e T una trasformazione biunivoca e bicontinua di S in sé, affinché esista una misura limitata, invariante rispetto a T ⁽⁹⁾ e definita su di una σ -algebra d'insiemi \mathfrak{A} , contenente almeno la famiglia dei borelliani di S , è sufficiente che esista un punto $x \in S$ ed un compatto C per i quali risulti:

$$(1) \quad \lim''_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \chi_c(T^k x) > 0,$$

essendo χ_c la funzione caratteristica di C e $T^k x$ il trasformato di x mediante la iterata k^{ma} di T ⁽¹⁰⁾.

1. Sia \mathfrak{R} un qualunque reticolo di S . Una funzione μ finita, isotona su \mathfrak{R} e nulla sull'insieme vuoto sarà *regolare esterna* ⁽¹¹⁾ se, per ogni coppia X, Y d'insiemi di \mathfrak{R} , tali che $X \supseteq Y$, risulta:

$$2 \quad \inf \{ \mu(I) : I \in \mathfrak{R}, I \supseteq X - Y \} = \mu(X) - \mu(Y).$$

Sussiste il seguente teorema ⁽¹²⁾:

La funzione μ è univocamente prolungabile in una misura su \mathfrak{S} , se è isotona su \mathfrak{R} , ivi finitamente additiva, numerabilmente subadditiva e regolare esterna.

Pertanto, allo scopo di provare la proposizione A, basterà mostrare che:

C) *Se \mathfrak{R} è un reticolo relativamente \cup -normale e μ è ivi isotona, finitamente additiva e numerabilmente subadditiva, allora essa è regolare esterna su \mathfrak{R} .*

2. Al fine di provare la proposizione C, utile è il seguente: *Lemma. Sia \mathfrak{R} relativamente \cup -normale; la funzione μ è regolare esterna su \mathfrak{R} se essa è ivi isotona, finitamente additiva e subadditiva e se, per ogni $Y \in \mathfrak{R}$, dette $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e*

⁽⁷⁾ Cfr. il lavoro citato in [2] a p. 560.

⁽⁸⁾ Ricordiamo che S è perfettamente normale se è normale e se ogni suo chiuso è un G_δ ; cfr. ad esempio, F. CAFIERO, in loc. cit. a p. 83.

⁽⁹⁾ Cioè tale che $\mu(TI) = \mu(I)$ per ogni $I \in \mathfrak{A}$.

⁽¹⁰⁾ Poiché ogni spazio metrico è uno spazio di Hausdorff perfettamente normale (cfr. ad esempio F. CAFIERO, in loc. cit. a p. 110 e 111), con questa proposizione si ritrova per la parte sufficiente, il teorema 1 della citata Nota Oxtoby e Ulam, provato da questi Autori negli spazi metrici e utilizzando la teoria della misura di C. Carathéodory.

⁽¹¹⁾ Cfr. in [3] a p. 148.

⁽¹²⁾ Si veda il lavoro citato in [3] la proposizione enunciata si desume dal teorema I di p. 150.

$\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ due successioni d'insiemi rispettivamente di \mathcal{R}_Y e del reticolo complementare \mathcal{R}_Y' , convergenti verso Y e tali che:

$$(3) \quad Y_n \subseteq Y'_n \subseteq Y_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

risulta:

$$(4) \quad \lim_n \mu(Y_n) = \mu(Y).$$

Siano $X, Y \in \mathcal{R}$ e $X \supseteq Y$; sia poi I un qualunque insieme di \mathcal{R} tale che $X \rightarrow Y \subseteq I$. Riesce intanto:

$$(5) \quad \mu(I) \geq \mu(X) - \mu(Y).$$

Si ha infatti $X \subseteq I \cup Y$ e per la isotonia e la finita subadditività di μ :

$$\mu(X) \leq \mu(I \cup Y) \leq \mu(I) + \mu(Y),$$

da cui la (5).

Fissato $\varepsilon > 0$, si può determinare, a motivo della (4), un insieme Y_k tale che:

$$(6) \quad \mu(Y_k) > \mu(Y) - \varepsilon.$$

Si ha dalle (3) $X - Y'_k \subseteq X - Y_k$ e posto $X - Y'_k = I^0 \in \mathcal{R}$, si ha pure $I^0 \supseteq X - Y$ nonché $I^0 \cup Y_k \subseteq X$, $I^0 \cap Y_k = \emptyset$ e, al solito per la isotonia e la finita additività di μ :

$$\mu(I^0) < \mu(X) - \mu(Y_k).$$

Tenendo conto della (6), si ha dalla precedente:

$$(7) \quad \mu(I^0) < \mu(X) - \mu(Y) + \varepsilon.$$

La (5) e la (7) danno la regolarità esterna (2) di μ ed il lemma è provato.

3. In virtù del lemma stabilito nel numero precedente, la proposizione C e, conseguentemente la A, sarà provata, se faremo vedere che:

D) Se \mathcal{R} è un reticolo relativamente \cup -normale e μ isotona, finitamente additiva e numerabilmente subadditiva su \mathcal{R} , detto X un qualunque insieme di \mathcal{R} e $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{X'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ due successioni di \mathcal{R}_X e \mathcal{R}'_X , rispettivamente, e tali che:

$$(8) \quad X_n \subseteq X'_n \subseteq X_{n+1}, \quad \lim_n X_n = X, \quad n \in \mathbb{N}$$

risulta:

$$\lim_n \mu(X_n) = \mu(X).$$

Fissato $\varepsilon > 0$ e posto $L = \lim_n \mu(X_n)$, sia n_1 il più piccolo intero tale che:

$$(9_1) \quad L - \mu(X_{n_1}) < \frac{\varepsilon}{2^{1+1}}$$

e, induttivamente, sia n_m il più piccolo intero, maggiore di n_{m-1} e tale che:

$$(9_m) \quad L - \mu(X_{n_m}) < \frac{\varepsilon}{2^{m+1}}.$$

Poniamo:

$$(10) \quad Y_m = X_{n_{2m-1}} \quad , \quad Z_m = X_{n_{2m}} \quad ; \quad U'_m = X'_{n_{2m-1}} \quad , \quad m \in \mathbb{N}.$$

La (8) reca:

$$(8') \quad \dots \subseteq Y_m \subseteq U'_m \subseteq Z_m \subseteq Y_{m+1} \subseteq U'_{m+1} \subseteq Z_{m+1} \subseteq \dots$$

Poniamo anche:

$$(11) \quad I_1 = Z_1 \quad , \quad I_{m+1} = Z_{m+1} - U'_m \quad , \quad m \in \mathbb{N}.$$

Dalle (8') si ha:

$$(12) \quad Z_{m+1} - Z_m \subseteq I_{m+1} \subseteq Z_{m+1} - Y_m \quad , \quad m \in \mathbb{N}$$

e conseguentemente:

$$(13) \quad \bigcup_{m \geq 0} I_{m+1} \supseteq Z_1 \cup \left[\bigcup_{m \in \mathbb{N}} (Z_{m+1} - Z_m) \right] = X.$$

Dalle (12) risulta $Z_{m+1} \subseteq I_{m+1} \cup Z_m$, onde, tenendo conto della isotonia di μ e della finita subaddittività:

$$(14) \quad \mu(Z_{m+1}) - \mu(Z_m) \leq \mu(I_{m+1}).$$

Dalle (12) risulta pure: $I_{m+1} \cup Y_m \subseteq Z_{m+1}$ è inoltre per le (11) $I_{m+1} \cap Y_m = (Z_{m+1} - U'_m) \cap Y_m$ e per le (8') riesce: $I_{m+1} \cap Y_m = \emptyset$, onde ancora per la isotonia e la finita addittività di μ ;

$$\mu(I_{m+1}) + \mu(Y_m) = \mu(I_{m+1} \cup Y_m) \leq \mu(Z_{m+1}).$$

Da quest'ultima segue:

$$(15) \quad \mu(I_{m+1}) \leq \mu(Z_{m+1}) - \mu(Y_m).$$

Dalle (14), (15) e dalle (10) e (9_m) si ha:

$$(16) \quad \begin{aligned} \mu(I_{m+1}) - (\mu(Z_{m+1}) - \mu(Z_m)) &\leq \mu(Z_m) - \mu(Y_m) = \\ &= \mu(X_{n_{2m}}) - \mu(X_{n_{2m-1}}) = L - \mu(X_{n_{2m-1}}) - (L - \mu(X_{n_{2m}})) < \\ &< \frac{\varepsilon}{2^{2m}} + \frac{\varepsilon}{2^{2m+1}} < 2\varepsilon \left(\frac{1}{4}\right)^m, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Per la numerabile subaddittività e la isotonia di μ segue dalle (13) e (16):

$$\begin{aligned} \mu(X) &\leq \sum_{m \geq 0} \mu(I_{m+1} \cap X) \leq \sum_{m \geq 0} \mu(I_{m+1}) = \mu(Z_1) + \sum_{m \in \mathbb{N}} \mu(I_{m+1}) \leq \\ &\leq \mu(Z_1) + \sum_{m \in \mathbb{N}} (\mu(Z_{m+1}) - \mu(Z_m)) + 2\varepsilon \sum_{m \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{4}\right)^m. \end{aligned}$$

Si può anche scrivere:

$$\begin{aligned} \mu(X) &\leq \mu(Z_1) + \lim_k \sum_{m \leq k} (\mu(Z_{m+1}) - \mu(Z_m)) + \left(\frac{2}{3}\right)\varepsilon < \\ &< \mu(Z_1) + \lim_k \mu(Z_{k+1}) - \mu(Z_1) + \varepsilon; \end{aligned}$$

vale a dire, per l'arbitrarietà di ε e per le (10):

$$(17) \quad \mu(X) \leq \lim_k \mu(Z_{k+1}) = \lim_k \mu(X_{n_{2(k+1)}}) = \lim_n \mu(X_n)$$

ove X_n è il termine ennesimo della successione che rispetta le (8)

Poiché è anche per la isotonia di μ , $\lim_n \mu(X_n) \leq \mu(X)$, ne viene dalla

(17) che $\lim_n \mu(X_n) = \mu(X)$ e la proposizione D è provata.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] F. CAFIERO, *Misura e integrazione*, collezione «Monografie Matematiche» a cura del C.N.R. Ed. Cremonese, Roma (1959).
- [2] J. C. OXToby and S. M. ULAM, *On the existence of measure invariant under a transformation*, «Ann. of Math.», vol. 40, pp. 560-566 (1939).
- [3] U. BARBUTI, *Teoremi di prolungamento per misure da reticoli d'insiemi*, «Ricerche di Matematica», vol. VIII, pp. 145-162 (1959).

Analisi matematica. — *Principi di massimo relativi alle equazioni di tipo ellittico e parabolico nel caso di condizioni al contorno e di condizioni iniziali rispettivamente non-continue e non-limitate.* Nota di GIORGIO ADLER, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

M. Picone, A. Tychonoff ed in seguito M. Krzyżański, seguendo il metodo del Picone, si sono occupati dell'estensione dei teoremi di positività e di unicità, relativi alle equazioni lineari alle derivate parziali di tipo ellittico e parabolico, nel caso delle condizioni al contorno e delle condizioni iniziali rispettivamente non-continue e non-limitate (vedere [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8]). L'autore è riuscito, modificando l'idea di Picone-Krzyżański, a generalizzare anche i principi di massimo relativi alle equazioni suddette. Un principio di massimo di questo tipo molto particolare si trova nel lavoro [1] dell'autore.

Per illustrare questi principi di massimo generalizzati, stabiliremo tre teoremi. Le condizioni, in cui saranno stabiliti questi teoremi, non sono le più generali possibili.

I. - DEFINIZIONI.

Considereremo le equazioni:

$$(6) \quad \mathcal{E}[u] \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f \quad (a_{ij} = a_{ji}),$$

$$(7) \quad \mathcal{P}[u] \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu - \frac{\partial u}{\partial t} = f \quad (a_{ij} = a_{ji}),$$

risp. di tipo ellittico e di tipo parabolico. Le a_{ij} , b_i , c , f nel caso (6) sono funzioni continue del punto $P(x_1, \dots, x_n)$, definite in un campo dello spazio (x_1, \dots, x_n) ; nel caso (7) sono funzioni del punto $P(x_1, \dots, x_n)$ e del tempo t , definite in un campo dello spazio $(x_1, \dots, x_n; t)$. La forma quadratica

$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \lambda_i \lambda_j$ è supposta sempre definita positiva.

Nel caso *ellittico* sia $\text{Fr}(D)$ la frontiera del campo D dello spazio (x_1, \dots, x_n) , $\bar{D} = D + \text{Fr}(D)$ la chiusura di D , $E \subset \text{Fr}(D)$, un insieme chiuso, e D_0 un dominio così definito: $D_0 = D \cap [x_1^2 + \dots + x_n^2 < \rho^2]$.

Nel caso *parabolico* sia G un campo dello spazio $(x_1, \dots, x_n; t)$, $\text{Fr}(G)$ la sua frontiera, $\bar{G} = G + \text{Fr}(G)$ la sua chiusura. $\text{Fr}(G)$ si compone per definizione dei domini chiusi S_0 e S_T di dimensione n , situati risp. sull'iperpiano

(*) Nella seduta dell'11 febbraio 1961.

$t = 0$ e $t = T$, e ancora della superficie σ , non tangente a nessuna caratteristica $t = \text{costante}$. Sia $\Sigma = S_0 + \sigma$, $E \subset \Sigma$ un insieme chiuso, G_0 e Σ_0 due domini così definiti: $G_0 = G \cap [x_1^2 + \dots + x_n^2 < \rho]$, $\Sigma_0 = \text{Fr}(G_0) \cap (0 \leq t < T)$.

Nel caso in cui D [risp. G] non è limitato, la frontiera $\text{Fr}(D)$ [risp. $\text{Fr}(G)$] completata dei punti all'infinito del dominio (in senso proiettivo) la indichiamo con $\text{Fr}^*(D)$ [risp. $\text{Fr}^*(G)$]. Analogamente introduciamo le seguenti notazioni:

$$\begin{aligned}\bar{D}^* &= D + \text{Fr}^*(D), \\ \bar{G}^* &= G + \text{Fr}^*(G), \\ S_0^* &= \text{Fr}^*(G) \cap (t = 0), \\ S_T^* &= \text{Fr}^*(G) \cap (t = T), \\ \sigma^* &= \text{Fr}^*(G) \cap (0 < t < T), \\ \Sigma^* &= S_0^* + \sigma^*.\end{aligned}$$

Se il dominio è limitato, gli insiemi stellati sono per definizione identici a quelli non stellati.

Mediante la rappresentazione

$$x'_k = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}} \right) \frac{x_k}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}} \quad (k = 1, \dots, n)$$

trasformiamo i punti esterni dell'ipersfera $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$ in punti dell'anello limitato dalle ipersfere $x_1'^2 + \dots + x_n'^2 = 1/2$ e $x_1'^2 + \dots + x_n'^2 = 1$. Alla funzione $f(P)$, definita in punti esterni all'ipersfera unitaria associamo la funzione immagine $f'(P)$ definita in punti dell'anello considerato con la seguente relazione: $f'(P') = f(P)$, dove P' è l'immagine del punto P . Diremo la funzione $f(P)$ continua nel punto infinito P_0 , se la funzione immagine $f'(P)$ è continua nel punto P'_0 corrispondente di P_0 .

2. - TEOREMI.

Equazioni ellittiche.

Teorema I. — Supponiamo che

1° la funzione $u(P)$:

- (i) soddisfi l'equazione (6) in D ;
- (ii) sia continua in $\bar{D}^* - E$;

2° per ogni ρ abbastanza grande esista una funzione $K(P)$ continua e positiva in $\bar{D}_\rho - E$, di classe C^2 in D_ρ , per la quale risulti:

$$(i) \quad \mathfrak{E}[K(P)] \leq 0 \quad P \in D_\rho;$$

$$(ii) \quad \lim_{P \rightarrow P_0 \in E} \frac{u(P)}{K(P)} = 0$$

per ogni punto $P_0 \in E$;

3° inoltre sia $c \leq 0, f \geq 0 \{f \leq 0\}$.

In queste ipotesi, introducendo la notazione

$$M = \sup_{P \in Fr^*(D) - E} u(P)$$

$$\left\{ m = \inf_{P \in Fr^*(D) - E} u(P) \right\},$$

la funzione $u(P)$ non può assumere nel campo D un valore positivo superiore a M {un valore negativo inferiore a m }.

Equazioni paraboliche.

Teorema 2. - Supponiamo che

1° la funzione $u(P, t)$:

(i) soddisfi l'equazione (3) in $\bar{G} - \Sigma$;

(ii) sia continua in $\bar{G}^* - E$;

2° per ogni ρ abbastanza grande esista una funzione $K(P, t)$ continua e positiva in $\bar{G}_\rho - E$, di classe C^2 in $\bar{G}_\rho - \Sigma_\rho$, per la quale risulti:

$$(i) \quad \mathfrak{F}[K(P, t)] \leq 0 \quad (P, t) \in G_\rho;$$

$$(ii) \quad \lim_{(P, t) \rightarrow (P_0, t_0) \in E} \frac{u(P, t)}{K(P, t)} = 0$$

per ogni punto $(P_0, t_0) \in E$;

3° inoltre sia $c \leq 0, f \geq 0 \{f \leq 0\}$.

In queste ipotesi, introducendo la notazione

$$M = \sup_{(P, t) \in \bar{\Sigma}^* - E} u(P, t)$$

$$\left\{ m = \inf_{(P, t) \in \bar{\Sigma}^* - E} u(P, t) \right\},$$

la funzione $u(P, t)$ non può assumere nell'insieme $\bar{G} - \Sigma$ un valore positivo superiore a M {un valore negativo inferiore a m }.

Teorema 3. - Supponiamo che

1° la funzione $u(P, t)$:

(i) soddisfi l'equazione (3) nell'insieme non limitato $\bar{G} - \Sigma$;

(ii) sia continua in \bar{G} ;

2° per un numero $h > 0$ sufficientemente piccolo e per ogni numero $\tau, 0 \leq \tau \leq T - h$ esista una funzione $K(P, t)$, continua e positiva in $\bar{G} \cap (\tau \leq t \leq \tau + h)$, di classe C^2 in $G \cap (\tau \leq t \leq \tau + h)$, per la quale risulti:

$$(i) \quad \mathfrak{F}[K(P, t)] \leq 0 \quad (P, t) \in G \cap (\tau \leq t \leq \tau + h);$$

$$(ii) \quad \lim_{\substack{P \rightarrow \infty \\ \tau \leq t \leq \tau + h}} \frac{u(P, t)}{K(P, t)} = 0;$$

3° inoltre sia $c \leq 0, f \geq 0 \{f \leq 0\}$.

In questi ipotesi, introducendo la notazione

$$M = \sup_{(P,t) \in \Sigma} u(P,t)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m = \inf_{(P,t) \in \Sigma} u(P,t) \end{array} \right\},$$

la funzione $u(P,t)$ non può assumere nell'insieme $\bar{G} - \Sigma$ un valore positivo superiore a M { un valore negativo inferiore a m }.

Per la costruzione delle funzioni K , ci riferiamo ai lavori [1], [2] e [4].

BIBLIOGRAFIA.

- [1] G. ADLER, *Un type nouveau des problèmes aux limites de la conduction de la chaleur*, « Publ. of the Hungarian Acad. of Sci. », 4, 109-127 (1959).
- [2] M. KRZYŻAŃSKI, *Sur les solutions de l'équation linéaire du type parabolique déterminées par les conditions initiales*, « Ann. de la Soc. Polonaise Math. », 18, 145-156 (1945).
- [3] M. KRZYŻAŃSKI, *Sur le problème de Dirichlet pour l'équation linéaire du type elliptique dans un domaine non-borné*, « Rendiconti dell'Accad. Naz. dei Lincei », serie VIII, 4, 408-416 (1948).
- [4] M. KRZYŻAŃSKI, *Sur les solutions de l'équation linéaire du type elliptique, discontinues sur la frontière du domaine de leur existence*, « Studia Mathematica », XI, 95-125 (1949).
- [5] M. KRZYŻAŃSKI, *Évaluation des solutions de l'équation aux dérivées partielles du type parabolique, déterminées dans un domaine non-borné*, « Ann. Polon. Math. », 4, 93-97 (1957).
- [6] M. KRZYŻAŃSKI, *Certaines inégalités relatives aux solutions de l'équation parabolique linéaire normale*, « Bulletin de l'Acad. Polon. des Sci. », vol. VII, N. 3, 131-135 (1959).
- [7] M. PICONE, *Sul problema della propagazione del calore in un mezzo privo di frontiera, conduttore, isotropo e omogeneo*, « Math. Annalen », 101, 701-712 (1929).
- [8] A. TYCHONOFF, *Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur*, « Recueil Mathématique (Sbornik) », 42, 199-216 (1935).

Chimica. — *Calcolo della diffrazione ai raggi X dovuta ad una struttura con impacchettamento disordinato di strati aventi struttura ordinata* (*) (**). Nota di PAOLO CORRADINI e GIUSEPPE ALLEGRA, presentata (***) dal Socio G. NATTA,

Come è noto, i catalizzatori più stereospecifici per la polimerizzazione delle α -olefine a polimeri isotattici, sono costituiti da complessi metallorganici di metalli di transizione, agenti sulla superficie di una fase solida, avente un substrato cristallino, costituito da un alogenuro di un metallo di transizione a valenza inferiore alla massima [1].

I composti dei metalli di transizione del tipo TX_3 , caratterizzati da un reticolo a strati, danno luogo ai catalizzatori più stereospecifici ($TiCl_3$ violetto, VCl_3 , ecc.). Lo studio del comportamento catalitico di diversi tipi di $TiCl_3$ ha fornito risultati molto interessanti e ha permesso di pervenire a conclusioni che s'inquadrano molto bene con le nozioni classiche della catalisi eterogenea [2].

Secondo le nostre ricerche, il $TiCl_3$ può esistere in 4 modificazioni cristalline differenti. Oltre alla forma violetta (α), nota da lungo tempo, che si può ottenere in diversi modi per riduzione del $TiCl_4$ ad alta temperatura, e a quella bruna (β), che si può ottenere solo a temperature più basse, esistono altre due modificazioni violette, delle quali una (modificazione γ) è stata per la prima volta descritta e studiata strutturalmente da noi [3].

La forma γ può essere ottenuta per riduzione del $TiCl_4$ con composti metallorganici d'alluminio impiegati in difetto, a temperature comprese tra 150° e $200^\circ C$, ed in tal caso contiene sempre quantità apprezzabili di $AlCl_3$, che riteniamo presente in soluzione solida. La forma δ del $TiCl_3$, che studieremo strutturalmente in questo lavoro, è stata ottenuta per macinazione prolungata, sia da campioni di $TiCl_3$ (α o γ) contenenti quantità apprezzabili di $AlCl_3$, sia da campioni che ne erano totalmente esenti. Essa presenta ancora alcune caratteristiche, negli spettri di polvere con i raggi X, tipiche delle forme a strati α e γ , ma ne risulta tuttavia differenziata, ad un approfondito esame strutturale, per chiare evidenze di disordine nella successione - o impacchettamento - degli strati stessi.

(*) Lavoro eseguito all'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano.

(**) Una comunicazione preliminare sulle diverse configurazioni cristalline del $TiCl_3$ e sulla sua attività catalitica nelle polimerizzazioni stereospecifiche delle α -olefine è stata fatta al Congresso sulla Catalisi, tenutosi a Parigi nel giugno 1960.

(***) Nella seduta del 14 gennaio 1961.

IPOTESI STATISTICHE PER LA STRUTTURA DEL TiCl_3 .IMPACCHETTAMENTO DEGLI STRATI STRUTTURALI NEI TiCl_3 VIOLETTI.

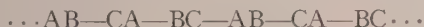
Allo scopo di ricercare quale fosse il tipo di disordine presente in questa struttura, abbiamo dapprima ricercato i modelli più semplici e prevedibili di successione statistica tra gli strati strutturali delle forme violette del TiCl_3 finora note (α e γ), definiti come costituiti da due piani di atomi di cloro, intercalanti un piano di atomi di titanio, che si dispongono in modo da risultare ottaedricamente coordinati coi primi (vedi fig. 1).

Il primo modello di successione statistica da noi ipotizzato è direttamente suggerito dall'origine meccanica della forma cristallina in esame a partire da forme ordinate. Abbiamo cioè supposto che la macinazione induca un semplice spostamento mutuo traslatorio — di tipo statistico — tra strati strutturali del TiCl_3 - α e γ , con ordine unitario di influenza statistica fra strati ($s = 1$).

Il secondo modello statistico si fonda invece sull'ipotesi che la successione degli strati strutturali sia essenzialmente governata dalla statistica dei piani di atomi di cloro, che si influenzerebbero con un effetto del 2° ordine ($s = 2$).

Daremo in questa Nota un'esposizione elementare e quanto più possibile intuitiva del procedimento da noi usato — in accordo con le teorie fondamentali di Hendricks e Teller [4], Jagodzinsky [5] e altri [6] — per il calcolo della diffrazione dovuta a questi modelli strutturali, rinviando ad un lavoro successivo per uno studio più accurato degli sviluppi matematici connessi con questo problema.

Denomineremo con A, B e C i tre soli tipi di piani di atomi di cloro che, in un impacchettamento compatto, non si trovino sovrapposti lungo la perpendicolare ai piani stessi. In un cristallo di TiCl_3 - α [7], [8] gli strati strutturali succedentisi lungo la direzione della perpendicolare saranno tutti, ad esempio, costituiti dalla successione dei piani di atomi di cloro A e B, e li potremo senz'altro denominare come AB. In un cristallo di TiCl_3 - γ [3] la successione degli strati strutturali sarà invece la seguente:



(oppure $\dots \text{BA} - \text{CB} - \text{AC} - \dots$);

uno strato di tipo CA o BC, può essere ottenuto da AB per semplice traslazione, mentre strati di tipo AC, CB, o BA sono di tipo diverso e non possono essere ottenuti dai precedenti che per rototraslazione o traslazione e riflessione nel piano mediano rispetto allo strato.

Uno strato strutturale può essere considerato come un reticolo bidimensionalmente periodico a simmetria esagonale la cui unità di ripetizione comprenda due atomi di titanio e sei di cloro (vedi fig. 1). Tuttavia, è stato constatato, sia da Klemm [8], Reed e MacWood [7] nel caso del TiCl_3 α , che

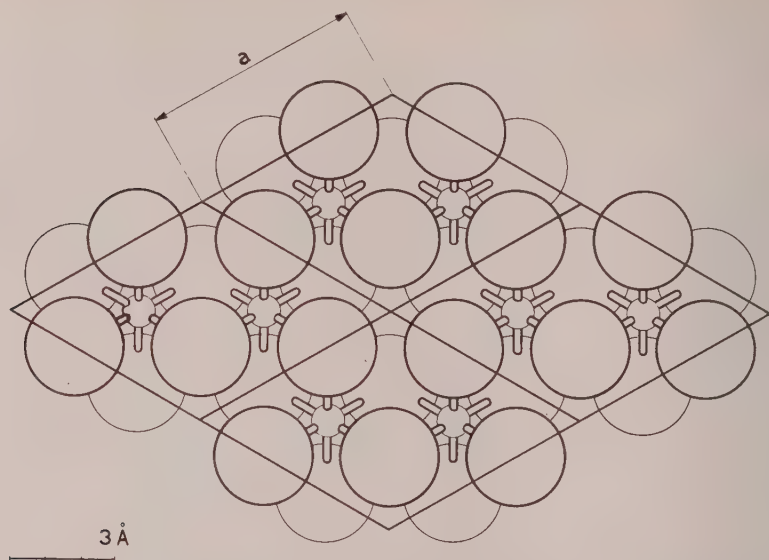


Fig. 1. - Modello della disposizione degli atomi entro uno strato strutturale delle forme a strati del TiCl_3 . I cerchi più grossi rappresentano atomi di cloro, i più piccoli atomi di titanio.

da noi nel caso del $\text{TiCl}_3\text{-}\gamma$, che le caratteristiche essenziali degli spettri X delle due forme possono essere descritte sulla base di una unità di ripetizione fittizia (sottocella piana) nella quale gli atomi di titanio si considerano distribuiti statisticamente, con frequenza $2/3$, in ogni sito in cui possono

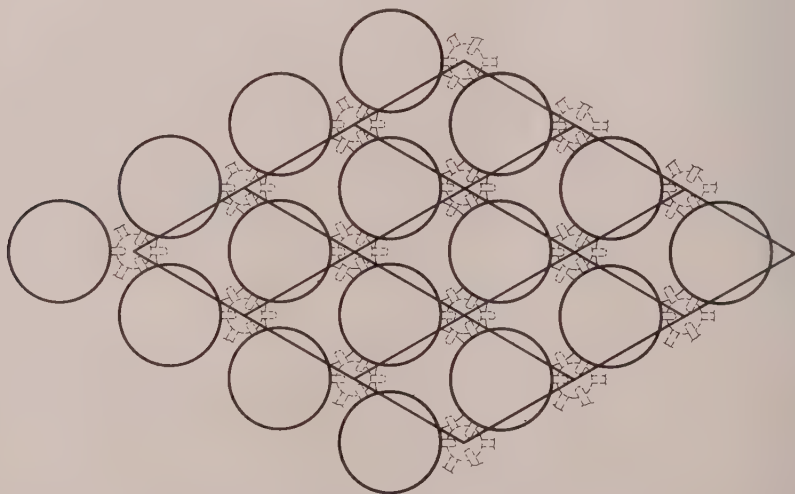


Fig. 2. - Modello strutturale simile a quello di fig. 1, in cui gli atomi di titanio sono stati fittiziamente distribuiti in tutti i siti che consentono coordinazione ottaedrica con gli atomi di cloro. È stata quindi messa in evidenza la sottocella dello strato strutturale.

coordinare ottaedricamente sei atomi di cloro. Introducendo la stessa utile approssimazione nel caso nostro, rappresenteremo così, salvo una traslazione dell'origine lungo l'asse c perpendicolare allo strato, le posizioni degli atomi entro la sottocella dello strato strutturale AB (vedi fig. 2):

$$a = b = 3,54 \text{ \AA} ; \quad \gamma = 120^\circ ; \quad c = 5,80 \text{ \AA} \quad (\text{solo } a \text{ e } b \text{ periodici})$$

$$2/3 \text{ Ti: } x = 0 ; \quad y = 0 ; \quad z = 0$$

$$2 \text{ Cl: } x = 2/3 a ; \quad y = 1/3 b ; \quad z = -1/4 c^{(1)}$$

$$x = 1/3 a ; \quad y = 2/3 b ; \quad z = 1/4 c$$

Gli strati strutturali BC e CA sono rispettivamente ottenibili dallo strato AB per traslazioni rigide di valore $(2/3 a + 1/3 b)$ e $(1/3 a + 2/3 b)$; gli strati BA, CB ed AC sono invece ottenuti rispettivamente da AB, BC e CA per riflessione attorno al piano $z = 0$ o rotazione di $(1 \pm 2n)\pi/3$ attorno ad un asse opportunamente scelto, parallelo a c .

CARATTERISTICHE ROENTGENOGRAFICHE DEL $\text{TiCl}_3\text{-}\delta$.

Lo spettro di polveri del $\text{TiCl}_3\text{-}\delta$ presenta alcune righe nette, accanto ad alcune riflessioni diffuse o aloni. Il numero delle righe nette appare sensibilmente inferiore a quello rilevabile nei corrispondenti spettri delle forme α e γ . Le riflessioni corrispondenti hanno, sulla base della sottocella sopra descritta (dove per il $\text{TiCl}_3\text{-}\alpha$ il terzo vettore periodico è c , mentre per il $\text{TiCl}_3\text{-}\gamma$ è $c' = 3c$) indici di Bragg che soddisfano alle relazioni:

$$h - k = 3n ; \quad l' = 3l = 3m \quad (n \text{ ed } m \text{ interi}).$$

I rapporti tra le intensità di queste riflessioni corrispondono bene ai rapporti tra le corrispondenti intensità delle forme α e γ ; le riflessioni di questa classe hanno infatti nelle due forme lo stesso fattore di struttura. Questa constatazione ci ha fatto supporre, in accordo col calcolo successivo, che un qualsivoglia tipo di successione di strati strutturali, purché dia luogo ad impacchettamento compatto degli anioni, non possa alterare il valore delle intensità delle riflessioni di questa classe.

È apparso quindi necessario procedere ad un esame attento degli aloni diffusi. Di essi due soprattutto apparivano significativi (dati rilevati sul maggior numero di campioni esaminati):

con massimo a $2\theta = 17,2^\circ$ (Cu-K α) — alone concentrato verso i valori di 2θ più bassi; intenso.

» » $2\theta = 33,7^\circ$ » — alone simmetrico; intenso.

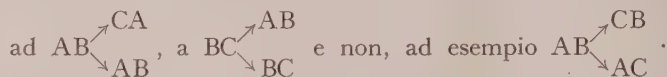
(1) Questa coordinata è fornita in questo lavoro con un'approssimazione di alcuni centesimi di Å rispetto al valore determinato sperimentalmente [3] [7].

Il primo alone, che compare con forma e intensità analoghe anche nelle forme α e γ , dipende dalla distribuzione degli atomi in ogni strato strutturale [3]. Molto più intenso e caratteristico è l'alone a $2\theta = 33,8^\circ$ ($d = 2,65 \text{ \AA}$), in quanto è intermedio alle righe nette a $2\theta = 32,9^\circ$ ($d = 2,72 \text{ \AA}$) e a $2\theta = 35,6^\circ$ ($d = 2,52 \text{ \AA}$), caratteristiche rispettivamente della forma α (riflessione con $h = 1$, $k = 0$, $l = 1$) e della forma γ (riflessione con $h = 1$, $k = 0$, $l' = 4$), ed appare sostituirle nella nuova forma.

La presenza di aloni diffusi in luogo di riflessioni nette è generalmente indice di disordine reticolare. Data la notevole stabilità di configurazione che le forze di legame tra atomi di titanio e di cloro inducono all'interno di uno strato strutturale, è apparsa ragionevole l'ipotesi che tale disordine consistesse unicamente in una irregolarità di successione tra gli strati stessi; d'altronde, la presenza di un'intera classe di riflessioni nette comuni anche alle due forme regolari, α e γ , ci ha indotti a ritenere che la giustapposizione disordinata degli strati strutturali dovesse mantenere la compattezza dell'impacchettamento degli anioni, di ingombro assai superiore a quello dei cationi; tali ipotesi sono state confermate dai calcoli successivi.

CALCOLO DELLA RADIAZIONE DIFFRATTA PER IL PRIMO MODELLO STRUTTURALE.

Considerando ora il primo modello di successione statistica, per quanto detto a pag. 183 la successione degli strati strutturali è vincolata alla condizione che ogni strato strutturale veda succedersi, nella direzione positiva dell'asse c , gli strati A, B e C sempre nello stesso modo ciclico, e cioè:



Questo equivale infatti a dire che i vari strati strutturali sono ottenuti dai precedenti per semplice traslazione, seppure la successione di dette traslazioni debba ritenersi disordinata. Ogni successione disordinata può tuttavia implicare una maggior probabilità che avvengano taluni modi di successione piuttosto che altri. Nel caso nostro, assumeremo come tipi di successione diversamente probabili i tipi:



che si richiamano al modo esagonale di impacchettamento compatto degli anioni, e i tipi:



che si richiamano al modo cubico di impacchettamento compatto degli anioni. Saranno ovviamente da escludersi tutte le successioni che involgono contiguità di strati di anioni dello stesso tipo.

Sia ora p la probabilità che due strati strutturali adiacenti si succedano secondo il modo esagonale di impacchettamento degli anioni, $(1 - p)$ la pro-

babilità di successione secondo il modo cubico. Se immaginiamo che il primo strato strutturale sia ad esempio lo strato AB, la traslazione da uno strato al successivo è (c) se la successione è di tipo esagonale, ($1/3 a + 2/3 b + c$) se la successione è di tipo cubico.

Il fattore di struttura complessivo è allora, indicando con $\varphi'(h, k, l)$ il fattore di struttura dello strato AB e con N_3 il numero complessivo di strati strutturali:

$$(I) \quad F(h, k, l) = \varphi'(h, k, l) \left\{ 1 + e^{2\pi i \left(\frac{n_1}{3} + l \right)} + e^{2\pi i \left(\frac{n_1 + n_2}{3} + 2l \right)} + \dots \right. \\ \left. \dots + e^{2\pi i \left(\frac{n_1 + n_2 + \dots + n_{N_3-1}}{3} + (N_3 - 1)l \right)} \right\};$$

$n_1, n_2, \dots, n_{N_3-1}$ possono assumere rispettivamente con probabilità p e $(1 - p)$ i valori 0 oppure $h + 2k$.

Distingueremo ora 2 casi nella nostra trattazione: $h - k = 3n$ (n intero) e $h - k = 3n + 1$.

1° caso: $h - k = 3n$.

In tal caso $h + 2k = h - k + 3k = 3m$ (m pure intero); n_j sono quindi sempre numeri interi, e quindi, in ogni caso:

$$e^{2\pi i \left(\frac{n_1 + n_2 + \dots + n_j}{3} + jl \right)} \quad (j \text{ compreso tra } 0 \text{ ed } N_3 - 1) = e^{2\pi i jl}$$

$$F(h, k, l) = \varphi'(h, k, l) \{ 1 + e^{2\pi i l} + e^{2\pi i 2l} + \dots + e^{2\pi i (N_3 - 1)l} \}.$$

Se N_3 è molto grande, avremo dunque:

$$F(h, k, l) = \begin{cases} N_3 \varphi'(h, k, l) & \text{per } l \text{ intero} \\ 0 & \text{per } l \text{ non intero} \end{cases}$$

cioè, per i riflessi appartenenti a questa classe con l intero e qualunque sia la probabilità p :

$$(2) \quad I = FF^* = F^2 = N_3^2 \varphi'^2(h, k, l) = N_1^2 N_2^2 N_3^2 \left(\frac{2}{3} f_{Ti} + 2 f_{Cl} \cos 2\pi \frac{l}{4} \right)^2$$

avendo indicato, in quest'ultima formula, con N_1, N_2 il numero complessivo di sottocelle elementari per strato.

In particolare, appare evidente che l'intensità diffratta per questa classe di riflessi deve essere la stessa anche per il $TiCl_3-\alpha$ e per il $TiCl_3-\gamma$. Il risultato ottenuto, pur confermando la compattezza dell'impacchettamento degli anioni anche nel caso del $TiCl_3-\delta$, ci dice che non può essere deciso il tipo di statistica sulla base dell'esame di questi soli riflessi.

2° caso: $h - k = 3n \pm 1$.

In tal caso $h + 2k = 3m \pm 1$.

$$(2') \quad I = FF^* = \varphi'^2(h, k, l) \left\{ N_3 + 2r \left[e^{2\pi i \left(\frac{n_1}{3} + l \right)} + e^{2\pi i \left(\frac{n_2}{3} + l \right)} + \dots + e^{2\pi i \left(\frac{n_{N_3-1}}{3} + l \right)} \right] + \right. \\ \left. + 2r \left[e^{2\pi i \left(\frac{n_1+n_2}{3} + 2l \right)} + e^{2\pi i \left(\frac{n_2+n_3}{3} + 2l \right)} + \dots + e^{2\pi i \left(\frac{n_{N_3-2}+n_{N_3-1}}{3} + 2l \right)} \right] + \dots \right. \\ \left. \dots + 2r \left[e^{2\pi i \left(\frac{n_1+n_2+\dots+n_{N_3-1}}{3} + (N_3-1)l \right)} \right] \right\}.$$

Nell'espressione scritta, che si giustifica, in modo immediato, il simbolo r significa « parte reale di », e n_j ($j = 1, \dots, N_3 - 1$) può valere 0 o 1 (con probabilità p) o $3m \pm 1$ (con probabilità $(1-p)$). Passando ad effettuare la media dell'espressione (2'), otteniamo:

$$(3) \quad \bar{I} = \varphi'^2(h, k, l) \left\{ N_3 + 2r \left[(N_3 - 1) e^{2\pi i l} e^{\frac{2\pi i n_j}{3}} + (N_3 - 2) e^{2\pi i 2l} e^{\frac{2\pi i (n_j + n_{j+1})}{3}} + \dots \right. \right. \\ \left. \left. \dots + (N_3 - (N_3 - 1)) e^{2\pi i (N_3 - 1)l} e^{\frac{2\pi i (n_1 + n_2 + \dots + n_{N_3-1})}{3}} \right] \right\}.$$

Passando ora a valutare le medie delle espressioni esponenziali indicate in parentesi, abbiamo:

$$(4) \quad e^{\frac{2\pi i n_j}{3}} = p + (1-p) e^{\pm 2\pi i \frac{1}{3}} \quad (\text{il segno } + \text{ o } - \text{ a seconda che } \\ h + k = 3n + 1 \text{ o } 3n - 1).$$

$$e^{\frac{2\pi i (n_j + n_{j+1})}{3}} = p \left[p + (1-p) e^{\pm 2\pi i \frac{1}{3}} \right] + \\ + (1-p) e^{\pm 2\pi i \frac{1}{3}} \left[p + (1-p) e^{\pm 2\pi i \frac{1}{3}} \right] = \left[p + (1-p) e^{\pm 2\pi i \frac{1}{3}} \right]^2 \\ \dots \dots \dots e^{\frac{2\pi i (n_j + n_{j+1} + \dots + n_{j+k})}{3}} = \left[p + (1-p) e^{\pm 2\pi i \frac{1}{3}} \right]^k$$

e l'espressione (3) diviene:

$$(3') \quad \bar{I} = \varphi'^2(h, k, l) \left\{ -N_3 + 2r \left[N_3 + (N_3 - 1) e^{2\pi i l} \left[p + (1-p) e^{\pm 2\pi i \frac{1}{3}} \right] + \right. \right. \\ \left. + (N_3 - 2) e^{2\pi i 2l} \left[p + (1-p) e^{\pm 2\pi i \frac{1}{3}} \right]^2 + \dots + (N_3 - (N_3 - 1)) e^{2\pi i (N_3 - 1)l} \right. \\ \left. \left. \cdot \left[p + (1-p) e^{\pm 2\pi i \frac{1}{3}} \right]^{(N_3 - 1)} \right] \right\}.$$

Ma l'espressione:

$$p + (1 - p) e^{\pm 2\pi i \frac{1}{3}}$$

può essere convenientemente scritta nella forma:

$$A e^{\pm 2\pi i \sigma};$$

essendo A e σ definiti dalle seguenti relazioni:

$$(5) \quad A = \sqrt{3p^2 - 3p + 1} \quad \text{sen } 2\pi\sigma = \frac{\sqrt{3}(1-p)}{2\sqrt{3p^2 - 3p + 1}}$$

$$\cos 2\pi\sigma = \frac{3p-1}{2\sqrt{3p^2 - 3p + 1}}.$$

Ricordando che per N molto grande e $|a| < 1$:

$$N + (N-1)a + (N-2)a^2 + \dots + a^{N-1} \cong \frac{N}{1-a}$$

e osservando che, per $p \neq 0$ o 1 , $|a| \equiv A < 1$, otteniamo, dopo semplici calcoli:

$$(5) \quad I_{AV} = \frac{\bar{I}}{N_3} = \frac{1-A^2}{1+A^2-2A \cos 2\pi(l \pm \sigma)} \varphi'^2(h, h, l).$$

Osservando che in una polvere saranno presenti in egual numero cristalli i cui strati strutturali saranno del tipo AB (o CA, o BC) e cristalli i cui strati saranno del tipo BA (o AC, o CB) l'espressione dell'intensità media diffratta per ogni strato strutturale va così modificata:

$$(6') \quad I_{AV} = \frac{\bar{I}}{N_3} = \frac{1}{2} \left\{ \varphi'^2 \frac{1-A^2}{1+A^2-2A \cos 2\pi(l \pm \sigma)} + \varphi''^2 \frac{1-A^2}{1+A^2-2A \cos 2\pi(l \mp \sigma)} \right\}$$

essendo φ' e φ'' i fattori di struttura rispettivamente degli strati di tipo AB e BA. Il doppio segno ai denominatori dei due termini dipende sempre dalla doppia possibilità di considerare, rispettivamente, riflessi per cui $h - k = 3n \pm 1$.

INTERPRETAZIONE DEI DATI SPERIMENTALI SULLA BASE DEL CALCOLO RIPORTATO.

Confinando, per le ragioni esposte, la nostra attenzione alla riflessione diffusa attorno a $33,8^\circ$ (Cu-K α), e tenuto conto che l'unica serie di riflessioni con $h - k \neq 3n$ che possa corrispondere a questa regione angolare è la serie (1 o l) con l variabile in modo continuo, compreso tra 1 e 1,33 (la riflessione 200 corrisponde infatti a $2\theta = 60,5^\circ$), abbiamo ottenuto i diagrammi della intensità media diffratta nella regione ($10/23 \div 10/2$), a vari valori del parametro p .

In fig. 3 sono riportati due di tali diagrammi, nella scala $\frac{I_{AV}}{N_1^2 N_2^2 f_{Cl}^2}$. Uno di essi (curva a strato spezzato) è stato ottenuto dando a p il valore 0,5 (egual

probabilità di successione cubica o esagonale tra gli strati). La sua nettezza appare in buon accordo col dato sperimentale: infatti, come si rileva dai fotogrammi, il valore della intensità cade a valori inferiori alla 3^a parte del valor massimo di un intorno di l pari a $0,35 \div 0,40$ unità, ma la posizione del suo massimo, corrispondente a $l = 1,17$, non coincide con quella dell'alone sperimentalmente osservato (per cui $2\theta = 33,8^\circ$, corrispondente a $l = 1,10$). La curva a tratto pieno avente il massimo in corrispondenza di $l = 1,10$ è stata

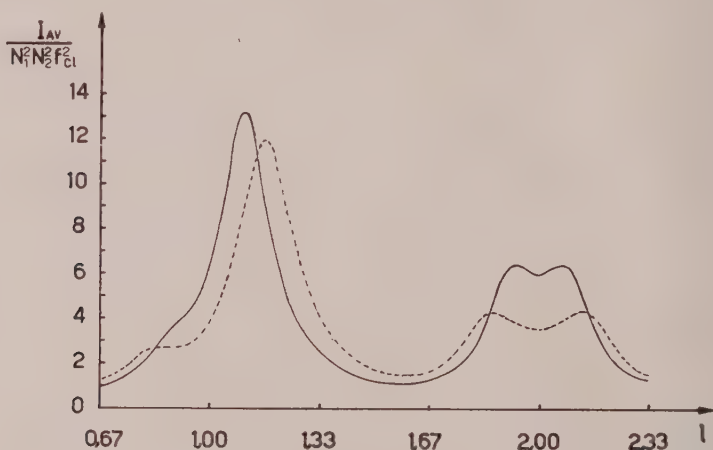


Fig. 3. - Grafico dell'andamento dell'intensità media diffratta in funzione del parametro l nella struttura statistica corrispondente alla prima ipotesi ($k - k' = 3n$). La curva a tratto spezzato corrisponde al valore $p = 0,50$; la curva a tratto pieno al valore $p = 0,63$.

da noi costruita osservando, dall'analisi dell'espressione (6'), che il massimo dell'intensità media diffratta in questa zona deve cadere attorno a $l = 1 + \sigma$; questo significa attribuire a σ il valore $0,10$. Dalle relazioni (5) è possibile determinare i valori corrispondenti di p e di A , e si ottiene $p = 0,63$, $A = 0,548$. Costruita la curva a tratto pieno con questi valori, abbiamo ottenuto un buon accordo col dato sperimentale anche a riguardo della posizione del massimo di intensità dell'alone in esame. È da notare ancora che il massimo compreso nella zona di $l = 2$ può giustificare bene la comparsa di un alone debole che si osserva attorno a $2\theta = 42 \div 43^\circ$.

CALCOLO DELLA RADIAZIONE DIFFRATTA PER IL SECONDO MODELLO STRUTTURALE.

Il secondo modello statistico, da noi scelto e per la sua semplicità, e richiamandoci ad esempi già riportati [5, 6] di disordine monodimensionale in strutture a impacchettamento compatto, si fonda sull'ipotesi che la successione degli strati strutturali sia essenzialmente determinata dalla successione dei piani di atomi di cloro, la posizione di ognuno dei quali sarebbe

influenzata da quella dei due che lo precedono. Indicando, in altre parole, con α la probabilità che tre piani di atomi di cloro si succedano nell'ordine (successione esagonale):

$$\dots ABA \dots ; \dots BCA \dots ; \dots CAC \dots ,$$

e con $(1 - \alpha)$ la probabilità che la successione sia invece (successione cubica):

$$\dots ABC \dots ; \dots CBA \dots ; \dots CAB \dots ,$$

è facile vedere che uno strato strutturale influenza probabilisticamente il successivo, e solo il successivo, così che, ad esempio, allo strato AB possono succedere i quattro strati AB, AC, CA, CB con le seguenti probabilità:

	AB	probabilità
	↗	
	AC	α^2
	↘	
AB	↗	$\alpha(1 - \alpha)$
	CA	$(1 - \alpha)^2$
	↘	
	CB	$\alpha(1 - \alpha)$

Sulla base di questo modello abbiamo eseguito un calcolo preliminare nella ipotesi $\alpha = 0,5$ (egual probabilità di successioni sul tipo del TiCl_3 - α e γ), per decidere in via orientativa dell'accettabilità di questo modello.

Abbiamo usato la formula più generale per l'espressione dell'intensità diffratta da parte di N_3 strati strutturali:

$$\begin{aligned}
 (7) \quad I = & \sum_{j=1}^{N_3} \varphi^{(j)} \varphi^{(j)*} + \sum_{j=1}^{N_3-1} \varphi^{(j)} \varphi^{(j+1)*} + \dots + \sum_{j=1}^{N_3-(N_3-1)} \varphi^{(j)} \varphi^{(j+N_3-1)*} + \\
 & + \sum_{j=1}^{N_3-1} \varphi^{(j)*} \varphi^{(j+1)} + \dots + \sum_{j=1}^{N_3-(N_3-1)} \varphi^{(j)*} \varphi^{(j+N_3-1)}.
 \end{aligned}$$

Questa formula esprime l'intensità totale diffratta da una qualunque struttura a strati come somma dei termini di interferenza di ogni strato con se stesso, coll'adiacente, col biadiacente... Il termine $\varphi^{(j)}$ rappresenta il fattore di struttura dello strato j -esimo, riferito per semplicità all'origine del 1° strato.

I tipi di strati diversi — e intenderemo non ottenibili l'uno dall'altro per traslazione reciproca — sono per noi soltanto due: strati con fattore di struttura $\varphi' e^{i\alpha}$ e strati con fattore di struttura $\varphi'' e^{i\alpha}$. Al primo tipo appartengono gli strati:

$$AB, BC, CA,$$

e il loro fattore di struttura, considerando che i detti strati occupino la i -esima posizione (nella direzione positiva dell'asse z) è rispettivamente:

$$\begin{aligned}
 \varphi' e^{2\pi i j l}; \quad \varphi' e^{2\pi i \left(\frac{2}{3} h + \frac{1}{3} k + j l \right)} = \varphi' e^{2\pi i (\theta + j l)}; \quad \left(\theta = \frac{2}{3} h + \frac{1}{3} k \right) \\
 \varphi'' e^{2\pi i \left(\frac{1}{3} h + \frac{2}{3} k + j l \right)} = \varphi'' e^{2\pi i (\eta + j l)}; \quad \left(\eta = \frac{1}{3} h + \frac{2}{3} k \right).
 \end{aligned}$$

Al secondo tipo di strati appartengono invece:

$$BA, CB, AC$$

il cui fattore di struttura è, rispettivamente:

$$\varphi'' e^{2\pi i j l}; \varphi'' e^{2\pi i (\theta + j l)}; \varphi'' e^{2\pi i (\eta + j l)}.$$

Passando quindi a mediare l'espressione (7) otteniamo:

$$(8) \quad \overline{\sum_{j=1}^{N_3} \varphi^{(j)} \varphi^{(j)*}} = \frac{1}{2} (\varphi'^2 + \varphi''^2);$$

$$\overline{\sum_{j=1}^{N_3-1} \varphi^{(j)*} \varphi^{(j+1)}} = \left\{ \overline{\sum_{j=1}^{N_3-1} \varphi^{(j)} \varphi^{(j+1)*}} \right\}^* =$$

$$= (N_3 - 1) e^{2\pi i l} \left\{ \frac{1}{4} \frac{1 + e^{2\pi i \eta}}{2} \varphi'^2 + \frac{1}{2} \frac{e^{2\pi i \eta} + e^{2\pi i \theta}}{2} \varphi' \varphi'' + \frac{1}{4} \frac{1 + e^{2\pi i \theta}}{2} \varphi''^2 \right\};$$

$$\overline{\sum_{j=1}^{N_3-2} \varphi^{(j)*} \varphi^{(j+2)}} = \left\{ \overline{\sum_{j=1}^{N_3-2} \varphi^{(j)} \varphi^{(j+2)*}} \right\}^* = (N_3 - 2) e^{2\pi i 2l}.$$

$$\left\{ \frac{1}{4} \frac{1 + e^{2\pi i \eta} + 2(1 + e^{2\pi i \eta} + e^{2\pi i \theta})}{2^3} \varphi'^2 + \frac{1}{2} \frac{e^{2\pi i \eta} + e^{2\pi i \theta} + 2(1 + e^{2\pi i \eta} + e^{2\pi i \theta})}{2^3} \varphi' \varphi'' + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4} \frac{1 + e^{2\pi i \theta} + 2(1 + e^{2\pi i \eta} + e^{2\pi i \theta})}{2^3} \varphi''^2 \right\};$$

.....

Passando ora a considerare separatamente i due casi, con $h - k = 3n$ e $h - k = 3n + 1$, otteniamo:

1° caso:

$$h - k = 3n; \quad e^{2\pi i \eta} = e^{2\pi i \theta} = 1$$

$$(9) \quad \bar{I} = \frac{1}{2} N_3 (\varphi'^2 + \varphi''^2) + \left\{ \frac{1}{4} (N_3 - 1) (\varphi' + \varphi'')^2 e^{2\pi i l} + \right.$$

$$+ \frac{1}{4} (N_3 - 2) (\varphi' + \varphi'')^2 e^{2\pi i 2l} + \dots + \frac{1}{4} (N_3 - (N_3 - 1)) (\varphi' + \varphi'')^2 e^{2\pi i (N_3 - 1)l} \left. \right\} +$$

$$+ \{\text{complesso coniugato}\},$$

Ricordando che, per $h - k = 3n$,

$$\varphi' = \varphi'' = \varphi = N_1 N_2 \left(\frac{2}{3} f_{Ti} + 2 f_{Cl} \cos 2\pi \frac{l}{4} \right) = N_1 N_2 F$$

otteniamo, per N_3 molto grande:

$$(9') \quad \bar{I} = N_1^2 N_2^2 F^2 \{ N_3 + 2(N_3 - 1) \cos 2\pi l + 2(N_3 - 2) \cos 2\pi l + \dots$$

$$\dots + 2(N_3 - (N_3 - 1)) \cos 2\pi (N_3 - 1)l \} = \begin{cases} N_1^2 N_2^2 N_3^2 F^2 & \text{per } l \text{ intero} \\ 0 & \text{per } l \text{ non intero.} \end{cases}$$

Anche in questa ipotesi statistica, quindi, l'intensità di un qualunque riflesso della classe $h - k = 3n$, non sarebbe diversa da quella che ci si attenderebbe da qualunque struttura ordinata ($\text{TiCl}_3\text{-}\alpha$ o γ).

2° caso:

$$h - k = 3n \pm 1 \quad ; \quad e^{2\pi i \eta} = e^{-2\pi i \theta} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Con evidenti passaggi, si ha:

$$(9'') \quad \bar{I} = \frac{1}{2} N_3 (\varphi'^2 + \varphi''^2) + r \left\{ (i\varphi' e^{\pi i \theta} + i\varphi'' e^{\pi i \eta})^2 \left(N_3 \frac{e^{2\pi i l}}{4} + \right. \right. \\ \left. \left. + (N_3 - 1) \left(\frac{e^{2\pi i l}}{4} \right)^2 + \dots + (N_3 - (N_3 - 1)) \left(\frac{e^{2\pi i l}}{4} \right)^{N_3 - 1} \right) \right\} =$$

(usando la formula già data a pag. 189, per N_3 molto grande)

$$N_3 \left[\frac{1}{2} (\varphi'^2 + \varphi''^2) + r \left\{ (\varphi' e^{\pi i \theta} + \varphi'' e^{\pi i \eta})^2 \frac{1}{1 - 4 e^{-2\pi i l}} \right\} \right].$$

Sostituendo infine a φ' e φ'' le rispettive espressioni, si ottiene, dopo alcune semplificazioni:

$$(10) \quad \frac{I_{AV}}{N_1^2 N_2^2} = \frac{\bar{I}}{N_1^2 N_2^2 N_3} = \frac{1}{5 + 4 \cos \pi l} \left\{ 6f_{Cl}^2 + \frac{8}{3} f_{Ti}^2 \frac{5 - 4 \cos^2 \pi l}{5 - 4 \cos \pi l} - 8f_{Ti} f_{Cl} \cos \frac{\pi l}{2} \right\}$$

dove, dei tre termini in cui si può suddividere il prodotto, il primo rappresenta il contributo alla diffrazione dei soli atomi di cloro, il secondo il contributo dei soli atomi di titanio, il terzo il contributo misto atomi di titanio-atomi di cloro.

CONFRONTO TRA I RISULTATI OTTENUTI SULLA BASE DEI DUE DIVERSI MODELLI STATISTICI IPOTIZZATI.

La curva $\frac{I_{AV}}{N_1^2 N_2^2 f_{Cl}^2}$ calcolata secondo la (10), è riportata in fig. 4 in funzione di l ; il suo massimo non si presenta molto discosto dal valore sperimentale a $l = 1, 10$, ma lo scarso grado di nettezza ottenuto è senz'altro in disaccordo coll'esperienza. D'altronde, calcoli di prossima pubblicazione da noi effettuati tenendo conto di diverse probabilità di successione, cubica o esagonale, dei piani di atomi di cloro, hanno confermato pienamente l'inadeguatezza di questo modello statistico.

Abbiamo pertanto accettato il primo tipo di modello, per la sua buona aderenza all'esperimento; d'altronde il secondo modello avrebbe imposto la necessità che, per effetto del trattamento di macinazione, strati strutturali potessero subire mutua rotazione o dislocamento di legami di coordinazione tra atomi di titanio e atomi di cloro.

Sono stati pure ottenuti campioni di TiCl_3 di forma simile alla δ nei quali la posizione del massimo di intensità dell'alone corrisponde a valori più bassi di $2\theta = 33,8^\circ$, presentandosi via via più netto, verso il limite $2\theta = 32,9^\circ$ (che corrisponde alla riflessione 101 del $\text{TiCl}_3\text{-}\alpha$).

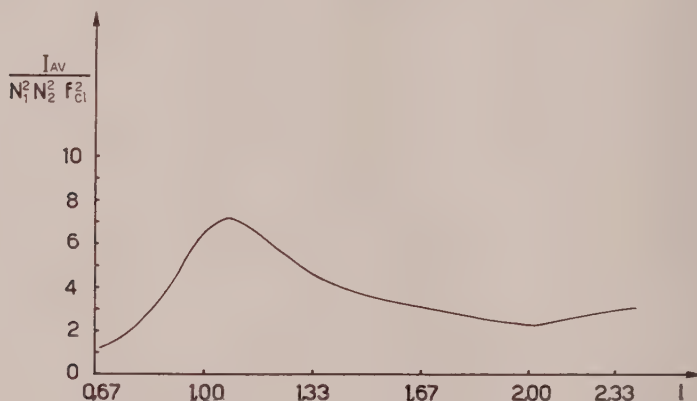


Fig. 4. - Grafico dell'andamento dell'intensità media diffratta per ogni sottocella in funzione del parametro l nella struttura statistica corrispondente alla 2^a ipotesi ($h - k \approx 3n$).

I risultati dei nostri calcoli interpretano bene questi dati sperimentali, ove si assegnino a p valori via via crescenti fino al valore limite $p = 1$ ($\text{TiCl}_3\text{-}\alpha$). Il fatto che i valori di p da noi sperimentalmente rilevati siano tutti maggiori di 0,5 (maggior probabilità di successione esagonale che cubica) potrebbe inoltre indicare una maggior stabilità termodinamica della forma α del TiCl_3 rispetto alla γ .

BIBLIOGRAFIA.

- [1] G. NATTA, *Convegno Internazionale sulla Chimica dei Composti di coordinazione*, Suppl. a «La Ricerca Sci.», 28 (1958).
- [2] G. NATTA, I. PASQUON, *The Kinetics of the Stereospecific Polymerization of Alpha-Olefins*, «Advances in Catalysis», 11, 1 (1959), Academic Press Inc., New York; G. NATTA, «Chimica e Industria», 42.
- [3] G. NATTA, P. CORRADINI, G. ALLEGRA, «Rend. Acc. Naz. Lincei» (8), 26, 155 (1959).
- [4] S. HENDRICKS, E. TELLER, «The Journal of Chemical Physics», 10, 147 (1942).
- [5] H. JAGODZINSKY, «Acta Cryst.», 201, 208, 2 (1949).
- [6] Cfr. per esempio A. J. C. WILSON, «Proc. Roy. Soc. A.», 180, 277 (1942).
- [7] J. W. REED, G. E. MACWOOD, Comunicazione tenuta al 133° Congresso di S. Francisco dell'«American Chemical Society» (13-18 aprile 1958).
- [8] W. KLEMM, E. KROSE, «Z. Anorg. Chem.», 253, 209 (1947).

Chimica. — *Struttura e proprietà magnetiche dei composti MX del terbio con i metalloidi del 5° e 6° gruppo^(*)*. Nota di GIORGIO L. OLCESE, presentata ^(**) dal Socio G. B. BONINO.

Il presente studio fa parte d'una ricerca sistematica sulla natura e sulle proprietà dei composti, di composizione MX, fra le Terre Rare e i metalloidi del 5° e 6° gruppo del Sistema Periodico, al fine d'indagare il comportamento, rispetto alla valenza, dei vari metalli delle T. R. in una serie di fasi a carattere intermedio fra metallico e ionico; e per stabilire, inoltre, se tali composti presentino anomalie magnetiche nell'intervallo di temperature fra 473 e 73° K.

Il Terbio usato è stato fornito dalla Nuclear Corporation of America, in forma compatta ottenuta per fusione, e conteneva impurezze di < 0,1 % Gd, 0,3 % Ta. Esso ha la struttura esagonale compatta, con valori delle costanti reticolari in accordo con i dati di Spedding ⁽¹⁾, e cioè:

$$a = 3,605 \text{ \AA}, c = 5,702 \text{ \AA}, c/a = 1,582.$$

I metalloidi impiegati sono stati: Se (Kahlbaum) al 99,8 %, S, Te e metalloidi del 5° gruppo, ripurificati da prodotti Fluka, al 99,8–99,9 %.

La preparazione delle fasi studiate, per sintesi diretta dei due elementi, s'è svolta, in ogni caso, in due tempi:

1° i due elementi, chiusi sotto vuoto in tubetto di vetro infusibile, nel rapporto stechiometrico 1 : 1, sono stati riscaldati gradualmente in forno elettrico da 300°C a 600°C circa, in modo che la reazione avvenisse fra il metallo (in trucioli fini) ed i vapori del metalloide, fino alla completa scomparsa di questo (2 o 3 giorni per i monocalcogenuri, 8 giorni per gli altri composti).

Alla fine di tale trattamento, l'aspetto delle varie sostanze ed i fotogrammi X delle polveri hanno mostrato che la reazione era avvenuta incompletamente, avendo interessato solo la superficie dei granuli metallici.

Si è allora proceduto ad un secondo trattamento, nel modo seguente:

2° le polveri ottenute sono state comprese in pastiglie cilindriche e riscaldate a temperatura più alta.

Per i calcogenuri esse sono state poste in crogiolini di *pythagoras*, successivamente saldati sotto Argon in crogiolo di ferro, precedentemente sgasato. In tali condizioni, sono state riscaldate a 1300°C per un tempo oscillante fra le 2 e le 5 ore (TbS).

(*) Nella seduta dell'11 febbraio 1961.

(**) Lavoro eseguito nell'Istituto di chimica fisica dell'Università di Genova; con l'aiuto finanziario di C.N.R.

(1) F. H. SPEDDING, A. H. DAANE, K. W. HERRMANN, « Acta Cryst. », 9, 559 (1956).

I prodotti ottenuti sono abbastanza alterabili all'aria (specie TbTe), compatti, duri, fragili, di aspetto omogeneo e colorati: TbS giallo ottone, TbSe giallo-rosso brillante, TbTe grigio metallico.

Nel caso di TbP, TbAs, TbSb, TbBi, le pastiglie sono state scaldate a 1100°C per un'ora e mezza, nel vuoto dentro tubo di quarzo.

L'aspetto finale è di leghe omogenee, compatte, fragili, alterabili all'aria (TbP particolarmente), di colore grigio lucente, nel caso del composto TbBi, e grigio opaco per gli altri.

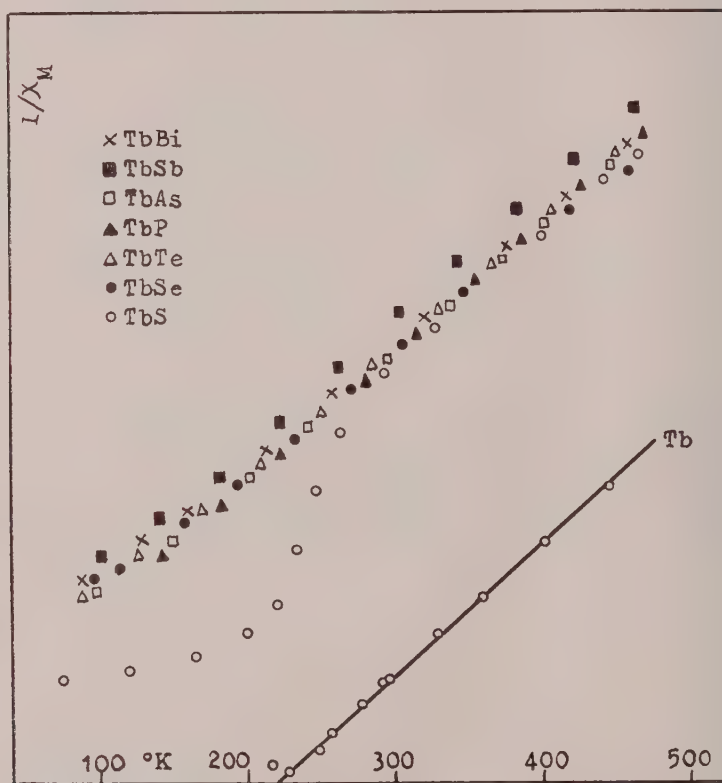


Fig. 1.

I fotogrammi Debye delle polveri dei vari composti, effettuati con la radiazione $K\alpha$ del Ferro, hanno mostrato in ogni caso, l'esistenza di un'unica fase, ed è stato facile assegnare ad ogni riga gli indici d'un reticolo cubico a facce centrate, tipo NaCl, che è stato confermato dal calcolo delle intensità (vedi la Tabella I).

Nella Tabella II sono riportati i valori delle costanti reticolari in \AA . È da notare che, di tali valori, quelli relativi ai composti TbX con i metalloidi del 5° gruppo, confrontati con gli analoghi composti delle altre T. R., presentano un andamento lineare in funzione dei raggi ionici trivalenti di queste, mentre le costanti reticolari dei monocalcogenuri di Tb si discostano

da tale andamento, ciò che s'è riscontrato, del resto, per i composti di questa serie di tutte le T. R. dal Gd in poi.

Misure di suscettività magnetica sono state effettuate sul metallo e sui vari composti sopra descritti, usando il metodo di Foëx e Forrer modificato da Pacault ⁽²⁾ in un intervallo di temperature fra 73° K e 473° K, con un campo magnetico costante di 8200 Oes.

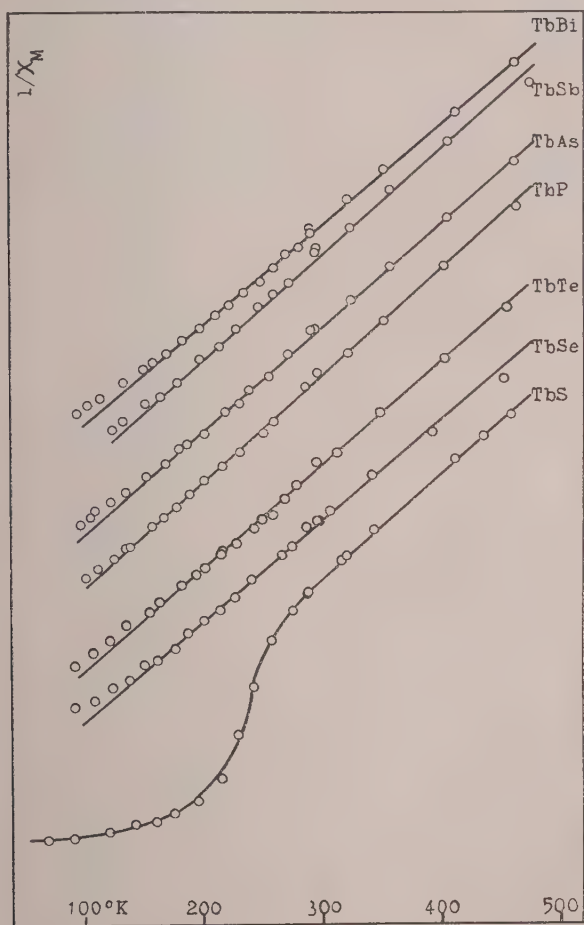


Fig. 2.

La Tabella III e le figg. 1 e 2 ne mostrano i risultati. Nei due grafici sono riportati, sulle ordinate, i valori di $1/X_M$ in una scala 1 : 0,4. (I valori di $1/X_M$ si ottengono moltiplicando per 0,4 le ordinate in mm. Per mostrare meglio l'andamento per i diversi composti, nella fig. 2 le origini delle ordinate delle varie curve sono state ogni volta spostate).

(2) A. IANDELLI, in corso di pubblicazione su « Rend. Acc. Lincei ».

Come si vede, tutti i composti studiati seguono la legge di Curie-Weiss in quasi tutto l'intervallo di temperature esplorato, e presentano il momento magnetico tipico dello ione Tb^{3+} (valore calcolato da van Vleck 9,7⁽³⁾).

Particolarità interessante è il fatto che, in ogni caso, si ha una variazione dalla legge di Curie-Weiss alle basse temperature, che non appare facilmente spiegabile.

Il Terbio metallico risulta ferromagnetico a 219° K con $\mu_B = 9,45$, $\theta_C = 219^\circ$ K (valori precedenti: W. Klemm e H. Bommer $\mu_B = 9,0$, $\theta_C = 205^\circ$ K⁽⁴⁾; F. H. Spedding $\mu_B = 9,0$, $\theta_C < 230^\circ$ K⁽⁵⁾).

Il ferromagnetismo del Terbio ed il valore elevato della sua temperatura di Curie sono in accordo con i dati teorici che prevedono tale possibilità per tutti i metalli delle T. R. dal Gd in poi, con una regolare diminuzione dei valori delle θ_C all'aumentare del n.a.⁽⁶⁾

TABELLA I.

<i>h k l</i>	TbS				TbSe				TbTe			
	$\frac{4\text{sen}^2\theta}{\lambda^2}$		I		$\frac{4\text{sen}^2\theta}{\lambda^2}$		I		$\frac{4\text{sen}^2\theta}{\lambda^2}$		I	
	oss.	calc.	oss.	calc.	oss.	calc.	oss.	calc.	oss.	calc.	oss.	calc.
1 1 1	0,1002	0,0986	<i>mf</i>	4,7	0,0922	0,0910	<i>d</i>	0,7	—	—	—	0,0
2 0 0	0,1328	0,1315	<i>f</i>	6,5	0,1229	0,1214	<i>m</i>	3,9	0,1086	0,1074	<i>m</i>	1,4
2 2 0	0,2655	0,2629	<i>f</i>	6,6	0,2448	0,2427	<i>mf</i>	4,9	0,2173	0,2149	<i>mf</i>	2,0
3 1 1	0,3642	0,3615	<i>mf</i>	4,5	0,3361	0,3337	<i>d</i>	1,1	—	—	—	0,1
2 2 2	0,3971	0,3944	<i>md</i>	3,1	0,3664	0,3641	<i>mmd</i>	2,6	0,3249	0,3223	<i>md</i>	1,1
4 0 0	0,5282	0,5259	<i>d</i>	2,0	0,4877	0,4855	<i>md</i>	1,7	0,4322	0,4298	<i>dmd</i>	0,7
3 3 1	0,6265	0,6245	<i>m</i>	3,5	0,5788	0,5765	<i>d</i>	1,2	—	—	—	0,0
4 2 0	0,6591	0,6573	<i>f-ff</i>	8,1	0,6089	0,6068	<i>f</i>	6,7	0,5399	0,5372	<i>f</i>	2,8
4 2 2	0,7901	0,7888	<i>ff</i>	10,0	0,7305	0,7282	<i>f-ff</i>	7,8	0,6467	0,6447	<i>f</i>	3,0
5 1 1 + 3 3 3	0,8883	0,8874	<i>f ff</i>	8,2	0,8205	0,8192	<i>md</i>	1,8	—	—	—	0,1
4 4 0	—	—	—	—	0,9711	0,9709	<i>ff</i>	10,0	0,8608	0,8596	<i>f</i>	2,6
5 3 1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,2
6 0 0 + 4 4 2	—	—	—	—	—	—	—	—	0,9666	0,9670	<i>ff</i>	10,0

(3) J. H. VAN VLECK, *The theory of electric and magnetic susceptibilities*, Oxford University Press, 1932.

(4) W. KLEMM e H. BOMMER, «Z. anorg. allgem. Chem.», 231, 138-71 (1937).

(5) F. H. SPEDDING e altri, *Progress in low temperature physics*, Cap. XII. (Gorter Ed.), North Holland Publishing Co., Amsterdam (1957).

(6) P. G. DE GENNES, «C. R.», 247, 1836 (1958).

Segue: TABELLA I.

<i>h k l</i>	TbP				TbAs			
	$\frac{4 \sin^2 \theta}{\lambda^2}$	$\frac{4 \sin^2 \theta}{\lambda^2}$	I		$\frac{4 \sin^2 \theta}{\lambda^2}$	$\frac{4 \sin^2 \theta}{\lambda^2}$	I	
	oss.	calc.	oss.	calc.	oss.	calc.	oss.	calc.
1 1 1	0,0941	0,0927	<i>m</i>	4,5	0,0896	0,0883	<i>d</i>	1,3
2 0 0	0,1247	0,1236	<i>mmf</i>	6,0	0,1186	0,1178	<i>f</i>	6,4
2 2 0	0,2486	0,2473	<i>mf</i>	6,2	0,2372	0,2356	<i>f</i> ⁺	6,9
3 1 1	0,3416	0,3400	<i>m</i>	4,2	0,3254	0,3239	<i>d</i>	1,4
2 2 2	0,3730	0,3709	<i>md</i>	2,7	0,3547	0,3534	<i>mf</i>	3,1
4 0 0	0,4966	0,4945	<i>d</i>	1,7	0,4731	0,4711	<i>md</i> ⁺	1,9
3 3 1	0,5895	0,5873	<i>md</i>	3,2	0,5615	0,5595	<i>dd</i>	1,0
4 2 0	0,6202	0,6182	<i>f</i>	6,8	0,5908	0,5889	<i>f</i> ⁺	7,0
4 2 2	0,7432	0,7418	<i>f</i> ⁺	7,9	0,7085	0,7067	<i>ff</i>	7,7
5 1 1 + 3 3 3	0,8356	0,8345	<i>mf</i>	6,1	0,7965	0,7951	<i>md</i>	1,7
4 4 0	0,9901	0,9891	<i>ff</i>	10,0	0,9426	0,9423	<i>ff</i>	7,8
5 3 1	—	—	—	—	1,0307	1,0306	<i>fff</i>	10,0
	TbSb				TbBi			
	$\frac{4 \sin^2 \theta}{\lambda^2}$	$\frac{4 \sin^2 \theta}{\lambda^2}$	I		$\frac{4 \sin^2 \theta}{\lambda^2}$	$\frac{4 \sin^2 \theta}{\lambda^2}$	I	
	oss.	calc.	oss.	calc.	oss.	calc.	oss.	calc.
1 1 1	—	—	—	0,0	—	—	—	0,0
2 0 0	0,1059	0,1045	<i>m</i>	1,6	0,1041	0,1014	<i>m</i>	1,0
2 2 0	0,2114	0,2094	<i>mf</i>	2,2	0,2053	0,2028	<i>mf</i>	1,5
3 1 1	—	—	—	0,1	—	—	—	0,1
2 2 2	0,3171	0,3141	<i>mmd</i>	1,2	0,3076	0,3043	<i>mmd</i>	0,8
4 0 0	0,4219	0,4188	<i>md</i>	0,7	0,4093	0,4057	<i>d</i>	0,5
3 3 1	—	—	—	0,1	—	—	—	0,0
4 2 0	0,5266	0,5235	<i>f</i>	2,8	0,5117	0,5071	<i>f</i>	2,0
4 2 2	0,6304	0,6282	<i>f</i>	3,1	0,6127	0,6085	<i>f</i>	2,1
5 1 1 + 3 3 3	—	—	—	0,1	—	—	—	0,1
4 4 0	0,8394	0,8376	<i>f</i> [—]	2,5	0,8138	0,8114	<i>mf</i>	1,6
5 3 1	—	—	—	0,3	—	—	—	0,2
6 0 0 + 4 4 2	0,9435	0,9423	<i>fff</i>	10,0	0,9149	0,9128	<i>ff</i>	5,9
6 2 0	—	—	—	—	1,0146	1,0142	<i>fff</i>	10,0

TABELLA II.

Costanti reticolari in Å ($a \pm 0,002$).

TbS	TbSe	TbTe	TbP	TbAs	TbSb	TbBi
5,516	5,741	6,102	5,688	5,827	6,181	6,280

Qualche considerazione a parte merita TbS. Nell'intervallo fra 473° K e 293° K esso segue la legge di Curie-Weiss, con un momento di 9,6 μ_B ed una θ_C di - 36° K. Al di sotto di 293° K devia da tale andamento e risulta ferromagnetico. Si è pensato, in un primo tempo, che questo fatto fosse semplicemente dovuto alla presenza, nel campione inomogeneo, di metallo non combinato, per quanto i fotogrammi X non avessero rivelato che le righe della fase tipo NaCl, senza variazione della costante reticolare tra campioni diversi. Tuttavia un nuovo campione, accuratamente ripreparato mediante un più prolungato trattamento ad alta temperatura, ha presentato ancora le stesse caratteristiche magnetiche, pur avendo un aspetto perfettamente compatto ed omogeneo.

TABELLA III.

Proprietà magnetiche.

Composto MX	$X_M \cdot 10^3$ (298° K)	μ_B	θ_C (°K)	Intervallo di temperatura
TbS	35,1	9,6	- 36	293-473° K
TbSe	36,8	9,6	- 14	143-473° K
TbTe	38,8	9,6	+ 3	140-473° K
TbP	39,5	9,6	+ 9	163-473° K
TbAs	39,0	9,65	+ 2	193-473° K
TbSb	36,2	9,6	- 18	163-473° K
TbBi	38,1	9,6	+ 1	160-473° K

Tale particolarità nel comportamento magnetico sembra dunque debba considerarsi caratteristica di TbS, a differenza di ciò che è stato trovato per GdS e GdSe ⁽²⁾, DyS e DySe, HoS e HoSe, in cui la comparsa di una trasformazione ferromagnetica, per i primi due composti, e antiferromagnetica per gli altri poté senz'altro essere messa in relazione con la non esatta composizione dei campioni.

Il comportamento anomalo di tutti questi composti verrà tuttavia meglio studiato in seguito.

Chimica. — *Sulla suscettività magnetica di alcuni composti semimetallici del Samario e Gadolino*^(*). Nota di ALDO IANDELLI, presentata^(**) dal Socio G. B. BONINO.

Come è noto, mentre tutti gli elementi delle terre rare presentano la valenza normale 3, quattro di essi possono averne una diversa: il Cerio la 4; il Samario, Europio e Itterbio la 2. La determinazione di questo numero in un composto può essere effettuata magneticamente in modo più semplice per le terre rare che per gli altri elementi; poiché gli elettroni interessati sono quelli dei livelli interni 4*f*, ed una variazione del loro numero porta ad una netta differenza nel momento magnetico.

Se un composto ha caratteristiche metalliche, la determinazione del numero di valenza di una specie atomica potrebbe presentare un certo interesse dal punto di vista della teoria del legame metallico. Poiché le quattro terre rare rammentate si prestano per una tale determinazione, mi sono proposto di esaminare la suscettività magnetica di un certo numero di composti intermetallici e semimetallici del Ce, Sm, Eu, Yb per vedere se, ed in quali casi, essi possono presentare valenza diversa dalla normale 3; e per studiare in particolare questi casi.

Come prima serie di composti più semplici sono stati scelti quelli semimetallici di composizione MX, tipo NaCl [1], formati da un elemento con valenza normale (Gd), e da uno che presenta anche la valenza 2 (Sm) con i metalloidi P, As, Sb, S, Se, Te.

L'attrezzatura per le misure di suscettività magnetica è stata installata con i fondi concessi dal C.N.R. L'elettromagnete è stato costruito dalla Ditta Damiani e Ciappi di Firenze, insieme ad un alimentatore che fornisce corrente raddrizzata e stabilizzata. Con espansioni polari piane, di un diametro di 13 cm, e con un traferro di 2 cm, il campo magnetico massimo è di 12.000 Oersted, per una corrente di 27 A. Nelle misure, salvo i casi in cui interessava esaminare la variazione delle suscettività col campo, questo è stato tenuto costante a 8300 Oersted.

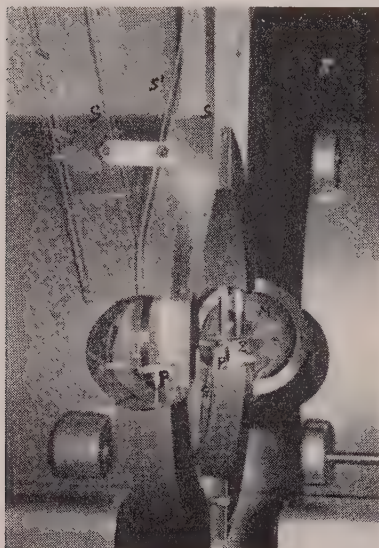
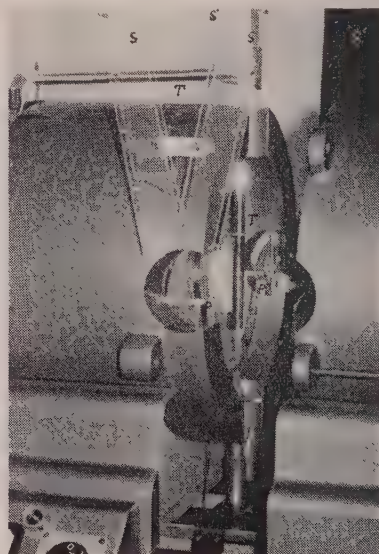
Dopo varie prove preliminari, il metodo di misura scelto, che è apparso il più comodo per misure a temperature diverse e su piccole quantità di sostanza, è stato quello di Faraday, in una variante modificata del dispositivo di Weiss e Foex [2], perfezionato da Pacault [3]. Il campione, contenuto in un tubetto di vetro o di quarzo disposto verticalmente subisce uno sposta-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisica dell'Università di Genova, con l'aiuto finanziario del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'11 febbraio 1961.

mento orizzontale sotto l'azione del campo magnetico non uniforme, ed è riportato nella posizione iniziale per mezzo di una forza che viene misurata.

Le fotografie *a* e *b* (col magnete aperto) possono dare un'idea della disposizione usata. Un leggero tubo di vetro, piegato a $\sim \sim \sim$ è tenuto sospeso da quattro fili di rame SS, S'S' in modo da costituire un pendolo orizzontale PP'. Nella parte centrale esso porta un gambo di quarzo verticale G, che serve a sostenere il campione, nella parte posteriore una bobina cilindrica di filo di rame che entra in un magnete permanente M; ed in questa può circolare, attraverso le due sospensioni posteriori S'S' una corrente che riporta il pendolo nella posizione di zero. Gli spostamenti orizzontali vengono osservati

*a**b*

da quelli di una scala graduata fissata in Z e che viene proiettata, molto ingrandita, su uno schermo. Sul gambo G viene infilata una provetta cilindrica divisa in due parti: quella inferiore mantenendo centrato il campione che è chiuso sotto vuoto nella superiore. Una coppia termoelettrica Ag/costantana è a contatto col fondo della provetta e resta separata dal campione da qualche decimo di mm di parete di vetro. Essa è collegata al potenziometro di misura attraverso i due fili della sospensione anteriore SS.

Per misure a bassa temperatura viene calato dall'alto sul campione un tubo T a doppia parete argentata, costruito come un vaso di Dewar, visibile sulla fot. *a*, attraverso il quale viene mandata sul campione una corrente di azoto freddo, ottenuta facendo bollire in un Dewar, posto esternamente, azoto liquido con una resistenza elettrica. Variando la velocità della corrente gassosa è possibile mantenere il campione a tutte le temperature fra quella

ambiente e -190°C . Per misure a temperature alte, il campione viene analogamente circondato da un fornellino elettrico, con doppia spirale di Ni-Cr avvolta isolata su un tubo di argento a sezione ovale, e raffreddato esternamente da una circolazione di acqua.

Le espansioni polari hanno la stessa forma di quelle usate da Pacault [3]; e si è infatti ritrovato che esse forniscono un $H \cdot dH/dx$ e quindi una forza sul campione praticamente costante per piccole variazioni di x dalla posizione di equilibrio.

Con questo apparecchio sono state fatte una lunga serie di misure di taratura con varie intensità del campo e a varie temperature. La precisione ottenibile nella misura della suscettività è risultata dell'1-2 %.

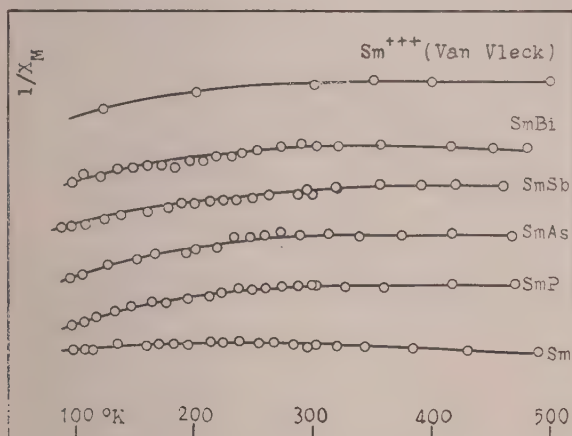


Fig. 1.

I composti esaminati erano stati preparati per reazione diretta fra i due elementi nel modo già descritto [1]. C'è da rilevare che per le misure magnetiche i prodotti devono essere perfettamente omogenei. Incompleta omogeneità, che può risultare in reazioni ad alta temperatura, e che non è rilevabile con i raggi X, può portare ad un andamento completamente differente della suscettività. I dati riportati sono quelli per i prodotti che sono apparsi completamente omogeneizzati.

Sui grafici 1, 2, 3, e nelle Tabelle I e II seguenti sono riportati i risultati sperimentali ottenuti. Nei primi si può osservare l'andamento dell'inverso della suscettività molare in funzione della temperatura assoluta. Se esso varia rettilineamente, il composto segue la legge di Curie-Weiss ($\chi = C/T - \theta$) e si può ricavarne il momento magnetico.

Dei due metalli: Sm e Gd, il secondo è interessante per la comparsa del ferromagnetismo a circa la temperatura ambiente. I punti corrispondenti della fig. 3 si riferiscono ad un metallo della Nuclear Corporation americana, con 0,1 % di altre terre rare e con 0,3 % di Ta: l'andamento della curva e

la temperatura di trasformazione para-ferromagnetico sono perfettamente in accordo con i dati noti [4, 5].

Per tutti i composti del Gd studiati, la suscettività varia con la temperatura, seguendo la legge di Curie-Weiss, con valori del momento magnetico intorno al valore teorico di 7,9 magnetoni di Bohr, per ioni Gd^{+++} . Tanto nei composti GdX con P, As, Sb, Bi che in quelli con S, Se, Te il Gd è quindi trivalente. Per gli ultimi si deve pensare che siano presenti ioni Gd^{+++} , X^{--} ed un elettrone libero (metallico) [6].

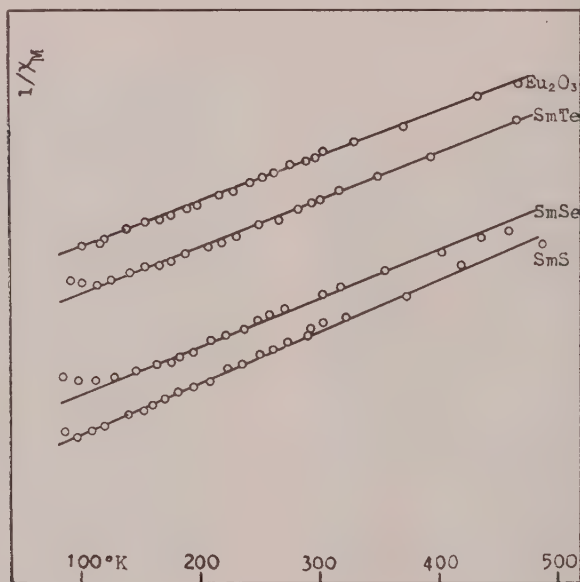


Fig. 2.

Riguardo al Samario, le sue due specie ioniche possibili si comportano magneticamente in modo più complesso. L'intervallo fra i multipletti di spin degli elettroni $4f$ è comparabile con kT , e quindi la legge di Curie-Weiss non è più seguita e la suscettività varia con la temperatura in un modo complicato che è stato calcolato da van Vleck [7]. La fig. 1 riporta i valori sperimentali di $1/\chi_M$ per i composti SmX con $X = P, As, Sb, Bi$. Le curve ottenute sono praticamente identiche (l'origine delle ordinate è spostato in questa come nelle altre figure di 1 cm. per i composti successivi) e sono parallele alla curva di van Vleck per gli ioni Sm^{+++} ; il Samario ha quindi in questa serie di composti la valenza 3. Per il Samario metallico (fornito dalla stessa ditta e contenente solo 0,1 % Eu) si ha invece una suscettività quasi costante con la temperatura, anche se di poco diversa da quella degli altri; e questa differenza appare interessante anche in relazione alla struttura eccezionale del metallo [8]. È in corso di studio il comportamento magnetico e strutturale del Sm e delle sue leghe col Neodimio.

Nei composti SmX con $\text{X} = \text{S}, \text{Se}, \text{Te}$, il Sm si comporta in modo diverso (fig. 2). La suscettività segue lo stesso andamento di quella dell' Eu^{+++} (in Eu_2O_3), ed i momenti magnetici formali (la legge di Curie-Weiss non è in realtà seguita) che se ne possono ricavare sono gli stessi. Il Sm ha in questi composti la valenza 2, in accordo con le loro dimensioni reticolari che si staccano nettamente da quelle degli altri [1]. Per tutti e tre i composti sembra inoltre che compaia, poco al disopra di 100°K , una anomalia magnetica che andrebbe studiata a temperature inferiori.

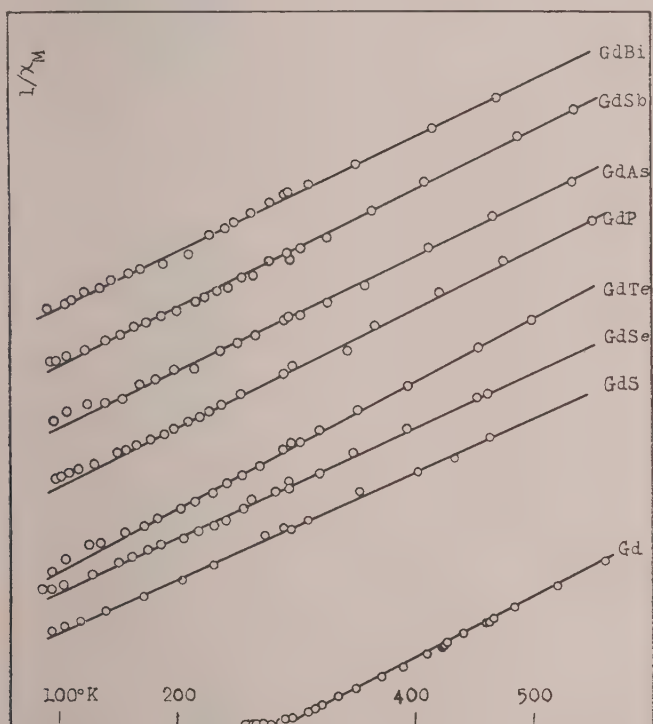


Fig. 3.

Per esaminare la possibilità che il Sm possa comportarsi da bivalente anche con i metalloidi del 5° gruppo, sono stati fatti alcuni tentativi di preparazione dei composti Sm_3As_2 , Sm_3Sb_2 , Sm_3Bi_2 con l'idea di ottenere composti isomorfi con gli analoghi del Ca o dello Sr. Non è stato possibile in nessun caso di arrivare ad un risultato positivo: i prodotti ottenuti erano costituiti dalle fasi SmX , tipo NaCl, già studiate che apparivano con le loro righe caratteristiche sui fotogrammi insieme a quelle di un'altra fase non identificabile; e le misure magnetiche davano valori delle suscettività corrispondenti a Samario trivalente.

Appare probabile la conclusione che la bivalenza del Samario sia limitata ai composti formati con gli alogeni e con i metalloidi del 6° gruppo

(forse anche con N, P), mentre in quelli con elementi più metallici la valenza è quella normale 3.

TABELLA I.

*Suscettività a temperatura ambiente del Sm
metallico e dei suoi composti.*

Composto	$\chi_M \cdot 10^3$ (289° K)
Sm	1,37
SmS	4,7
SmSe	4,5
SmTe	4,3
SmP	1,1
SmAs	1,1
SmSb	1,1
SmBi	1,2

TABELLA II.

Proprietà magnetiche del Gd e suoi composti.

Composto	$\chi_M \cdot 10^3$ (298° K)	μ_B	θ	Intervallo di temperatura in °K
Gd	476,2	7,9	+ 289	323°-573° (ferróm. a 289° K)
GdS	26,1	8,3	— 52	100°-470°
GdSe	24,8	8,1	— 39	100°-470°
GdTe	26,0	7,6	+ 18	100°-500°
GdP	28,5	7,9	+ 40	100°-550°
GdAs	27,5	8,2	— 6	150°-530°
GdSb	25,6	7,9	— 5	100°-540°
GdBi	24,0	8,2	— 51	100°-470°

BIBLIOGRAFIA.

- [1] A. IANDELLI, questi « Rend. », ser. VIII, vol. XXIX, 62 (1960).
- [2] G. FÖEX e R. FORRER, « J. Phys. Radium », 7, 180 (1936).
- [3] A. PACAULT, « Ann. chim. », 1, 527 (1946).
- [4] F. TROMBE, « Ann. Phys. », 7, 385 (1937).
- [5] F. H. SPEDDING e al., *Progress in Low Temperature Physics*, Cap. 12. North Holland Publish. Co., Amsterdam 1957.
- [6] A. IANDELLI, « Zeit. anorg. allgem. Chem. », 288, 81 (1956).
- [7] J. H. VAN VLECK, *Theory of Electric and Magnetic Susceptibilities*, University Press, Oxford 1932.
- [8] A. H. DAANE e al., « Acta Crystall. », 7, 532 (1954).

Chimica. — *Proprietà strutturali e magnetiche dei composti MX formati dall'Ho con i metalloidi del 5° e 6° gruppo.* Nota di GIACOMO BRUZZONE ^(*), presentata ^(**) dal Socio G. B. BONINO.

Lo studio delle caratteristiche strutturali e magnetiche dei composti di formula MX formati dall'Ho con gli elementi del V e VI gruppo del sistema periodico è stato effettuato nel corso di una ricerca sul comportamento di tutte le Terre Rare nei composti di formula omologa ⁽¹⁾.

I composti studiati sono stati preparati per sintesi diretta e la reazione è stata fatta avvenire scaldando dapprima i due elementi sotto vuoto fino a sparizione di tutto il metalloide; quindi comprimendo le polveri ottenute e scaldandole a temperature diverse a seconda del composto in studio.

Per i composti del V gruppo il riscaldamento della durata di un'ora a 1100°C delle pastiglie chiuse sotto vuoto in tubo di quarzo è risultato sufficiente a dare dei composti omogenei e compatti. Passando dal fosfuro al bismuturo l'aspetto varia da una massa grigio scura a grigio chiara; fosfuro e arseniuro non presentano lucentezza metallica, antimoniuro e bismuturo hanno aspetto cristallino lucente. Si è potuto osservare che tutti, al di sopra di 1100°C, tendono a decomporsi.

Lo stesso trattamento fatto sui composti con i metalloidi del VI gruppo ha dato per l'HoTe un prodotto omogeneo, con una massa compatta colorata in blu acciaio viola; mentre si sono ottenute masse eterogenee per HoS e HoSe, per i quali è stato necessario un riscaldamento di almeno due ore intorno a 1400°C. Per questo trattamento le pastiglie sono state messe in crogiolo di materiale refrattario, posto a sua volta in crogiolo di ferro, e mantenute in atmosfera di argon. Il composto HoS è di colore giallo, con lucentezza metallica, e HoSe è giallo arancio intenso.

La struttura dei composti preparati è stata determinata col metodo delle polveri, impiegando la radiazione K_{α} del Cu su fotogrammi eseguiti col metodo asimmetrico di Straumanis (α_0 estrap. per $\theta = 90^\circ$).

Tutti i composti presentano struttura cubica tipo NaCl e risultano quindi perfettamente isomorfi con quelli delle altre Terre Rare già studiate ⁽¹⁾. Nella Tabella I sono riportati i valori delle costanti reticolari.

La struttura cristallina è stata confermata dal calcolo delle intensità, che è riportato per ciascun composto nella Tabella II.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisica dell'Università di Genova, con l'aiuto finanziario del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'11 febbraio 1961.

(1) A. IANDELLI, in corso di pubblicazione su « Rend. Acc. Lincei »; G. OLCESE, in corso di pubblicazione su « Rend. Acc. Lincei ».

TABELLA I.
Costanti Reticolari (in Å).

	HoS	HoSe	HoTe	HoP	HoAs	HoSb	HoBi
$a_0 =$	5,465	5,680	6,049	5,626	5,771	6,130	6,228

L'Ho metallico impiegato, prodotto dalla Nuclear Corp. (di purezza pari al 99,5 %, con 0,2 % di Dy e 0,3 % di Ta) ha mostrato una struttura esagonale compatta con i seguenti valori delle costanti reticolari: $a = 3,5744 \text{ Å}$; $c = 5,6389 \text{ Å}$; $c/a = 1,578$; in buon accordo con i dati esistenti ⁽²⁾.

Se si toglie dalla distanza interatomica misurata Ho-X il raggio ionico del metalloide, dedotto dalle altre serie di composti, si trova per l'Ho un valore praticamente costante, che coincide col valore corrispondente al raggio ionico dell'Ho trivalente. Il comportamento di quest'ultimo nei composti studiati appare quindi normale, secondo la valenza tre.

TABELLA II.

hkl	HoS ($a_0 = 5,465 \text{ Å}$)				HoSe ($a_0 = 5,680 \text{ Å}$)				HoTe ($a_0 = 6,049 \text{ Å}$)			
	$\sin^2 \theta/\lambda^2$		Intensità		$\sin^2 \theta/\lambda^2$		Intensità		$\sin^2 \theta/\lambda^2$		Intensità	
	oss.	calc.	calc.	oss.	oss.	calc.	calc.	oss.	calc.	calc.	calc.	oss.
1 1 1	0,104	0,102	4,72	<i>f</i>	—	0,094	1,46	—	—	0,083	0,07	—
2 0 0	0,139	0,136	5,82	<i>f</i>	0,127	0,125	7,05	<i>mf</i> ⁺	0,113	0,110	2,24	<i>mf</i>
2 2 0	0,274	0,271	7,45	<i>f</i> ⁺	0,252	0,250	7,82	<i>f</i>	0,223	0,221	2,53	<i>f</i>
3 1 1	0,378	0,373	4,03	<i>mf</i>	—	0,343	1,72	—	—	0,303	0,09	—
2 2 2	0,410	0,407	2,66	<i>mf</i> ⁻	0,379	0,374	4,06	<i>m</i>	0,334	0,331	1,16	<i>m</i>
4 0 0	0,549	0,542	1,51	<i>d</i>	0,502	0,499	2,06	<i>md</i> ⁻	0,444	0,441	0,69	<i>md</i>
3 3 1	0,649	0,644	2,44	<i>m</i>	—	0,593	1,06	—	—	0,524	0,06	—
4 2 0	0,683	0,678	4,94	<i>f</i>	0,629	0,624	6,77	<i>mf</i> ⁺	0,555	0,552	2,18	<i>mf</i>
4 2 2	0,819	0,813	4,45	<i>f</i> ⁺	0,754	0,749	6,00	<i>mf</i>	0,664	0,662	1,90	<i>mf</i> ⁻
5 1 1	0,919	0,915	2,71	<i>m</i>	—	0,842	1,17	—	—	0,745	0,06	—
5 3 3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4 4 0	1,089	1,085	2,34	<i>m</i>	1,002	0,998	2,96	<i>md</i>	0,886	0,883	0,84	<i>md</i>
5 3 1	1,189	1,186	4,95	<i>f</i>	—	1,092	1,95	—	—	0,965	0,08	—
6 0 0	1,223	1,220	6,78	<i>ff</i>	1,127	1,123	8,28	<i>f</i> ⁺	0,996	0,993	2,30	<i>f</i>
4 4 2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
6 2 0	1,358	1,356	6,84	<i>ff</i>	1,250	1,248	7,90	<i>f</i>	1,106	1,103	1,95	<i>mf</i>
5 3 3	1,458	1,457	4,24	<i>mf</i>	—	1,341	1,50	—	—	—	—	—
6 2 2	1,491	1,491	10,00	<i>ff</i>	1,374	1,373	10,00	<i>ff</i>	1,216	1,214	2,21	<i>mf</i>
4 4 4	—	—	—	—	1,499	1,497	4,78	<i>m</i>	1,325	1,324	0,88	<i>md</i>
7 1 1	—	—	—	—	—	1,591	7,14	—	—	—	—	—
3 5 1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
6 4 0	—	—	—	—	1,622	1,622	27,92	<i>fff</i>	1,437	1,434	3,47	<i>f</i>
6 4 2	—	—	—	—	—	—	—	—	1,547	1,545	10,00	<i>ff</i>

(2) RHODES, LEGVOLD, SPEDDING, « Phys. Rev. », 109, 1547 (1958).

Segue: TABELLA II.

hkl	HoP ($a_0 = 5,626 \text{ \AA}$)				HoAs ($a_0 = 5,771 \text{ \AA}$)			
	$s \ n^2 \theta / \lambda^2$		Intensità		$\sin^2 \theta / \lambda^2$		Intensità	
	oss.	calc.	calc.	oss.	oss.	calc.	calc.	oss.
1 1 1	0,098	0,096	6,73	<i>mf</i>	—	0,091	2,48	<i>d</i>
2 0 0	0,129	0,127	8,90	<i>f</i>	0,122	0,121	10,43	<i>f</i>
2 2 0	0,257	0,255	8,87	<i>f</i>	0,243	0,242	10,99	<i>f</i>
3 1 1	0,353	0,350	6,22	<i>mf</i>	0,334	0,333	2,36	<i>md</i>
2 2 2	0,384	0,382	3,86	<i>m</i>	0,365	0,364	4,78	<i>m</i>
4 0 0	0,512	0,509	2,11	<i>d</i>	0,486	0,485	2,61	<i>md</i>
3 3 1	0,607	0,605	3,46	<i>m</i> —	0,577	0,576	1,43	<i>d</i>
4 2 0	0,639	0,636	6,93	<i>f</i>	0,608	0,606	8,20	<i>f</i>
4 2 2	0,767	0,764	6,01	<i>f</i>	0,729	0,727	7,20	<i>mf</i>
5 1 1	0,861	0,859	3,72	<i>m</i>	0,817	0,818	1,49	—
3 3 3	—	—	—	—	—	—	—	—
4 4 0	1,022	1,018	2,96	<i>md</i>	0,972	0,969	3,35	<i>m</i> —
5 3 1	1,117	1,114	6,18	<i>f</i>	1,062	1,060	2,30	<i>d</i>
6 0 0	1,148	1,146	8,08	<i>f</i> +	1,091	1,091	8,94	<i>f</i>
4 4 2	—	—	—	—	—	—	—	—
6 2 0	1,275	1,273	7,80	<i>f</i> +	1,214	1,212	8,26	<i>f</i>
5 3 3	1,370	1,368	4,63	<i>m</i>	—	1,303	1,61	—
6 2 2	1,401	1,400	10,00	<i>ff</i>	1,333	1,333	10,00	<i>f</i>
4 4 4	1,528	1,527	4,94	<i>m</i>	1,454	1,454	4,47	<i>m</i>
7 1 1	1,623	1,623	17,20	<i>ff</i>	1,542	1,545	6,46	<i>m</i> —
5 5 1	—	—	—	—	—	—	—	—
6 4 0	—	—	—	—	1,574	1,575	41,55	<i>ff</i>
6 4 2	—	—	—	—	—	—	—	—

hkl	HoSb ($a_0 = 6,130 \text{ \AA}$)				HoBi ($a_0 = 6,228 \text{ \AA}$)			
1 1 1	—	0,080	0,11	—	—	0,078	0,06	—
2 0 0	0,110	0,107	3,31	<i>m</i>	0,106	0,104	3,56	<i>m</i>
2 2 0	0,217	0,215	4,90	<i>mf</i>	0,212	0,208	4,20	<i>mf</i>
3 1 1	—	0,295	0,21	—	—	0,286	0,12	—
2 2 2	0,326	0,322	2,71	<i>m</i>	0,317	0,312	2,98	<i>md</i>
4 0 0	0,434	0,429	1,70	<i>d</i> —	0,420	0,416	1,88	<i>d</i>
3 3 1	—	0,509	0,16	—	—	0,494	0,10	—
4 2 0	0,540	0,536	5,84	<i>mf</i> +	0,524	0,520	6,47	<i>f</i>
4 2 2	0,648	0,644	5,07	<i>mf</i>	0,629	0,624	5,93	<i>f</i>
5 1 1	—	0,724	0,19	—	—	0,702	0,10	—
3 3 3	—	—	—	—	—	—	—	—
4 4 0	—	0,858	2,41	<i>md</i>	—	0,832	2,68	<i>md</i>
5 3 1	—	0,938	0,26	—	—	0,910	0,15	—
6 0 0	0,970	0,965	6,33	<i>f</i>	0,939	0,936	6,89	<i>f</i> +
6 2 0	1,076	1,073	5,56	<i>mf</i> +	0,991	0,990	5,97	<i>f</i>
5 3 3	—	1,153	0,16	—	—	1,117	0,08	—
6 2 2	1,181	1,180	6,41	<i>f</i>	1,148	1,148	6,75	<i>f</i>
4 4 4	—	1,287	2,60	<i>md</i>	—	1,248	2,67	<i>d</i>
7 1 1	—	1,367	0,53	—	—	1,326	0,25	—
5 5 1	—	—	—	—	—	—	—	—
6 4 0	1,396	1,394	10,00	<i>ff</i>	1,354	1,352	10,00	<i>ff</i>
6 4 2	1,503	1,502	20,21	<i>fff</i>	1,456	1,456	27,12	<i>fff</i>

Le misure di suscettività sono state fatte sia sui composti che sull'Ho metallico, seguendo il metodo di Foex e Forrer modificato da Paucault, nell'intervallo di temperatura compreso tra -200° e $+200^{\circ}$ C, con un campo costante di 8200 Oers. I valori trovati sono raccolti nella Tabella III.

TABELLA III.

Proprietà magnetiche dei composti MX studiati.

Composto	$\chi_M \cdot 10^3$ (a 298° K)	μ_B	θ_c ($^{\circ}$ K)	Intervallo di temperatura
Ho met.	71,9	10,8	+ 86	$208^{\circ} - 473^{\circ}$ K
HoS	41,5	10,5	— 32	$90^{\circ} - 473^{\circ}$ K
HoSe	43,5	10,6	— 26	$161^{\circ} - 475^{\circ}$ K
HoTe	48,8	10,5	+ 16	$108^{\circ} - 473^{\circ}$ K
HoP	46,1	10,3	+ 9	$178^{\circ} - 473^{\circ}$ K
HoAs	46,1	10,5	— 0,4	$174^{\circ} - 473^{\circ}$ K
HoSb	44,7	10,3	— 1	$169^{\circ} - 473^{\circ}$ K
HoBi	44,5	10,3	+ 3	$185^{\circ} - 473^{\circ}$ K

L'Ho metallico ha una suscettività che segue la legge di Curie-Weiss, con un momento magnetico di 10,8 magnetoni di Bohr abbastanza vicino al valore teorico (10,6) e una $\theta_c = 86^{\circ}$ K in accordo anche con i valori recentemente trovati da S. Legvold⁽³⁾. La suscettività del metallo a temperatura è risultata $\chi_A = 71942 \cdot 10^6$. A -133° K si è trovata una trasformazione anti-ferromagnetica, visibile in fig. 1, che coincide con i dati riportati da Spedding⁽⁴⁾.

Nella fig. 1 sono riportati i diversi punti sperimentali per le $1/\chi_M$ a diverse temperature: esse seguono un andamento lineare. I composti preparati seguono regolarmente la legge di Curie-Weiss fino alle basse temperature. I valori dei momenti magnetici e delle costanti di Weiss sono riportati nella Tabella III. La figura è stata disegnata spostando l'origine dell'asse delle ordinate di 10 mm per ogni composto.

In conclusione, la misura delle suscettività magnetiche conferma la presenza di Ho^{+++} nel reticolo.

(3) S. LEGVOLD, « Rare Earth Res. Develop. », III, 4, 8 (1960) [Symp. at Lake Arrowhead, Calif.].

(4) F. H. SPEDDING, *Progress in Low Temp. Phys.*, Capt. XII (Gorten edit.), North Holland Publishing Co., Amsterdam 1957.

Un fattore importante da considerare nella determinazione della costante reticolare e nelle misure magnetiche di questi composti di formula MX è la possibilità di formazione di soluzioni solide.

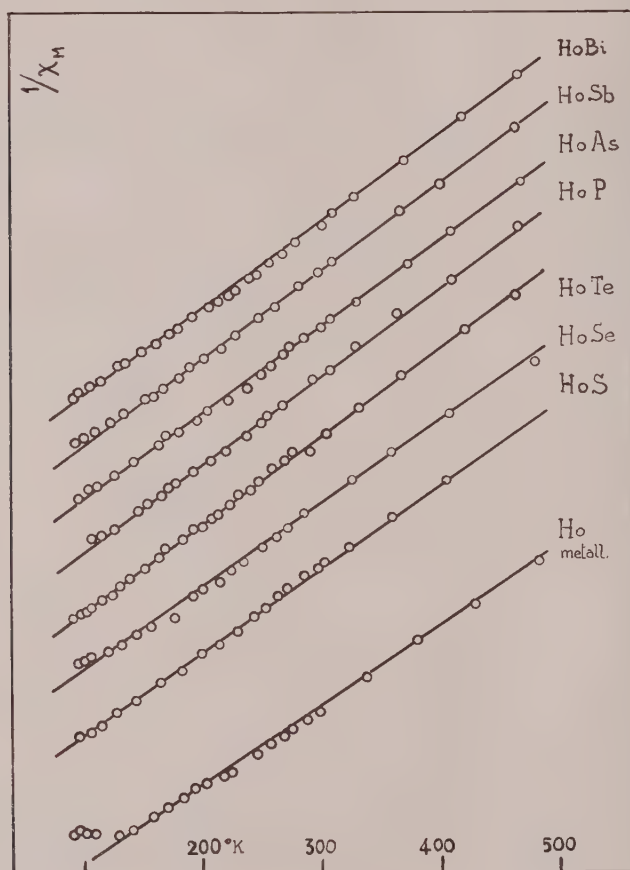


Fig. 1.

Nei composti con P, As, Sb, Bi i valori delle costanti retcolari ottenuti da diversi campioni differiscono tra loro soltanto di una o due unità alla terza cifra decimale, in modo da far ritenere molto stretto il campo di omogeneità della fase MX.

Invece per HoS, HoSe e HoTe si è osservato che la costante reticolare può variare a secondo del trattamento termico del campione (ciò che succede per altre serie di calcogenuri ⁽¹⁾: campioni preparati a 1100°C e di aspetto non omogeneo hanno dato un valore della costante reticolare più basso (0,2 %) di quello ottenuto da campioni preparati a 1400°C e apparsi perfettamente omogenei.

Ciò si spiegherebbe ammettendo che il trattamento alla temperatura inferiore non completi la reazione di formazione della fase MX, lasciando accanto ad essa un po' di metallo e di composto più ricco di metalloide, quale potrebbe essere la fase di composizione M_3X_4 .

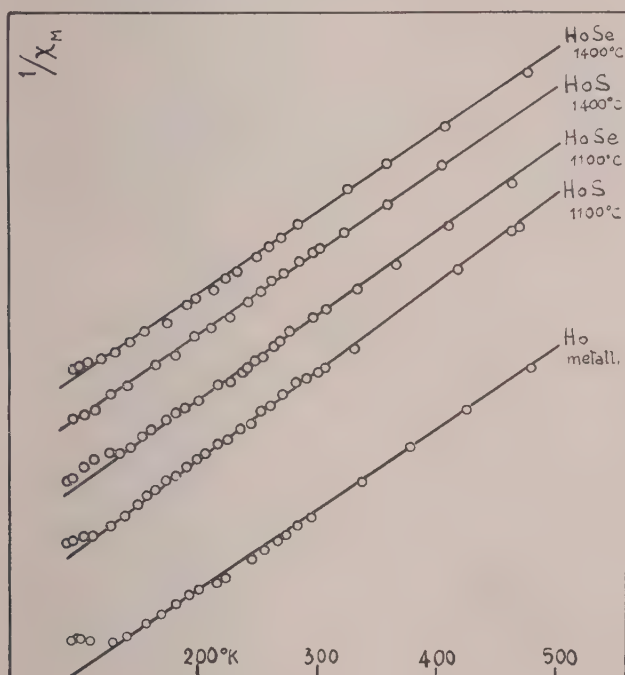


Fig. 2.

La possibilità del residuo metallico di entrare in soluzione solida con la predominante fase MX coinciderebbe con il ritrovamento di un valore più basso per la costante reticolare e spiegherebbe le anomalie riscontrate durante l'esame dell'andamento della suscettività con la temperatura nei campioni preparati a 1100°C , e chiaramente visibili in fig. 2, per i quali alla temperatura di -118°K e -133°K rispettivamente si hanno delle deviazioni simili a quella del metallo puro.

I valori finali delle costanti reticolari e dei momenti magnetici riportati nelle tabelle per HoS e HoSe si riferiscono a campioni preparati a 1400°C , che appaiono completamente omogenei e seguono regolarmente la legge di Curie-Weiss fino alle basse temperature.

Spettroscopia molecolare. — *Sull'effetto dell'intorno molecolare sulla frequenza carbonilica*^(*). Nota di PAOLO MIRONE e PAOLO CHIORBOLI, presentata ^(**) dal Socio G. B. BONINO.

In un recente lavoro, S. Bratož e S. Besnaïnou [1] hanno calcolato, con un metodo di perturbazione elaborato da S. Bratož [2], i contributi alla frequenza della vibrazione carbonilica derivanti dall'accoppiamento con le diverse vibrazioni molecolari. Essi hanno trovato che per i chetoni l'unico contributo importante è quello dei due oscillatori C—C di valenza dello scheletro



che comportano ciascuno un incremento di circa 50 cm^{-1} , mentre i contributi di tutti gli altri oscillatori non superano i 10 cm^{-1} . Questo risultato ci è sembrato piuttosto strano, perché, nel corso di uno studio delle vibrazioni normali dell'acetone [3], avevamo notato che la frequenza carbonilica era molto sensibile al valore della costante di forza relativa alla deformazione dell'angolo C—C—C.

Per l'acetone la più plausibile assegnazione delle frequenze sperimentali porta a un valore di $1,45 \text{ millidine} \cdot \text{\AA}$ ($\text{md} \cdot \text{\AA}$) per questa costante di forza. Bratož e Besnaïnou assumono viceversa per essa il valore di $0,40 \text{ md} \cdot \text{\AA}$ ⁽¹⁾,

(*) Contributo del Nucleo di Lavoro per ricerche strutturalistico-molecolari organizzato dal Centro Studi di Chimica Applicata del C.N.R. diretto dal prof. G. B. Bonino.

(**) Nella seduta dell'11 febbraio 1961.

(1) In verità, questi Autori assumono il valore di $0,80 \text{ md} \cdot \text{\AA}$ per la costante di forza relativa alla deformazione dell'angolo

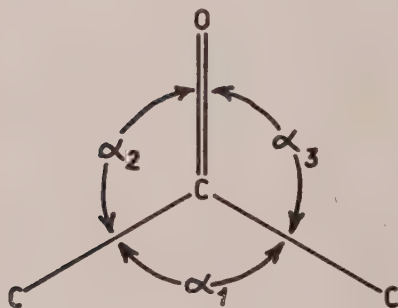
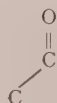


Fig. 1.



È facile vedere che ciò equivale a prendere un valore di $0,40 \text{ md} \cdot \text{\AA}$ per la costante relativa alla deformazione dell'angolo



Infatti (fig. 1).

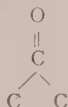
$$\Delta\alpha_2 + \Delta\alpha_3 = -\Delta\alpha_1$$

Per la deformazione simmetrica (la sola che possa interagire con la vibrazione di valenza carbonilica, in quanto quella antisimmetrica è ortogonale con questa vibrazione):

$$\Delta\alpha_2 = \Delta\alpha_3 = -\Delta\alpha_1/2$$

che ci sembra eccessivamente piccolo. Ricordiamo a questo proposito che J. O. Halford, in un lavoro sulla costante di forza del legame carbonilico nei chetoni non coniugati [4], ha preso per la costante di deformazione C—C—C un valore corrispondente a $1,14 \text{ md} \cdot \text{\AA}^{(2)}$.

In considerazione di ciò, ci è sembrato interessante ripetere i calcoli di Bratož e Besnainou assumendo un più plausibile valore per questa costante di forza. In via preliminare abbiamo però voluto esaminare dettagliatamente l'effetto della costante di forza dell'angolo C—C—C sulla frequenza della vibrazione carbonilica, e nello stesso tempo verificare la validità dell'approssimazione di Bratož. A tal uopo abbiamo calcolato la frequenza carbonilica del modello



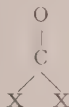
in funzione delle costanti di forza del legame C—C e dell'angolo C—C—C, sia risolvendo l'equazione secolare per questo modello, sia adoperando la formula approssimata di Bratož⁽³⁾. Il problema non era ancora stato considerato

e quindi:

$$\Delta\alpha_2^2 + \Delta\alpha_3^2 = \Delta\alpha_1^2/2.$$

Dobbiamo poi osservare che Bratož e Besnainou esprimono le loro costanti di deformazione in $\text{md} \cdot \text{\AA}^{-1}$, mentre in realtà adoperano nei calcoli gli stessi valori delle costanti come se fossero espressi in $\text{md} \cdot \text{\AA}$.

(2) Halford descrive la deformazione dell'angolo X—C—X dello scheletro



mediante gli spostamenti Δs degli atomi X perpendicolari ai legami C—X, ed assume per questi spostamenti una costante di forza $k_3 = 1,0 \text{ md} \cdot \text{\AA}^{-1}$. Questa equivale a una costante di forza angolare $h_{\text{XCX}} = 1,14 \text{ md} \cdot \text{\AA}$, se si prende per la distanza C—X il valore di $1,51 \text{ \AA}$. Infatti, per la deformazione simmetrica:

$$\Delta s = r_{\text{CX}} \cdot \Delta\alpha_1/2$$

e quindi:

$$2 k_3 \Delta s^2 = k_3 r_{\text{CX}}^2 \Delta\alpha_1^2/2 = h_{\text{XCX}} \Delta\alpha_1^2.$$

Notiamo qui che il secondo termine del coefficiente di λ^2 nella equazione (3) del lavoro di Halford è scritto per un errore di stampa $[k_1 + k_3]/m_{\text{X}}$ invece di $[k_2 + k_3]/m_{\text{X}}$.

(3) Questa formula, nel caso qui considerato (decomposizione della molecola in oscillatori liberi, e campo di forze di valenza semplice) si scrive:

$$v_s = v_s^0 + \frac{1}{2} \sum_{t \neq s} \alpha_{st} \eta_{st} v_t^0$$

$$\alpha_{st} = \frac{G_{st}^2}{G_{ss} G_{tt}} \quad \eta_{st} = \frac{v_s^0 v_t^0}{(v_s^0)^2 - (v_t^0)^2}$$

dove v_s^0 , v_t^0 sono le frequenze degli oscillatori isolati, e G_{ss} , G_{tt} , G_{st} sono gli appropriati elementi della matrice G di Wilson.

da questo punto di vista: per l'analogo modello X_2CO erano state calcolate le frequenze in funzione delle masse degli atomi X [5], oppure in funzione di queste masse e dell'angolo XCX [4] [1] ma non in funzione delle costanti di forza.

L'equazione secolare per le tre frequenze simmetriche del modello C_2CO con angoli di valenza di 120° ha la forma seguente:

$$\begin{aligned} \lambda^3 - \left[k_1 (\mu_o + \mu_c) + \left(\frac{3}{2} k_2 + 5 \frac{h}{r^2} \right) \mu_c \right] \lambda^2 + \\ + \left[k_1 k_2 \mu_c \left(\frac{3}{2} \mu_o + \mu_c \right) + k_1 \frac{h}{r^2} \mu_c (5 \mu_o + 2 \mu_c) + 6 k_2 \frac{h}{r^2} \mu_c^2 \right] \lambda - \\ - 2 k_1 k_2 \frac{h}{r^2} \mu_c^2 (3 \mu_o + \mu_c) = 0 \end{aligned}$$

dove k_1 è la costante di forza del legame $C=O$, costantemente eguale a $10 \text{ md} \cdot \text{\AA}^{-1}$, k_2 è quella del legame $C-C$ (in $\text{md} \cdot \text{\AA}^{-1}$), h quella dell'angolo $C-C-C$ (in $\text{md} \cdot \text{\AA}$), r è la distanza $C-C$ ($1,51 \text{ \AA}$), μ_o e μ_c sono rispettivamente gli inversi delle masse degli atomi di ossigeno e di carbonio (in unità di massa atomiche). λ è uguale a $4 \pi^2 c^2 \nu^2 / 10^5$. N , dove ν è il numero d'onde in cm^{-1} , e N è il numero d'Avogadro.

L'equazione è stata risolta per diversi valori di k_2 , e di h . Per gli stessi valori sono stati calcolati, con il metodo approssimato di Bratož, i contributi delle vibrazioni simmetriche di valenza $C-C$ e di deformazione $C-C-C$ alla frequenza carbonilica, I risultati sono rappresentati nelle figure 2 e 3.

Dalla fig. 2 risulta innanzitutto che, contrariamente a quanto afferma Halford [4], la frequenza carbonilica è assai sensibile al valore della costante h ; per valori ragionevoli di questa costante, il contributo della vibrazione di deformazione alla frequenza carbonilica è di $40-50 \text{ cm}^{-1}$, cioè circa eguale a quello di un oscillatore $C-C$ di valenza. Si vede inoltre che l'approssimazione di Bratož dà risultati soddisfacenti quando si prenda, come frequenza di ordine zero, quella della vibrazione carbonilica già perturbata per effetto dell'interazione con la vibrazione $C-C$ di valenza; se si prende come frequenza di ordine zero quella del carbonile isolato, si ottengono risultati troppo alti. Analoga conclusione si trae dall'esame della fig. 3. Per $h = 1,4 \text{ md} \cdot \text{\AA}$ e $k_2 = 4,5 \text{ md} \cdot \text{\AA}^{-1}$, l'errore complessivo che si compie prendendo come frequenza di ordine zero quella del carbonile isolato è pari a 21 cm^{-1} in più.

Il calcolo della frequenza carbonilica con il metodo di Bratož e Besnainou è stato da noi ripetuto per le stesse classi di composti considerati da questi Autori, ed esteso ad altre tre classi: cloruri e anidridi degli acidi carbosilici, e ammidi. Nella fig. 4 sono riportati i modelli molecolari usati per il calcolo, e i valori dei parametri adottati. Nella Tabella I sono riportati i contributi dei diversi oscillatori alla frequenza carbonilica, e le frequenze risultanti.

I casi dei chinoni orto e dell'anidride succinica meritano una particolare considerazione. W. Otting e G. Staiger [6] hanno studiato gli spettri ultrarossi di un gruppo di dieci ortochinoni, e hanno trovato che tutti questi

composti presentano due bande carboniliche, una a circa 1665 cm^{-1} , l'altra, con intensità pari a $1/3-2/3$ della prima, a circa 1690 cm^{-1} . Se si assumono angoli di valenza di 120° , e si ammette che durante la vibrazione carbonilica questi angoli restino costanti, si trova facilmente che la vibrazione antisimmetrica dei due gruppi carbonilici deve dar luogo a una banda di intensità pari a $1/3$ di quella dovuta alla vibrazione simmetrica. Pertanto si può attri-

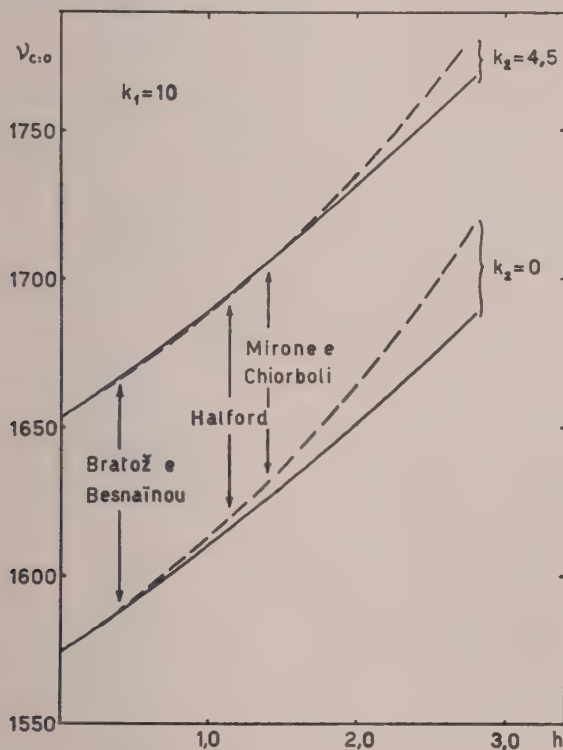


Fig. 2. — Dipendenza della frequenza carbonilica del modello C_2CO dalla costante di forza dell'angolo C-C-C .

(—— calcolo rigoroso; - - - - calcolo approssimato).

buire con sicurezza la banda a più bassa frequenza alla vibrazione simmetrica dei due gruppi carbonilici, e quella a più alta frequenza alla vibrazione antisimmetrica. I nostri calcoli conducono alla stessa conclusione; inoltre la separazione fra le due frequenze calcolate (36 cm^{-1}) è in buon accordo con quella sperimentale (circa 25 cm^{-1}). Bratož e Besnainou trovano viceversa che la frequenza simmetrica è più alta di quella antisimmetrica, con una separazione di ben 87 cm^{-1} .

Il caso delle vibrazioni carboniliche delle anidridi è più complesso. Questi composti presentano nella zona fra 1750 e 1850 cm^{-1} due bande separate da circa 60 cm^{-1} [7]; per l'anidride succinica in soluzione cloroformica queste

due bande cadono a 1792 e 1866 cm^{-1} [8]. In base al rapporto di intensità fra le due bande, Dauben e Epstein [8] attribuiscono quella a più alta frequenza alla vibrazione in fase dei due gruppi carbonilici, e quella a più bassa frequenza alla vibrazione fuori fase. Per l'anidride succinica questi Autori trovano un rapporto di 6,8 fra l'intensità della banda a 1792 cm^{-1} e quella della banda a 1866 cm^{-1} ; assumendo gli angoli di valenza dati in fig. 4, si calcola un rapporto di 8,5 fra l'intensità della banda antisimmetrica e quella della banda simmetrica.

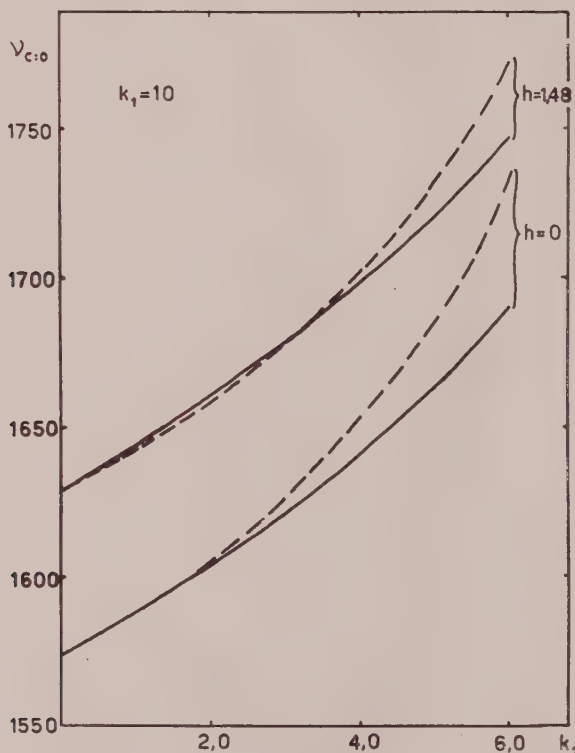


Fig. 3. - Dipendenza della frequenza carbonilica del modello C_2CO dalla costante di forza del legame C—C.

(—— calcolo rigoroso; — — — calcolo approssimato).

Il calcolo delle frequenze carboniliche con il metodo di Bratož porta per la vibrazione antisimmetrica dell'anidride succinica a un valore di 1799 cm^{-1} , e per quella simmetrica a un valore di 1808 cm^{-1} ; la differenza fra questi due valori, data l'approssimazione del metodo, probabilmente è priva di significato, comunque è troppo piccola rispetto alla differenza sperimentale. Il problema dell'interpretazione delle due bande « carboniliche » delle anidridi resta perciò ancora da chiarire; notiamo a questo proposito il fatto singolare che gli ortochinoni, dove i due gruppi carbonilici sono separati

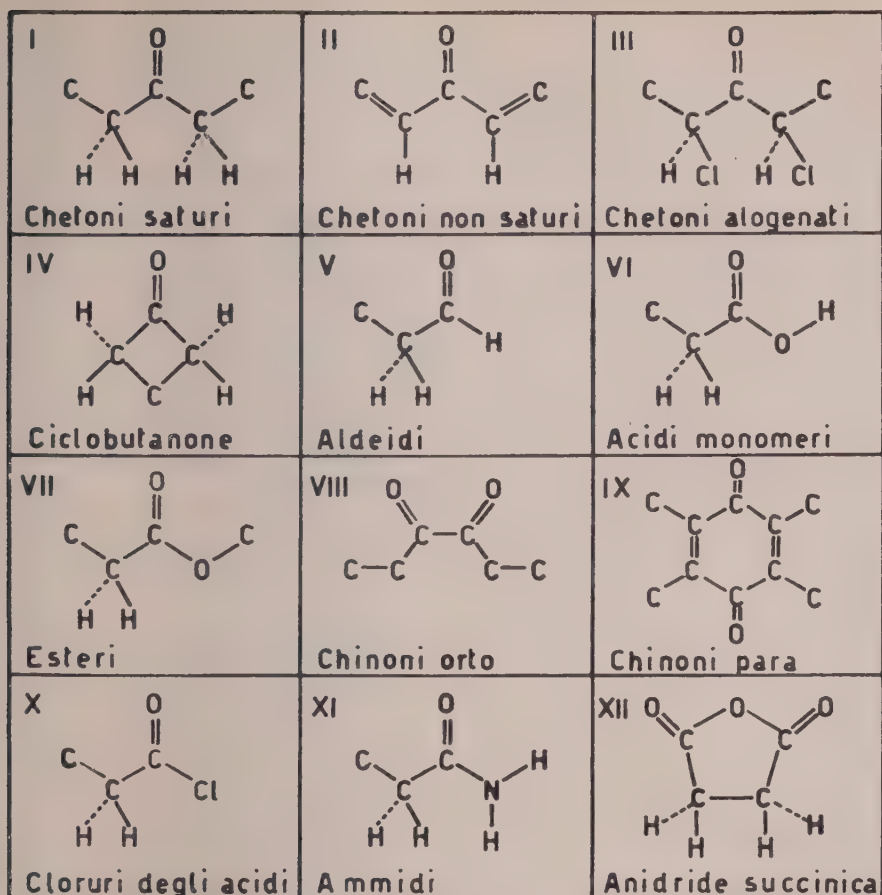


Fig. 4. - Modelli dei composti carbonilici considerati.

Masses: $m_H = 1$; $m_C = 12$; $m_N = 14$; $m_O = 16$; $m_{Cl} = 35$.

Lunghezze: $r_{C=O} = 1,22$; $r_{C=C} = 1,33$; $r_{C-C} = 1,54$; $r_{C-N} = 1,47$; $r_{C-O} = 1,43$; $r_{C-Cl} = 1,77$; $r_{CH} = 1,07$; $r_{NH} = 1,00$; $r_{OH} = 0,96$ (in Å).

Angoli: $\widehat{C-C=O} = 120^\circ$, salvo che per IV, dove $\widehat{C-C=O} = 135^\circ$, e per XII, dove $\widehat{C-C=O} = 123^\circ$; $\widehat{O-C-O} = 120^\circ$, salvo che per XII, dove $\widehat{O-C=O} = 123^\circ$; $\widehat{H-C=O} = \widehat{Cl-C=O} = \widehat{N-C=O} = \widehat{C-C=C} = \widehat{H-N-C} = 120^\circ$; $\widehat{H-C-C} = 109^\circ 30'$, salvo che per II e IV, dove $\widehat{H-C-C} = 120^\circ$; $\widehat{C-C-C} = \widehat{C-C-Cl} = \widehat{H-O-C} = 109^\circ 30'$; $\widehat{C-O-C} = 109^\circ 30'$ in VII, 104° in XII.

Costanti di forza: $k_{C=O} = 10,0$; $k_{C-O} = 5,0$; $k_{C-N} = 4,9$; $k_{C-C} = 4,5$; $k_{C-Cl} = 3,5$; $k_{CH} = 5,1$ (in $\text{md} \cdot \text{\AA}^{-1}$); $k_{C-C-C} = k_{C-O-C} = k_{C-C-X} = 1,4$ ($X=O, N, Cl$); $k_{C-X-H} = 0,65$ ($X=C, O, N$); $k_{C-C=O} = 0,70$ (in $\text{md} \cdot \text{\AA}^{-1}$).

da un solo legame semplice, presentarono una separazione di 25 cm^{-1} fra le due bande carboniliche, mentre le anidridi, dove i due gruppi sono separati da due legami semplici, e pertanto dovrebbero essere più debolmente accoppiati, presentano in media una separazione di ben 60 cm^{-1} .

TABELLA I. - Frequenze carboniliche

COMPOSTI	Frequen- za del gruppo C=O isolato		CONTRIBUTI PROVVISORI				
	$\nu_{C=O}$	ν_{C-C}	ν_{C-C}	ν_{C-X}	ν_{C-H}	δ_{C-C}	δ_{C-C}
Chetoni saturi	1574	47,1	—	—	—	54,6	—
Chetoni non saturi	1574	47,1	—	—	—	54,6	—
Chetoni alogenati in α , α'	1574	47,1	—	—	—	54,6	—
Ciclobutanone (*)	1574	78,9	—	—	— 0,6	35,1	—
Aldeidi	1574	59,3	—	— 11,8	—	—	6,1
Acidi monomeri	1574	48,7(**)	—	48,7(**)	—	—	5,1
Esteri	1574	48,7(**)	—	48,7(**)	—	—	5,1
Chinoni orto	freq. simm.	1574	29,7	118,6	—	6,1	—
	freq. antisimm.	1574	29,7	0	—	70,0	—
Chinoni para	1574	23,5	—	—	—	27,3	—
Cloruri degli acidi	1574	59,3	—	30,7	—	—	4,1
Ammidi	1574	49,0(**)	—	49,0(**)	—	—	5,1
Anidride succinica	freq. simm.	1574	35,3	—	33,5	—	2,1
	freq. antisimm.	1574	35,3	—	44,3	—	2,1

(*) Per il ciclobutanone, seguendo Bratož e Besnainou, si sono riuniti gli oscillatori $\nu_{C=O}$ e ν_{C-C} del gruppo(**) Si sono calcolati questi contributi usando le coordinate: $(\Delta r_{C-C} + \Delta r_{C-X})/\sqrt{2}$, $(\Delta r_{C-C} - \Delta r_{C-X})/\sqrt{2}$ eN. B. I contributi dati nella tabella sono definiti come $\Delta \nu_{C=O} \cdot k/n$ dove n è il numero di oscillatori contenuti

Il confronto fra le frequenze carboniliche calcolate e quelle sperimentali consente di valutare l'effettivo valore della costante di forza $k_{C=O}$ nei diversi tipi di composti. Poiché la somma dei diversi contributi derivanti dall'accoppiamento fra le vibrazioni rappresenta una frazione relativamente piccola della frequenza totale, basta a tal fine aggiustare la frequenza d'ordine zero $\nu_{C=O}^0$ considerando tale somma come costante. I risultati sono mostrati in Tabella II, nella quale come frequenze calcolate si sono prese quelle riportate in Tabella I, diminuite di 20 cm^{-1} per tener conto dell'errore discusso sopra, e arrotondate.

TABELLA II.

Costanti di forza del gruppo carbonilico.

Composti	$\nu_{C=O}$ calc. (corretta)	$\nu_{C=O}$ sper.	$k_{C=O}$	
Chetoni saturi	1740	1705-1725	9,6-9,8	
Chetoni non saturi	1750	1665-1685	8,9-9,2	
Chetoni alogenati in α, α'	1740	1745-1765	10,1-10,3	
Ciclobutanone	1775	1775	10,0	
Aldeidi	1680	1720-1740	10,5-10,8	
Acidi monomeri	1740	1760	10,2	
Esteri	1745	1735-1750	9,9-10,1	
Chinoni orto	frequenza simmetrica	1760	1665	8,8
	frequenza antisimmetrica	1795	1690	8,7
Chinoni para	1730	1660-1690	9,1-9,5	
Cloruri degli acidi	1710	1790-1810	11,0-11,3	
Ammidi	1755	1690	9,2	
Anidride succinica	frequenza simmetrica	1790	1866	11,0
	frequenza antisimmetrica	1780	1792	10,1

Eccettuato il caso delle aldeidi, le costanti di forza carboniliche calcolate da noi risultano in media inferiori di $0.4 \text{ md} \cdot \text{\AA}^{-1}$ rispetto a quelle calcolate da Bratož e Besnainou: ciò in conseguenza soprattutto del diverso valore scelto per la costante di forza relativa alla deformazione dell'angolo C—C—C (o C—C—O). È possibile che, come il valore scelto da questi Autori pecca per difetto, così il nostro pecchi per eccesso; però esso ci sembra assai più plausibile, ed ha inoltre il merito di portare, nel caso degli ortochinoni, a

un accordo molto migliore con l'esperienza. Comunque una discussione circa il più giusto valore di questa costante avrebbe uno scarso significato, dato che probabilmente esso varia da molecola a molecola in modo sensibile.

Per quanto riguarda i chetoni saturi, la costante di forza carbonilica calcolata da noi è inferiore di $0,5 \text{ md} \cdot \text{\AA}^{-1}$ a quella riportata da Halford [4], sebbene questo autore adoperi per la costante di forza angolare un valore molto vicino al nostro. Però la trattazione di Halford è basata sul modello C_2CO , e pertanto non tiene conto delle interazioni fra la vibrazione carbonilica e le vibrazioni del resto della molecola. Nel caso particolare dell'acetone, in un precedente lavoro [3] noi abbiamo calcolato una frequenza carbonilica di 1754 cm^{-1} con costanti di forza di $10,3 \text{ md} \cdot \text{\AA}^{-1}$ per il legame $\text{C}=\text{O}$ e di $1,45 \text{ md} \cdot \text{\AA}$ per l'angolo $\text{C}-\text{C}-\text{C}$; però con il metodo di calcolo seguito in quel lavoro non si teneva conto delle interazioni fra la vibrazione carbonilica e le vibrazioni interne dei gruppi metilici. In conclusione, ci sembra di poter affermare che nei chetoni saturi la costante di forza carbonilica deve essere leggermente inferiore a $10 \text{ md} \cdot \text{\AA}^{-1}$.

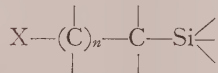
Per quanto riguarda le aldeidi, la costante di forza carbonilica calcolata da noi è in media superiore di $1,0 \text{ md} \cdot \text{\AA}^{-1}$ a quella dei chetoni saturi, mentre secondo Bratož e Besnaïnou la differenza è solo di 0,6. La differenza da noi trovata ci sembra in buon accordo col fatto che la costante di forza carbonilica delle aldeidi deve presumibilmente avere un valore intermedio fra quello dei chetoni saturi e quello dell'aldeide formica, che si può situare intorno a $13 \text{ md} \cdot \text{\AA}^{-1}$ [4].

BIBLIOGRAFIA.

- [1] S. BRATOŽ e S. BESNAÏNOU, « J. Chim. phys. », 56, 555 (1959).
- [2] S. BRATOŽ, « J. Chem. Phys. », 23, 159 (1955).
- [3] P. MIRONI e P. CHIORBOLI, « Annali », 50, 1095 (1960).
- [4] J. O. HALFORD, « J. Chem. Phys. », 24, 830 (1956).
- [5] O. BURKARD, « Proc. Indian Acad. Sci. », 8, 365 (1938).
- [6] W. OTTING e G. STAIGER, « Ber. », 88, 828 (1955).
- [7] L. J. BELLAMY, *Infrared spectra of complex molecules*. Methuen, London 1959, p. 127.
- [8] W. G. DAUBEN e W. W. EPSTEIN, « J. Org. Chem. », 24, 1595 (1959).

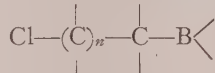
Chimica organica. — *Idroborazione.* — *Olefine ed alcoli dagli enolderivati di chetoni saturi*^(*). Nota II^(**) di LUCIANO CAGLIOTI e GIANFRANCO CAINELLI^(***) presentata^(****) dal Socio A. QUILICO.

È noto che derivati organici del silicio contenenti la struttura parziale:



dove X è generalmente un alogeno ed $n = 1$ o 2 , sotto l'azione di appropriati reagenti come ad esempio alcali caustici, acetato di sodio in acido acetico, tricloruro di alluminio ecc.⁽¹⁾, o semplicemente del calore eliminano l'alogeno e il silicio dando luogo alla formazione di un doppio legame nel caso di $n = 1$ (β -eliminazione)⁽²⁾ o di un derivato ciclopropanico se $n = 2$ (γ -eliminazione)⁽³⁾.

Meno studiate sono state invece le proprietà chimiche dei corrispondenti composti organoborici. Solo recentemente M. F. Hawthorne⁽⁴⁾ ha ottenuto composti del tipo



per $n = 1$ e 2 addizionando diborano a cloruri vinilici ed allilici secondo il metodo di H. C. Brown⁽⁵⁾. Le proprietà chimiche di detti composti almeno per quanto riguarda le su accennate β e γ -eliminazioni, sono analoghe a quelle dei corrispondenti composti del silicio. In alcuni casi la tendenza alla eliminazione sembra anche maggiore. Così l'addotto del diborano con il cloruro di vinile è così instabile che esso a temperatura ambientale deflagra spontaneamente formando etilene⁽⁵⁾.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale del Politecnico di Milano, Centro di Chimica Industriale del C.N.R.

(**) Nota I: questi « Rendiconti », 1961 (in corso di stampa).

(***) In ordine alfabetico.

(****) Nella seduta dell'11 febbraio 1961.

(1) Cfr. ad esempio L. H. SOMMER, D. L. BAILEY, F. C. WHITMORE, « J. Am. Chem. Soc. », **70**, 2869 (1948).

(2) L. H. SOMMER, G. M. GOLDBERG, E. DORFMAN, F. C. WHITMORE, « J. Am. Chem. Soc. », **68**, 1083 (1946).

(3) L. H. SOMMER, R. E. VAN STRIEN, F. C. WHITMORE, « J. Am. Chem. Soc. », **71**, 3056 (1959).

(4) M. F. HAWTHORNE, J. A. DUPONT, « J. Am. Chem. Soc. », **80**, 5830 (1958); M. F. HAWTHORNE, « J. Am. Chem. Soc. », **82**, 1886 (1960).

(5) Cfr. per letteratura sull'argomento « Annual Reports Chem. Soc. », 1959, 198.

Ci è parso interessante a questo proposito studiare le proprietà di composti organoborici portanti in posizione β rispetto al boro un atomo di ossigeno. In analogia a quanto avviene per il cloruro di vinile ed in accordo con le regole generali che governano l'addizione del diborano ai doppi legami insaturi tale tipo di composti organometallici dovrebbe potersi facilmente ottenere per addizione di diborano ai derivati della forma enolica (ad esempio esteri ed eteri) di chetoni saturi.

Come sostanza di partenza per un assaggio preliminare, i cui risultati vogliamo qui brevemente comunicare, abbiamo scelto il 3-cheto-5 α -colestano (I), chetone facilmente accessibile e del quale risultava facile preparare i corrispondenti derivati della forma enolica.

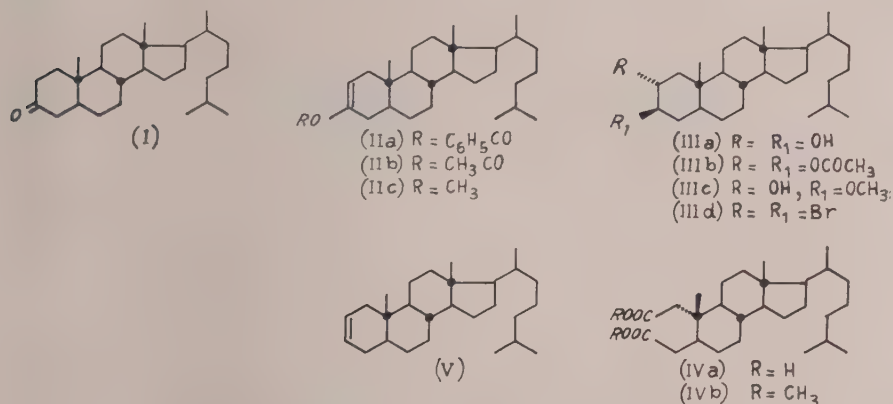


Fig. 1.

L'enol-benzoato (II a) ($R = C_6H_5CO$) $C_{34}H_{50}O_2$, P.F. = $126-28^\circ$ ($\alpha_D^{20} = +48$ ($C = 0,7$ in $CHCl_3$)) è stato preparato per trattamento del colestano (I) con cloruro di benzoile in eptano all'ebollizione (6). L'acetato enolico (II b) ($R = CH_3CO$) $C_{28}H_{46}O_2$, P.F. $93-95^\circ$, ($\alpha_D^{20} = +58$ ($C = 1,3$ in $CHCl_3$)) è stato preparato per ebollizione di (I) con anidride acetica ed acido para-toluen-solfonico in toluolo. Sia l'analisi elementare che lo spettro infrarosso che presenta bande a $1760-1697\text{ cm}^{-1}$ (Nuyol) ne confermano la struttura.

L'enol-etere metilico (II c) ($R = CH_3$) $C_{28}H_{48}O$, P.F. 97° ($\alpha_D^{20} = +89$ ($C = 1,27$ in $CHCl_3$)) è stato ottenuto analogamente all'etere etilico (7), per pirolisi del 3-dimetil-chetale di (I) a 200° . L'analisi elementare, la determinazione del metossile secondo Zeisel e lo spettro infrarosso che presenta bande a 1672 cm^{-1} (Nuyol) confermano la sua struttura. Per idrolisi di tale prodotto con acido cloridrico in cloruro di metilene-metanolo a freddo si riottiene il chetone (I).

(6) L. RUZICKA, W. H. FISCHER, «*Helv. Chim. Acta*», 19, 1371 (1936).(7) A. SERINI, H. KOESTER, «*Ber.*», 71, 1766 (1938).

Per trattamento dell'enolbenzoato (II *a*) ($R=C_6H_5CO$) sciolto in dietil-englicole-dimetil-etero (diglima) con un eccesso di diborano a temperatura ambiente e successiva ossidazione della miscela di reazione con acqua ossigenata ed alcali si ottiene una miscela di prodotti dalla quale è possibile isolare oltre a piccole quantità di 3 β idrossi-5 α -colestano, circa il 30-35 % di un diolo (III *a*) ($R=R_1=OH$), $C_{27}H_{48}O_2$, P.F. 210-11°, $(\alpha)_D^{20} = +30^\circ$ ($C = 0,7$ in $CHCl_3$) che fornisce per acetilazione con anidride acetica e piridina un diacetato (III *b*) ($R=R_1=CH_3COO$) $C_{31}H_{52}O_4$, F.P. 105-7°, $(\alpha)_D^{20} = -22^\circ$ ($C = 1,2$ in $CHCl_3$). Per ossidazione del diolo (III *a*) ($R=R_1=OH$) con anidride cromica in acido acetico si ottiene un di-acido (IV *a*) ($R=H$) caratterizzato come di-estere metilico (IV *b*) ($R=CH_3$), $C_{29}H_{50}O_4$, P.F. 79°, $(\alpha)_D^{20} = +53^\circ$ ($C = 1,0$ in $CHCl_3$).

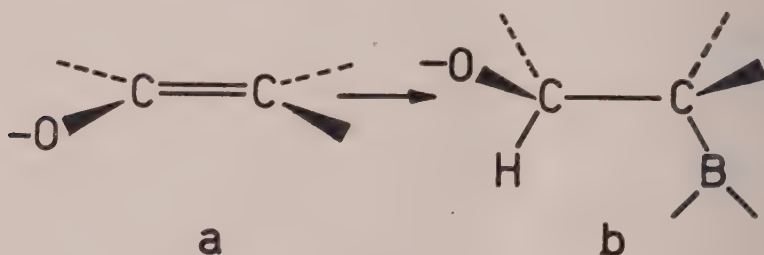


Fig. 2.

Le costanti fisiche e le proprietà chimiche di (III *a*) ($R=R_1=OH$) e dei suoi derivati sono in buon accordo con quelli riportati dalla letteratura per il 2 α -3 β -di-idrossi-5 α -colestano e corrispondenti derivati.

In realtà il di-acetato (III *b*) ($R=R_1=CH_3COO$) è risultato identico per P.F., P.F. in miscela e potere rotatorio specifico con un campione autentico di 2 α -3 β -di-acetossi-5 α -colestano ⁽⁸⁾.

L'enol-acetato (II *b*) ($R=CH_3CO$) per uguale trattamento con diborano in diglima e successiva ossidazione con acqua ossigenata ed alcali fornisce pure il diolo (III *a*) ($R=R_1=OH$) in una resa di circa il 55 %. Anche qui come prodotto secondario compare il 3 β -idrossi-5 α -colestano.

Analogo è il comportamento dell'enol-etero metilico (II *c*) rispetto all'idroboração in diglima seguita da ossidazione. In tal caso si ottiene in una resa del 75 % un idrossi-metil-etero (III *c*) ($R=OH$, $R_1=OCH_3$), $C_{28}H_{50}O_2$, P.F. 172-73° $(\alpha)_D^{20} = +2$ ($C = 1,01$ in $CHCl_3$). Lo spettro infrarosso presenta una banda a 3400 cm^{-1} (Nuyol).

Sulla base dell'analisi elementare, della determinazione del metossile secondo Zeisel e dello spettro infrarosso ed in analogia a quanto avviene nel caso degli esteri enolici (II *a*) e (II *b*) assegniamo al prodotto la struttura e la stereochimica riprodotti dalla formula (III *c*) ($R=OH$, $R_1=OCH_3$).

(8) Ringraziamo il prof. H. Henbest che ci ha cortesemente inviato un campione di 2 α -3 β -di-acetossi-5 α -colestene.

Dai risultati finora riportati appare logico ammettere che l'addizione del diborano a sostanze contenenti la struttura parziale « α » porta ad organoborani a struttura parziale « β ».

Sulla base di quanto già detto risulta chiaro che una simile struttura potrebbe dar luogo facilmente ad una β -eliminazione.

Nel caso dei boroderivati ottenuti per idroboração di (II a) ($R=C_6H_5CO$), (II b) ($R=CH_3CO$) e (II c) ($R=CH_3$) l'eliminazione del boro e dell'ossigeno dovrebbe portare alla formazione del Δ^2-5 α -colestene. Abbiamo quindi operato una serie di tentativi allo scopo di trovare il reagente e le condizioni sperimentali adatte ad ottenere tale eliminazione.

La reazione dell'enol-acetato (II b) ($R=CH_3CO$) con diborano in diglima e il successivo trattamento della miscela di reazione con una soluzione acquosa di soda caustica al 25 %, a caldo, non ha fornito, dopo la consueta estrazione con etere e purificazione cromatografica, che una traccia trascurabile dell'atteso Δ^2-5 α -colestene (V).

Risultato positivo abbiamo invece ottenuto per azione di acido propionico all'ebollizione sul prodotto di idroboração di (II b) ($R=CH_3CO$) in diglima. Dopo estrazione con etere della miscela di reazione e purificazione cromatografica dell'estratto eterico abbiamo ottenuto con una resa del 25 % un idrocarburo (V), insaturo al tetranitrometano con P.F. 75° e $(\alpha)_D^{20} = +71^\circ$ ($C=1,1$ in $CHCl_3$) che analizza bene per $C_{27}H_{46}$ e presenta una banda nell'IR a 1652 (Nuyol).

Questo prodotto risulta identico per P.F., P.F. in miscela, potere rotatorio specifico e spettro infrarosso con un campione autentico di Δ^2-5 α -colestene (V). Anche il dibromuro (III d) ($R=R_1=Br$) preparato da (V) secondo la prescrizione di Hattori⁽⁹⁾ è risultato identico per P.F., P.F. in miscela, potere rotatorio specifico e spettro infrarosso al 2 α -3 β -di-bromo-5 α -colestene (III d) ($R=R_1=Br$) che si ottiene con lo stesso procedimento anche da autentico Δ^2-5 α -colestene (V).

Una resa nettamente migliore di Δ^2-5 α -colestene (V) abbiamo ottenuto trattando il prodotto di idroboração di (II b) ($R=CH_3CO$) in diglima con anidride acetica all'ebollizione. In tal caso si ottiene, dopo l'estrazione con etere e purificazione cromatografica degli estratti eterici, una resa di (V) che si aggira sul 60 %. Analogo è il comportamento di fronte ai suddetti reagenti dell'addotto del diborano all'enolbenzoato (II a) ($R=C_6H_5CO$). Anche la resa di idrocarburo è praticamente uguale a quella riscontrata per il (II b) ($R=CH_3CO$).

Quantitativamente diverso è, invece, il comportamento dell'enol-etere metilico (II c) ($R=CH_3$). Mentre anche in questo caso l'azione della soda caustica acquosa sull'addotto del diborano in diglima, anche per prolungato riscaldamento, non porta alla formazione di quantità apprezzabili di idrocarburo, il trattamento con acido propionico fornisce una resa dell'80-85 %.

(9) HATTORI, KAWASAKI, « J. Pharm. Soc. Japan », 57, 115, 588 (1937).

in Δ^2 -5 α -colestene. Molto elevata (circa il 90%) è anche la resa fornita su tale addotto dall'anidride acetica.

Gli esperimenti sopra riportati dimostrano che la reazione di idroboração applicata ad enolesteri ed enoleteri di chetoni saturi porta a boroderivati che a seconda del trattamento cui vengono sottoposti forniscono alcoli od olefine. Si possono trasformare così gli enolesteri in trans-1, 2-dioli⁽¹⁰⁾, gli enoleteri in trans-idrossi-esteri con buone rese e con alta stereospecificità. È anche possibile ottenere da enolesteri ed enoleteri le corrispondenti olefine in alta resa e senza apprezzabile impurezza di isomeri. I dettagli sperimentali⁽¹¹⁾ di quanto sopra esposto, e l'estensione delle reazioni descritte ad altri composti verranno pubblicati in seguito.

Ringraziamo il prof. A. Quilico per l'interesse con cui ha seguito il presente lavoro.

(10) Risultati analoghi ai nostri hanno ottenuto ALVAREZ e coll., «Chem. and Ind.» (London), 1960, 720 per idroboração e trattamento con acqua ossigenata di enol-acetati di 17-cheto-steroidi.

(11) Il signor A. Selva ha collaborato attivamente alla parte sperimentale del presente lavoro.

Geologia. — *Tettonica eruttiva nel gruppo del Buffaure a Sud di Fontanazzo-Campestrin in Val di Fassa* ^(*). Nota di ELIO SOMMAVILLA, presentata ^(**) dal corrisp. P. LEONARDI.

Nel corso del rilevamento geologico nel gruppo del Buffaure, affidatomi dal prof. Piero Leonardi nella campagna estiva 1959, osservai numerose dislocazioni assai caratteristiche ed interessanti in quanto non interpretabili secondo gli schemi della tettonica classica.

Si tratta del tipo di dislocazione di cui parla il prof. PIERO LEONARDI in tre pubblicazioni ⁽¹⁾ ⁽²⁾ ⁽³⁾. In esse l'autore sulla base di sue osservazioni e di quelle di altri studiosi della Val di Fassa (H. P. Cornelius ⁽⁴⁾, H. P. Cornelius e M. Cornelius Furlani ⁽⁵⁾, M. Ogilvie Gordon ⁽⁶⁾ e S. Vardabasso ⁽⁷⁾) propone come interpretazione di questi fenomeni l'ipotesi della « Tettonica eruttiva ». Afferma cioè che molti spostamenti di masse sedimentarie nell'alta Val di Fassa non si possano ascrivere alla tettonica orogenetica alpidea, ma si debbano ritenere causati dalle fortissime pressioni eruttive dei centri vulcanici mesotriassici.

In contrasto con quanto sembra supporre M. Ogilvie Gordon, P. Leonardi osserva che gli spostamenti avvennero dal basso verso l'alto e che pertanto non si possono ascrivere al franamento di blocchi entro le fessure e i crateri di esplosione.

L'ipotesi del prof. Leonardi è illustrata in modo assai intuitivo dall'autore stesso nell'ultima delle pubblicazioni citate ⁽³⁾, p. 118) per mezzo di

(*) Il presente lavoro è compreso nel programma delle Ricerche condotte dall'Istituto di Geologia dell'Università di Ferrara sotto gli auspici e col contributo finanziario del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 14 gennaio 1961.

(1) P. LEONARDI, *Ricerche geo-paleontologiche nella regione dolomitica. — Nuova interpretazione tettonica della Val di Fassa ecc.*, « Ricerca scientifica », vol. 23°, pp. 1400-1401 (1953).

(2) P. LEONARDI, *Breve sintesi geologica delle Dolomiti occidentali*, « Boll. Soc. Geol. Ital. », pp. 42-45 (1955).

(3) P. LEONARDI, *Dislocazioni triassiche non orogeniche in Val di Fassa (Dolomiti occidentali)*, « Rendiconti dell'Acc. Naz. dei Lincei », serie 8ª, vol. 21°, fasc. 1-2, Ferie 1956.

(4) H. P. CORNELIUS, *Zur Geologie der Tuffbildungen im Marmolatagebiet*, « Centralbl. f. Min. » (1924).

(5) H. P. CORNELIUS, M. CORNELIUS FURLANI, *Ueber die Tektonik der Marmolatagruppe (Südtirol)*, « N. Jahrb. f. Min. Geol. Pal. », vol. 56° (1927).

(6) M. GORDON OGILVIE, *Das Grödnert-, Fassa-, und Enneberggebiet in den Südtirolerdolomiten*, « Abh. d. Geol. Bundesanst. », vol. 24° (1927).

(7) S. VARDABASSO, *I diatremi del Latemar*, « Atti Acc. Ven. Trent. Istr. », vol. 16° (1928).

due profili teorici che rappresentano: il primo l'esplosione stessa, il secondo la struttura geologica che ne è derivata.

Gli esempi più imponenti di queste dislocazioni, che ritengo con P. Leonardì certamente non orogenetiche, si trovano, a mio avviso, nel versante NE del gruppo del Buffaure, sopra Canazei e Alba. Trattando di questa zona si può tranquillamente usare la nomenclatura tettonica: si può parlare cioè di dislocazioni, ripetizioni di serie, pieghe-faglie ecc. . . Si hanno qui infatti fenomeni paragonabili anche quantitativamente ai corrispondenti fenomeni tettonici normali.

Preferisco tuttavia limitarmi, in questa prima Nota, a parlare del versante NW dello stesso gruppo, benché qui tali strutture siano meno appariscenti, tanto che parlare di tettonica in questo caso potrebbe sembrare esagerato.

Le ragioni di questa preferenza e limitazione sono le seguenti:

1° l'interpretazione è qui più facile, tuttavia, estensibile, credo, ai casi maggiormente complessi;

2° abbiamo qui l'unico punto forse di tutto il gruppo in cui si possa individuare bene un lembo di diatrema. È piuttosto difficile infatti localizzare con sicurezza i *necks* del Buffaure.

SERIE DEI TERRENI.

Possiamo dividere la struttura in esame (versante NW del Buffaure) in tre zone: inferiore, mediana e superiore. La zona interessata principalmente dai fenomeni di cui ci occupiamo è la seconda.

La inferiore è costituita da una serie di sedimenti comprendente: il Werfeniano (marnoso-arenaceo), l'Anisico inferiore (calcareo-marnoso), l'Anisico superiore (Dolomia del Serla) e pochi lembi di calcari nodulari di Livinallongo.

Ad un esame superficiale questa serie potrebbe non presentare alcuna anomalia all'infuori della scarsità dei calcari di Livinallongo e di una sensibile variabilità di spessore della Dolomia del Serla (in un punto si assottiglia fino a mancare). Vi sono, è vero, due interruzioni: una tra i due torrenti che scendono rispettivamente da Duin e da Drio le Pale, e l'altra immediatamente a sinistra di quest'ultimo torrente; ma tali interruzioni potrebbero essere spiegate, a prima vista, ammettendo che la serie continui ricoperta dal detrito: essa si trova di fatto al limite tra affioramenti e Quaternario.

Con un esame più attento è invece possibile accertare che le interruzioni sono reali e che in corrispondenza di esse affiora lo stesso tipo di roccia della « zona mediana ».

Fatta eccezione per queste lacune, la serie in questione è assai regolare e non è praticamente disturbata dal punto di vista tettonico. Si ha solo un innalzamento degli strati a SW della seconda interruzione ed un accenno ad immersione, ancora verso SW, al limite sudoccidentale degli affioramenti. Si ha cioè una piccola anticlinale, ma essa si trova praticamente al di fuori della zona direttamente interessata dalle dislocazioni che descriveremo. In corrispondenza di questa zona la serie inferiore si presenta, nonostante le lacune, con struttura tabulare.

La zona superiore è costituita da:

un letto di tufi fini ben stratificati, lo spessore del quale è di pochi metri nella Valle di Drio le Pale, si assottiglia verso NE e si interrompe verso SW;

un bancone di lava porfirica dello spessore massimo di 400 metri circa che si va pure riducendo sia verso NE che verso SW;

una formazione di aspetto conglomeratico piuttosto particolare, ad elementi porfirritici, non (o molto grossolanamente) stratificata;

un secondo bancone di lava.

Questa serie non presenta alcuna traccia di disturbo tettonico: è regolare e tabulare. Ed ecco come si presenta invece la

ZONA MEDIANA.

Entro la valletta di Drio le Pale (di fronte a Campestrin) affiora, da quota 1600 a quota 1700 circa, una breccia di esplosione che si differenzia da tutte le altre formazioni brecciose e conglomeratiche dell'intera regione del Buffaure.

La diversità non riguarda gli elementi che la costituiscono: essi sono, come in tutti gli altri tipi, brandelli di tutta la serie sedimentaria sottostante (Werfeniano, Anisico inferiore calcareo-marnoso, Dolomia del Serla, Livinallongo) mescolati a ciottoli di porfirite. Le dimensioni di questi inclusi sono variabilissime specialmente per i rappresentanti della serie sedimentaria: si va dai frammenti appena visibili fino ai blocchi di parecchie decine di metri cubi. I blocchi maggiori appartengono alla Dolomia del Serla.

La differenza consiste invece nel fatto che qui la breccia è di una compattezza straordinaria e si rivela originata sotto forti pressioni e ad alta temperatura. Gli inclusi risultano infatti fortemente compressi o strati entro il cemento ed hanno subito un processo di metamorfismo termico sotto pressione: il Werfeniano è cornubianitico, ed i suoi strati sono fittamente ripieghettati; la Dolomia è ricristallizzata. Si tratta cioè di una tipica breccia di neck.

Non si riesce ad intravedere i limiti del camino di esplosione. La sua forma potrebbe essere stretta e lunga: forse una fessura che si allunga in direzione normale al versante del monte cioè verso l'interno del gruppo del Buffaure. In questo caso l'affioramento sul fondo della valletta rappresenterebbe una sezione trasversale.

Ai bordi la breccia di esplosione si fa meno compatta, cessa la ricristallizzazione, diminuisce la percentuale degli elementi calcareo-dolomitici, gli inclusi porfirritici hanno l'aspetto meno « breccioso ».

Nella parte inferiore la riduzione degli elementi di roccia sedimentaria è molto più rapida che nella parte superiore ed alla diminuzione numerica si accompagna una forte e brusca riduzione delle dimensioni degli inclusi. Si passa, spesso entro pochi metri, ad una formazione di tipo intermedio tra la breccia ed il conglomerato avente come elementi inclusi dei ciottoli porfirritici taluni angolosi tal'altri piuttosto arrotondati e di dimensioni abbastanza costanti entro limiti che vanno dai dieci ai trenta centimetri di diametro circa.

Questo tipo di roccia risulta molto simile a quella formazione della zona superiore che ho indicato come conglomeratica ma « di aspetto piuttosto particolare ».

È degno di nota il fatto che il passaggio graduale dalla breccia di tipo misto (calcareo-porfirritico) – appartenente o meno ad un neck – al conglomerato di elementi soltanto porfirritici è comunissimo in tutta questa « zona mediana » su tutto il Buffaure. E ciò mi pare assai importante per l'interpretazione del vulcanesimo dell'intero gruppo.

Nella parte più alta del diatrema la breccia non compatta, ricca di elementi e di grossi blocchi calcareo-dolomitici si estende per un raggio molto maggiore ai bordi della breccia compatta del neck. Sempre nella parte superiore, i blocchi di Dolomia del Serla, nettamente prevalenti in confronto alle marne ed ai calcari, si presentano con dimensioni notevoli, sono assai numerosi e si allineano press'a poco su uno stesso livello, tanto che ad un osservatore che si trovi in fondo-valle possono dare l'illusione di costituire un bancone quasi continuo. In realtà si tratta di blocchi isolati entro lo stesso tipo di roccia (lo strano conglomerato porfirritico) che nella parte inferiore di questa stessa zona mediana è completamente privo di elementi di origine sedimentaria. Gli elementi calcarei minori sono disposti prevalentemente attorno ai blocchi maggiori ed appaiono, anche per la loro costituzione, come dei frammenti di

questi. Anche attorno a ciascun grosso masso di dolomia si ha spesso un passaggio graduale verso il conglomerato soltanto porfirítico.

Mi pare inoltre quanto mai significativo il fatto che i blocchi di sedimentario si rinvenivano solo in corrispondenza e al di sopra delle lacune nella serie Werfeniano-Livinalongo sottostante. Si direbbe che vi è addirittura una corrispondenza quantitativa tra l'insieme dei blocchi e le lacune stesse. Tutto questo non mi sembra ascrivibile a pura casualità, benché evidentemente sia visibile solo una sezione dell'intera struttura.

Propongo come rappresentazione teorica di queste formazioni il seguente schema:



Fig. 1. — Sezione schematica del *neck* di Campestrin.

1. Werfeniano. 2. Anisico inferiore. 3. Dolomia del Serla. 4. Strati di Livinalongo. 5. Conglomerato ad elementi porfiríticos. 6. Conglomerato ad elementi misti (porfiríticos e sedimentarij con prevalenza dei primi). 7. Breccia di esplosione compatta ad elementi misti ricristallizzati con prevalenza di sedimentario (dal Werfeniano agli Strati di Livinalongo). 8. Blocchi spinti lateralmente ai bordi del camino di esplosione. 9. Tufi fini ben stratificati. 10. Porfirite. (Disegno dell'autore).

Credo che a questo punto l'interpretazione della struttura descritta sia, almeno entro certi limiti, piuttosto logica. Tutto spinge a considerare queste formazioni come il prodotto di un fenomeno esplosivo normale, inusitato solo per l'intensità e l'imponenza degli effetti. La parte superiore della zona mediana è da considerarsi qualitativamente come una normale breccia di esplosione. È strana solo per le proporzioni ciclopiche degli inclusi.

Soltanto risulta assurdo che i grossi blocchi, dei quali alcuni hanno certamente il volume di parecchie migliaia di metri cubi, siano « proietti » lanciati in aria e ricaduti all'esterno del cratere.

Lo schema della figura richiama evidentemente, a parte alcuni dettagli, i profili teorici di P. Leonardi.

Dal confronto tra la struttura che abbiamo esaminato e questi profili mi pare che l'ipotesi della tettonica eruttiva venga nel nostro caso pienamente confermata e comprovata. Le masse sedimentarie risultano evidentemente strappate dalle pressioni esplosive alla struttura sottostante, spostate in alto e spinte all'esterno del condotto vulcanico.

Ammesso ciò, ci si presenta però un nuovo problema non troppo semplice: quale relazione intercorre tra il fenomeno tettonico-esplosivo e i conglomerati ad elementi soltanto porfiritici ai quali abbiamo fatto più volte cenno? E prima di tutto ci si dovrebbe chiedere qual'è l'origine di questa strana formazione. Pur non volendo addentrarmi in questa questione (per la quale ho in corso una serie di ricerche) mi pare che sia possibile fin d'ora negare che il conglomerato sia un prodotto delle esplosioni che hanno causato il *neck* e le dislocazioni di masse sedimentarie. I suoi elementi non sono infatti né bombe né proietti. Lo esclude la loro forma, la loro struttura, la costanza delle dimensioni, la omogeneità, potenza ed estensione orizzontale della formazione stessa e l'analogia con il conglomerato della zona superiore per il quale sarebbe necessario invocare la stessa origine. Ora, esclusa la relazione causale, è gioco-forza affermare che il conglomerato preesisteva ai fenomeni tettonici-eruttivi, qualunque sia la sua origine.

Ciò, anziché complicare le cose, può contribuire notevolmente a spiegare la possibilità di esplosioni con effetti assai superiori al normale. È facile infatti ammettere che il bancone a ciottoli porfiritici, comunque abbia avuto origine, sia stato, all'epoca del fenomeno esplosivo di cui stiamo trattando, il sedimento più recente e che si sia presentato, allora, incoerente o assai poco cementato (non lo è molto nemmeno ora. !). La pressione dei materiali nei camini o nelle fessure di esplosione, appena superato il livello dei sedimenti anisici e del Livinallongo, avrebbe così incontrato una formazione incoerente ricoperta solo dall'acqua del mare.

Ammesso questo, risultano assai più accettabili due ipotesi che darebbero una ragione della struttura dell'intera zona mediana, com'è presentata nello schema della fig. 1:

1° durante l'esplosione frammenti di dolomia ecc... sono stati « iniettati » dal camino vero e proprio in senso radiale tra i primi ciottoli porfiritici del conglomerato che avrebbe dovuto formare le pareti del diatrema. Ciò

spiegherebbe l'esistenza della fascia di transizione graduale tra il *neck* e il conglomerato ed anche l'impossibilità di localizzare nettamente i bordi del camino (e dei *necks* del Buffaure in genere).

2° nella parte superiore del diatrema, proprio per l'incoerenza del materiale preesistente, blocchi di proporzione notevole poterono essere spinti lateralmente al di sopra e al di fuori del camino, anzi poterono talvolta spostarsi lungo il pendio incoerente del cono che si andava formando, fratturandosi in blocchi minori e dando origine ai frammenti che ora fanno da aureola ai vari blocchi principali.

Potrà forse ora sembrare esagerata, come è stato accennato all'inizio, l'espressione « tettonica eruttiva » applicata a queste dislocazioni a causa della loro frammentarietà. Ed in questo senso l'esempio scelto qui è forse il meno indicato ad illustrare proprio l'ipotesi della « tettonica eruttiva ». Una volta però ammessa per questo caso l'origine eruttiva degli spostamenti, mi pare impossibile non ammettere la stessa origine per dislocazioni maggiori dello stesso gruppo, le quali meritano senza dubbio l'appellativo di « tettoniche ». Esse sono per esempio: quelle del versante occidentale del Giumela, per le quali hanno già proposto la stessa interpretazione P. Leonardi e F. Proto Decima ⁽⁸⁾; quelle del versante SW del Buffaure e soprattutto le grandi dislocazioni del versante NE della Greppa (sempre nel Buffaure, sopra Alba di Canazei).

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

TAVOLA I.

Fig. 1. — *Neck* di Campestrin. — Breccia molto compatta ad elementi in parte calcareo-dolomitici, in parte porfirritici. Nel letto del ruscello che scende da Drio le Pale.

Fig. 2. — *Neck* di Campestrin. — Altro particolare della breccia: si può notare l'avvenuta ricristallizzazione degli inclusi marnosi e calcareo-dolomitici.

Fig. 3. — *Neck* di Campestrin. — Particolare della breccia in cui è evidente la cornubianizzazione, avvenuta sotto forte pressione, dei brandelli di Werfeniano.

Fig. 4. — Immediatamente ai bordi del camino di esplosione. — Breccia ad elementi porfirritici prevalenti rispetto a quelli calcarei. È meno compatta di quella del camino e non è ricristallizzata. Cfr. sezione schematica (fig. 1 nel testo), n. 6.

Fig. 5. — Ai bordi del camino di esplosione nella sua parte superiore. — Breccia non molto compatta inglobante grossi massi calcarei.

TAVOLA II.

Fig. 6. — In basso: breccia compatta. Al centro; strati di Werfeniano non ricristallizzati, inglobati in una breccia meno compatta.

Fig. 7. — Particolare della fig. 6.

Fig. 8. — All'esterno del bordo superiore del camino: affioramenti di dolomia e di calcari nodulari (di Livinallongo) completamente circondati da una breccia di esplosione ad elementi misti.

Fig. 9. — Particolare dei brandelli di Strati di Livinallongo di cui alla figura precedente.

Fig. 10. — Tufi ben stratificati che ricoprono il *neck* di Campestrin.

(8) F. PROTO DECIMA, *Note sulla geologia del versante occidentale del gruppo del Buffaure (Dolomiti occidentali)*, « Boll. Soc. Geol. Ital. », vol. 75° (1956).

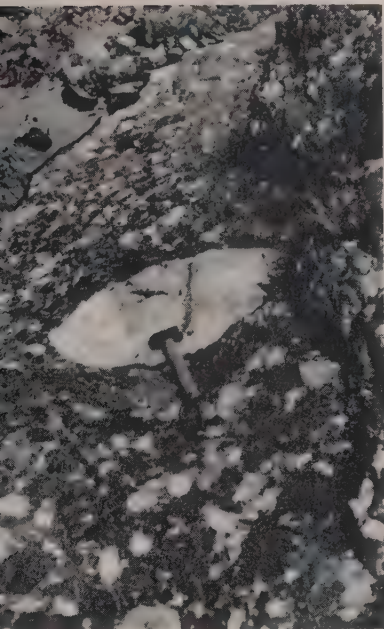


Fig. 1.

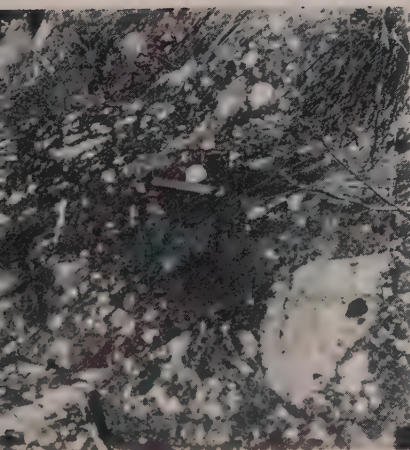


Fig. 2.

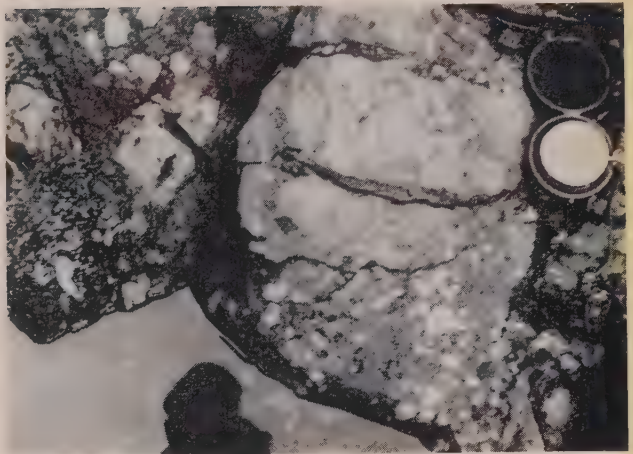


Fig. 3.

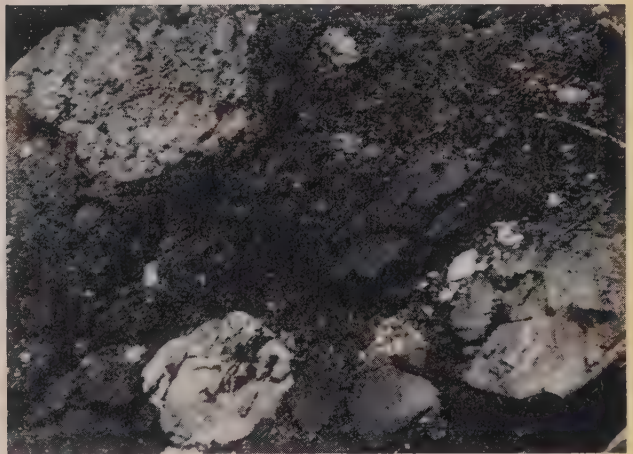


Fig. 4.

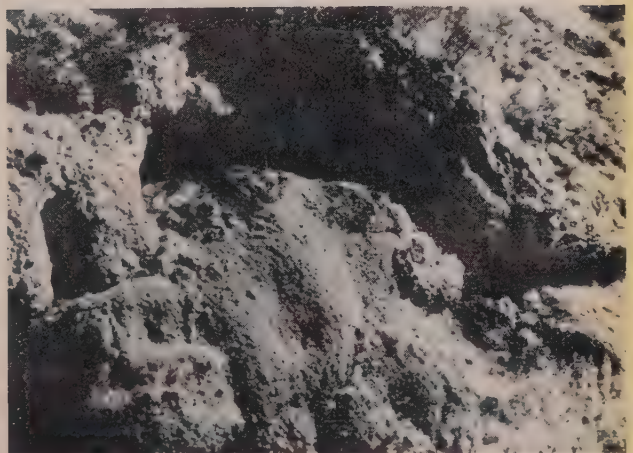


Fig. 5.

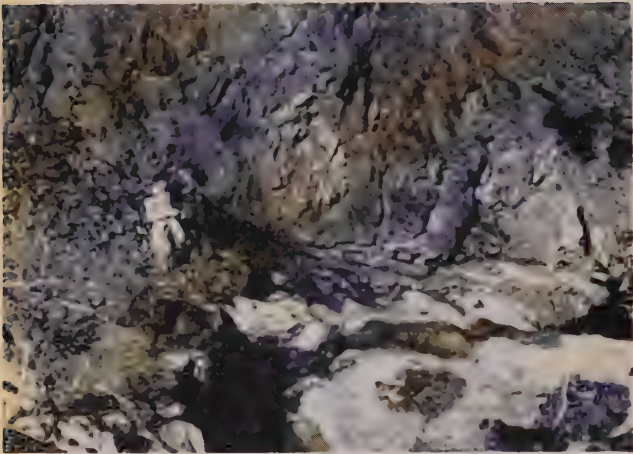


Fig. 6.

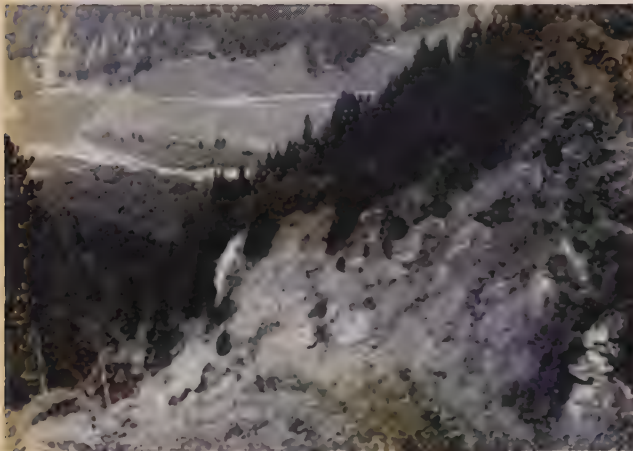


Fig. 8.

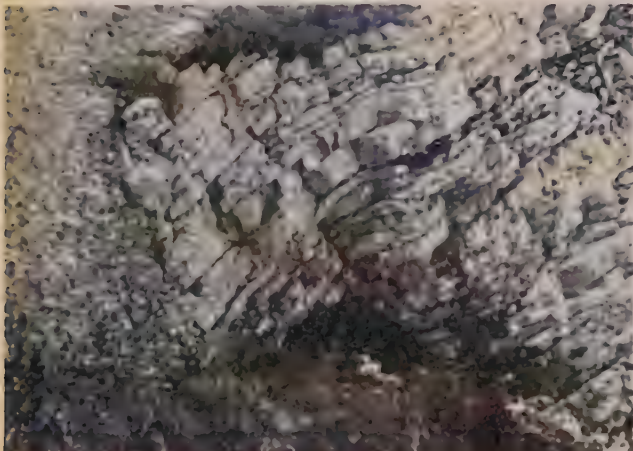


Fig. 9.

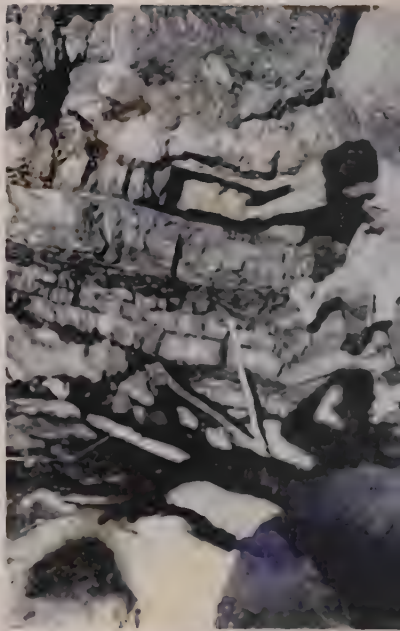


Fig. 7.



Fig. 10.

Mineralogia. — *Hoeferite e Nasinite: due nuovi borati fra i prodotti di Larderello.* Parte II ^(*). Nota di CURZIO CIPRIANI, presentata ^(**) dal Socio G. CAROBBI.

Da qualche anno mi sto occupando della mineralogia dei prodotti delle esalazioni della zona borifera di Larderello, mediante lo studio di una serie di campioni provenienti da detriti di esplosione o da incrostazioni di tubi sonda.

Come risulta da due mie precedenti pubblicazioni, fra questi campioni ho potuto finora accertare la presenza di un nuovo minerale, *sborgite* $\text{Na}_2\text{O} \cdot 5 \text{B}_2\text{O}_3 \cdot 10 \text{H}_2\text{O}$ [2], e di una varietà manganesifera del raro minerale *bous-singaultite* $(\text{NH}_4)_2\text{Mg}(\text{SO}_4)_2 \cdot 6 \text{H}_2\text{O}$ [3].

La presente Nota si riferisce allo studio di un altro campione (Larderello n. 4) nel quale si è potuto stabilire, sulla base dei dati riportati nella Nota I di questo lavoro [5], la presenza di due minerali: $2 \text{Na}_2\text{O} \cdot 5 \text{B}_2\text{O}_3 \cdot 4 \text{H}_2\text{O}$ e $2 \text{Na}_2\text{O} \cdot 5 \text{B}_2\text{O}_3 \cdot 7 \text{H}_2\text{O}$; accanto a quantità subordinate di thenardite ed orpimento ed a minime quantità di un residuo di silicati.

Per il primo borato ($2 \text{Na}_2\text{O} \cdot 5 \text{B}_2\text{O}_3 \cdot 4 \text{H}_2\text{O}$), indicato nella Nota precedente come borato A, si propone il nome di *hoeferite* in memoria del chimico Uberto Francesco Hoefer, direttore delle spezierie del Granducato di Toscana, al quale si deve l'identificazione, avvenuta nel 1777, dell'acido borico nel residuo delle acque di condensazione dei soffioni; mentre per il secondo ($2 \text{Na}_2\text{O} \cdot 5 \text{B}_2\text{O}_3 \cdot 7 \text{H}_2\text{O}$) si propone il nome di *nasinite* in memoria di un grande studioso, il chimico prof. Raffaello Nasini (1854-1931), iniziatore di ricerche scientifiche moderne sui prodotti di Larderello.

Il campione ⁽¹⁾ proviene dalle incrostazioni dei tubi del « Foro del magazzino » di Larderello. Questo pozzo, già da tempo esaurito, fu trivellato nel 1927 fino a raggiungere, nelle argille scagliose, la profondità di m 177 ed il vapore raggiunse la temperatura massima di 177°.

Il materiale (L. 4) si presenta come una massa terrosa di forma irregolare piuttosto friabile di colore variabile da punto a punto: esternamente predomina il giallo arancio con punti rossastri, mentre internamente il giallo sfuma fino ad un grigio chiaro.

Del campione sono state fatte tre porzioni: giallo arancio, gialla e grigia; ma l'analisi chimica completa è stata condotta solo per la prima frazione

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia dell'Università di Firenze. Centro di studio per la Geochimica e la Mineralogia del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'11 febbraio 1961.

(1) Ringrazio la Società Larderello che mi ha consentito di prelevare una porzione di questa incrostazione conservata nel suo museo.

(giallo arancio) in quanto, a seguito di prove preliminari, consistenti in riprese diffrattometriche e determinazioni del contenuto in boro, si era potuto concludere che le restanti due frazioni differivano dalla prima unicamente per un minor contenuto dei due nuovi borati e di orpimento e per una maggiore proporzione delle altre « impurezze ».

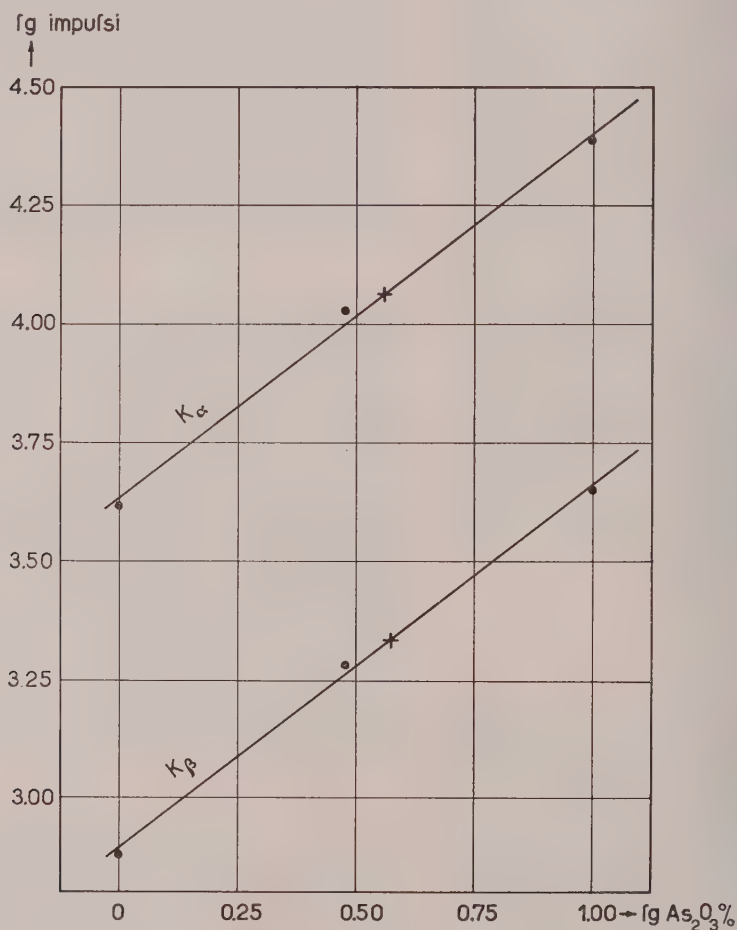


Fig. 1. - Rette di taratura per la determinazione assoluta di As mediante la spettrometria di fluorescenza a raggi X.

I valori per il campione naturale sono indicati dalle crocette.

L'analisi chimica è stata condotta nella maniera seguente. Dopo fusione alcalina la silice è stata insolubilizzata con ripetuti trattamenti con acido cloridrico ed alcool metilico per eliminare contemporaneamente il boro; le minime quantità di III gruppo sono state pesate senza procedere alle singole separazioni, il calcio è stato precipitato come ossalato e pesato come ossido.

Gli alcali sono stati determinati allo spettrofotometro di fiamma, dopo eliminazione del boro, mentre l'acqua a 110° è stata dosata per perdita di peso in stufa e quella totale per titolazione secondo Karl Fischer [4] dopo riscaldamento in forno a 600°.

Il boro, tutto nei borati solubili in acqua calda, è stato dosato per titolazione secondo Thomson. La soluzione acquosa viene titolata con HCl N/10 in presenza di metilarancio determinando così la base presente (qui Na_2O) e quindi, dopo aver eliminato l'eventuale anidride carbonica sotto refrigerante a ricadere per un minuto, si dosa l'acido borico spostato dal borato per titolazione con NaOH N/10 in presenza di mannite con fenolfthaleina come indicatore.

Il solfo è stato determinato per differenza fra quello totale, dosato dopo fusione con la miscela $\text{Na}_2\text{CO}_3\text{—NaNO}_3$, e quello presente come solfato.

L'arsenico è stato dosato mediante la spettrometria di fluorescenza a raggi X. La principale difficoltà nelle determinazioni quantitative di fluorescenza è la conoscenza del coefficiente di assorbimento lineare: in generale tale difficoltà viene aggirata con l'uso di un elemento di riferimento avente un coefficiente di assorbimento di massa vicino a quello dell'elemento da dosare. Nel caso presente era già nota la composizione chimica del campione naturale, arsenico escluso, ed era perciò possibile calcolare il coefficiente di assorbimento di massa del miscuglio, che è risultato per la $\text{AsK}\alpha$, sempre escludendo l'arsenico, di 7,61 gr/cm².

L'impossibilità pratica della determinazione della densità del miscuglio naturale non consente di calcolare il coefficiente di assorbimento lineare, ma si è cercata una matrice che presentasse un coefficiente di assorbimento di massa molto vicino a quello del campione naturale ed una densità presumibilmente simile. Una tale matrice è risultata la miscela 1 : 1 di Li_2CO_3 e NaF che presenta, per la $\text{AsK}\alpha$, un coefficiente di assorbimento di massa di 7,53 gr/cm².

Avendo una matrice con assorbimento molto prossimo a quello del prodotto naturale, la determinazione dell'arsenico è stata eseguita in via assoluta misurando cioè l'intensità delle radiazioni $\text{AsK}\alpha$ ed $\text{AsK}\beta$ nel campione ed in termini di scale aventi quantità diverse di As_2O_3 nella matrice scelta.

Le determinazioni sono state condotte in doppio all'apparecchio G. E. X-RD 5, cristallo disperdente di quarzo ($2d = 6,69 \text{ \AA}$), effettuando cinque letture di 10 secondi ciascuna nelle posizioni di massimo delle righe $\text{AsK}\alpha$ ed $\text{AsK}\beta$ ed in una posizione vicina, libera da righe, per il fondo e precisamente a 20,30°; 18,20° e 17,15° 2θ rispettivamente.

I valori medi ottenuti sono i seguenti:

	20,30°	18,20°	17,15°	$\text{AsK}\alpha$	$\text{AsK}\beta$
As_2O_4 . . . 10 %	24483	4588	121	24362	4467
As_2O_3 3 %	10834	2062	155	10679	1907
As_2O_3 1 %	4334	954	198	4136	756
L. 4	11752	2296	138	11614	2158
As_2O_3 10 %	25128	4681	120	25008	4561
As_2O_3 1 %	4433	965	191	4242	774
L. 4	11843	2300	139	11704	2161

Per interpolazione dai dati dei termini delle scale (fig. 1) si sono ottenuti per il contenuto in As_2O_3 del prodotto naturale quattro valori molto vicini: 3,63; 3,74; 3,72 e 3,80 %. L'uguaglianza dei valori ottenuti da due radiazioni diverse indica la notevole vicinanza fra gli assorbimenti del campione e della matrice usata e quindi la piena attendibilità del metodo applicato.

Ecco il riassunto dei dati analitici:

SiO ₂	1,91 %
Al ₂ O ₃	{ 0,75
Fe ₂ O ₃	
CaO	0,36
Na ₂ O	20,53
K ₂ O	1,07
As ₂ O ₃	3,72
B ₂ O ₃	46,54
SO ₃	4,94
S	1,26
Cl	0,18
H ₂ O ⁻	10,98
H ₂ O ⁺	7,79
	<hr/>
	100,03 %
O per S, Cl	0,67
	<hr/>
	99,36 %

La doppia titolazione dei borati ha fornito, come media di cinque determinazioni, i seguenti valori:

	%	R.M.	
Na ₂ O	16,19	0,2610	1,00
B ₂ O ₃	46,54	0,6682	2,56
(H ₂ O	18,77	1,0415	3,99)

Se si attribuisse tutta l'acqua dosata ai borati, ipotesi plausibile data l'assenza nel miscuglio naturale di altri minerali idrati, i rapporti molecolari starebbero fra loro come 1,00 : 2,56 : 3,99 ossia circa Na₂O : B₂O₃ : H₂O = 2 : 5 : 8.

I borati noti dalla letteratura [7] e la cui composizione si avvicina a quella deducibile per i borati presenti nel campione studiato sono: l'ezcurite, 2 Na₂O · 5 B₂O₃ · 7 H₂O, rinvenuta da Muessig e Allen in Argentina nel 1956; il cosiddetto borato di Auger 2 Na₂O · 5 B₂O₃ · 5 H₂O [1]; il cosiddetto borato di Suhr, avente una composizione, secondo il suo autore, 3 Na₂O · 8 B₂O₃ · 10 H₂O.

Le successive ricerche diffrattometriche, microscopiche e termiche furono rivolte all'identificazione dei componenti mineralogici ed, in particolare, a stabilire la natura dei borati presenti.

I diffrattogrammi eseguiti sul miscuglio naturale mostrarono numerose riflessioni tutte piuttosto deboli: alcune di queste consentirono di identificare la thenardite e l'orpimento, ma la massima parte delle riflessioni, evidentemente spettanti ai borati, non era riconducibile ad alcuno dei minerali

conosciuti, ezcurrite compresa. I borati dovevano essere pertanto delle specie mineralogiche nuove e, con ogni probabilità, più di una a causa della debole intensità presentata da tutte le numerose riflessioni dei diffattogrammi.

Grazie alla cortesia di Waldemar Schaller [9] ho potuto effettuare una ripresa diffattometrica sul prodotto che il Suhr aveva preparato per lo Schaller stesso. Lo spettro si presenta identico, a parte le riflessioni dovute ad NaCl presente a causa del metodo di preparazione usato, a quello riportato da Muessig e Allen per l'ezcurrite naturale. Un tale spettro, che presenta una forte riflessione a circa 7 Å., è nettamente diverso da quello mostrato dal miscuglio naturale caratterizzato, a bassi angoli, da due riflessioni rispettivamente a circa 10 Å. e 6 Å.

Le sintesi effettuate in autoclave a varie temperature e con soluzioni a vari rapporti $\text{Na}_2\text{O}/\text{B}_2\text{O}_3$, delle quali è stato ampiamente trattato nella Nota precedente, hanno consentito di ottenere due nuovi borati di sodio idrati (A e B) di composizione rispettivamente $2 \text{Na}_2\text{O} \cdot 5 \text{B}_2\text{O}_3 \cdot 4 \text{H}_2\text{O}$ e $2 \text{Na}_2\text{O} \cdot 5 \text{B}_2\text{O}_3 \cdot 7 \text{H}_2\text{O}$.

Dal confronto delle distanze reticolari di questi prodotti sintetici con quelle presentate dal miscuglio naturale è possibile constatare che la stragrande maggioranza delle riflessioni non attribuibili alla thenardite sono da imputarsi ai borati preparati in autoclave. L'accordo, ottimo per i valori delle distanze reticolari, diventa mediocre per quanto riguarda le intensità relative a proposito delle quali giova ricordare l'estrema variabilità da ripresa a ripresa a causa evidentemente di orientazioni preferite manifestate dalle polveri, fatto già ricordato nella Nota precedente.

La Tabella I. riporta gli estremi di questo confronto. Per i due borati sono riportati due valori per le intensità relative: il primo si riferisce alla ripresa effettuate su lastrina normale (vedi Parte I), mentre il secondo ad una ripresa effettuata su lastrina forata secondo la tecnica proposta per diminuire gli effetti della orientazione preferita.

Ulteriori conferme della presenza nel miscuglio naturale dei due nuovi borati si sono avute con le ricerche ottiche e termiche.

L'osservazione microscopica ha mostrato che il campione naturale è costituito da un insieme di cristallini birifrangenti minutissimi e da piccoli ammassi non risolvibili neanche coi più forti ingrandimenti i quali sembrano isotropi e solo punteggiati da particelle birifrangenti. Mediante la determinazione degli indici di rifrazione col metodo dell'immersione è stato possibile riconoscere la thenardite ($\alpha' = 1,470$ e $\gamma' = 1,480$). Gli ammassi presentavano un indice medio attorno a 1,500. Per i minutissimi cristallini birifrangenti, talvolta a contorno esagonale, dei probabili borati ho misurato indici compresi fra 1,500 e 1,550 ed in particolare sui cristallini a contorno esagonale, dai quali emergeva la bisettrice acuta negativa, ho determinato, per una specie $\beta = 1,536$ e $\gamma = 1,550$, e per una seconda, più abbondante, $\beta = 1,513$ e $\gamma = 1,523$. Tali cristalli devono essere riferiti alla hoeferite ed alla nasinite per le quali si sono determinati, sui prodotti sintetici, i seguenti valori: $\beta = 1,539$ e $\gamma = 1,557$ e rispettivamente $\beta = 1,512$ e $\gamma = 1,524$.

TABELLA I.

L. 4 (*)		Hoeferite		Nasinite		Thenardite		O = Orpimento Q = Quarzo	
<i>d</i>	<i>i</i>	<i>d</i>	<i>i</i>	<i>d</i>	<i>i</i>	<i>d</i>	<i>i</i>	<i>d</i>	<i>i</i>
10,38	57	10,32	100 93						
7,56	18							?	7,56 100 gesso?
6,02	76			6,01	100 100				
5,69	26			5,70	2 5				
5,54	23	5,56	2 6	5,59	4 39				
5,29	30			5,30	16 18				
5,18	28	5,17	55 40	5,19	1 1				
5,05	22	5,03	19 16						
4,85	47	4,88	13 11	4,86	2 4			O 4,78	100
		4,82	14 13						
4,66	65					4,66	73		
4,25	6	4,25	3 4					Q 4,26	35
4,21	8	4,21	4 4						
4,12	7								
4,09	9			4,10	2 6				
3,98	8			4,01	1 4			O 3,97	60
3,93	10	3,922	3 ..	3,942	1 2				
3,84	17					3,84	18		
3,68	9	3,675	3 ..					O 3,66	60
3,57	10								
3,46	32	3,453	79 100	3,471	1 2				
3,41	11			3,417	< 1 3				
3,34	11							Q 3,343	100
3,29	12	3,296	4 5						
3,18	48					3,178	51	O 3,18	60
3,08	78					3,075	47		
3,05	48	3,049	45 45						
3,00	43			3,006	50 31				
2,97	24	2,966	10 9						
2,90	29			2,902	13 21				
2,848	23	2,853	21 25	2,851	2 5				
2,821	54			2,824	1 6			O 2,83	80
2,786	83					2,783	100		
2,716	11							O 2,71	80
2,670	14	2,680	11 14						
2,648	54	2,650	10 12	2,652	2 6	2,646	48		

(*) Diffattometro G. E. Cu/Ni $\lambda = 1,5418$ Å. vel. $2^\circ/\text{'}'$; intensità in scala arbitraria (lunghezza degli apici in mm) intervallo $5^\circ-60^\circ 2\theta$.

Segue: TABELLA I.

L. 4 (*)		Hoeferite		Nasinite		Thenardite		O = Orpimento Q = Quarzo	
<i>d</i>	<i>i</i>	<i>d</i>	<i>i</i>	<i>d</i>	<i>i</i>	<i>d</i>	<i>i</i>	<i>d</i>	<i>i</i>
2,590	20	{ 2,597 19 .. 2,589 36 40							
2,566	23			2,567	2 5			O 2,56	40
2,532	17	2,534	9 9	2,535	1 ..				
2,511	12			2,514	1 6				
2,482	12	{ 2,490 16 17 2,485 19 17							
2,453	16			2,455	1 5			{ O 2,44 70 Q 2,458 12	
2,331	25					2,329	21		
2,243	7	2,248	3 3						
2,206	24					2,211	5		
2,143	8			2,147	< 1 9				
2,126	9	2,128	4 5						
2,085	7			{ 2,092 2 8 2,084 2 8					
2,042	10	2,042	3 ..						
1,993	20			2,002	2 5				
1,963	6	1,965	3 ..						
1,940	6			{ 1,949 < 1 .. 1,940 < 1 ..					
1,916	15			1,913	1 3	1,919	4		
1,895	9	1,899	7 8	1,899	1 3	1,891	4		
1,882	11	1,883	4 7	{ 1,885 1 3 1,883 1 3					
1,865	30			{ 1,870 1 3 1,857 < 1 1		1,864	31		
1,812	10	1,808	9 13	1,810	2 2			Q 1,817	17
1,775	5	1,769	3 ..						
1,755	8	1,760	3 ..					O 1,75	60
1,727	6	1,730	3 12						
1,680	18					1,680	12	O 1,68	70
1,661	11					1,662	8		
1,629	8								
1,549	11					1,553	10	Q 1,541	15

(*) Diffratometro G. E. Cu/Ni $\lambda = 1,5418$ A. vel. $2^\circ/\text{r}$; intensità in scala arbitraria (lunghezza degli apici in mm); intervallo $5^\circ\text{--}60^\circ$ 2 θ .

Per i dati di riferimento ho utilizzato le seguenti schede A.S.T.M.: Thenardite 5-0631; G = gesso 6-0046; O = Orpimento 2-0196; Q = Quarzo 5-0490.

L'abito microcristallino, i valori degli indici di rifrazione e le proprietà ottiche concordano con quelle dei borati sintetici, riportati estesamente nella Nota precedente; pertanto le indagini microscopiche confermano l'identità accertata con i diffrattogrammi dei due minerali con i prodotti artificiali.

La curva termica differenziale del prodotto naturale presenta un andamento dal quale è possibile riconoscere, sia pure molto ridotti, i singoli effetti mostrati dai borati sintetici ⁽²⁾. Come si può osservare dalla fig. 2, sono dovuti alla hoeferite ed alla nasinite congiuntamente i due apici endotermici

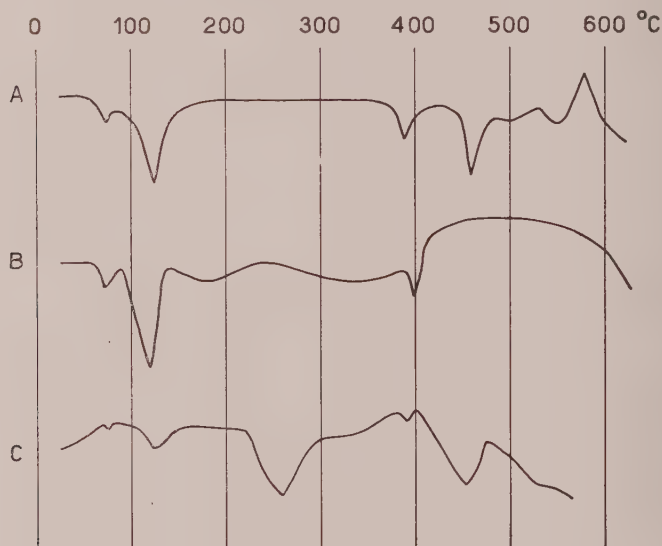


Fig. 2. - Curve termidifferenziali riprese all'apparecchio Leeds & Northrup, velocità di riscaldamento 15°/.

A = Hoeferite sint.; B = Nasinite sint.; C = campione L. 4 C.

rispettivamente a 70°, qui in realtà a 80°, ed a 130°; il terzo apice slargato della nasinite a 180° può essere ancora riconosciuto, ma il quarto, sempre slargato a 330°, è qui mascherato dal grande effetto endotermico dovuto alla thenardite [6] con massimo a 260°; si riconosce, sebbene appena accennato, l'effetto endotermico a 400°, dovuto insieme alla hoeferite ed alla nasinite, mentre è da attribuire alla hoeferite il forte effetto endotermico a 450°. La curva poi comincia a scendere fino alla rottura della pinza che avviene verso i 550°.

Nella Nota precedente è stato studiato, fra l'altro, l'andamento della disidratazione dei due borati sintetici. Si è potuto osservare che il prodotto

(2) Data la scarsità del materiale più puro, l'analisi termidifferenziale è stata condotta sulla frazione più abbondante del campione (L. 4 C, frazione grigia), analoga qualitativamente alle altre due frazioni, ma più povera di borati e di orpimento e più ricca di thenardite e di residuo insolubile.

completamente disidratato a 540° è identico per entrambi i borati A e B (hoeferite e nasinite) ed è nettamente cristallino come dimostrano il suo spettro di polveri e le caratteristiche ottiche (borato E).

Una ripresa diffrattometrica, effettuata sul prodotto naturale riscaldato a 540° , ha mostrato le riflessioni del borato anidro E, producendo perciò un'altra prova a sostegno dell'identità dei borati naturali.

Dal punto di vista chimico, com'è già stato accennato l'analisi indica la presenza di borati di sodio idrati a composizione media $\text{Na}_2\text{O} : \text{B}_2\text{O}_3 : \text{H}_2\text{O} \sim 2 : 5 : 8$.

In realtà le determinazioni delle proprietà fisiche hanno stabilito, attraverso il confronto con le caratteristiche dei prodotti sintetici, la presenza dei composti 2·5·4 e 2·5·7 in proporzioni approssimativamente uguali e pertanto l'eccesso riscontrato nel contenuto in acqua deve essere imputato ad acqua di imbibizione presente nel campione naturale.

Infatti i due borati artificiali al di sopra di 110° perdono entrambi circa 3,2 moli di acqua, mentre le rimanenti (circa 0,8 per la hoeferite e circa 3,8 per la nasinite) sono già eliminate a 110° . Il miscuglio naturale perde al di sopra di 110° la quantità corrispondente ai prodotti sintetici (circa 3,3 moli), ma a 110° una quantità nettamente superiore (circa 4,7 moli), ciò che dimostra che l'eccesso di acqua rispetto alla composizione dei borati presenti è effettivamente acqua di imbibizione. D'altra parte questa non è determinabile per perdita in essiccatore in quanto un simile trattamento provocherebbe una non trascurabile perdita di acqua di cristallizzazione dei borati, come risulta da prove effettuate sui borati sintetici.

Dai dati precedenti risulta che il nuovo minerale nasinite $2 \text{Na}_2\text{O} \cdot 5 \text{B}_2\text{O}_3 \cdot 7 \text{H}_2\text{O}$ ha la stessa formula della ezcurrite di Muessig e Allen.

Gli spettri di polvere sono però assolutamente diversi. Nella Tabella II sono riportati i valori delle distanze reticolari e delle intensità relative delle riflessioni registrate nell'intervallo più significativo: 5° – 30° 2θ ; nella prima colonna i dati per l'ezcurrite di Muessig e Allen, nella seconda i dati ottenuti da una mia ripresa sul « borato di Suhr », nella terza i dati della nasinite artificiale, già elencati per esteso nella Parte I.

L'analisi termica differenziale mostra un diverso andamento della disidratazione. Infatti la curva presentata da Muessig e Allen per l'ezcurrite mostra un grosso apice endotermico con inizio a 160° e massimo a 260° , mentre per la nasinite si hanno due netti effetti endotermici a 70° e 130° , due molto slargati a 190° e 330° ed infine un altro netto, sempre endotermico a 400° .

I valori degli indici di rifrazione dell'ezcurrite e della nasinite sono molto vicini, ma l'orientazione dell'indicatrice sembra essere diversa, dalle proprietà ottiche della nasinite sembra poter concludere che questa è monoclinica, mentre secondo Muessig e Allen l'ezcurrite sarebbe triclina.

Riguardo alla composizione chimica occorre notare che il Suhr attribuisce al suo prodotto sintetico, riscontrato in seguito identico alla ezcurrite, la formula $3 \text{Na}_2\text{O} \cdot 8 \text{B}_2\text{O}_3 \cdot 10 \text{H}_2\text{O}$. Muessig e Allen assegnano alla ezcurrite,

sulla base di due analisi effettuate sul prodotto naturale da due differenti analisti, la composizione $2 \text{Na}_2\text{O} \cdot 5 \text{B}_2\text{O}_3 \cdot 7 \text{H}_2\text{O}$. In realtà i dati analitici per la ezcurrite si discostano alquanto dalla composizione teorica calcolabile per un borato $2 \cdot 5 \cdot 7$ e tendono ad avvicinarsi a quella indicata dal Suhr: $3 \cdot 8 \cdot 10$. Non sono stati pubblicati i valori analitici da lui trovati, ma la formula indicata sembra giusta, come dimostra l'analisi da me eseguita sul « borato di Suhr »:

	%	R.M.		
Na_2O	19,18	0,3094	2,00	3,00
B_2O_3	56,95	0,8178	5,29	7,93
H_2O	19,06	1,0579	6,84	10,26
NaCl	4,02			
	99,21			

Pertanto all'ezcurrite dovrebbe attribuirsi la formula $3 \cdot \text{Na}_2\text{O} \cdot 8 \text{B}_2\text{O}_3 \cdot 10 \text{H}_2\text{O}$.

TABELLA II.

Ezcurrite(*)		Borato di Suhr(**)		Nasinite	
<i>d</i>	<i>i</i>	<i>d</i>	<i>i</i>	<i>d</i>	<i>i</i>
8,98	I	9,02	15	7,19	< I
6,94	10	6,97	100	6,19	I
5,50	< I	5,63	I	6,01	100
5,28	< I	5,27	4	5,70	2
4,82	< I	4,82	2	5,59	4
4,48	2	4,50	20	5,30	16
4,20	< I	4,21	12	5,19	I
4,04	< I	4,03	4	5,12	I
3,80	< I	3,79	3	4,86	2
3,31	2	3,30	15	4,61	I
3,22	< I	3,23	6	4,43	< I
3,19	< I			4,10	2
3,13	2	3,13	50	4,01	I
3,08	I	3,10	93	3,942	I
				3,746	< I
				3,471	I
				3,417	< I
				3,242	I
				3,169	I
				3,130	< I
				3,006	50

(*) Dai dati di Muessig e Allen è stata tolta la riflessione, $d = 7,69 \text{ \AA}$. $i = < 1$, perché corrisponde alla radiazione $K\beta$ della successiva.

(**) Ripresa al diffrattometro G. E., radiazione $\text{Cu/NiK}\alpha$, tarato con NaCl presente nel prodotto artificiale, vel. 20° .

Nel campione studiato si ha la coesistenza di quattro fasi cristalline: hoeferite, nasinite, thenardite ed opimento.

Durante le sintesi effettuate in autoclave, delle quali si è estesamente discusso nella Parte I, si è potuto osservare la formazione contemporanea

di hoeferite e nasinite in due diverse condizioni: a 150° con un rapporto $\text{Na}_2\text{O} : \text{B}_2\text{O}_3 = 1 : 4$ ed a 200° con un rapporto $1 : 2,5$; e precisamente nel primo caso si ha una prevalenza di nasinite sulla hoeferite, mentre nel secondo caso si ha l'inverso.

Poiché l'esame ottico ed il confronto delle riflessioni sui diffattogrammi indicano una leggera prevalenza della nasinite sulla hoeferite, si può indicare una temperatura di formazione attorno ai 150°, non potendo stabilire l'effetto degli altri componenti il miscuglio naturale. Questa temperatura, dello stesso ordine di quella massima registrata sul vapore all'uscita del pozzo (177°), è anche in accordo con la presenza di orpimento, noto come prodotto di deposizione idrotermale.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] AUGER V., *Sur un nouveau type de borates alcalins: les pentaborates*, «C. R. Acad. Sci., Paris», 180, 1602 (1925).
- [2] CIPRIANI C., *Un nuovo minerale fra i prodotti boriferi di Larderello*, «Rend. Accad. Naz. Lincei», ser. VIII, 22, 519 (1957).
- [3] CIPRIANI C., *Ricerche sulla boussingaultite manganesifera di Larderello*, «Rend. Soc. Miner. Ital.», 14, 124 (1958).
- [4] CIPRIANI C. e BERNARDINI G., *Ricerche di metodologia geochimica. - VII. La determinazione dell'acqua per titolazione con il reattivo di Karl Fischer*, «Atti Soc. Tosc. Sci. Nat.», 65, 221 (1958).
- [5] CIPRIANI C. e VANNUCCINI P., *Hoeferite e Nasinite: due nuovi borati fra i prodotti di Larderello*. Parte I. Questi «Rendiconti», fasc. 1.
- [6] COCCO G., *Analisi termica differenziale di alcuni solfati*, «Per. Miner.», 21, 103 (1952).
- [7] KEMP P. H., *The chemistry of borates*. Part I. Londra 1956.
- [8] MUESSIG S. e ALLEN R. D., *Ezcurrite* ($2\text{Na}_2\text{O} \cdot 5\text{B}_2\text{O}_3 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$), *a new sodium borate from Argentina: occurrence, mineralogy and associated minerals*, «Econ. Geol.», 52, 426 (1957).
- [9] SCHALLER W. T., Comunicazione personale.

Istologia. — *Grandezza e densità delle cellule nervose della corteccia cerebrale di Elephas indicus*^(*). Nota di ANTONIO BARASA e ABRAHAM SHOCHATOVITZ, presentata^(**) dal Socio G. LEVI.

In pubblicazioni antecedenti uno di noi⁽¹⁾ ha riferito i risultati delle sue osservazioni sovra i neuroni della corteccia cerebrale in differenti Mammiferi, dimostrando con singolare evidenza che il volume dei neuroni varia in misura proporzionale alla mole somatica; e più precisamente fu documentato, mediante il paragone tra preparati allestiti col metodo Golgi e col metodo Nissl, che mentre le variazioni del volume del pericario sono di lieve entità, sono invece rilevantissime le differenze nell'estensione dell'arborizzazione dendritica; il ch   ci rende ragione del fatto gi   conosciuto, ma meglio documentato da queste osservazioni, che la densit   dei neuroni per unit   di volume    tanto minore, quanto pi   rilevante    la mole del soma dell'animale.

Di recente abbiamo avuto l'opportunit   di raccogliere il cervello di un elefante (*Elephas indicus*). La corteccia cerebrale di questa specie, di mole corporea cos   rilevante⁽²⁾ non fu mai studiata col metodo Golgi, il solo che ci permetta di renderci ragione dell'estensione dell'arborizzazione dendritica dei neuroni.

Riferiremo in questa comunicazione alcuni dati preliminari attinenti la forma e l'estensione dell'arborizzazione dendritica dei neuroni piramidali di un'area della corteccia cerebrale dell'elefante che presumibilmente corrisponde al campo 4 di Brodmann dell'uomo; nella stessa area venne determinata la densit   dei neuroni per unit   di volume.

L'elefante    di sesso femminile, di 13 anni di et  ; il suo peso    di circa 2.500 Kg. Il peso dell'encefalo, estratto subito dopo la morte e liberato dalla dura meninge, risult   di gr 4.400. Questo peso, eguale a quello riscontrato da Count (1947)⁽³⁾ in un encefalo della stessa specie,    notevolmente pi   basso di quello riscontrato da Tower (1954) - gr 6.075 - in un elefante di 50 anni. A tal proposito desideriamo porre in rilievo che non sappiamo con

(*) Ricerche eseguite nell'Istituto di Anatomia degli animali domestici dell'Universit   di Torino, con un contributo del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'11 febbraio 1961.

(1) A. BARASA, « Rend. Acc. Naz. Lincei », Classe Sc. fis. mat. natur., serie VIII, vol. XXII, fasc. 3, 347-351 (1957); « Monit. Zool. it. », suppl. vol. LVII, 238-241 (1958); « Zeitschr. f. Zellf. », 53, 69-89 (1960).

(2) Bucciante molti anni or sono (1926) ha esaminato il ganglio del trigemello di un elefante, dimostrando che i neuroni hanno forma molto differente da quella di altri Mammiferi di minor mole; il pericario dei grandi neuroni    provvisto di fibre con grosse mazze terminali che si avvolgono in complicati plessi intorno al pericario stesso.

(3) E. W. COUNT, « Ann. N. Y. Acad. Sci. », 46, 993-1122 (1947).

esattezza a quale età termini, in questa specie, l'accrescimento del corpo. Dai dati della letteratura risulta che il peso massimo raggiunto da esemplari adulti va da 3.500 a 4.000 Kg; solamente in casi eccezionali è superiore. Certamente l'esemplare da noi studiato non aveva raggiunto il termine dell'accrescimento; dato importante sul quale ritorneremo nella valutazione dei risultati delle nostre osservazioni sulla morfologia dei neuroni della corteccia.

La tecnica usata è la medesima impiegata da uno di noi nelle antecedenti ricerche: 1° metodo Golgi-Cox, che fu preferito al metodo Golgi originale (reazione cromoargéntica) perché, com'è noto, il metodo Cox è il solo il quale dà risultati assolutamente costanti su qualsiasi materiale; 2° metodo Nissl per la determinazione della densità dei neuroni.

Nei preparati ottenuti col metodo Cox e soprattutto nei disegni ricavati colla camera di Abbe, risulta che i neuroni piramidali (considerando complessivamente il pericario e l'arborizzazione dendritica di un singolo neurone) sono, nella corteccia dell'elefante, incomparabilmente più grandi in confronto a quelli di altri animali finora studiati (bovino, cavallo, uomo).

Il pericario ha forma varia; il suo volume, nei più grandi neuroni, supera, se pur di poco, quello degli elementi corrispondenti dell'uomo, del bovino e del cavallo. Ma ciò che colpisce anche ad un'osservazione superficiale è l'enorme estensione dell'arborizzazione dendritica dei neuroni grandi ed anche di quelli di medie dimensioni; estensione che supera di gran lunga quella dei medesimi neuroni del bovino, del cavallo e dell'uomo. I dendriti basali sono molto spessi, più numerosi ed incomparabilmente più lunghi di quelli delle specie suddette. Il dendrite apicale in pochissimi neuroni piramidali, in genere soltanto in quelli più piccoli, è unico (disposizione caratteristica della maggior parte dei grandi neuroni piramidali dell'uomo); nei neuroni di grandi e medie dimensioni esso è quasi sempre sostituito da un ricco ciuffo di dendriti ascendenti, molto robusti, i quali per lo più si originano indipendenti dal pericario; nel dirigersi verso la superficie della corteccia questi dendriti divergono fortemente ed emettono collaterali. Un comportamento simile dei dendriti rivolti verso la superficie fu visto da uno di noi anche nei neuroni di bovino e di cavallo; ma ciò che caratterizza la corteccia dell'elefante è che questa disposizione riguarda la quasi totalità dei neuroni di grandi e medie dimensioni ed è di grande entità.

Nel complesso nell'elefante, lo spazio entro il quale si espande l'arborizzazione dei dendriti basali ed apicali dei grandi e medi neuroni piramidali diviene estesissimo, in paragone a quanto è stato riscontrato nei neuroni omologhi di cavallo, bovino e uomo. Insistiamo su questo particolare, che ci sembra importante per la seguente considerazione: in questo modo si realizza nell'elefante un rilevante aumento della superficie dei singoli neuroni e ciascuno di questi è in grado di raccogliere gli eccitamenti trasmessi dalle sinapsi di un gran numero di neuriti afferenti.

Invece, i neuroni piramidali più piccoli dell'elefante hanno dimensioni pressoché uguali a quelli delle cellule corrispondenti di cavallo e bue; e ciò

sia per la grandezza del pericario, sia per l'estensione dell'arborizzazione dendritica.

La densità dei neuroni di vario tipo nella corteccia cerebrale dell'elefante è risultata molta bassa; il valore medio per mm^3 di corteccia è di 4.400 neuroni. Questa densità è di gran lunga inferiore a quella riscontrata in tutte le altre specie finora esaminate.



Fig. 1. - Riproduzione allo stesso ingrandimento dei più grandi neuroni piramidali di un'area, presumibilmente corrispondente al campo 4 di Brodmann, della corteccia cerebrale in animali di differente mole somatica.

A) *Mus musculus*; B) *Canis familiaris*; C) *Homo sapiens*; D) *Equus caballus*; E) *Elephas indicus*.
Ingrandimento 30 X.

Vi è adunque piena corrispondenza tra i dati ottenuti dal conteggio dei neuroni e quelli apprezzabili col metodo Cox; è ovvio che quanto più estesa è l'arborizzazione dendritica, tanto minore deve essere la densità dei pericari dei neuroni. E si tenga presente che il cervello esaminato appartiene ad un animale giovane, il quale non aveva ancora raggiunto il termine dell'accrescimento somatico; pertanto si può presumere che non tutti i neuroni avessero ancora raggiunto la grandezza definitiva (confronta le ricerche di Olivo e Gagliano, 1926 ⁽⁴⁾, sulle modificazioni di forma e volume dei neuroni piramidali dell'uomo dalla nascita all'età senile).

(4) O. M. OLIVO e GAGLIANO, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », I, 111-114 (1926).

Tower (1954) nel medesimo materiale di un individuo adulto ha riscontrato in verità una densità di neuroni un po' più elevata (6.900 neuroni per mm^3). La discordanza dipende verosimilmente dalla differente tecnica impiegata nei conteggi (rimandiamo a tal riguardo ai precedenti lavori).

I risultati ottenuti da questo studio sulla corteccia cerebrale dell'elefante si inquadrano perfettamente con i dati delle precedenti ricerche di uno di noi. La densità delle cellule nervose della corteccia è inversamente proporzionale alla grandezza della mole somatica; e ciò in quanto, negli animali di maggior mole, i neuroni sono più grandi.

Istruttivo è, a tal proposito, quanto risulta dalla fig. 1 e dalla Tabella I. Nella prima si apprezzano le enormi differenze di grandezza delle cellule piramidali di maggior volume riscontrate nella corteccia cerebrale di 5 specie di mole somatica molto differente (topo, cane, uomo, cavallo, elefante); nella seconda sono riportati i valori medi della densità dei neuroni nelle stesse specie.

TABELLA I.

Valori della densità dei neuroni in 1 mm^3 di corteccia cerebrale (campo 4 di Brodmann) in animali di mole somatica diversa.

<i>Mus musculus</i>	95.000 neuroni per mm^3		
<i>Canis familiaris</i>	20.400	»	»
<i>Homo sapiens</i>	16.300	»	»
<i>Equus caballus</i>	11.500	»	»
<i>Elephas indicus</i>	4.400	»	»

La norma enunciata da G. Levi sulla relazione esistente tra grandezza corporea e volume delle cellule nervose trova quindi un'ulteriore conferma nei risultati di questa ricerca sulla corteccia cerebrale dell'elefante.

Per più ampie indicazioni bibliografiche si rimanda al precedente lavoro di A. Barassa, *Forma, grandezza e densità dei neuroni della corteccia cerebrale in Mammiferi di grandezza corporea differente*, in «Zeitschr. f. Zellf.», 53, 69-89 (1960).

Embriologia. — *Larve giganti uniche ottenute da due uova di Ascidie fuse allo stadio di 8-blastomeri*^(*). Nota di IMMACOLATA GORGONE, presentata ^(**) dal Socio G. COTRONEI.

INTRODUZIONE. — Allo scopo di stabilire l'epoca in cui, nell'uovo delle Ascidie, le potenze organo-formative sono irrevocabilmente fissate, diversi Autori hanno unito insieme due uova o due embrioni in diversi stadi di sviluppo: vanno ricordati al proposito Ti-Chow-Tung [1], von Ubisch [2] [3], Fautrez [4].

Ti-Chow-Tung [1] unì a croce uova di *Ascidella scabra* allo stadio di due blastomeri: si ebbero embrioni con organizzazione esterna ed interna doppia.

Von Ubisch [2] in *Ascidella aspersa* allo stadio di due blastomeri unì due uova lateralmente. I risultati ottenuti furono vari, e possono raggrupparsi in tre categorie: la prima è costituita dagli individui la cui fusione risultò solo in superficie e i cui organi conseguentemente sono doppi; la seconda categoria è data da larve giganti con un solo tronco e una sola coda, ma il cui esame in sezione rivela duplicità degli organi; nella terza categoria figura una sola larva, il cui aspetto esterno e la cui organizzazione interna è unitaria.

Con le uova di *Corella parallelogramma* von Ubisch [3] ottenne risultati simili: in un solo caso ottenne una larva unitaria.

Von Ubisch, da questi risultati ha dedotto che i singoli territori organo-formativi allo stadio di 2-blastomeri sono già determinati entro due territori omologhi vi può essere però regolazione e quindi formazione di un organo unitario.

Fautrez [4] effettuò fusioni di uova vergini di *Ascidella aspersa*. In due casi si ebbe sviluppo: gli embrioni presentavano cellule cordali e muscolari in numero doppio del normale, e disposte in maniera disordinata; in un embrione la corda si presentò ad X.

Dallo studio di questi embrioni, il Fautrez dedusse che i differenti territori dell'uovo vergine non sono equipotenziali, ma posseggono già una determinazione.

PROBLEMA. — Gli esperimenti di cui è stato fatto cenno precedentemente furono condotti su uova in stadi di sviluppo assai precoci: le condizioni però in cui fu operata la fusione, e il meccanismo che dette luogo ai risultati diversi, non furono ben definite.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia della Università di Palermo, sotto la direzione del prof. G. Reverberi.

(**) Nella seduta dell'11 febbraio 1961.

Allo stadio di 8-blastomeri, l'orientamento delle uova è molto più facile a farsi e perciò questo stadio fu scelto per i miei esperimenti.

MATERIALE E METODO. — Allo scopo furono utilizzate uova di *Ciona intestinalis*, di *Phallusia mamillata* e di *Ascidia malaca*.

Le uova liberate dalle membrane che le avvolgono, allo stadio di 8-blastomeri venivano due a due pressate tra loro con orientamenti determinati. Fusioni si sono avute solo quando l'orientamento era fatto secondo la fig. 1.

L'adesione tra le due superfici messe a contatto si stabilisce abbastanza facilmente, e le uova si sviluppano spesso unitamente.

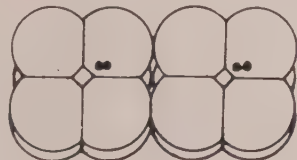


Fig. 1. — Schema della combinazione.

RISULTATI. — Di circa 250 combinazioni ne riuscirono soltanto 60 perché i due *partners* si staccarono ai primi stadi di sviluppo; in un gran numero di casi, purtroppo, lo sviluppo si arrestò precocemente e fu difficile farne lo studio. Nel caso in cui si ebbero larve i risultati possono essere divisi in tre gruppi.

Il primo gruppo è rappresentato da larve fondamentalmente doppie; il secondo da larve parzialmente fuse; il terzo da larve giganti e che, sia per la organizzazione esterna come per quella interna, sono uniche.

a) Uno dei casi appartenenti al primo gruppo è rappresentato nella fig. 3; come si vede le larve sono doppie e tenute insieme solo per l'epidermide comune.

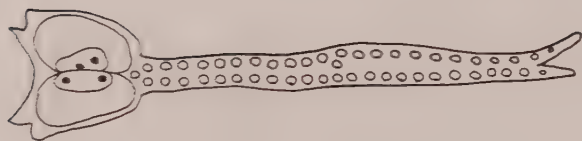
b) Uno dei casi appartenenti al secondo gruppo è rappresentato nella fig. 4: è evidente una fusione completa solo dell'ultima porzione della coda; sono però presenti quattro palpi. La coda è molto tozza e presenta due gobbe con le cellule cordali disposte a caso. Le dimensioni della larva sono il doppio del normale.

c) Il terzo gruppo è rappresentato da cinque larve giganti; un caso appartiene a *Ciona intestinalis*, uno a *Phallusia mamillata* (fig. 5) e tre ad *Ascidia malaca* (fig. 6). Tutte presentano una organizzazione esterna ed interna unitaria; sono presenti tre palpi e due organi di senso come nella larva normale; le cellule cordali sono in numero doppio del normale e sono disposte in una unica fila centrale, ai lati della quale si trovano le cellule muscolari, anch'esse in numero doppio del normale. La coda quasi sempre alquanto storta è mobilissima; sezioni trasversali (di cui verrà data documentazione in altro lavoro) mostrano fusione completa di tutti i territori ed una organizzazione assolutamente normale.

CONCLUSIONE. — I risultati ottenuti mostrano che da due uova di Ascidie allo stadio di 8-blastomeri è possibile avere per fusione larve giganti uniche. Questo risultato si ottiene solo quando le uova sono orientate spazialmente in modo che i territori omologhi combacino, e ne risulti una unica invagi-



2



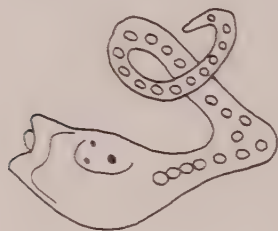
3



4



5



6

2. Controllo; 3. Larva doppia; 4. Larva parziale fusa; 5. - Larva gigante unica, di *Phallusia mamillata*; 6. - Larva gigante unica, di *Ascidia malacca*.

nazione gastrulare. I processi induttivi che si esercitano sui territori neurali presuntivi a spese della volta archenterica assicurano la formazione di un cervello unico e di organi di senso normali (cfr. Reverberi, Ortolani e Farinella) [5].

BIBLIOGRAFIA.

- [1] T. C. TUNG, « Arch. Anat. Micr. », 30, 381 (1934).
- [2] L. VON UBISCH, « Roux' Arch. », 138, 18 (1938).
- [3] L. VON UBISCH, « Roux' Arch. », 139, 438 (1939).
- [4] J. FAUTREZ, « Bull. Acad. Roy. Belg. », 26, ser. 5^a, 144 (1940).
- [5] G. REVERBERI, G. ORTOLANI e N. FARINELLA-FERRUZZA, « Acta Embryol. Morphol. Exper. », 3, 296 (1960).

Citologia. — *La citologia della partenogenesi in due nuovi Embiotteri dell'Africa tropicale* (*). Nota di RENZO STEFANI, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

Dell'intero ordine degli Embiotteri era nota, finora, una sola specie a riproduzione partenogenetica obbligatoria, l'*Haploembia solieri* Ramb. della regione mediterranea. Nella presente Nota viene descritta la maturazione dell'uovo di due nuove forme partenogenetiche di Embiotteri africani inviati in istudio dallo specialista E. S. Ross della *California Academy of Sciences*. Trattasi della *Parthenembia reclusa* Ross e della *Scelembia virgo* Ross descritte dall'autore come *specie* partenogenetiche sulla base dell'analisi morfologica.

La partenogenesi appare essere in entrambe costante e telitoca e non si conoscono, almeno per ora, le corrispondenti forme anfigoniche.

Sono grato al dott. Ross per avermi dato occasione di compiere questo studio citologico che si presenta di grande interesse soprattutto per quanto riguarda gli aspetti comparativi con la partenogenesi dell'*Haploembia solieri*.

Il materiale esaminato proviene da *Quilenda* (Angola portoghese) per la *Parthenembia reclusa* e da *Popokabaka* (Congo belga) per la *Scelembia virgo*. La maturazione dell'uovo partenogenetico è stata studiata con la stessa metodica altrove descritta (Stefani, 1956). L'assetto cromosomico somatico è stato determinato sulle cellule dell'epitelio follicolare ovarico, previo trattamento con colchicina, secondo i metodi già noti (Stefani, 1960).

L'uovo, in entrambe le specie, ha la forma tipica, essendo fornito di un normale opercolo, di un micropilo e di un chorion sottile ed elastico. Anche la struttura interna appare quella tipica dell'uovo degli Embiotteri.

Il corredo cromosomico zigoidi, nelle due popolazioni partenogenetiche esaminate, risulta essere costituito, in base ai conteggi di piastre metafasiche somatiche ed oogoniali, da 32 elementi per la *Parthenembia reclusa* e da 36 elementi per la *Scelembia virgo*.

Non è possibile stabilire, con i dati a nostra disposizione, se il corredo zigoidi corrisponda ad un biotipo partenogenetico diploide o variamente poliploide rispetto alla originaria razza anfigonica capostipite di ognuna delle due forme. Mi limiterò pertanto ad usare il termine, più generale e meno impegnativo, di *zigoidia* per indicare, secondo la terminologia di Prell, il corredo cromosomico non ridotto, sia esso diploide o poliploide.

(*) Ricerca eseguita nell'Istituto di Zoologia dell'Università di Cagliari.

(**) Nella seduta dell'11 febbraio 1961.

Al momento della deposizione la vescicola germinativa è situata, come di norma negli Embiotteri, nell'ooplasma periferico, al polo anti-micropilare (polo animale), trovandosi in uno stadio corrispondente alla metafase della prima divisione maturativa delle uova anfigoniche.

I cromosomi si presentano molto contratti, sferoidali, in numero zigoidi e in una disposizione sparsa, disordinata, e alquanto variabile da uovo a uovo. Tra di essi sono ben visibili le fibre di un fuso di forma irregolare cui sono collegati i singoli cromosomi (figg. 1 e 2).

Ci troviamo pertanto di fronte ad uno stadio meiotico che è identico a quello da me descritto per l'uovo partenogenetico dell'*Haploembia solieri*, (Stefani, 1956), e che va considerato come una divisione riduzionale abortiva.

Il numero zigoidi di elementi cromosomiali e l'assenza di un appaiamento dei cromosomi omologhi durante gli stadi profasici dimostra, in modo indubbio, che si tratta di *univalenti* i quali, dopo una permanenza piuttosto prolungata in questa disposizione, confluiscono in una piastra equatoriale subendo una divisione equazionale corrispondente alla seconda divisione maturativa dell'uovo anfigonico.

Gli univalenti (o diadi), dividendosi nei rispettivi cromatidi, danno così origine a due nuclei, entrambi zigoidi, uno dei quali si porta alla estrema periferia dell'uovo e finisce per degenerare (*polocita*), l'altro si approfonda negli strati sottostanti e dà inizio alle divisioni di segmentazione.

Per la chiarezza degli stadi e soprattutto per la perfetta loro corrispondenza con quelli dell'*Haploembia solieri*, possiamo asserire che, in entrambe le forme qui esaminate, esiste una partenogenesi apomittica (Suomalainen) in cui è assente qualsiasi fenomeno riduzionale.

L'esistenza di questa identità di maturazione dell'uovo nelle tre forme partenogenetiche di Embiotteri mi ha indotto ad indagare se, nei processi di segmentazione dell'uovo, si avessero, anche per le due specie africane, quei fenomeni di fusione nucleare e di poliploidia somatica da me riscontrati e descritti per l'*Haploembia solieri* (Stefani, 1955, 1959).

Un attento esame delle uova in segmentazione ha dato piena conferma a tale supposizione. Ho potuto infatti constatare nuclei di segmentazione variamente poliploidi rispetto al corredo zigoidi somatico e fenomeni di fusione nucleare insieme alla presenza di nuclei quiescenti giganti.

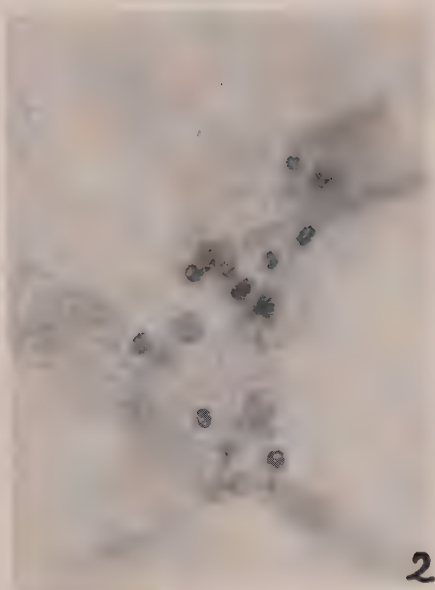
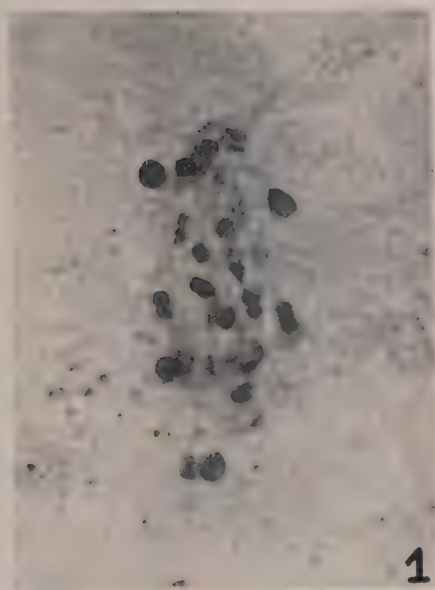
Questa identità di comportamento sia nella maturazione dell'uovo che nella sua segmentazione, in tre forme partenogenetiche diverse e sistematicamente ben distinte di uno stesso ordine, permette di attribuire un valore non limitato e specifico ma più ampio e generale a quei fenomeni citologici da me per la prima volta descritti in *Haploembia solieri* tra cui soprattutto vanno messi in evidenza, più che il carattere apomittico della maturazione, quelli relativi alla poliploidia somatica che si instaura in alcuni nuclei di segmentazione per fenomeni di fusione, fenomeni ai quali io ho più volte attribuito un ruolo di grande importanza nella insorgenza di individui poliploidi che potrebbero dar origine in natura a biotipi partenogenetici poliploidi.

BIBLIOGRAFIA.

- H. PRELL, *Der vererbungstheoretische Charakter der Parthenogenese*, « Genetica », 5, pp. 191-208 (1923).
- E. S. ROSS, *Parthenogenetic African Embioptera*, « The Wasmann Journ. Biol. », vol. 18, Nr. 2, 297-304 (1960).
- R. STEFANI, *La misoploidia quale fenomeno spontaneo nei nuclei di segmentazione dell'uovo di Haploembia*, « Caryologia », VIII, pp. 69-86 (1955).
- *Il problema della partenogenesi in Haploembia solieri*, « Atti Acc. Naz. Lincei, Memorie », V, sez. III, pp. 127-201 (1956).
- *I fenomeni cariologici nella segmentazione dell'uovo ed i loro rapporti con la partenogenesi rudimentale ed accidentale negli Embiotteri*, « Caryologia », XII, pp. 1-68 (1959).
- *L'azione della colchicina sulle cellule dell'epitelio follicolare ovarico degli Embiotteri*, « Caryologia », XIII, pp. 507-515 (1960).

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA I

- Fig. 1. - Stadio di I divisione riduzionale abortiva, a cromosomi sparsi, in uovo partenogenetico di *Parthenembia reclusa*. (Non sono visibili tutti i cromosomi che sono disposti in piani diversi). Prep. per schiacciamento colorato con orceina acetica.
- Fig. 2. - Stadio corrispondente al precedente, in uovo partenogenetico di *Scelembia virgo*. (Nella foto non sono visibili tutti i cromosomi). Colorazione c. s.
- Fig. 3. - C-metafase in cellula dell'epitelio follicolare ovarico di *Parthenembia reclusa*. Colorazione c. s.
- Fig. 4. - C-metafase in cellula dell'epitelio follicolare ovarico di *Scelembia virgo*. Colorazione c. s.



Genetica. — *Indagini sugli ibridi intraspecifici in Asellus aquaticus* (*). Nota di GIOVANNA VITAGLIANO TADINI, presentata (**) dal Corrisp. G. MONTALENTI.

In precedenti pubblicazioni (1) è stata data notizia del rapporto sessi nella popolazione naturale di *Asellus aquaticus* L., proveniente dal fiume Sarno presso Napoli, e della fecondità e idoneità dei vari incroci. Mi basterà qui accennare che su 141 coppie prese in natura nessuna è risultata sterile, che la mortalità embrionale è stata nulla, che il numero medio di larve partorite per coppia al primo « parto », è stato di 33,7 ed il numero medio di vivi differenziati è stato di 31,7. La percentuale di morti è stata piuttosto bassa: 5,8 %.

Mi sono in seguito posta il problema di indagare le caratteristiche di questa specie avente un'area di diffusione così vasta, per mezzo dell'incrocio fra individui appartenenti a popolazioni geograficamente lontane. In questa prima comunicazione dò notizia di alcuni caratteri degli ibridi fra individui della Campania e della Scozia (St. Andrews) (2).

Riferirò in note successive sul rapporto sessi della popolazione scozzese di *Asellus aquaticus* e degli ibridi ottenuti incrociando Aselli del Sarno con quelli provenienti dalla Scozia.

In questa Nota presento i dati circa la idoneità degli ibridi, degli incroci fra gli ibridi, e dei reincroci degli ibridi con le razze originarie.

È opportuno però mettere in evidenza che i dati qui riportati circa la fecondità delle coppie scozzesi non sono paragonabili a quelli ottenuti dalla popolazione di Aselli del Sarno, in quanto gli individui che formano le 15 coppie di Aselli scozzesi sono fra loro consanguinei, essendo noi partiti da un piccolissimo numero di esemplari che abbiamo inizialmente dovuto far riprodurre per ottenere un numero sufficiente di individui per poter fare i vari incroci.

Nelle tabelle vengono indicati col simbolo *Sc* gli Aselli scozzesi e col simbolo *Sa* gli Aselli del fiume Sarno.

(*) Lavoro eseguito presso il Centro di Biologia del C.N.R., Stazione Zoologica, Napoli.

(**) Nella seduta dell'11 febbraio 1961.

(1) G. MONTALENTI, « Acc. Naz. Lincei, Quaderno N. 47 », pp. 153-181 (1960); G. MONTALENTI e G. VITAGLIANO-TADINI, « Atti dell'Associazione Genetica Italiana », vol. V, pp. 207-216 (1960); G. VITAGLIANO-TADINI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », fasc. 5, pp. 562-566 (1958); G. VITAGLIANO-TADINI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », fasc. 3, pp. 335-341 (1958).

(2) Ringrazio il prof. H. G. Callan, Department of Natural History, University of St. Andrews, che ha raccolto per me gli esemplari, e la dott. Franca Petrone che gentilmente li ha portati a Napoli.

TABELLA I.

Tipo di incrocio	Parti	N° coppie	N° coppie sterili	N° uova	N° figli			N° medio di figli per parto		
					larve parto rite	vivi diff.	morti	larve parto- rite	vivi diff.	mor
♀ <i>Sc</i> ♂ <i>Sc</i> consanguineo .	18	15	3	—	211	210	11	14,7	14	0,7
♀ <i>Sa</i> ♂ <i>Sc</i>	18	24	9	—	324	298	26	13,5	12,4	1
♀ <i>Sc</i> ♂ <i>Sa</i>	18	25	2	—	523	488	35	20,9	19,5	1,8
♀ <i>Sc</i> ♂ (♀ <i>Sc</i> ♂ <i>Sa</i>) . . .	1°	6	5	138	13	12	1	2,5	2	0,1
♀ <i>Sc</i> ♂ (♀ <i>Sa</i> ♂ <i>Sc</i>) . . .	1°	9	7	213	4	3	1	0,4	0,3	0,1
♀ <i>Sa</i> ♂ (♀ <i>Sc</i> ♂ <i>Sa</i>) . . .	1°	6	4	176	52	43	9	8,6	7,1	1,5
♀ <i>Sa</i> ♂ (♀ <i>Sa</i> ♂ <i>Sc</i>) . . .	1°	4	2	138	53	47	6	13,2	11,7	1,5
♀ (♀ <i>Sc</i> ♂ <i>Sa</i>) ♂ <i>Sa</i> . . .	1°	4	3	57	15	12	3	3,7	3	0,7
♀ (♀ <i>Sc</i> ♂ <i>Sa</i>) ♂ <i>Sc</i> . . .	1°	14	7	341	188	145	43	13,4	10,3	3
♀ (♀ <i>Sa</i> ♂ <i>Sc</i>) ♂ <i>Sa</i> . . .	1°	6	4	127	11	11		1,8	1,8	0
♀ (♀ <i>Sa</i> ♂ <i>Sc</i>) ♂ <i>Sc</i> . . .	1°	6	1	105	52	45	7	8,6	7,5	1,1
♀ (♀ <i>Sc</i> ♂ <i>Sa</i>) ♂ (♀ <i>Sc</i> ♂ <i>Sa</i>)	1°	6	3	161	58	51	7	9,6	8,5	1,1
♀ (♀ <i>Sa</i> ♂ <i>Sc</i>) ♂ (♀ <i>Sa</i> ♂ <i>Sc</i>)	1°	11	5	214	72	55	17	6,5	5	1,5

Sa = Sarno.*Sc* = Scozia.

Sterile = ♀ le cui uova degenerano nei primi stadi embrionali.

Le due popolazioni di *Asellus*, quella del Sarno e quella scozzese, sono fenotipicamente molto simili, eccezion fatta per la maggiore mole corporea degli Aselli scozzesi quando hanno raggiunto lo stadio adulto. La lunghezza media misurata in millimetri dell'Asello del Sarno adulto è: ♀ 8 mm, ♂ 12 mm; dell'Asello scozzese adulto: ♀ 8,5 mm, ♂ 13 mm (vedi Tabella II).

Il periodo di riproduzione per gli Aselli del Sarno dura tutto l'anno con punte massime in primavera ed in autunno; punte che sono legate probabilmente alla temperatura, in quanto allevandoli in laboratorio a temperature diverse si può: *a*) bloccare completamente la riproduzione (con temperature che vanno da 0° a 11°); *b*) portare ad un rallentamento dello sviluppo embrionale e larvale (con temperature dai 12° ai 15°); *c*) creare l'*optimum* di temperatura per la riproduzione (con temperature dai 16° ai 19°). Oltre i 22° vivono male ed a 24° muoiono tutti. Va detto però che il numero di uova deposte nel marsupio è comunque condizionato alla mole corporea materna.

TABELLA II.

Lunghezza media dei ♂♂ e delle ♀♀ di Asellus aquaticus del Sarno; della Scozia; degli ibridi, durante il loro sviluppo.

	Sarno		Scozia		Sc × Sa		Sa × Sc	
	♀♀	♂♂	♀♀	♂♂	♀♀	♂♂	♀♀	♂♂
Dopo 25 giorni dalla nascita	1,7 mm (tutti indifferenziati)		1,7 mm (tutti indifferenziati)		4,5 mm	5,4 mm	1,5 (tutti indifferenziati)	
Dopo 50 giorni	3,3 mm	4,5 mm	3,3 mm	4,5 mm	5,5 mm	6,5 mm	2,9 mm	3,5 mm
Dopo 80 giorni	8,0 mm	12 mm	8,5 mm	13 mm	8,5 mm	13,1 mm	3 mm	4,5 mm

Secondo Unwin ⁽³⁾ parrebbe (contrariamente a quanto asserisce Vandel ⁽⁴⁾ per gli Aselli di Tolosa, i quali si accoppierebbero solo nel mese di gennaio e all'inizio di febbraio) che in natura l'*Asellus aquaticus* della Gran Bretagna possa accoppiarsi per undici mesi dell'anno (da gennaio a novembre) con punte massime in primavera. Il numero delle uova deposte nel marsupio oscilla fra 39 e 62 e le uova impiegano circa un mese per completare il loro sviluppo. Le condizioni sarebbero perciò praticamente uguali a quelle del Sarno, eccezion fatta per l'assenza di coppie nel mese di dicembre. Posso però dire che ho avuto coppie feconde in laboratorio, alla temperatura di 18°, anche nel mese di dicembre, e pertanto i casi di sterilità presenti negli incroci fra le due popolazioni non sono imputabili a fenomeni di stasi stagionale.

Ho eseguito gli incroci allo scopo di: 1° stabilire se due popolazioni, tanto simili fenotipicamente, appartengano alla stessa specie o se costituiscano specie criptiche; 2° analizzare il grado di fecondità della F_1 e dei reincroci; 3° indagare sulla eventuale esistenza di mutazioni cromosomiche, mediante analisi citologica; 4° controllare la comparsa di eterosi negli ibridi.

Alcuni risultati di questi incroci sono riassunti nelle Tabelle I e II.

La prima dimostra che alcune coppie dell'incrocio Scozia per Scozia sono sterili, ma trattandosi di consanguinei, il fenomeno non è sorprendente; che l'incrocio Sarno per Scozia è meno fertile del reciproco, Scozia per Sarno. Nei reincroci, così come negli incroci degli ibridi della F_1 sono state contate le uova deposte nel marsupio in quanto la mortalità colpisce gli ibridi della F_2 specialmente nella vita embrionale, nei primi stadi di sviluppo. Come è facile osservare, nessun incrocio è interamente fecondo; la maggior parte delle coppie non dà luogo a prole in quanto la mortalità embrionale è

(3) E. E. UNWIN, « Jour. Linn. Soc. Zool. », XXXIV, pp. 335-343 (1920).

(4) A. VANDEL, « Bull. Soc. Zool. de Fr. », LI, pp. 163-172 (1926).

altissima; il numero degli individui che riesce a raggiungere il differenziamento sessuale è estremamente basso.

Nella seconda tabella si osserva che gli ibridi ♀ *Sc* × ♂ *Sa* presentano un fenomeno di eterosi somatica in quanto raggiungono in solo 25 giorni il differenziamento sessuale ed una mole corporea che consente loro di riprodursi.

Dall'analisi di queste tabelle possiamo perciò concludere: 1° che l'incrocio ♀ *Sc* × ♂ *Sa* è fecondo (il numero medio di individui differenziati della F_1 è di 19,5 per coppia); 2° che l'incrocio reciproco ♀ *Sa* × ♂ *Sc* lo è molto meno (il numero medio di individui differenziati della F_1 è di 12,4 per coppia); 3° che i corredi genetici delle due specie hanno probabilmente subito notevoli differenziamenti, tali da non consentire il normale sviluppo della maggior parte degli embrioni; 4° che la penetrazione dello spermio nelle uova avviene in tutti i casi in quanto le uova degenerano intorno allo stadio di gastrula e la partenogenesi è esclusa dagli esperimenti di controllo con femmine isolate; 5° che l'eterosi della F_1 è soltanto somatica, in quanto questi individui incrociati fra di loro danno origine a molti embrioni letali, e quindi presentano in complesso un alto grado di sterilità. I discendenti dell'incrocio reciproco ♀ *Sa* × ♂ *Sc* sono invece molto tardivi nello sviluppo e rimangono sempre di mole corporea piccolissima.

L'analisi citologica, che ho appena iniziato, sembra dimostrare, alla meiosi, la presenza di numerosi univalenti. Poiché questi sono probabilmente indizio di eterozigosi strutturale, è probabile che le due razze, geograficamente isolate, siano sulla via di differenziarsi in specie.

Fisiologia vegetale. — *Aumento dell'attività glucosio-6-fosfato deidrogenasica in fettine di organi di riserva* (*). Nota di FILIPPA ALBERGHINA ed ERASMO MARRÉ, presentata (**) dal Socio S. TONZIG.

INTRODUZIONE.

È noto che fettine di organi di riserva (tuberi di Patata e *Helianthus tuberosus*, radici tuberizzate di Carota, Scorzonera, ecc.) mostrano, nel periodo successivo alla preparazione, una forte attivazione respiratoria. In due casi, quello della Patata e quello della Carota, è stato dimostrato che l'aumento respiratorio si accompagna ad un nettissimo aumento della capacità di dissimilare a CO_2 il C in posizione 1 rispetto a quello in posizione 6 del glucosio [1]; dato che insieme ad una serie di altre osservazioni sembra da interpretarsi nel senso che almeno larga parte dell'incremento respiratorio sia imputabile ad una rapida attivazione del ciclo dei pentosi fosfati.

D'altra parte altre ricerche mostrano che, nelle fettine di tuberi di Patata, le attività Gl. 6-P deidrogenasica e 6-P gluconico deidrogenasica aumentano rapidamente subito dopo la preparazione delle fettine [2].

Questi dati suggeriscono che la sintesi (o eventualmente l'attivazione preferenziale) di questi enzimi del ciclo dei pentosi fosfati possa condizionare, genericamente, il risveglio dell'attività respiratoria e, insieme, tutto il complesso ordine di fenomeni di attivazione fisiologica che caratterizza il periodo successivo alla preparazione di fettine di organi di riserva.

Per sottoporre questa ipotesi ad un primo esame sperimentale abbiamo esteso ad organi di riserva di altre specie, oltre a quelle fin'ora considerate, l'esame del comportamento della Gl. 6-P deidrogenasi e della capacità di dissimilare a CO_2 il C-1 e il C-6 del glucosio, durante la fase di attivazione respiratoria che segue la preparazione delle fettine.

MATERIALI E METODI.

Come materiale abbiamo usato tuberi di patata e radici tuberizzate di carota, rapa e cicoria, in stadio di riposo. Le fettine venivano preparate dai vari materiali prelevando con un foratappi cilindri di tessuto di 8 mm di diametro, che venivano tagliati a mano in fettine dello spessore di circa 0,5 mm.

(*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisiologia vegetale dell'Istituto di Scienze Botaniche dell'Università di Milano - Centro di Studio dell'ossido-riduzioni nei vegetali del C.N.R.

(**) Nella seduta del 14 gennaio 1961.

Il consumo di ossigeno veniva determinato secondo la tecnica convenzionale di Warburg. Ogni vaschetta conteneva 8 fettine dal peso complessivo di circa 600 mg in 2,5 ml di tampone ai fosfati 0,05 M pH 5,5.

L'attività Glucosio-6-P deidrogenasica è stata determinata, per tutti i materiali considerati, eccetto la carota, su omogenati contenenti il 10% di tessuto in tampone ai fosfati 0,05 M pH 7,3, come riduzione del cloruro di trifenil tetrazolio (TTC), seguendo la procedura di Marrè e Servettaz [3], in assenza di ossigeno ed in presenza di Gl. 6-P 6×10^{-3} M e TPN 10^{-4} M. Negli omogenati di fettine di carota l'attività Gl. 6-P deidrogenasica è stata dosata direttamente come riduzione del TPN, seguendo allo spettrofotometro Beckmann l'aumento di densità ottica a 340 m μ , in presenza di Gl. 6-P 6×10^{-3} M e TPN 10^{-4} M (in aerobiosi).

È da tenere presente che nel caso della determinazione col TTC viene saggiata l'attività di un sistema enzimatico comprendente sia la Gl. 6-P deidrogenasi che una TPN-diaforasi che trasporta gli elettroni sul TTC; nel caso della determinazione diretta del TPN viene saggiata solo l'attività della Gl. 6-P deidrogenasi.

I dati ottenuti con entrambe le procedure sono stati corretti per sottrazione dell'attività endogena e rappresentano la media di almeno tre determinazioni.

Nelle esperienze con glucosio marcato, il contributo relativo degli atomi di carbonio, rispettivamente in posizione 1 e 6 della molecola di glucosio, alla produzione di CO₂ è stato misurato, secondo Bloom and Stetten [4], determinando, dopo 2 ore di incubazione in vaschette del Warburg, l'attività della CO₂ raccolta nell'alcali del pozzetto centrale. È stato indicato come recupero % il rapporto percentuale tra l'attività recuperata come CO₂ e quella del glucosio, marcato rispettivamente in posizione 1 o 6, somministrato all'inizio dell'esperienza.

ESPERIENZE E RISULTATI.

Come si vede dalla Tabella I, un aumento notevole dell'attività della Gl. 6-P deidrogenasi è rilevabile durante il risveglio del metabolismo ossidativo non solo nella patata, ma anche nelle fettine di Carota, Rapa e Cicoria. In un altro materiale da noi preso in esame, il tubero di *Helianthus tuberosus*, un'attività Gl. 6-P deidrogenasica è dimostrata dalla capacità degli estratti di ridurre il TPN in presenza di Gl. 6-P e in anaerobiosi. Per altro, sostanze ossidanti presumibilmente di tipo chinonico, e una forte attività TPNH ossidasi, rendono precario ogni tentativo di misura quantitativa. Abbiamo cercato di aggirare, per il momento, questo ostacolo studiando *in vivo* la capacità di fettine appena preparate e rispettivamente « invecchiate » di dissimilare il C-1 e rispettivamente il C-6 di glucosio marcato aggiunto dall'esterno. Come risulta dalla Tabella II l'attivazione respiratoria in queste fettine è accompagnata da un netto aumento dell'apporto del C-1 del glucosio, rispetto a quello

del C-6, alla produzione di CO_2 . Il comportamento di questo materiale a questo riguardo, sembra quindi perfettamente corrispondente a quello precedentemente rilevato da Ap Rees e Beevers per le fettine di Patata e di Carota.

TABELLA I.

Attività respiratoria e attività Gl. 6-P deidrogenasica di fettine ed estratti di fettine di tessuti di riserva appena preparate o incubate in acqua.

Materiale	Fettine	Consumo O_2 $\mu\text{l O}_2/\text{gm peso fr.}$ per ora	Attività Gl. 6-P deidro- genasica (μ mole accettore ridotto/gm peso fr. per ora)
Patata	appena preparate	70	0,3
	di 24 ore	190	1,8
Carota	appena preparate	46	0,30
	di 24 ore	60	1,28
Rapa	appena preparate	52	0,30
	di 24 ore	130	1,8
Cicoria	appena preparate	110	0,35
	di 4 ore	160	0,65
	di 24 ore	180	2,35

Condizioni sperimentali come descritte nel testo.

È da notare inoltre, come nelle fettine attivate si abbia un recupero % sia del C-1 che del C-6 del glucosio molte volte superiore a quello che si ha nelle fettine appena preparate. Questo aumento, che può venire giustificato solo per una esigua frazione dall'aumentato consumo di ossigeno, deve essere attribuito ad un aumento, nelle fettine attivate, della capacità di assorbire glucosio. Ciò è dimostrato anche dalla minore attività riscontrata, alla fine dell'esperienza, nel mezzo in cui erano state incubate le fettine di 24 ore (circa 260.000 c. p. m.), rispetto all'attività riscontrata nel mezzo di incubazione delle fettine appena preparate (circa 80.000 c. p. m.).

In definitiva, e pure in questo stadio preliminare, le nostre ricerche sembrano indicare che la sintesi o l'attivazione degli enzimi del ciclo dei pentoso fosfati e l'entrata in funzione di questo stesso ciclo sono caratteri largamente generalizzabili nel risveglio respiratorio delle fettine di organi di riserva.

TABELLA II.

Attività respiratoria e dissimilazione a CO₂ dei C-1 e C-6 di glucosio marcato da parte di fettine di Topinambour rispettivamente appena preparate o incubate in acqua per 24 ore.

	Fettine di Topinambour	
	appena preparate	di 24 ore
Consumo di O ₂ in μ l O ₂ /gm peso fr. per ora	70	108
Recupero % C-1	0,78	18,7
Recupero % C-6	0,34	4,7
Rapporto C-6/C-1	0,43	0,25

Consumo di O₂ misurato al Warburg. Ogni vaschetta conteneva 12 fettine dal peso complessivo di 350 mg, tampone ai fosfati 0,05 M pH 5, ml 2; 1 μ Mole di glucosio, marcato rispettivamente in posizione 1 o 6 (attività circa 300.000 c.p.m.). Dopo 2 ore di incubazione si determinava secondo Bloom e Stetten [4] l'attività della CO₂ raccolta nell'alcali del pozzetto centrale.

Il significato fisiologico dell'attivazione del ciclo dei pentoso fosfati in questi materiali può porsi in rapporto con l'attiva sintesi proteica generalmente osservabile nel periodo successivo alla preparazione delle fettine: in quanto il ciclo dei pentoso fosfati sembra rappresentare la principale fonte per la sintesi del riboso nucleotidico da un lato e di alcuni aminoacidi ciclici, come fenilalanina e tirosina, dall'altro (Davies).

BIBLIOGRAFIA.

- [1] T. AP REES and H. BEEVERS, *The pentose phosphate pathway as a major component of the induced respiration of carrot and potato slices*, « Plant Phys. », 35, 839-847 (1960).
- [2] O. SERVETTAZ ed E. MARRÉ, *Ricerche sull'attivazione respiratoria concomitante alla sensibilizzazione ai fattori di crescita nelle fettine di tubero di patata*, « Rend. Ist. Lomb. Sc. e Let. », 88, 823-832, (1955).
- [3] E. MARRÉ e O. SERVETTAZ, *Attività glucosio-6-fosfato deidrogenasica e crescita in Pisum sativum*, « Rend. Ist. Lomb. Sc. e Let. », 87, 135-149 (1954).
- [4] B. BLOOM and D. STETTEN Jr., *Pathways of glucose catabolism*, « Jour. Am. Chem. Society », 75, 5446 (1953).

Fisiologia vegetale. — *Osservazioni sperimentali sull'ecologia e fisiologia dello sviluppo delle piante annuali dei deserti circummediterranei*^(*). Nota di FAUSTO LONA, presentata^(**) dal SOCIO S. TONZIG.

Le piante annuali dei deserti circummediterranei⁽¹⁾ crescono quasi esclusivamente durante i mesi invernali o — più precisamente — dal tardo autunno alla primavera (non oltre il mese di maggio) è ciò è anzitutto condizionato dal regime delle piogge. Se l'annata è favorevole, il loro ciclo incomincia con le piogge autunnali; dopo la germinazione, che è caratteristicamente rapida, le plantule possono attuare una rapida crescita ancora nello scorcio del periodo autunnale: di solido in ottobre–novembre. Verso la fine di dicembre ed in gennaio, esse possono subire un lieve rallentamento della loro crescita, rimanendo peraltro sempre visibilmente attive. In febbraio–marzo od aprile esse fioriscono e rapidamente fruttificano. In maggio–giugno, di solito, le zone desertiche e subdesertiche diventano brulle per il disseccamento di queste piante.

Questo il ciclo della maggior parte delle annuali, in media e con grande approssimazione. Variazioni cospicue si possono avere a seconda delle specie, dell'andamento stagionale, delle regioni e di altri fattori: il ciclo, per esempio, può essere di molto racciortato quando le piante nascono durante l'inverno, e in generale e ancora a titolo di esempio, secondo uno dei seguenti schemi:

	Ott.	Nov.	Dic.	Genn.	Febb.	Marz.	Apr.	Magg.
A	G. ————— A.V. ————— F. ————— Fr.							
B	G. ————— A.V. ————— F. ————— Fr.							
C	G. ————— A.V. ————— F. ————— Fr.							
G. = germinazione A.V. = accrescimento vegetativo F. = fioritura Fr. = fruttificazione.								

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Parma.

(**) Nella seduta dell'11 febbraio 1961.

(1) Le mie osservazioni sono state per ora limitate prevalentemente ai deserti Nord-Africani e Palestinesi.

Il materiale per gli esperimenti è stato fornito gentilmente dal dott. M. Monselise dell'Università di Rehovot (Israel). A lui e ad altri studiosi (come il prof. De Angelis di Revivim) si devono anche molte notizie sul ciclo di vita di queste piante nei loro ambienti naturali.

Molto spesso la medesima specie può svolgere il suo ciclo secondo lo schema A o B, oppure C, a seconda delle circostanze pluviometriche delle singole annate. Non è peraltro detto che siffatta adattabilità del ciclo al regime delle piogge costituisca una regola generale.

Alcune specie sono caratteristiche «effimere» e possono nascere, crescere e fiorire in un limite di tempo assai ristretto. Per esempio le piante dei generi *Tribulus* e *Boerhavia*, possono completare il loro ciclo in 8-15 giorni, così da offrire un esempio di estrema pedanzia, e da fruttificare con soma oltremodo limitato. Per maggior parte delle altre piante, il ciclo si svolge in un periodo che va da uno a quattro mesi circa. Nello schema non sono contemplati esempi di estrema brevità del ciclo, quale può essere quello di *Tribulus*, ecc.

Lo stesso adattamento al periodo delle piogge, e inoltre la possibilità di sveltire il loro ciclo in modo che stia nei limiti di un periodo umido, dispensano queste piante dal bisogno di eccezionali adattamenti morfologici e fisiologici di carattere xeromorfo. Spesso anzi esse ne sono completamente prive, così da rassomigliare alle comuni piante, per esempio, del nostro ambiente mediterraneo e, in certi casi, da apparire molto vicine e addirittura paragonabili a piante annuali-biennali di ambienti molto differenti come quello alpino, ecc.

Esistono, invero, alcune piante che sono comuni ai deserti ed a zone non proprio desertiche; d'altra parte alcune piante desertiche hanno strette affinità sistematiche non solo con specie mediterranee litorali e delle zone rocciose, ma anche con piante di posti aridi di qualsiasi regione e perfino con il contingente alpino orofilo o comunque relativamente xerofitico.

* * *

Il regime termoperiodico giornaliero in periodo invernale nei deserti e nelle zone subdesertiche, è caratterizzato da forti escursioni e, in particolare, da un considerevole abbassamento della temperatura durante la notte. Nei mesi di dicembre, gennaio, febbraio e marzo le minime notturne possono aggirarsi dai 2° ai 10° C. ma in molti casi (specialmente nel Sahara) le minime raggiungono qualche grado sotto lo zero. Il Geyr (in Diels 1917 †) misurò, in alcune località del Sahara centrale, una temperatura minima notturna di -6° ed anche -9° C ancora nella prima quindicina del mese di marzo, meravigliandosi che le piante - alcune in piena fioritura - non ne soffrissero affatto.

Ne deriva che le piante di questi deserti sono caratterizzate, oltre che da particolare resistenza al caldo (durante il giorno la temperatura è assai più alta specialmente nel tratto iniziale o finale del loro ciclo) anche alle basse temperature, quali quelle sopra citate. Ciò è tanto più sorprendente in quanto tali piante sopportano le temperature basse in stato di attività vegetativa e non in periodo di vero riposo, che esse non hanno.

Ci si può chiedere se l'adattamento genetico al freddo di tali piante si limiti alla loro resistenza somatica, o se esse siano caratterizzate anche da

un adattamento fisiologico da parte dei processi che sono propri del loro sviluppo ontogenetico. In altre parole, se qualche punto cruciale della loro ontogenesi sia legato alle basse temperature prima ricordate o se in corrispondenza ad esse si svolga in maniera ottimale. Un processo che potrebbe esser caratterizzato da esigenze del genere è anzitutto la germinazione; ma assai interessante e forse più diffusa in natura è l'esigenza di temperature relativamente basse per la preparazione alla fioritura. Si tratta, in quest'ultimo caso, di un processo che potrebbe corrispondere a quello noto col termine di *vernalizzazione*, o ad un processo simile che interviene in speciali condizioni termoperiodiche.

È infatti noto che piante dei nostri ambienti mediterranei, come la *Matthiola incana*, sono appunto caratterizzate da una tale esigenza, sebbene in modo quantitativamente limitato. Perché la fioritura di *Matthiola incana* possa attuarsi, basta infatti che la temperatura notturna sia inferiore per qualche settimana, ai 12–14°C: condizione che si verifica facilmente, durante l'inverno, anche in zone costiere delle regioni meridionali. Se tuttavia la pianta viene seminata d'estate, vale a dire quando le temperature notturne sono superiori ai 15–18°C, gli individui crescono formando molte foglie, senza però che al rigoglio vegetativo corrisponda uno sviluppo ontogenetico paragonabile al caso precedente: le piante non fioriscono, ed i grossi cespugli cresciuti durante l'estate devono aspettare il ritorno delle temperature relativamente basse dell'autunno e dell'inverno per poter fiorire. Il comportamento della pianta, di conseguenza, è quello tipico di una biennale. Tuttavia, siccome essa può fiorire al primo anno quando sia seminata anche solo alla fine dell'inverno o principio della primavera (approfittando di un breve, ma sufficiente periodo di temperatura bassa) tale tipo di pianta si può annoverare fra le cosiddette *annuali invernali*. (Fra *biennali* e *annuali-invernali* esiste solo – ovviamente – una differenza quantitativa facilmente immaginabile).

Un altro problema ecologico-fisiologico relativo a queste piante, è quello del loro fotoperiodismo. Trattandosi di piante che compiono gran parte del loro ciclo in una stagione a fotoperiodo molto breve (anche se a latitudini piuttosto basse) per poi giungere, spesso, a terminarlo durante la stagione a giornate più lunghe, c'è da chiedersi quali caratteristiche fotoperiodiche esse abbiano onde riuscire a svolgere in maniera armonica crescita e sviluppo nell'ambiente nel quale esse sono diffuse. Si noti che anche il fotoperiodismo incide specialmente sui processi di fioritura. L'epoca di fioritura rispetto al ciclo ontogenetico, d'altra parte, influisce fortemente sulle condizioni di fruttificazione e sulla sua potenzialità quantitativa, quindi sulla diffusione della specie. Per le attività vegetative queste piante appaiono bene adatte al fotoperiodo breve; ma per quanto si riferisce alla fioritura occorre sottoporre il materiale a qualche indagine sperimentale – come del resto per quanto concerne le loro esigenze termoperiodiche – pur potendosi desumere qualche indizio dai dati fenologici che sono propri della vegetazione crescente nei loro *habitat* naturali.

Ho preso in considerazione - per ora - un numero abbastanza piccolo di specie e, in questa Nota, intendo solamente riferire qualche osservazione preliminare sulle modalità colle quali il loro ciclo ontogenetico si evolve dalla fase vegetativa a quella riproduttiva.

Le specie che sono state oggetto di esperimento sono:

Ifloga spicata (Vahl.) C. H. Schultz., *Carrichtera annua* Asch.

Anastatica hierochuntica L., *Asteriscus pygmaeus* Coss. et Kral.

Gymnarrhena micrantha Desf., *Schismus arabicus* Nees.

Dal citato lavoro del Diels e da altre fonti («Analytical Key» della flora palestinese) si può desumere che la fioritura si può verificare già durante l'inverno in *Asteriscus* (gennaio-aprile), *Anastatica* (febbraio-aprile); mentre l'*Ifloga spicata* sembra fiorire solo o prevalentemente in primavera: il 29 marzo a Ideles ed il 16 aprile ad Oued Raris (Sahara centrale) fu trovata fiorita dal Geyr, cfr. Diels, op. cit., mentre in Israele («Analytical Key of Is. Pl.») essa fiorisce in aprile-maggio. Anche *Carrichtera* e *Gymnarrhena* fioriscono in periodo alquanto avanzato (marzo-maggio) e *Schismus* da marzo ad aprile.

Sebbene il valore di questi dati sia soltanto indicativo ed essi si riferiscano oltretutto ad una fase già avanzata della fioritura, essi sembrano nondimeno suggerire che l'*Anastatica hierochuntica* e l'*Asteriscus pygmaeus* non abbiano esigenze fotoperiodiche ristrette, almeno nelle condizioni termoperiodiche invernali. Tali piante, d'altra parte, non manifestano apparentemente particolari esigenze di temperatura per il passaggio alla fioritura, potendo essa avvenire tanto in gennaio-febbraio che in aprile. Per l'*Ifloga spicata*, invece, i dati sopra riportati sembrerebbero suggerire che il passaggio alla fioritura esige il sopraggiungere di temperature più alte di quelle invernali senza che sia necessario un fotoperiodo lungo, oppure un fotoperiodo piuttosto lungo senza alcuna necessità di alta temperatura o - al contrario - con l'esigenza di una bassa temperatura. Né può essere esclusa a priori la possibile necessità di ambedue le condizioni. Per *Carrichtera* e *Gymnarrhena* è possibile un ragionamento analogo prevedendo, tuttavia, esigenze meno spiccate.

Gli esperimenti finora eseguiti si possono ritenere assai stimolanti per una futura ricerca su vasta scala. Basterà ricordare, anzitutto, che alcune prove dimostrano una resistenza al freddo di queste specie superiore ad ogni aspettativa. Piante come *Ifloga*, *Schismus* ed altre superano agevolmente temperature notturne sui -10°C verificantisi durante l'inverno nell'Orto Botanico di Parma. Non sono state eseguite finora prove per vedere se la resistenza a tali temperature si ha anche per lunghe durate, ma si è - d'altro canto - constatato che queste piante sono, in un certo senso, e almeno limitatamente ai loro organi vegetanti, più resistenti al freddo perfino di alcune piante alpine. Ciò che non toglie che le piante alpine siano in senso assoluto più resistenti al freddo ed alla lunga durata di periodi freddi, per merito delle gemme dormienti che esse possiedono e che, al contrario, mancano a queste piante desertiche.

Per quanto riguarda il processo di fioritura, le mie ricerche mettono fin d'ora in evidenza come in molti casi, e specialmente in quelli teoricamente già previsti nelle pagine precedenti, il fotoperiodo ed il termoperiodo abbiano una apprezzabile e, in certi casi, notevole influenza.

Ad esempio, è emersa chiaramente la sensibilità alla temperatura notturna (agli effetti dell'induzione antogenica) di *Carrichtera annua*.



Fig. 1. - Piante di *Carrichtera annua* coltivate a fotoperiodo di 12 ore (luce naturale di maggio-giugno) ed a temperature notturne differenti: a sinistra p. coltivate a 1° notturna di 4°C ; a destra p. coltivate a 1° notturna di $22-24^{\circ}\text{C}$.

In una serie di culture tenute a fotoperiodo di 12 ore (luce naturale durante i mesi di maggio-giugno) e a diverse temperature notturne (lotto a: 1° 4°C ; lotto b: 10° ; lotto c: $22-24^{\circ}$) i risultati sono stati i seguenti:

lotto a: fioritura entro 25 giorni all'età fisiologica di 3-6 foglie;

lotto b: fioritura entro 25 giorni all'età fisiologica di 6-9 foglie;

lotto c: fioritura entro 60 giorni all'età fisiologica di 9-13 foglie.

Per *Gymnarrhena micrantha* si sono ottenuti dati analoghi. *Anastatica hierochuntica* ed *Asteriscus pygmaeus* non dimostrarono, in queste prove iniziate già a qualche giorno dalla germinazione, sensibili differenze di comportamento rispetto alle diverse temperature notturne. Si sono avute soltanto lievi differenze che dovranno esser meglio precisate da prove successive. *Asteriscus* ha manifestato anche un leggero vantaggio - in contrasto con il comportamento di *Carrichtera* e *Gymnarrhena* - in condizioni di temperatura alta; trattavasi tuttavia non tanto della formazione delle infiorescenze, quanto del processo di antesi, quindi di una fase finale del processo di fioritura.

In queste prime esperienze non si è potuto esaminare il comportamento di *Ifloga spicata* e di *Schismus arabicus*; esso è emerso invece in successivi tentativi sperimentali d'orientamento. Lo *Schismus* non ha manifestato particolari reazioni alle diverse temperature, mentre l'*Ifloga* ha mostrato un comportamento assai interessante che mi riprometto di studiare, fra breve nei minuti particolari. Secondo tali dati orientativi, l'*Ifloga* avrebbe bisogno

- per fiorire - di temperature basse e di fotoperiodo piuttosto lungo, meglio se lunghissimo; ciò che concorda con le previsioni fatte poc'anzi, o meglio, con una di esse.

Come si vede i risultati dei primi esperimenti su questo interessante materiale, mostrano comportamenti tipici per ogni specie rispetto al foto- e al termoperiodo. L'interpretazione dei risultati, in connessione con le modalità di vita di queste piante nei loro *habitat* originali, sarà tentata in uno stadio più avanzato delle ricerche.

Una delle logiche conseguenze che derivano dal complesso delle osservazioni qui riferite, consisteva nel considerare la possibilità di cultura di tali piante in alta montagna durante l'estate. Infatti, l'unico fattore incongruente al riguardo poteva essere il fotoperiodo che, d'estate, è da noi molto lungo rispetto a quello invernale del Nord-Africa. Ma si è già visto che l'*Ifloga* - per esempio - non è affatto una brevidiurna, ma una tipica longidiurna. Per le altre specie s'era agevolmente visto - e d'altra parte era noto - che si possono coltivare in periodo estivo nelle nostre località di pianura. L'esperimento dunque doveva riuscire. Ed infatti, tutte queste piante sono state coltivate in alta montagna (nel Parco Nazionale del Gran Paradiso) a 1700 ed anche a 2400 e più metri di altitudine. Le piante riuscivano a crescere, con dimensioni ridotte, ed a fiorire e spesso anche a fruttificare. Ma ciò che è assai interessante è il fatto che in certi casi, come si è verificato per *Ifloga*, si ottenne una fioritura anticipata in montagna rispetto alle culture di pianura eseguite nei mesi di giugno-luglio.

In conclusione questi primi esperimenti dimostrano come alcune specie desertiche annuali siano estremamente adattabili alle più diverse condizioni termoperiodiche ed in parte anche fotoperiodiche, mentre altre specie - pure annuali e caratteristicamente desertiche - mostrano uno spettro di esigenze climatiche periodiche più stretto e particolare.

In Note successive cercheremo di chiarire come questi diversi tipi ecologici, attuando anche diversi dispositivi organografici e speciali habitus biologici, possano raggiungere condizioni idonee alla loro vita individuale ed alla massima diffusione possibile della specie in circostanze ecologiche variabilmente rigorose specialmente per quanto riguarda il regime idrologico. In seguito potremo entrare anche nel campo di studio della genesi di questo contingente floristico, cercando di individuare le relazioni che si manifestarono in tempi più o meno remoti con altri contingenti floristici differenziatisi in tutt'altro modo ma, in gran parte, da medesimi capostipiti.

BIBLIOGRAFIA.

- DIELS L., *Beiträge zur Flora der Zentral-Sahara und ihrer Pflanzengeographie*, «Englers Bot. Jahrb.», 54, Beibl. 120, S. 51, 1917.

Fisiologia (Chimica fisiologica). — *Impiego del blu di bromotimolo per la colorazione delle proteine separate mediante elettroforesi su carta* (*). Nota di CARLO DOLCINI e BIANCAMARIA DOLCINI, presentata (**) dal Socio G. AMANTEA.

Nel 1937 König ⁽¹⁾ proponeva una nuova tecnica che successivamente impiegava insieme a Klobusitzky nel 1939 ⁽²⁾ per isolare il pigmento giallo di un veleno ofidico e per frazionare miscele di coloranti.

A tale tecnica, nota oggi come *elettroforesi su carta*, ed in particolare agli elementi di essa più curati e perfezionati, quelli cioè relativi alla colorazione delle frazioni proteiche separate sulla carta (Körver (1950) *Azo-carminio B* ⁽³⁾, Grassman, Hannig e Knedel (1951) *Amido nero 10 B* ⁽⁴⁾) non sono certamente mancati i consensi dei ricercatori. Consensi che aumentarono ulteriormente quando lo stesso Körver ⁽⁵⁾, e così Turba e Enenkel ⁽⁶⁾, Plückthun e Götting ⁽⁷⁾ e numerosi altri, tali metodi applicarono non solo per la rivelazione, ma anche e soprattutto per la determinazione quantitativa — mediante fotometria degli eluati — delle frazioni separate a partire dai miscugli proteici di liquidi biologici e di estratti d'organo.

Solo più tardi, e non con pari tempestività, si cominciarono a formulare circa quest'ultimo impiego della tecnica, obiezioni e dubbi che, se pure hanno contribuito a diffondere uno stato di relativo disagio, stimolando allo studio dei punti più controversi della questione, non sono tuttavia stati sufficientemente chiari e recisi; non hanno infatti limitato la diffusione tuttora notevolissima dell'impiego di coloranti quali amido nero, blu di bromofenolo ed altri, impieghi arbitrari — come vedremo — a fini quantitativi. Non sono stati altresì in grado di impedire proposte di nuove applicazioni e modifiche, delle quali un buon esempio è quella relativa all'uso dell'amido nero per la determinazione della protidemia ⁽⁸⁾, quando a tale scopo già da tempo esistono metodi semplici, efficienti ed indubbiamente corretti.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Perugia.

(**) Nella seduta dell'11 febbraio 1961.

(1) P. KÖNIG, « Actas III Congr. Sud. Americ. Chimica », 2, 334 (1937).

(2) D. VON KLOBUSITZKY e P. KÖNIG, « Arch. Exp. Pathol. Pharmacol. », 192, 271 (1939).

(3) G. KÖRVER, « Klin. Wschr. », 28, 693 (1950).

(4) W. GRASSMANN, K. HANNIG e M. KNEDEL, « Dtsch. Med. Wschr. », 76, 333 (1951).

(5) G. KÖRVER « Klin. Wschr. », 31, 1036 (1953).

(6) F. TURBA e H. ENENKEL, « Naturwiss. », 37, 93 (1950).

(7) H. PLÜCKTHUN e H. GÖTTING, « Klin. Wschr. », 29, 415 (1951).

(8) A. BASSO e G. BATAACCHI, « Biochimica applicata », VI [6], 65 (1959).

Le controversie relative ai metodi di determinazione quantitativa delle proteine separate all'elettroforesi su carta - ed alle quali ci siamo riferiti nella formulazione delle considerazioni sopra esposte - traggono origine principalmente dal fatto che si tratta di valutare secondo la tecnica fotometrica sostanze sprovviste di colore proprio, e che devono quindi avere subito opportuni trattamenti di colorazione. Ma, perché un tale procedimento possa essere pienamente giustificato, è necessario anzitutto che la quantità di colore - la quale durante il trattamento si fissa al materiale proteico - sia proporzionale alla quantità di quest'ultimo, ed inoltre che tale rapporto di proporzionalità sia costante e indipendente da fattori non controllabili.

Ora, i risultati di nostre ricerche eseguite mediante l'impiego di alcuni dei coloranti classici per tale uso, quali l'amido nero e il blu di bromofenolo ⁽⁹⁾ hanno chiaramente dimostrato invece che tale rapporto di proporzionalità tra quantità del colorante $Q (col.)$ e quantità del materiale proteico $Q (pr.)$, esprimibile con il concetto di *colorabilità* $C = Q (col.) / Q (pr.)$, non è assolutamente costante.

Abbiamo potuto accertare che le deviazioni da tale condizione essenziale, sono in dipendenza della *concentrazione superficiale* che il materiale proteico assume sulla carta da filtro.

Che una tale situazione si verifichi anche per altri coloranti abbiamo avuto modo di desumerlo dall'esame dei risultati di alcuni recenti lavori, anche se ciò non è stato messo in chiaro rilievo degli Autori stessi. È ovvia pertanto la necessità di studiare sistematicamente l'andamento della funzione $C = f (Conc. sup.)$ per tutti i coloranti fino ad ora usati, cosa che noi al momento in parte già abbiamo fatto con risultati in verità non troppo soddisfacenti, nonché l'altra di saggiare nuovi materiali coloranti alla ricerca di quello che soddisfi la condizione essenziale sopra specificata.

A tale scopo abbiamo sperimentato con blu di bromotimolo (dibromotimol-sulfon-ftaleina $C_{27}H_{28}Br_2O_5S$, pr. E. Merck, Darmstadt). Le prove iniziali, condotte trattando proteine - deposte su carta da filtro e denaturate al calore - con una soluzione della sostanza in alcool metilico, davano esito positivo; le proteine fissavano il colorante, l'eccesso del quale era poi facilmente eliminabile, sia dalle macchie che dal fondo, mediante semplici e poco dispendiosi lavaggi in acqua corrente.

Riportiamo brevemente i dettagli di tecnica del procedimento studiato precisando fin d'ora:

a) che per la messa a punto del metodo abbiamo fatto costantemente uso di ovoalbumina, cristallizzata secondo il metodo di Kekwich e Cannan ⁽¹⁰⁾;

b) che per la denaturazione del materiale deposto sulle strisce di carta da filtro abbiamo proceduto all'immersione delle stesse, previo passaggio in corrente di aria calda, in una soluzione acquosa, satura di $HgCl_2$; tale trat-

(9) C. DOLCINI e B. DOLCINI, « Rivista di Biologia » (in corso di stampa).

(10) KEKWICH e CANNAN, « Biochem. J. », 30, 227 (1936).

tamento, della durata di 1 h, completa la denaturazione e fa sì che i rapporti del materiale proteico con la carta risultino più stabili, il che facilita le successive operazioni di lavaggio.

TECNICA D'IMPIEGO DEL BLU DI BROMOTIMOLO.

1° *Colorazione*: si ottiene mediante immersione delle strisce, per 20', in un bagno costituito da blu di bromotimolo al 0,2 % in alcool metilico.

2° *Decolorazione del fondo ed asportazione dell'eccesso della sostanza dalle macchie*: si ottiene per lavaggio delle strisce, in acqua corrente, prolungato per 30': le macchie, gialle, non perdono allora più colore ed il fondo appare perfettamente bianco.

3° *Eluzione*: si ottiene facilmente e completamente in un bagno della durata di 3 h, in metanolo-NaOH 4 % in parti uguali (V : V).

4° Qualora si vogliano esaminare le strisce per *densitometria diretta*, conviene far virare il colorante legato alle proteine dal giallo al blu, tonalità che più si presta alla metodica, chè le fotocellule incorporate nella maggior parte delle apparecchiature oggi in uso – quasi sempre sprovviste di monocromatore – sono più sensibili al blu. Il viraggio si ottiene nebulizzando le strisce con una soluzione contenente NaOH ed NaCl, rispettivamente allo 0,01 % ed al 10 %.

5° *Le letture fotometriche degli eluati* si effettuano ad una lunghezza d'onda compresa tra 600–650 m μ ; alla lunghezza d'onda di massima estinzione, 620 m μ , la legge di Lambert e Beer è valida fino alla concentrazione di 10 γ /ml.

È tuttora in corso lo studio del comportamento della *colorabilità* in funzione della *concentrazione superficiale*. Esso viene condotto su frazioni isolate di proteine di plasma umano e di estratti d'organo, deposte su carta da elettroforesi, denaturate, e colorate con blu di bromotimolo secondo le modalità riferite. Il risultato della indipendenza di *C* dalla *Conc. sup.* che il materiale proteico assume sulla carta, ci permetterà eventualmente di prendere in considerazione l'impiego a fini quantitativi della tecnica descritta, della quale al momento possiamo soltanto comprovare l'idoneità e l'efficienza per lo sviluppo dei foregrammi.

Patologia. — *Sulla sensibilità dei componenti complementari alle radiazioni ionizzanti*^(*). Nota di GIUSEPPE PONTIERI e SAVERIO IMPERATO, presentata ^(**) dal Socio L. CALIFANO.

In vecchie ricerche sulla sensibilità del complemento (C') agli agenti fisici viene negato il danneggiamento di questo da parte delle radiazioni ionizzanti, mentre la sensibilità di esso alla luce ultravioletta è ammessa da molti (Sachs, 1929).

Recentemente Handoll e coll. (1946), basandosi sul fatto che C' viene rapidamente inattivato dalle mostarde azotate (Bourns e coll., 1946; Watkins, 1952) hanno riesaminato la questione della sensibilità di C' ai raggi X e sono riusciti a dimostrare che per la dose di 100 kilorads si ha inibizione totale dell'attività emolitica del siero di cavia se questo è diluito 100 volte e che per ottenere lo stesso effetto su siero diluito 1/20 occorre una dose di 200 kilorads.

Il problema della radiosensibilità di C' propone, alla luce delle più recenti acquisizioni sulla composizione del complemento, e sulla natura chimica dei componenti di questo, vari quesiti, ad alcuni dei quali si è tentato di dare risposta nel corso della presente ricerca.

Si è, anzitutto, studiato l'influenza della temperatura sull'inibizione da raggi X. È noto, difatti, che il complemento è sensibile anche a temperature relativamente basse, tanto che l'emolisi immunitaria si svolge meglio a 30°C che non a 37°C (Mayer e coll., 1946).

Recenti lavori su tale argomento (Cavallo, 1958), hanno messo in evidenza che l'inattivazione da calore di C₁, che è il componente complementare più termolabile, risulta tanto maggiore quanto più diluito è il complemento.

Anche la denaturazione proteica provocata dai raggi X è strettamente dipendente dalla temperatura (Rajewski, 1930); così una soluzione acquosa di albumina al 0,07 % diventa torbida dopo due ore di irradiazione (72.000 r) a 10°C, ma rimane limpida se mantenuta a 3°C.

Sulla base di tali dati c'è da chiedersi quindi se, a parità di dose, la radiolesione del complemento sia di intensità diversa a seconda della temperatura in cui la irradiazione ha luogo.

Un secondo punto è quello dell'effetto della diluizione sulla inattivazione di C' da raggi röntgen, soprattutto per l'analogia che tale fenomeno presenta con la inattivazione termica di C'.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Patologia generale della Università di Napoli e nell'Istituto di Microbiologia della Università di Sassari.

(**) Nella seduta dell'11 febbraio 1961.

A tale quesito se ne collega un terzo e cioè quello della possibilità di una diversa radiosensibilità dei componenti complementari. Recentemente è stato dimostrato (Pontieri e Ciccimarra, 1961) che con i raggi ultravioletti si ottiene inibizione totale del 1° componente di C' , tanto che il siero di cavia, inattivato in tale maniera, risponde ai requisiti che si richiedono ad un reagente per la titolazione di C'_1 . Il terzo punto esaminato nella presente ricerca è, pertanto, quello dello studio del danno da irradiazione X a livello dei quattro componenti del complemento.

MATERIALI E METODI.

Le prove sono state condotte impiegando siero di cavia come sorgente di C' .

Per la preparazione degli eritrocidi sensibilizzati (EA), del tampone di veronal e dei reagenti (R_1 , R_2 , R_3 e R_4) si rimanda al lavoro di Plescia e coll. (1958).

Per la titolazione dei componenti complementari si è seguito il metodo riportato da Cavallo e Cavallo (1958). Al fine di raggiungere, nella titolazione dei componenti complementari del siero irradiato alla diluizione di 1 : 80, termini di diluizione inferiori, sono state adoperate nelle prove volumi doppi o quadrupli in modo da avere quantità assolute di siero eguali a quelle presenti nel siero irradiato alla diluizione di 1 : 10.

Per lo studio della intensità e della velocità della reazione emolitica si è proceduto nel modo seguente: da serie di tubi contenenti C' opportunamente diluito ed EA ($0,2 \times 10^9$ EA + 0,2 ml di siero di cavia a varie diluizioni) tenute in bagno a 37° C per 90' con agitazione continua, si prelevano a tempi determinati tubi ai quali viene immediatamente aggiunto puffer di veronal freddo (da bagno di ghiaccio), in quantità di 2,6 ml. Dopo centrifugazione a 2200 giri per 5' si prelevano i sopranatanti limpidi e su di essi si determina la quantità di emoglobina liberata, misurandone l'assorbimento a 5410 \AA a mezzo di uno spettrofotometro Beckman, modello D.U. Con i dati ottenuti ai diversi tempi si sono costruite le curve della cinetica della reazione emolitica, ottenuta con sieri sottoposti a irradiazione X di intensità differente.

L'irradiazione X eseguita in ambiente d'aria è stata effettuata per mezzo di un apparecchio Siemens Dermopan 50 kv; 25 mA con filtro di alluminio di 0,3 mm. 2 ml di siero di cavia diluito in puffer di veronal 1 : 10 o 1 : 80 erano posti in capsula di Petri del diametro di 3,4 cm, lo spessore del liquido essendo di circa 3 mm. La dose minuto al fondo della capsula ed alla distanza di 5 cm dal fuoco è stata di 13.000 r.

È stato saggiato l'effetto della irradiazione X con dosi di 50.000, 100.000, 200.000 e 250.000 r mantenendo il siero o a temperatura ambiente o in bagno di ghiaccio al fine di determinare possibili differenze dovute all'effetto termico.

RISULTATI.

La fig. 1 illustra gli effetti della irradiazione X a differenti dosi sull'attività emolitica del siero di cavia, diluito 1 : 10.

Calcolando l'inibizione del 50 % di lisi si hanno i valori indicati nella Tabella I.

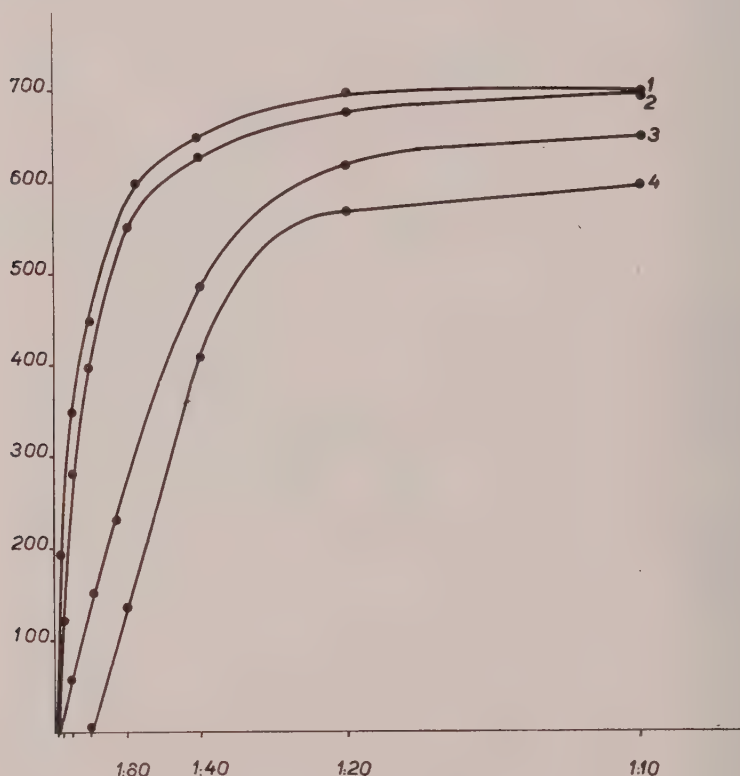


Fig. 1. - Attività complementare di siero di cavia, diluito 1 : 10 (1) e irradiato con 100.000 r (2), 200.000 r (3) e 250.000 r (4).

Sulle ascisse: termini della diluizione del siero in progressione geometrica con ragione 2.

Sulle ordinate: valori dell'assorbimento a 5.410 Å dell'Hb liberata dalla lisi degli eritrociti.

Prove condotte per dimostrare una eventuale interferenza della temperatura sul danno prodotto dalla irradiazione hanno dimostrato che la riduzione dell'attività complementare è la stessa sia se durante l'irradiazione il siero di cavia è tenuto in bagno di ghiaccio sia se esso è mantenuto a temperatura ambiente.

La fig. 2 illustra le variazioni della cinetica della reazione emolitica che si hanno adoperando sieri irradiati con le dosi suddette.

TABELLA I.

Dose di irradiazione in r	Diminuzione percentuale della attività di C' (50 % di lisi)
50.000	0
100.000	30
200.000	70
250.000	80

Da tali prove risulta che anche alla dose di 50.000 r , che apparentemente non determina diminuzione significativa dell'attività di C' , la lisi degli eritrociti sensibilizzati ha luogo più lentamente. Osservando la stessa grafica si nota che la velocità della reazione emolitica decresce con l'aumentare della dose di irradiazione. Poiché sul siero diluito 1 : 10 irradiato con 250.000 r

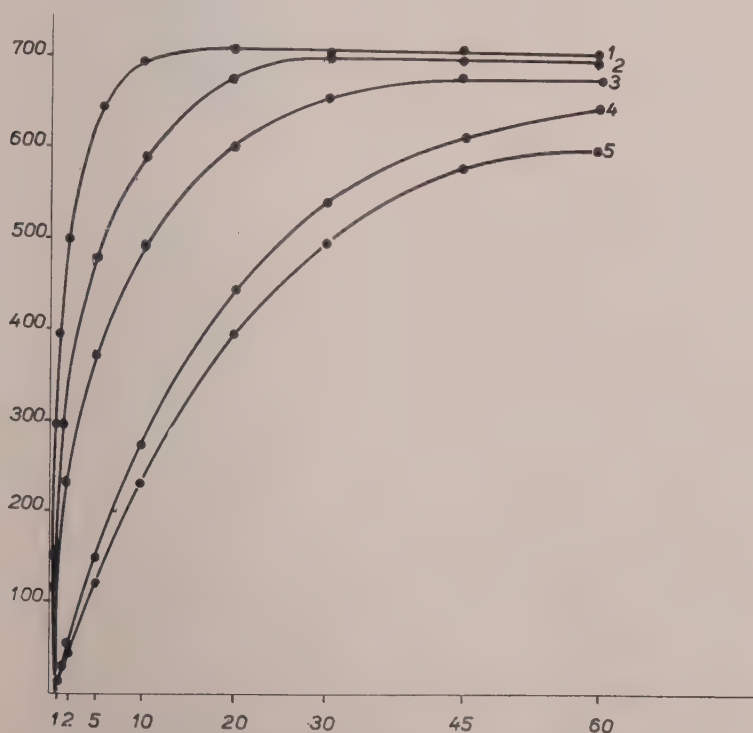


Fig. 2. - Cinetica della reazione emolitica nel siero di cavia (diluito 1 : 10) (1) e irradiato con 50.000 r (2), 100.000 r (3), 200.000 r (4) e 250.000 r (5).

Sulle ascisse: tempo in minuti.

Sulle ordinate: valori dell'assorbimento a 5.410 Å dell'Hb liberata dalla lisi degli eritrociti.

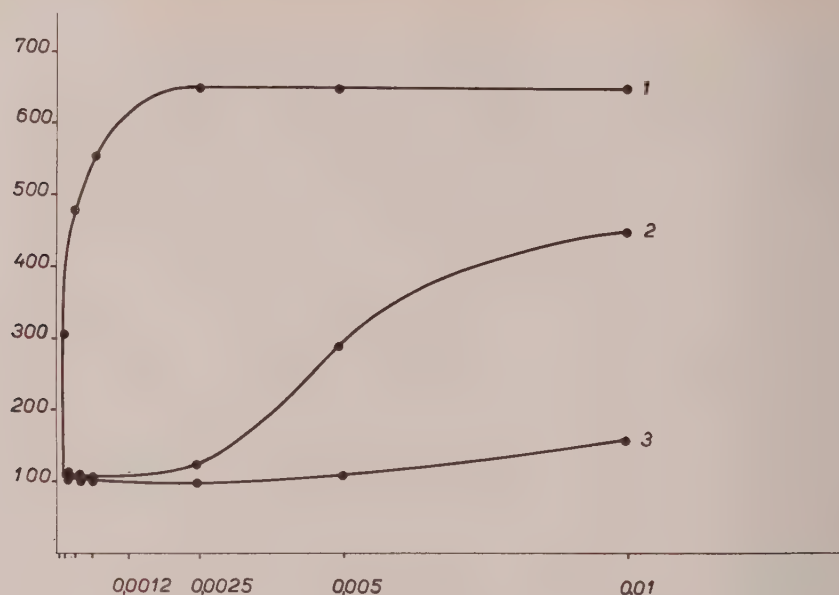


Fig. 3. - Titolazione di C_1 nel siero di cavia prima (1) e dopo irradiazione con 250.000 r alla diluizione in puffer di veronal di 1:10 (2) e di 1:80 (3).

Sulle ascisse sono riportati i volumi del siero in esame e sulle ordinate i valori di assorbimento a 5.410 Å.

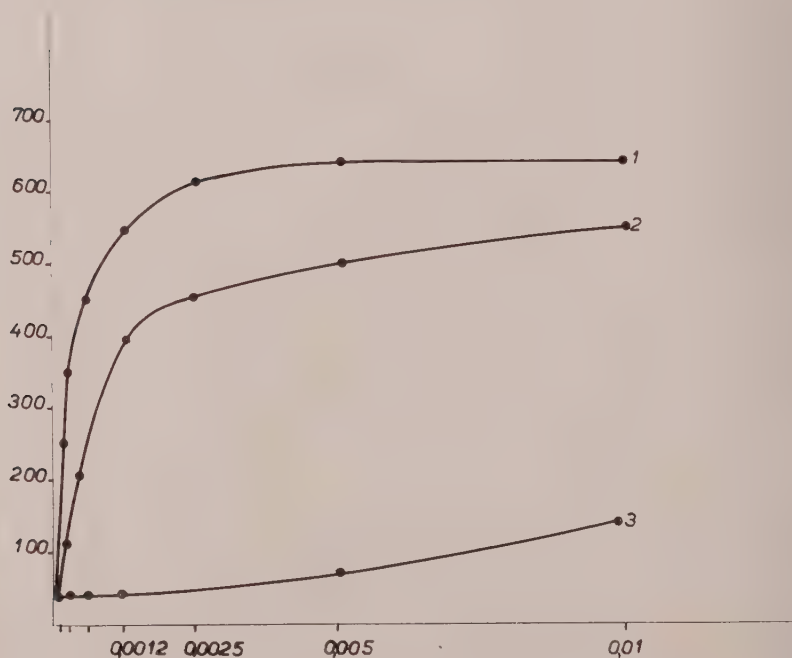


Fig. 4. - Titolazione di C_2 nel siero di cavia prima (1) e dopo irradiazione con 250.000 r alla diluizione in puffer di veronal di 1:10 (2) e di 1:80 (3).

Sulle ascisse sono riportati i volumi del siero in esame e sulle ordinate i valori di assorbimento a 5.410 Å.

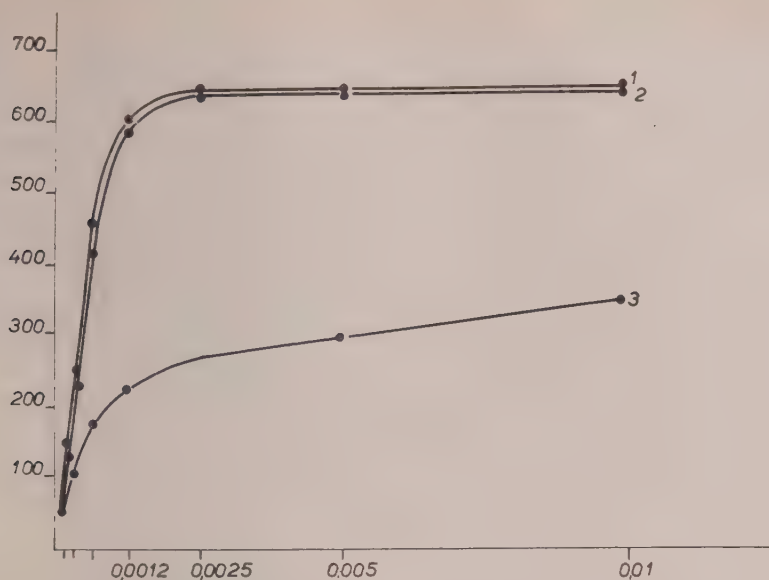


Fig. 5. — Titolazione di C_3 nel siero di cavia prima (1) e dopo irradiazione con 250.000 r alla diluizione in puffer di veronal di 1 : 10 (2) e di 1 : 80 (3).

Sulle ascisse sono riportati i volumi del siero in esame e sulle ordinate i valori di assorbimento a 5,410 Å.

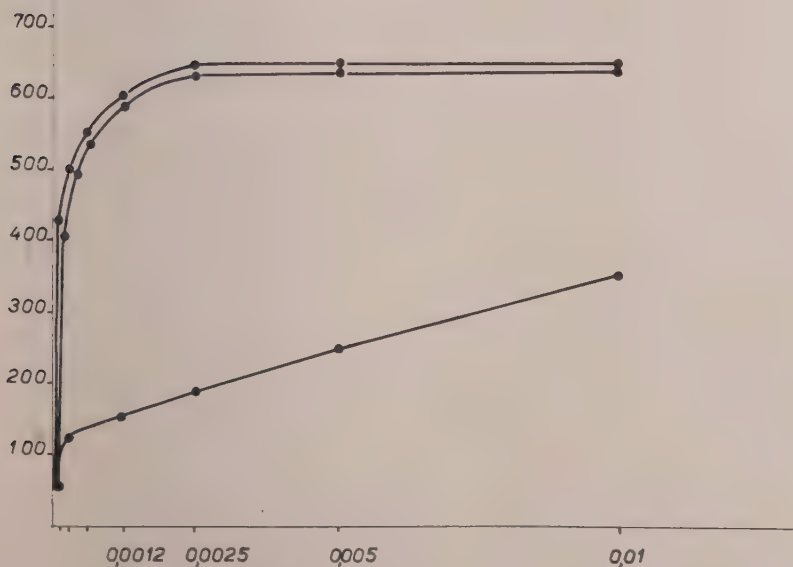


Fig. 6. — Titolazione di C_4 nel siero di cavia prima (1) e dopo irradiazione con 250.000 r alla diluizione in puffer di veronal di 1 : 10 (2) e di 1 : 80 (3).

Sulle ascisse sono riportati i volumi dei sieri in esame e sulla ordinate i valori di assorbimento a 5,410 Å.

si determina notevole diminuzione dell'attività litica, prove sono state condotte per stabilire l'entità del danno di C' quando l'irradiazione avviene su siero a diluizione maggiore (1 : 80). In tal caso la irradiazione determina completa inibizione della attività di C' .

Dall'esame dell'attività dei quattro componenti complementari eseguita sul siero irradiato con 250.000 r , sia alla diluizione 1 : 10 che a quella 1 : 80 risulta che il componente maggiormente radiosensibile è C_1 seguito da C_2 . L'attività di C_3 e di C_4 , che rimane imm modificata quando l'irradiazione ha luogo su siero diluito 1 : 10, è fortemente compromessa nel siero irradiato alla diluizione di 1 : 80 e in special modo quella del quarto componente.

L'attività di C_1 e di C_2 non è dimostrabile nel siero di cavia irradiato con 250.000 r alla diluizione di 1 : 80 (fig. 3 e fig. 4).

Le figure 3, 4, 5, e 6 riassumono i dati ottenuti nella titolazione dei componenti complementari nel siero di controllo ed in quelli irradiati ad entrambe le diluizioni con 250.000 r .

DISCUSSIONE.

L'esame della cinetica della reazione emolitica ha consentito di mettere in luce in maniera molto evidente la radiolesione di C' anche con dosi di irradiazione che provocano un danno difficilmente apprezzabile con la semplice titolazione dell'attività litica. In base a questa si osserva, difatti, solo il risultato terminale senza tener conto del tempo necessario per ottenerlo.

Il rallentamento nello svolgimento dell'emolisi nel caso presente trova spiegazione nella particolare sensibilità ai raggi röntgen che ha C_1 . Questo è il primo dei componenti di C' a fissarsi alle emazie sensibilizzate e di conseguenza la parziale inattivazione di esso determina, un ritardo in tutto lo svolgimento della reazione. Non è inopportuno a tal proposito ricordare i recentissimi esperimenti di Becker (1960) sul meccanismo di azione di C_1 nella reazione emolitica. C_1 è indispensabile perché la reazione inizi ma non perché giunga a termine; difatti, se eritrociti allo stato di $EAC'_{1,4,2}$ vengono completamente privati di tutto il C_1 già fissato, la lisi ha egualmente luogo quando al sistema venga aggiunto C_3 . Basta pertanto ridurre l'attività di C_1 perché tutta la reazione emolitica proceda più lentamente.

L'indagine sull'attività esplicata dai raggi X sui singoli componenti, oltre a dimostrare che C_1 , è il più sensibile, ha anche portato alla interessante acquisizione che fra i quattro componenti esiste una vera scala di labilità; meno sensibili del primo componente sono, nell'ordine, il secondo, il quarto, il terzo.

Dai risultati esposti emerge, inoltre, che il danno provocato dalla irradiazione röntgen sui componenti di C' è indipendente dalla temperatura. Non si sono notate, difatti apprezzabili differenze nella diminuzione di attività dei singoli componenti quando l'irradiazione è stata eseguita a temperatura ambiente anziché a 0°C e ciò benché risulti che i componenti maggiormente sensibili alla radiolesione sono i più termolabili e cioè C_1 e C_2 .

Che alla base della inattivazione da radiazioni ionizzanti di C' stiano essenzialmente fenomeni di denaturazione proteica viene dimostrato, anche se indirettamente, da dati sperimentali precedenti.

I primi radiobiologi riportarono ad una unica causa gli effetti delle radiazioni ionizzanti e quelli provocati nella denaturazione proteica da calore, da acidi, da basi, e da H_2O_2 ; la dimostrazione sperimentale di ciò è, in realtà, riuscita soltanto per l'acqua ossigenata (Barron, 1954) che, aggiunta ad una soluzione di albumina nella stessa concentrazione di quella prodotta dalla irradiazione con 250.000r determina, se è presente $FeSO_4$, modificazioni nello spettro dell'assorbimento dell'ultravioletto che sono caratteristiche delle proteine irradiate, e cioè aumento dell'assorbimento a 2800 Å (Spiegel-Adolph e Krumpell, 1927). Tale constatazione rappresentò la prima tappa per la dimostrazione che l'effetto delle radiazioni ionizzanti è parzialmente legato alla formazione di radicali idrossilici.

Le ricerche suddette hanno anche dimostrato che l'aumento dell'assorbimento nell'ultravioletto dell'albumina irradiata è in diretto rapporto con la dose di irradiazione ed è tanto più marcato quanto più diluita è la soluzione della proteina, comportamento questo analogo a quello del complemento.

È probabile che i vari costituenti del siero presenti nella soluzione assorbano radiazioni esercitando, in tal modo, effetto protettivo tanto più accentuato quanto maggiore ne è la concentrazione. In tal modo è stata spiegata anche la ben nota aumentata radiosensibilità di un enzima purificato in confronto a quella dello stesso in omogenato di tessuto. Tale è anche il caso di diversi enzimi che Dale (1940) aveva dimostrato essere molto sensibili alle radiazioni ionizzanti *in vitro* ma che *in vivo* presentano alta resistenza che varia a seconda dell'organo esaminato (Hevesy e Forssberger, 1956).

BIBLIOGRAFIA.

- BARRON E. F. G., in *Radiation Biology*, vol. I, cap. V, p. 283, Mc. Grave-Hill-Book Company, New York 1954.
- BECKER E. L., « J. Immunol. », 84, 299 (1960).
- BOURSNELL J. C., FRANCIS G. E. and WORMALL A., « Bioch. J. », 40, 774 (1946).
- CAVALLO G., « Giorn. Microbiol. », 5, 13 (1958).
- CAVALLO G. e CAVALLO O., « Giorn. Microbiol. », 5, 21 (1958).
- DALE W. M., « Bioch. J. », 34, 1367 (1940).
- HANDOLL P. J., ROTBLAT J., WILLS E. D. and WORMALL A., « Nature », 178, 307 (1956).
- HEVESY G. and FORSSBERG A., *Proc. 3th Int. Congress. Biochem.* Brussels 1955. Acad. Press. Inc., New York 1956, p. 479.
- MAYER M. M., OSLER A. G., BIER O. G. and HEIDELBERGER M., « J. Exper. Med. », 84, 535 (1946).
- PLESCIA O. J., CAVALLO G., AMIRAIAN K. and HEIDELBERGER M., « J. Immunol. », 80, 374 (1958).
- PONTIERI G. e CICCIMARRA F., in corso di stampa.
- RAJEWSKI I. V., « Biochem. Z. », 227, 272 (1930).
- SACHS H., in *Handbuch der pathogenen Mikroorganismen*, Zweiter Band, zweiter Teil, S. 841. Fischer und Urban und Schwarzenberg. Jena 1929.
- SPIEGEL-ADOLF M. and KRUMPEL O., « Biochem. Z. », 190, 28 (1927).
- WATKINS W. M. and WORMALL A., « Biochem. J. », 52, 365 (1952).

Patologia. — *Ulteriori ricerche sulle inclusioni cellulari nel tumore di Sticker* ^(*). Nota di PIETRO AJELLO, presentata ^(**) dal Corrisp. G. AMANTEA.

A seguito di una nostra precedente Nota riguardante la presenza di inclusioni nelle cellule del tumore di Sticker ⁽¹⁾, crediamo opportuno riferire alcuni nuovi rilievi emersi da ulteriori osservazioni al microscopio elettronico.

Oltre che da tumori sperimentalmente indotti per inoculazione sottocutanea in cuccioli di sospensioni cellulari, il materiale di esame venne prelevato anche dalle comuni forme genitali del tumore, naturalmente insorti in cani adulti.

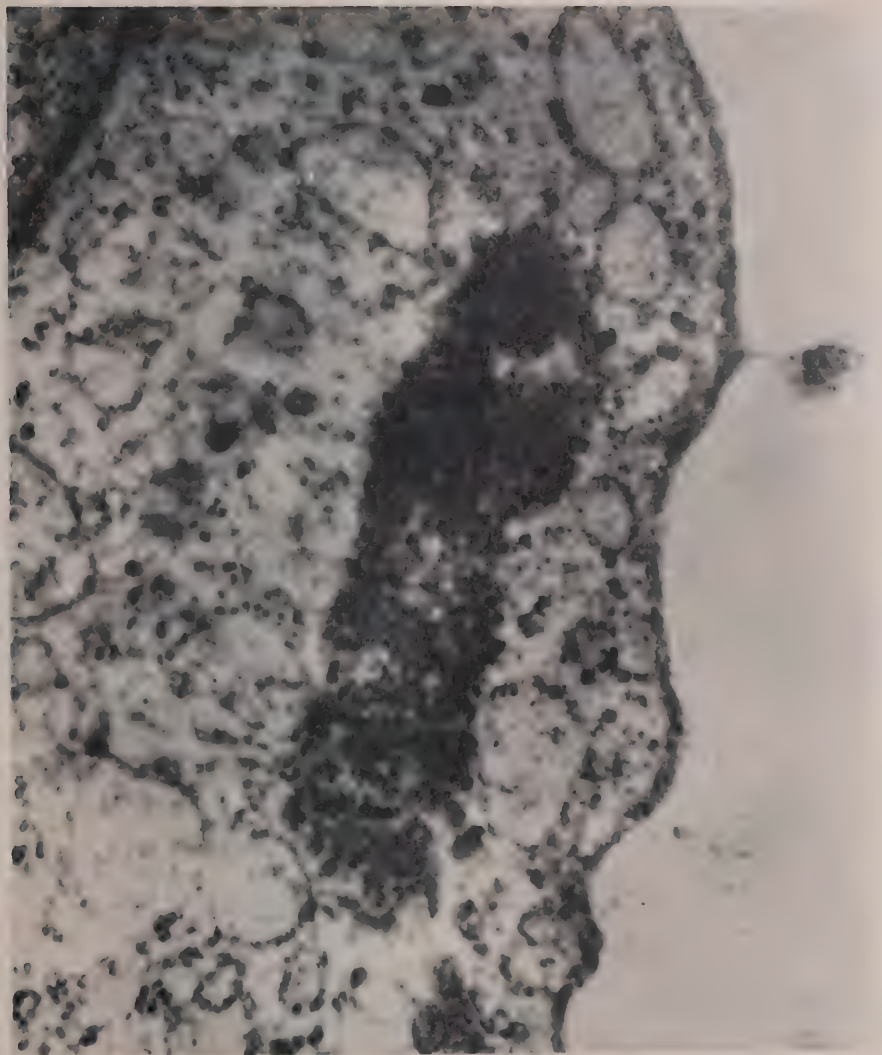
Nei tumori sperimentalmente indotti, le rilevate inclusioni, aventi sede nel citoplasma, in numero di una o più, vicini o distanti dalla superficie cellulare, si presentano sotto forma rotondeggiante, ovalare o raramente allungata e di dimensioni varie poco al disopra o per lo più al disotto del micron. La loro struttura risulta evolversi attraverso varie fasi intermedie, per il che da inclusioni considerate iniziali, aventi l'aspetto di aree granulose o di masse omogenee, intensamente osmiofile, circondate di sovente queste ultime da una membrana per lo più doppia, essendo costituita da due foglietti spessi, intervallati da uno spazio talvolta chiaro, si passa ad inclusioni, in cui è possibile rilevare un loro rigonfiamento e, all'interno di esse, un denso accumulo di particelle aggregate. Altre immagini delle stesse inclusioni mostrano un ulteriore rigonfiamento a guisa di grosse vescicole, in cui le particelle contenutevi, isolate, ma di solito aggregate in piccoli o grandi cumuli si dispongono di ordinario alla periferia, a ridosso del foglietto interno. In conseguenza, si determina nelle zone centrali delle inclusioni vescicolose una cavità vuota unica o multiloculare. Può anche formarsi fra il foglietto interno e quello esterno, per un loro parziale distacco, uno spazio semilunare. In altri casi, non frequenti, gli aggregati di particelle si riscontrano disposti attorno ad una o più masse omogenee rotondeggianti, contenute nella stessa cavità vescicolosa.

È caratteristico rilevare nelle inclusioni più rigonfie una zona di rottura a livello della membrana delimitante, attraverso cui una parte delle particelle contenute fuoriesce nell'ambiente circostante intracitoplasmatico, ma più spesso in quello extracellulare.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Ostetricia e Ginecologia Veterinaria della Università di Messina. Le osservazioni al microscopio elettronico sono state effettuate presso il C. U. M. E. di Messina.

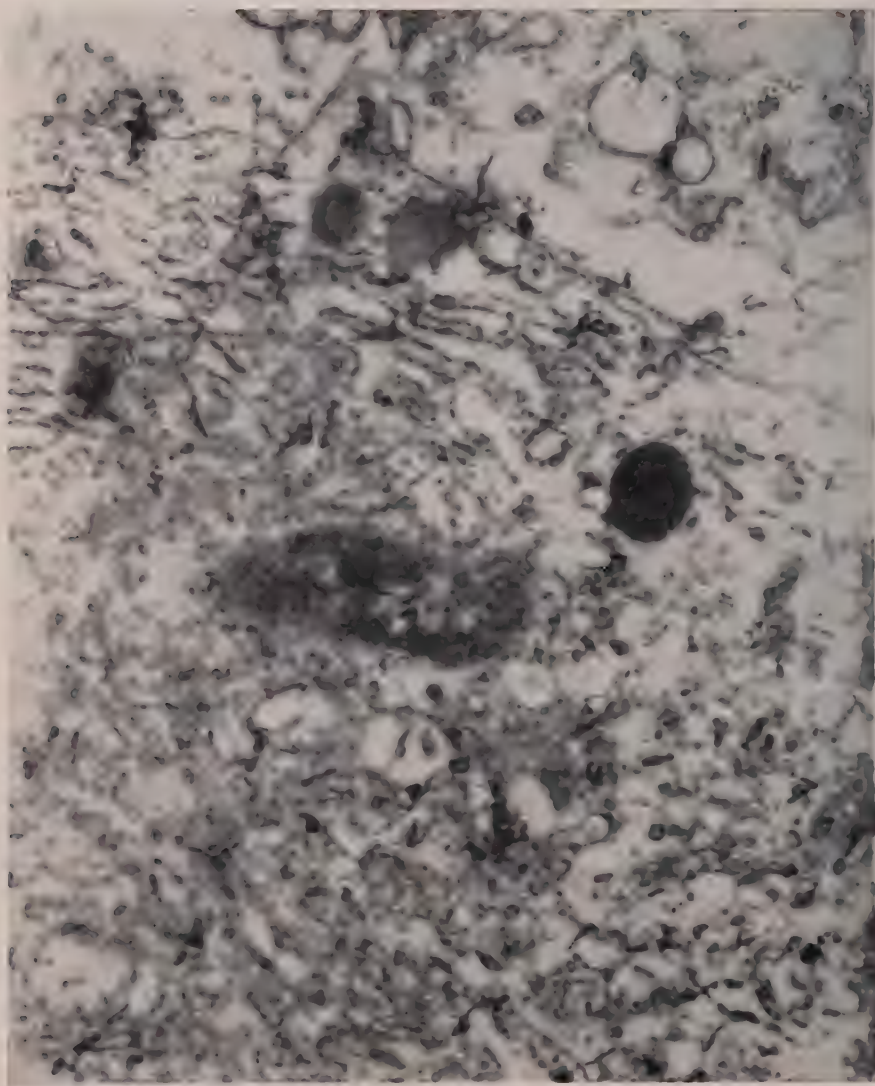
(**) Nella seduta dell'11 febbraio 1961.

(1) P. AJELLO, « Boll. Soc. Ital. Biol. Sper. », 1961.



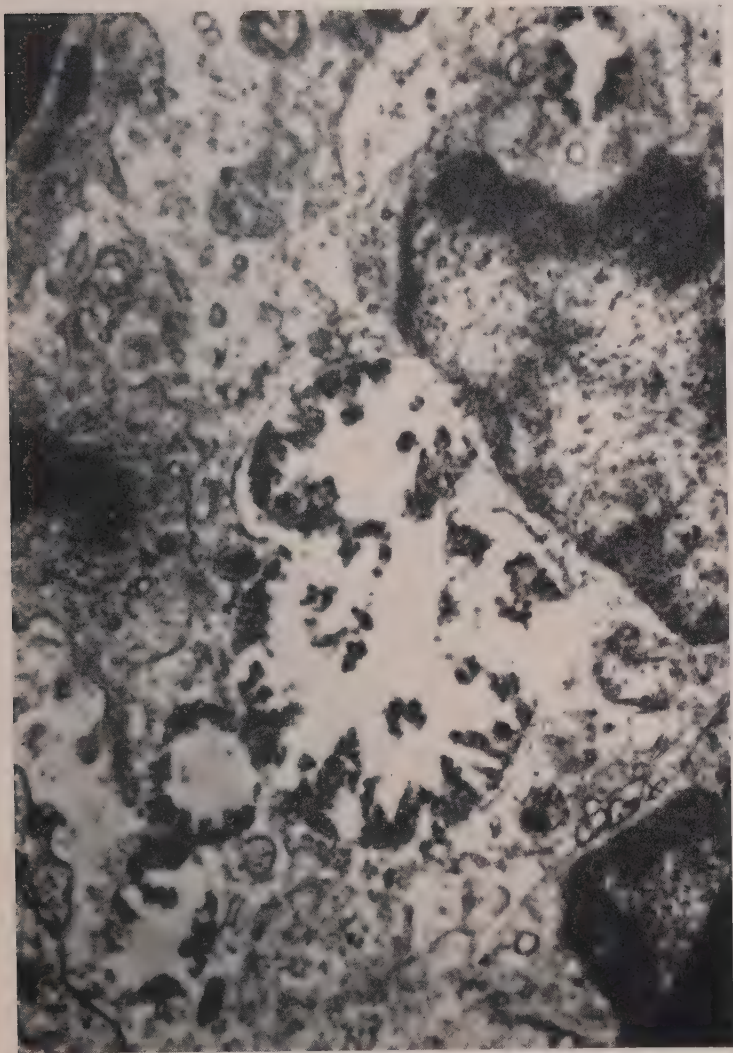
Inclusione citoplasmatica di forma allungata e con l'aspetto di area granulosa.

Fissazione in ac. osmico, ingr. 40.000 X.



Al centro, inclusione citoplasmatica granulosa. In basso, inclusione citoplasmatica sotto forma di massa omogenea, ovale, circondata da una doppia membrana.

Fissazione in ac. osmico, ingr. 32.000 X.



Aspetto delle particelle compatte, aggregate in cumuli, nelle inclusioni vescicolose citoplasmatiche.

Fissazione in ac. osmico, ingr. 16.000 X.

Le particelle contenute nelle inclusioni hanno forma irregolarmente rotondeggiante, una struttura compatta, margini non netti e dimensioni medie di 500 Å. Alle volte, sembrano assumere una forma anulare, lasciando distinguere un'centro chiaro rispetto alla corona.

All'inizio dell'accrescimento delle forme sperimentali del tumore, si può talvolta riscontrare nel citoplasma di una stessa cellula, una serie di immagini, dalle iniziali alle intermedie e da queste alle vescicolose aperte, tutte inerenti alle inclusioni descritte e pertanto fra loro morfologicamente collegate. Inoltre, non raramente, le inclusioni vescicolose sono tante, in una medesima cellula, da occupare pressoché interamente il citoplasma, disponendosi l'una accanto all'altra e conflueno spesso fra loro.

È interessante notare che le inclusioni vescicolose, contenenti le menzionate particelle, riscontrate nelle cellule del tumore indotto sperimentalmente, addirittura con grande frequenza all'inizio della fase di accrescimento, sono anche reperibili, sebbene con scarsa frequenza, nel citoplasma delle cellule del tumore nella sua comune forma clinica genitale, non sperimentale.

I descritti aspetti, sia delle inclusioni citoplasmatiche che delle particelle contenutevi, nella loro progressività sembrano possedere i presupposti di un ciclo evolutivo biologico. Questo fatto, unitamente alle sorprendenti analogie morfologiche rilevabili in letteratura sui tumori da virus, in particolare sul carcinoma mammario del topo ⁽²⁾ ⁽³⁾ ed alle acquisite conoscenze sulla contagiosità e trasmissibilità sperimentale del tumore di Sticker, anche con materiale privo di cellule ⁽⁴⁾ ⁽⁵⁾, ci inducono a prospettare la possibilità che le osservate particelle siano connesse con l'infezione virale.

(2) W. BERNHARD, *Inst. Rec. sur le Cancer*, Seine 1958.

(3) S. R. S. RANGAN, K. J. RANADIVE a. M. SATYAVATI, *Sirsat. Ind. Cancer Res. Centre*, Bombay 1958.

(4) P. AJELLO, «Nuova Veter.», 1960.

(5) G. DOZZA e V. TORLONE, «Veter. Ital.», 1960.

Biologia. — *Alcuni risultati di esperimenti di asportazione e di trapianto nella regione genitale di embrioni di Bufo bufo* (*). Nota di ELVEZIO GHIRARDELLI, presentata (**) dal Socio U. D'ANCONA.

Le ricerche intraprese da Vannini ⁽¹⁾ e coll. (Reggiani ⁽²⁾, Vannini e Reggiani ⁽³⁾, Vannini e Ghirardelli ⁽⁴⁾) sull'organogenesi dell'apparato riproduttore in *Bufo bufo* hanno affrontato il problema del differenziamento longitudinale della cresta genitale, che negli embrioni e girini dei Bufonidi si trasforma in un organo di Bidder nel suo tratto craniale ed in una gonade propriamente detta in quello più caudale. Esperimenti di asportazione del mesoderma genitale presuntivo, eseguiti in uno stadio di sviluppo precedente alla migrazione delle cellule germinali primordiali dall'entoderma alle creste genitali, hanno condotto a risultati assai dimostrativi. Si è visto infatti che l'ablazione del solo tratto caudale del mesoderma suddetto non impedisce il normale sviluppo dell'organo di Bidder, benché la gonade risulti notevolmente raccorciata, in quanto mancante del proprio pezzo posteriore. Ma si è inoltre constatato che, anche in seguito all'asportazione del solo tratto cefalico del mesoderma genitale, si organizza un organo di Bidder di struttura normale a spese della parte più cefalica del pezzo residuo di cresta genitale, che in condizioni normali si sarebbe dovuto totalmente sviluppare in una gonade propriamente detta la quale, dunque, anche questa volta risulta raccorciata ⁽³⁾.

Soltanto la completa asportazione del mesoderma genitale ha come conseguenza, dal lato operato, la mancanza della intera cresta genitale ⁽⁴⁾.

Esiste evidentemente un esteso potere regolativo, che assicura il normale sviluppo dell'organo di Bidder anche in seguito a parziale asportazione, ma non soppressione completa del territorio genitale ^(3,4). Sembra che ciò sia dovuto alla quantità relativa di elementi germinali, che migrano

(*) Istituto di Zoologia della Università di Bologna diretto dal prof. E. Vannini. Indagine eseguita con un contributo del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'11 febbraio 1961.

(1) E. VANNINI, *Impostazione di nuove ricerche sullo sviluppo degli organi di Bidder e delle gonadi in girini di Bufo*, « Boll. Zool. », vol. XXIII (2), pp. 525-532 (1956).

(2) M. P. REGGIANI, *Osservazioni sull'organogenesi dell'apparato urogenitale in embrioni ed in girini di Bufo*, « Boll. Zool. », vol. XXIV (2), pp. 201-208 (1957).

(3) E. VANNINI e M. P. REGGIANI, *Primi risultati di esperimenti di asportazione parziale dell'abbozzo genitale in embrioni di Bufo bufo*, « Arch. Ital. Anat. Embr. », vol. LXIV, pp. 301-317 (1959).

(4) E. VANNINI ed E. GHIRARDELLI, *Esperimenti di asportazione parziale dell'abbozzo genitale in embrioni di Bufo bufo*, « Boll. Zool. », vol. XXVI (2), pp. 515-522 (1959).

ai diversi livelli della cresta genitale. Anche se questa sia stata sperimentalmente raccorciata amputandone il tratto craniale presuntivo, le cellule germinali in essa contenute presentano infatti, come di norma, sino da principio, una ripartizione numerica non uniforme in senso longitudinale e la parte della cresta che risulta più fornita di cellule germinali dà origine in ogni caso ad un organo di Bidder (Vannini e Ghirardelli⁽⁵⁾).

Con lo scopo di indagare ulteriormente sui fattori che conducono all'accennato differenziamento in senso longitudinale, ho intrapreso una nuova serie di ricerche sperimentali, modificando parzialmente la tecnica usata in quelle precedenti. Come al solito, le operazioni sono state effettuate su embrioni di *Bufo bufo* in una fase di poco successiva a quella di bottone caudale (stadi III₂-III₄ delle tavole cronologiche normali di Cambar e Gipouloux⁽⁶⁾, corrispondenti allo stadio 17 delle tavole di Rossi⁽⁷⁾); ma invece di tagliare e sollevare l'epidermide e distruggere poi il sottostante mesoderma mediante una semplice abrasione fatta con la punta di un ago, ho preferito asportare un intero territorio dell'embrione, sotto forma di un tassello comprendente l'epidermide ed il mesoderma della regione interessata. Ciò mi ha permesso di eseguire due serie di interventi: nella prima mi sono limitato ad asportare il tassello suddetto, nel tratto cefalico oppure in quello caudale della regione genitale; nella seconda invece ho effettuato trapianti di tasselli da embrione a embrione, in maniera eterotopica.

Come appare dalla fig. 1, i tasselli cefalici venivano prelevati dietro l'abbozzo del pronefro, del quale avevano circa le stesse dimensioni tanto in altezza che in lunghezza, interessando per lo meno tre somiti; lo spessore del tassello era tale da consentire l'amputazione del dotto di Wolff, di mesoderma mesonefrogeno (mesomero) e di un tratto dorsomediale della piastra laterale (ipomero). I tasselli prelevati caudalmente avevano le stesse dimensioni e interessavano parti corrispondenti di mesoderma, più indifferentiate.

I trapianti omoplastici, che finora ho eseguito con successo, consistono nel trasporto, in sede cefalica, di un tassello prelevato nella parte caudale del territorio genitale di altro embrione. Le operazioni sono state effettuate sempre sul lato sinistro del corpo degli embrioni.

Lo scopo di questi interventi, in primo luogo, era quello di vedere se, pure asportando tratti dell'abbozzo genitale in maniera più radicale di quanto fosse stato fatto in precedenza, si potessero ottenere praticamente gli stessi risultati. In secondo luogo, con i trapianti mi proponevo di controllare se

(5) E. VANNINI e E. GHIRARDELLI, *Sui fenomeni regolativi dell'abbozzo genitale in Bufo bufo, dopo asportazione del territorio presuntivo dell'organo di Bidder*. In corso di stampa, « Rend. Accad. Naz. Lincei » (1961).

(6) R. CAMBAR et J. D. GIPOULOUX, *Table chronologique du développement embryonnaire et larvaire du crapaud commun: Bufo bufo L.*, « Bull. Biol. France Belgique », vol. XC, pp. 198-217 (1956).

(7) A. ROSSI, *Tavole cronologiche dello sviluppo embrionale e larvale del Bufo bufo (L.)*, « Monit. Zool. Ital. », vol. LXVI, pp. 133-149 (1959).

nella cresta genitale, nonostante l'inserzione in sede cefalica di un tratto di mesoderma prelevato dalla regione caudale, potesse ancora instaurarsi il consueto gradiente longitudinale di distribuzione numerica degli elementi germinali, con potenzialità bidderiana nel tratto cefalico.

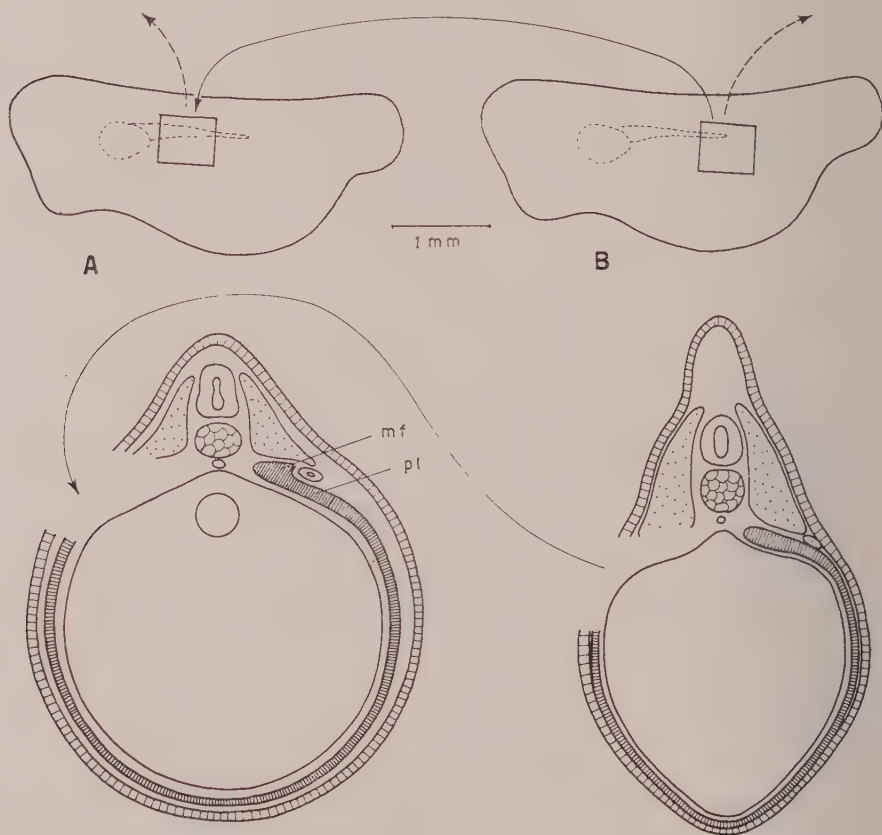


Fig. 1. - Schema delle operazioni. In *A* asportazione del tassello cefalico, in *B* asportazione del tassello caudale; in alto, profilo dell'embrione, in basso sua sezione trasversale al livello operato. Le frecce a tratti indicano l'ablazione del tassello, quelle continue il trapianto. *mf*: mesoderma mesonefrogeno; lateralmente a questo, sezione trasversale del dotto di Wolff; *pl*: piastra laterale.

Entrambi gli intenti sono stati soddisfatti, allevando gli animali per un congruo periodo di tempo dopo l'intervento operatorio, ma fissandoli per l'esame istologico assai prima della fine della metamorfosi; detto esame è stato effettuato su serie complete di fette trasversali.

Esporrò ora, brevemente, i risultati conseguiti, cominciando dagli effetti della semplice asportazione dei tasselli, per concludere con quelli delle operazioni di trapianto.

ASPORTAZIONE DI UN TASSELLO NEL TRATTO CEFALICO DELLA REGIONE GENITALE
(fig. 2).

La fig. 2 si riferisce ad un esemplare fissato allo stadio IV_4 (secondo le citate tavole di Cambar e Gipouloux). Si tratta di una ricostruzione assai fedele, sebbene semplificata quasi in forma di diagramma, degli organi urogenitali sia del lato indenne (a destra) che di quello operato (a sinistra) del corpo del girino. Da ambo i lati è rappresentata l'estensione longitudinale, sino allo sbocco in cloaca (parte bassa della figura), del dotto di Wolff (W) cui si addossa il mesonefro (linea nera ingrossata compresa fra due frecce). La regione delimitata da linee tratteggiate corrisponde al tassello asportato con l'operazione. Al centro si vedono le ricostruzioni delle creste genitali, eseguite riportando a livelli corrispondenti alle singole sezioni trasversali il numero di cellule germinali contato in ognuna di esse. Ne risulta che l'ampiezza del profilo, che delinea sia l'organo di Bidder (*Bd*) sia la gonade propriamente detta (*g*), è l'espressione del quantitativo di elementi germinali riscontrato ai diversi livelli della cresta genitale, e quindi ne raffigura il grado di sviluppo. La porzione tratteggiata con la quale si continua cranialmente l'organo di Bidder di entrambi i lati, rappresenta la parte sterile pregenitale della cresta.

Dall'esame di questa figura risulta chiaramente che sul lato operato la cresta genitale è molto meno sviluppata che non sul lato sano; anche l'abbozzo dell'organo di Bidder è assai rudimentale e nettamente arretrato, rispetto a quello del lato indenne. Sul lato non operato sono state contate complessivamente 84 cellule germinali contro le 24 (di cui 3 ectopiche) del lato operato; la gonade meno sviluppata ha dunque un numero di cellule germinali pari al 28,5% soltanto, rispetto al lato indenne. Le cellule germinali ectopiche del lato operato sono rappresentate nella figura con una zona a reticolo nella parte sinistra dello spazio che raffigura il tassello asportato; esse sono infatti collocate nel mesoderma della parete della cavità peritoneale, assai più lateralmente della cresta genitale, all'incirca nel territorio in cui normalmente si sarebbe dovuto trovare il mesonefro. Quest'ultimo ed il dotto di Wolff sono quasi totalmente mancanti dal lato operato, il che però non ha impedito lo sviluppo della rispettiva cresta genitale.

Benché la cresta genitale del lato operato sia assai più corta e molto meno sviluppata rispetto a quella del lato indenne, è tuttavia possibile vedere che in entrambe si è sviluppato il consueto gradiente longitudinale del numero

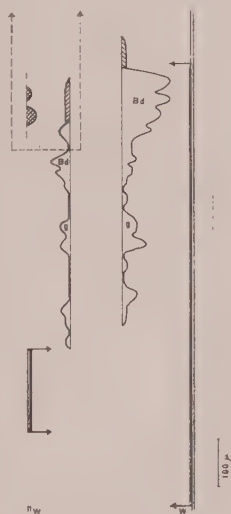


Fig. 2. - Ricostruzione relativa ad un esemplare con ablazione del tassello cefalico

di elementi germinali; anche dal lato dell'operazione, la parte cefalica della breve cresta genitale, più ricca di elementi germinali, presenta una organizzazione di tipo bidderiano, già discernibile benché rudimentale.

ASPORTAZIONE DI UN TASSELLO NEL TRATTO CAUDALE DELLA REGIONE GENITALE
(fig. 3).

L'esemplare cui si riferisce la fig. 3 è stato fissato allo stadio IV_8 . Sul lato indenne l'organo di Bidder e la gonade sono già perfettamente differenziati. Un organo di Bidder di aspetto del tutto normale, anche se di dimensioni piuttosto ridotte, è pure evidente sul lato operato, ma è privo caudalmente della gonade propriamente detta, sostituita da un tratto sterile, del tutto mancante di elementi germinali come quello pregenitale consueto. Il numero delle cellule germinali è di 29 sul lato operato e di 150 su quello indenne; l'organo di Bidder ridotto ha dunque solo il 19,3 % di elementi germinali, rispetto al numero totale degli elementi germinali della cresta genitale del lato opposto.

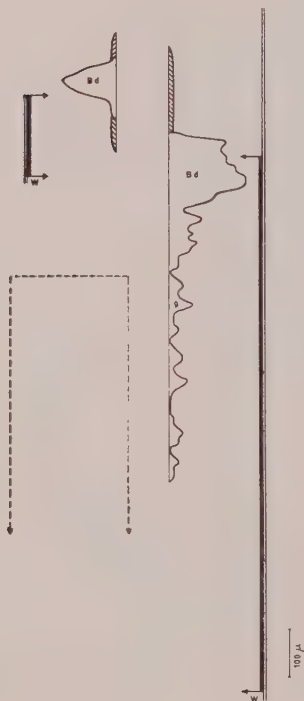


Fig. 3. - Ricostruzione relativa ad un esemplare con ablazione del tasselto caudale.

In corrispondenza del tratto asportato mancano, infine, il mesonefro ed il dotto di Wolff.

Le indicazioni ed i simboli usati anche per questa figura e per le successive sono gli stessi impiegati per la precedente fig. 2.

TRAPIANTO DI UN TASSELLO CAUDALE NEL TRATTO CEFALICO DELLA REGIONE GENITALE
(figg. 4 e 5).

L'esemplare al quale si riferisce la fig. 4 è stato fissato allo stadio IV_9 . Si nota subito che nella regione interessata dal trapianto (delimitata da linee tratteggiate) si è ben ristabilita la continuità del dotto di Wolff e del mesonefro sezionati; tuttavia, come non appare dallo schema, il mesonefro nel tratto interessato dall'innesto presenta qualche anomalia di sviluppo ed un certo grado di ipoplasia, ben rilevabile con l'esame microscopico.

L'organo di Bidder e la gonade sono presenti sia sul lato indenne che su quello operato ed anzi, a differenza di quanto si è potuto rilevare nei casi precedenti, sul lato operato sono assai più sviluppati.

Il numero delle cellule germinali dal lato indenne è di 61, cioè il 57,5 % rispetto alle 106 del lato dell'innesto; di questi ultimi elementi germinali, due si trovano in sede ectopica in seno al mesenterio (nello schema, area scura a fianco della linea mediana tratteggiata). Si rilevi che l'organo di Bidder, sul fianco operato, è interamente compreso nell'area del tassello sperimentalmente innestato.

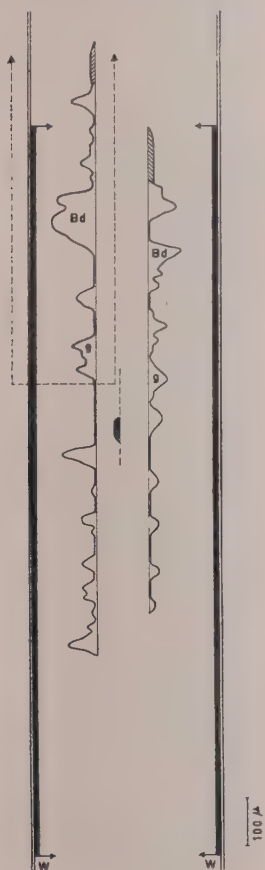


Fig. 4. - Ricostruzione relativa ad un esemplare con trapianto cefalico di un tassello caudale.

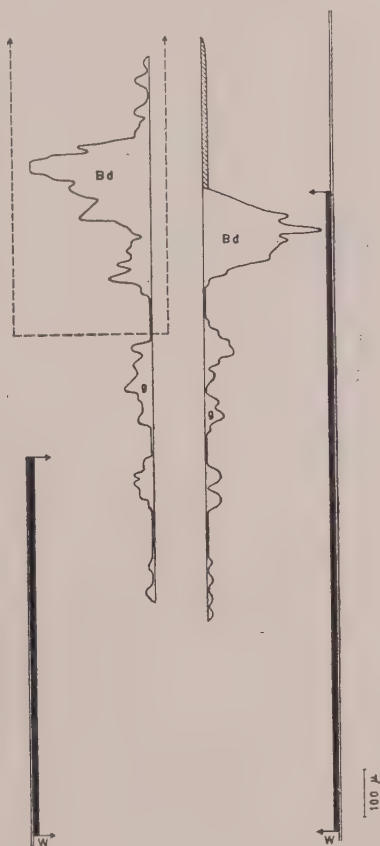


Fig. 5. - Ricostruzione relativa ad un esemplare con trapianto cefalico di un tassello caudale.

Ancor più significativo è il caso della fig. 5, che si riferisce ad un girino fissato allo stadio IV₆, ma che, nonostante l'aspetto esteriore meno progredito, presenta gli organi genitali più sviluppati di quelli dell'esemplare precedente. È qui evidente l'interruzione del mesonefro e del dotto di Wolff in corrispondenza del trapianto; malgrado ciò, anche questa volta dal lato

Si afferma che l'aspetto dei germi operati, quando questi vengono innestati alla periferia, non si differenzia da quello dei germi operati per intero.

La prima ipotesi di cui si discute, per cui si potrebbe interpretare l'aspetto dei germi operati, infatti, come quello dei germi operati per intero, è di anche invertirlo: il che avrebbe dimostrato che nei vari livelli del mesoderma per cui si discute si è sviluppata la tendenza a spingere le cellule caudale ad attrarre e indurre alla moltiplicazione le cellule germinali primarie, e che questa spinta è reversibile, potendosi manifestare in maniera irreversibile.

Ma ciò non sembra corrispondere alla realtà dei fatti. Nella sede del trapianto, il gradiente numerico longitudinale di distribuzione degli elementi germinali si instaura, infatti, non soltanto in maniera normale, ma addirittura accentuata, per cui l'organo di Bidder e la gonade risultano maggiormente sviluppati e più ricchi di gonociti che dal lato indenne.

La tesi di prima accolta, che per cui, dopo l'operazione, la tendenza a moltiplicazione locale degli elementi germinali dal lato operato rimane prevalente, e che, per conseguenza, si può avere una vera e propria forma locale di natura infiammatoria determinata dall'innesto, né si può escludere che non si possa avere anche un aspetto maggiore nelle tegue operati, per cui, dal lato operato, rispetto a quelli del lato indenne, si riduca. Mi sembra, comunque, che è più opportuno affermare che l'aspetto operato, nel trapianto, delle cellule germinali primarie in un lato, non può che essere dipendente da un'influenza esercitata dal mesoderma, poiché in questo non è precocemente e certamente si può avere un aspetto locale, ma di genere.

Quanto prima si è accennato agli elementi germinali, e cioè, alle cellule primarie, che si riferisce, si può dire che esse sono anche quelle che sono presenti nel mesoderma, e che, per conseguenza, si può dire che esse sono anche quelle che sono presenti nel mesoderma, e che, per conseguenza, si può dire che esse sono anche quelle che sono presenti nel mesoderma. Tale aspetto è la parte della stessa questione che è stata già affrontata in un altro.

Le ricerche continueranno, fra l'altro, con innesti eseguiti in maniera diversa, agli attuali; e cioè, trapiantando caudalmente tasselli prelevati dal mesoderma, da germi operati.

Biologia. — *Sulla istologia del tetto ottico di un Anfibio anuro* (*Rana esculenta* L.). Nota ^(*) di ERNESTO CAPANNA, presentata ^(**) dal Corrisp. A. STEFANELLI.

Proponendomi di effettuare una ricerca sulle alterazioni della istologia del tetto degli Anfibi anuri, in casi di ipoplasia primaria e secondaria, al fine di indagare al livello della fine istologia quei problemi di ipoplasia del tetto degli Ittiopsidi sui quali da tempo vanno studiando in questo Istituto Stefanelli ⁽¹⁾ e collaboratori ⁽²⁾, ho allestito preparati su encefali di *Rana esculenta* L. per rendermi conto della normale istologia del tetto e per mettere a punto tecniche adeguate di impregnazione. Poiché nei miei preparati ho riconosciuto quadri diversi da quelli classicamente riferiti in bibliografia (P. Ramon ⁽³⁾, S. Ramon y Cajal ⁽⁴⁾, Huber e Crosby ⁽⁵⁾) ritengo opportuno esporre brevemente nella presente Nota i miei dati.

La tecnica di impregnazione nera « tipo Golgi » da me usata, è quella al tungstato di sodio suggerita da Ramon-Moliner ⁶, che mi ha dato negli Anfibi buoni risultati: dal pezzo impregnato ed incluso in celloidina sono state eseguite in serie sezioni di 50 μ di spessore. Ho pure eseguito preparati in serie con i normali metodi istologici (fissazione in Sanfelice, inclusione in paraffina, colorazione col metodo di Giemsa o con l'Emallume-Eosina).

Il tetto ottico della Rana in un preparato trattato con il metodo di Giemsa (fig. 1, tav. I - fot. B) appare costituito da un caratteristico alternarsi di strati grigi e sinaptici: per l'identificazione di questi strati mi riferirò alla classificazione di Huber e Crosby ⁵, la quale, pur essendo stata formulata per i Rettili, si può applicare al tetto degli Anuri meglio di quella di Gaupp ⁽⁷⁾. Si vengono così a distinguere: uno *stratum opticum*, più superficiale.

(*) Ricerca eseguita nel Centro di Neuroembriologia del C.N.R., presso l'Istituto di Anatomia Comparata « G. B. Grassi » dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta dell'11 febbraio 1961.

(1) A. STEFANELLI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, 16, pp. 277-282 (1954); ID., « Experientia », 10, pp. 436-437 (1954); ID., « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, 16, pp. 792-798 (1954); ID., « Nature », 174, pp. 974 (1954).

(2) A. STEFANELLI e L. CHITI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, 16 (1954); L. CHITI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, 16, pp. 542-546 (1954); A. M. ZACCHEI, « Ric. Sci. », 26, pp. 876-833.

(3) P. RAMON, *Investigaciones de histología comparada en los centros ópticos de distintos Vertebrados*. Tesi, pp. 21-26 (Zaragoza) 1890.

(4) S. RAMON Y CAJAL, *Histologie du système nerveux*, T. II, pp. 215-216 (Paris) 1911.

(5) G. C. HUBER e E. C. CROSBY, « Proc. Nat. Acad. Sci. », 19, pp. 15-22 (1933); ID., *Psychiatr. en Neurobiol. Bladen, Festbundel Ariëns Kappers*, p. 459 (1934).

(6) E. RAMON-MOLINER, « Stain Technol. », 33, pp. 19-29 (1958).

(7) E. GAUPP, *Anatomie des Frosches*, T. II, pp. 52-68 (Braunschweig) 1899.

costituito dalle fibre afferenti del tratto ottico, uno *stratum fibrosum et griseum superficiale* al di sotto del precedente cui fa seguito, verso l'interno, uno *stratum album centrale*; procedendo ancora verso l'interno si nota uno

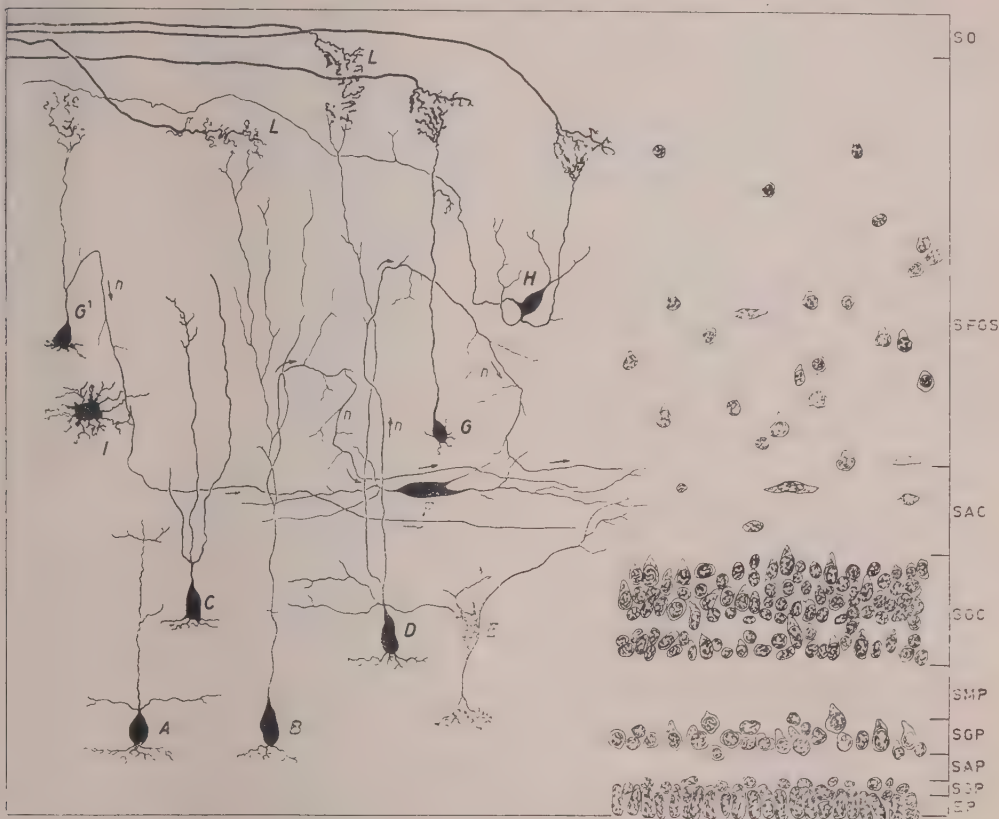


Fig. 1. - Aspetto del tetto ottico della *Rana* come appare in preparati impregnati col metodo di Ramon-Moliner (a sinistra) e colorati col metodo di Giemsa (a destra). Disegnati alla camera lucida.

SO = *Stratum opticum*; SFGS = *Stratum fibrosum et griseum superficiale*; SAC = *Stratum album centrale*; SGC = *Stratum griseum centrale*; SMP = *Stratum medullare profundum*; SGP = *Stratum griseum periventricolare*; SAP = *Stratum album periventricolare*; EP = Ependima.

stratum griseum centrale che costituisce il più importante strato cellulare degli Anuri, cui segue uno strato plessiforme, *stratum medullare profundum*, e quindi ancora uno strato cellulare, *stratum griseum periventricolare*. Quest'ultimo negli Anuri è suddiviso in due strati, uno dei quali rimane addossato all'ependima, per l'interposizione di uno *stratum album periventricolare*.

Nei preparati impregnati col metodo nero di Ramon-Moliner ho riconosciuto numerosi tipi cellulari (fig. 1, tav. I - fot. A) che descriverò strato per strato. Nello strato grigio periventricolare ho osservato dei neuroni (fig. 1 A) dal pirenoforo globoso, piriforme, dal polo inferiore del quale si dipartono un gran numero di prolungamenti assai brevi che si sfioccano

nello strato bianco periventricolare; dal polo opposto si diparte un prolungamento che subito si divide in vari rami alcuni dei quali si esauriscono nello *stratum medullare profundum*: un altro prolungamento invece, dopo aver attraversato lo strato grigio centrale dove può dare collaterali, si sfiora nello strato bianco centrale. Ancora nello strato grigio periventricolare ho osservato neuroni (fig. 1 B) il cui pirenoforo e le corte propaggini al polo inferiore ricordano il tipo precedentemente descritto, ma ne differiscono sostanzialmente per l'aspetto dei prolungamenti che si dipartono dal polo superiore del corpo cellulare; questi si dirigono verso gli strati superiori e, dopo aver raggiunto lo strato grigio e fibroso superficiale si ramificano più volte portandosi a vari livelli dello strato ove prendono rapporto sinaptico con le espansioni delle fibre provenienti dal tratto ottico (fig. 1 L, tav. I - fot. A). Dal tronco principale di questi prolungamenti si diparte un ramo col valore di neurite che, dopo aver seguito per un breve tratto il tronco principale, si rivolge verso il basso e, dopo aver emesso numerosi collaterali nello strato fibroso e grigio superficiale, si impegna nello strato bianco centrale.

Elementi del tutto simili a questi ora descritti si ritrovano nello strato grigio centrale a diversi livelli dello stesso (figg. 1 C e D): i brevi prolungamenti che si osservano al polo inferiore del corpo cellulare si dispongono nello *stratum medullare profundum* o nello spessore dello stesso strato grigio, venendo a costituire un sottile e discontinuo strato sinaptico. L'aspetto ed il disegno dei prolungamenti che si dipartono dal polo superiore della cellula sono pure del tutto simili a quelli descritti per gli elementi dello strato grigio periventricolare rappresentati nella fig. 1 B. Così pure è simile il comportamento del ramo neuritico che, dopo aver seguito per un tratto il tronco principale, si rivolge in basso e finisce per impegnarsi nello *stratum album centrale*. Questi elementi, come pure quelli simili del grigio periventricolare, prendono rapporti sinaptici sia con le fibre afferenti ottiche sia, a mezzo delle brevi propaggini che si dipartono dal polo inferiore del corpo cellulare, con vie afferenti non ottiche che giungono al tetto negli strati *medullare profundum* ed *album periventricolare*; i loro neuriti poi costituiscono la principale via efferente del tetto. Per queste caratteristiche essi sono stati considerati analoghi per funzione ai neuroni fusiformi con neurite ricorrente, particolarmente caratteristici del tetto dei Teleostei, dei Rettili e degli Uccelli.

Nello strato grigio centrale si trovano pure, sebbene con minor frequenza degli elementi precedentemente descritti, neuroni di una particolare forma (fig. 1 E): il loro corpo cellulare è piuttosto voluminoso; dal polo inferiore si diparte un prolungamento che, dopo aver attraversato lo *stratum medullare profundum*, si arborizza in modo caratteristico nello strato grigio periventricolare; dal polo opposto del corpo cellulare si dipartono vari prolungamenti che terminano sia nello stesso strato grigio centrale che in quello bianco centrale.

Nello strato bianco centrale ho osservato un solo tipo cellulare (fig. 1 F, tav. I - fot. C e D): i neuroni di questo tipo hanno un pirenoforo di forma allungata con l'asse maggiore disposto orizzontalmente; dai due poli del corpo

cellulare si dipartono numerosi prolungamenti, anch'essi orizzontali, che possono essere assai lunghi, ma che si esauriscono nello stesso strato.

Nello strato fibroso e grigio superficiale ho riscontrato degli elementi dal pirenoforo piccolo e rotondeggiante che ripetono per forma gli elementi degli strati grigi sottostanti che si osservano prendere rapporti con le fibre ottiche afferenti (figg. 1 G e G', tav. I - fot. E), infatti mostrano anch'essi corte propagini al polo inferiore del corpo cellulare ed al polo superiore un prolungamento che può dicotomizzarsi e che si porta verso gli strati più superficiali ove si articola in sinapsi con le fibre afferenti del tratto ottico; dal prolungamento sopra descritto si distacca un collaterale con significato di neurite che, rivoltosi verso il basso, raggiunge lo strato bianco centrale e vi si impegna. In questo strato fibroso e grigio superficiale si possono pure notare alcuni elementi (fig. 1 H) dal cui pirenoforo si dipartono numerosi prolungamenti che si esauriscono nello strato: uno di questi si porta verso lo strato ottico ove prende rapporti sinaptici con le fibre afferenti ottiche, un altro si porta pure verso lo *stratum opticum*, ma penetratovi, non è più possibile seguirlo. Ho osservato saltuariamente impregnati voluminosi elementi gliali dal cui corpo cellulare si dipartono brevi prolungamenti protoplasmatici (fig. 2, tav. I - fot. C).

La presenza nello *stratum griseum et fibrosum superficiale* di neuroni che per forma e comportamento dei prolungamenti e per significato funzionale sono del tutto simili a quelli caratteristici degli strati grigio centrale e grigio periventricolare rappresenta un dato nuovo in letteratura. Questo reperto riveste un certo interesse se si considera l'importanza, ai fini della comprensione dell'evoluzione del tetto degli Anfibi, attribuita da Huber e Crosby⁽⁵⁾, alla migrazione verso lo *stratum opticum* di quegli elementi che prendono rapporti sinaptici con le fibre afferenti ottiche. Questi Autori infatti ritengono che dalla condizione primitiva descritta da Herrick⁽⁸⁾ negli Urodeli perennibranchiati, il tetto si sia evoluto fino alla forma rettiliana, attraverso la condizione intermedia degli Anuri, principalmente a causa della migrazione verso gli strati esterni degli elementi che prendono rapporti con le fibre del tratto ottico; migrazione che gli Autori ritengono dovuta a una risposta ad uno stimolo neurobiotattico.

Un nuovo dato è rappresentato dalla presenza di elementi orizzontali nello strato bianco centrale. Neuroni simili a quelli da me descritti, cui si attribuisce un valore associativo, sono stati osservati da P. Ramon⁽⁹⁾ e da Huber e Crosby⁽¹⁰⁾ nello strato fibroso e grigio superficiale del tetto ottico dei Rettili. Pure valore associativo si deve attribuire a quei neuroni che ho descritti nello strato grigio centrale (fig. 1 E) e che inviano i loro prolungamenti allo stesso strato grigio centrale ed allo strato grigio periventricolare.

(8) C. J. HERRICK, « J. Comp. Neurol. », 28, pp. 215-348 (1917); ID., « J. Comp. Neurol. », 39, pp. 433-489 (1925).

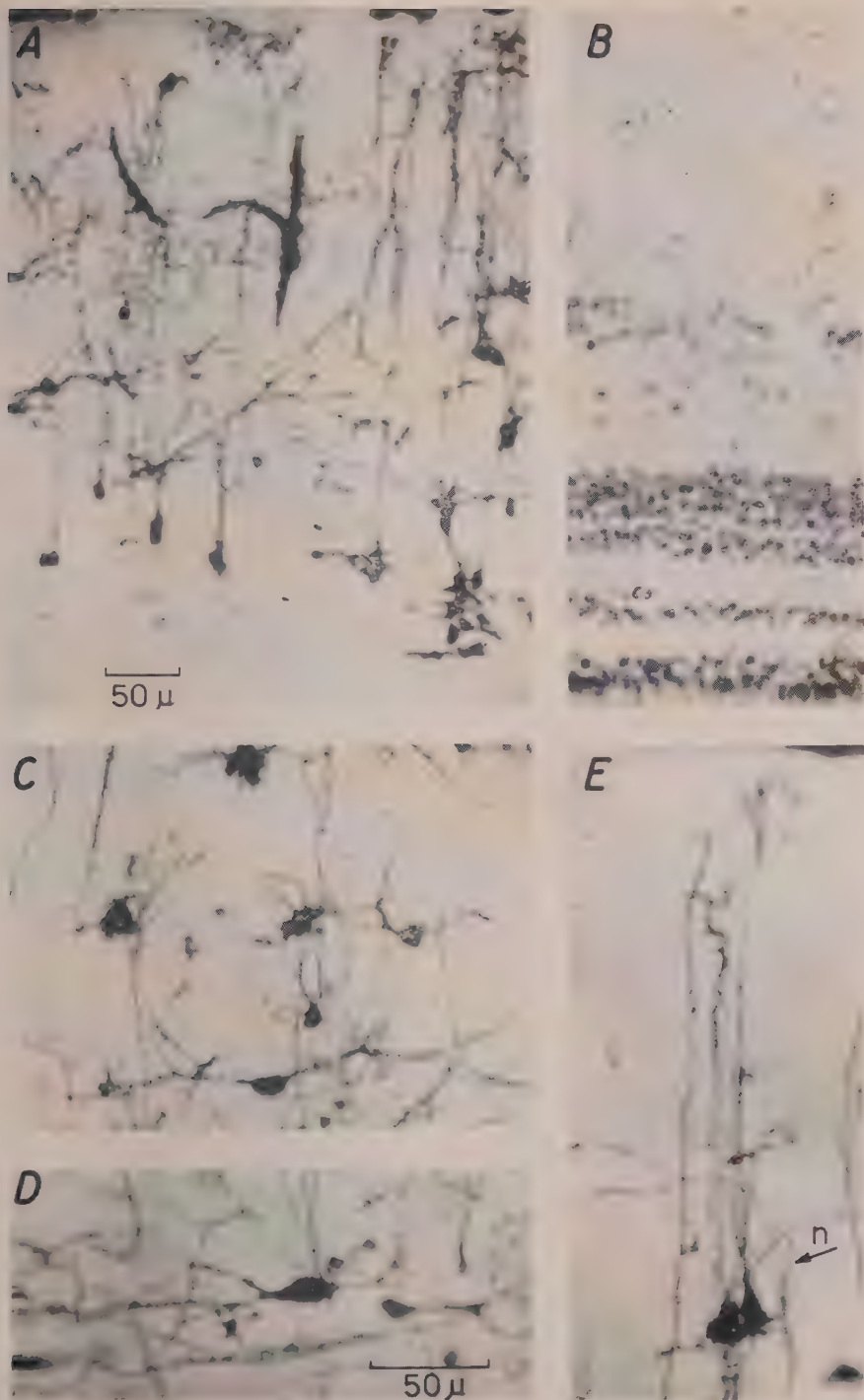
(9) P. RAMON, « Rev. Trimest. Micrograf. », 1, p. 46 (1896).

(10) G. C. HUBER e E. C. CROSBY, « J. Comp. Neurol. », 57, pp. 57-164 (1933).

Essi sembrerebbero associare due sistemi di neuroni del grigio periventricolare, filogeneticamente più antico, e del grigio centrale, più recente, che secondo Huber e Crosby ⁽⁵⁾ avrebbero diverso significato di correlazione: il primo tra stimoli ottici e olfatto-viscerali, l'altro tra stimoli ottici e statici-somestetici.

CONCLUSIONI. - Utilizzando il nuovo metodo di impregnazione nera di Ramon-Moliner è stato possibile apportare un contributo alla migliore conoscenza dell'istologia del tetto ottico di un Anfibio anuro. Infatti sono risultati presenti nello *stratum fibrosum et griseum superficiale* elementi del tutto simili per forma, per i rapporti sinaptici che contraggono i loro prolungamenti con le fibre afferenti ottiche e per comportamento del loro neurite, ai neuroni già noti degli strati grigi centrale e periventricolare. La presenza di questi neuroni nello strato fibroso e grigio superficiale documentano una evoluzione maggiore di quella fino ad oggi nota della struttura del tetto della Rana.

Sono pure stati descritti nuovi elementi associativi, alcuni dei quali presenti nel tetto ottico dei Rettili, che avvicinano l'organizzazione del tetto degli Anuri a quella rettiliana.



Fot. A: Aspetto del tetto ottico della *Rana* impregnato col metodo di Ramon-Moliner; Fot. B: Aspetto del tetto ottico della *Rana* colorato col metodo di Giemsa; Fot. C: In alto elementi gialli dello strato fibroso e grigio superficiale, in basso un neurone orizzontale nel bianco centrale; Fot. D: Neurone orizzontale nel bianco centrale; Fot. E: Neuroni dello strato fibroso e grigio superficiale che prendono rapporto sinaptico con le fibre afferenti ottiche, n. neurite.

COMMEMORAZIONI

Commemorazione del Corrispondente Aldo Pavari

tenuta (*) dal Socio SERGIO TONZIG

Frequentavo il secondo anno d'Università allorquando, trentasei anni or sono, pubblicai il mio primo ed ultimo lavoro a carattere floristico e, un poco, anche ecologico. Era un tenue contributo alla conoscenza dei consorzi floristici d'una vallata del Cadore ed i miei ingenui entusiasmi si erano soprattutto accesi nel tentativo di studiare e di interpretare il bosco, nella cui vita mi pareva di immaginare la presenza d'una quantità di arcani problemi. La mia preparazione bibliografica era quasi nulla e la mia Nota, infatti, non fu corredata che dalla citazione d'un unico autore la cui autorità – nelle mie pur superficiali ricerche di biblioteca – mi era apparsa preminente. Leggendo, taluni problemi ch'io avevo confusamente intravvisto durante le mie escursioni mi apparirono subito chiari; di altri, ch'io nemmeno avevo immaginati, conobbi la limpida e quasi ovvia impostazione; e alla mia giovanile, commossa immaginazione, il bosco apparve come una creatura vivente. Finì ch'io non seppi vincere il desiderio di riportare testualmente, nel mio lavoretto – in segno anche di riconoscenza e di omaggio – qualche frase dell'autore che mi aveva incantato. Era Aldo Pavari ch'io così conobbi e che, alla mia fantasia, si presentò quasi come un mago per il quale alberi e boschi non avessero segreti e che, della vita degli alberi e dei boschi, era il saggio interprete e, più che l'interprete, addirittura il portavoce.

Tale l'immagine che, sin dai miei primissimi contatti ufficiali con la scienza delle piante, io mi feci di Pavari; e questa immagine, circondata sempre da genuini sentimenti di rispetto, di ammirazione e di affetto non si cancellò più dal mio animo. Disgraziatamente, dovettero passare più lustri prima che, mi pare nel 1938, io potessi vedere di persona quel mio – per me quasi mitico – personaggio, e farne la conoscenza; fu però un assai rapido incontro al quale, disgraziatamente, non seguirono se non pochissimi altri, occasionali e non meno rapidi incontri. Di Aldo Pavari, come persona fisica, io non ho dunque che una conoscenza così superficiale da potersi considerare nulla, né posso vantare particolari ricordi. Di più, dal mio primo lavoro pubblicato prima ancora di entrare nell'istituto botanico di Padova onde preparare, sotto la guida venerata di Giuseppe Gola, la mia tesi di laurea, i miei interessi scientifici si svilupparono in altre direzioni non aventi, con quelli di Pavari, alcun punto più di contatto. Sinceramente grato alla Presidenza ed ai Colleghi della nostra Classe per la fiducia di cui mi è stato dato

(*) Nella seduta dell'11 febbraio 1961.

prova affidandomi l'incarico di questa commemorazione, io sento pungenti la consapevolezza ed il rimpianto di essere del tutto impari al compito. Confesso d'essere stato non poco perplesso prima d'accettarlo, tanto poco io so della vita e delle opere di Aldo Pavari. Altri sarebbero stati incomparabilmente più degni e più atti di me a questa bisogna; ma il trascorso anno non è stato amico alla nostra Sezione nella quale la morte ha tragicamente falciato. Voglio subito chiarire, però, che, se ho accettato di ricordare la figura di Aldo Pavari, non è stato solo per non sottrarmi ai miei ovvii doveri verso l'Accademia; ma anche, e ancora più, per un tributo di commosso affetto, di venerazione e di rimpianto per l'Uomo che per primo fece vibrare i miei giovanili entusiasmi e che, solo leggendolo, mi si presentò come un amico che, molto più avanti di me, sapeva quello ch'io avrei voluto capire e me ne dava le affascinanti spiegazioni; l'Uomo, inoltre, che, seppure senza contatti e senza nemmeno motivo di averne, io ho sempre amato per la passione ardente ch'Egli portava alla Natura; passione che, sebbene impeccabilmente concretata con scientifico rigore, appariva sempre soffusa d'arte e di poesia. Conscio nondimeno dei tanti motivi che non avrebbero dovuto far cadere su di me la scelta per questo incarico, mi raccomando alla Vostra indulgenza per le manchevolezze nelle quali sono incorso e per il tono probabilmente inadeguato e proprio di chi non ha mai avuto, con la Persona che va rievocando, dimestichezza alcuna.

Nato a Roma, da madre romana e da padre veneto, il 16 agosto 1888, Pavari conobbe sin da fanciullo le avversità della vita e, sin da fanciullo, la vita significò lotta per lui. Le sventure mai lo piegarono; poterono peraltro determinarne il futuro e, assai probabilmente, senza quelle sventure, egli avrebbe esercitato il suo ingegno in attività diverse da quelle per le quali, oggi, noi lo ricordiamo. A soli 8 anni egli perdette la madre e, a 14 anni, rimase orfano anche del padre. La situazione economica costrinse i parenti a fargli interrompere gli studi classici ai quali era stato avviato e nei quali avrebbe probabilmente conseguito ottimo successo come dimostra lo spiccato gusto umanistico che sempre lo distinse e che, tra l'altro, si traduceva nella sua passione per la musica e per il disegno: non solo, Pavari, gustava tali arti, ma lui stesso suonava il violino, componeva musica di genere classico, disegnava e ritraeva paesaggi dal vero. Ciò che decise del futuro di Pavari fu l'esistenza, in Alba, d'un suo cugino insegnante in quel Liceo: egli accolse l'orfano e, purché riuscisse a provvedere da sè alle relative spese, gli acconsentì di frequentare la locale, peraltro famosa, Scuola di Viticoltura e di Enologia. Al termine della quale, e vincitore d'una borsa di studio, Pavari poté iscriversi alla Scuola di Agricoltura di Milano e conseguire, nel 1910, la laurea in Scienze Agrarie. A Milano, Pavari ebbe maestri Alpe e Serpieri; e soprattutto quest'ultimo esercitò una grande influenza sulla sua formazione e sulla sua carriera. Mentre era ancora studente a Milano, Pavari accettò una consulenza estiva presso una agenzia enologica di Roma ed individuò un nuovo microrganismo del « girato » del vino. Fu così che, appena laureato, egli si trasferì a Siena come assistente alla Cattedra Ambulante di Agricol-

tura, allettato anche dalla proposta di una ditta farmaceutica senese di assumerlo quale batteriologo. Ma il periodo senese, durante il quale optò per la Cattedra Ambulante declinando l'offerta della vita di laboratorio, fu assai breve e si concluse allorquando, nel 1911, Pavari vinse una borsa di studio bandita dal Governo per la specializzazione in materie forestali presso l'Accademia forestale di Tharandt in Sassonia: da quel momento, il suo destino di forestale fu definitivamente segnato.

Non v'ha dubbio che il soggiorno di Tharandt, gli insegnamenti dei Professori di quell'Accademia e lo studio delle foreste dell'Erz furono di importanza fondamentale per tutta la successiva attività di Pavari. Della dottrina che a Tharandt gli venne insegnata egli fece profondo tesoro ed il frutto ch'egli ne ricavò fu tanto più grande in quanto egli non assorbì con docile passività le teorie scientifiche enunciate *ex cathedra* ma le sottopose al vaglio critico del confronto con la realtà. Non era certo spirito di ribellione, il suo: era piuttosto l'affermarsi intelligente della sua personalità. Pavari dubitava della validità delle generalizzazioni teoriche senza il conforto della dimostrazione sperimentale; dubitava che ciò che è vero in un ambiente fosse automaticamente vero per ogni altro ambiente; dubitava che si potesse prescindere dalle diverse condizioni climatiche e dalla capillare presenza, da noi, di un fattore di determinante importanza, come quello antropico, praticamente assente, invece, nelle foreste della Sassonia. La selvicoltura non è razionale se non è fondata su basi naturalistiche; la selvicoltura dev'essere guidata dallo studio attento dei fattori ambientali, variabili da luogo a luogo; la selvicoltura deve ispirarsi all'ecologia e alla biologia. Sono questi i principi ch'egli ricavò non tanto dagli insegnamenti di Tharandt quanto piuttosto dalla loro valutazione critica. Per personali che fossero, questi suoi concetti non volevano rinnegare gli insegnamenti ufficiali e a Tharandt, del resto, non gli mancarono consensi e incoraggiamenti: ed a Maestri come Enrico Mayr e Carlo Gayer, Pavari riconobbe il merito di ispiratori e di precursori delle sue stesse teorie. La classificazione fitoclimatica del Mayr costituì la base delle concezioni di Pavari, ed egli ne fece sempre ampio riconoscimento. Era invece contro i dogmi e contro il loro automatico trasferimento da un paese all'altro senza lo studio delle differenze d'ambiente, che Pavari si ribellava; ed una pratica applicazione della sua indipendenza di vedute fu il suo atteggiamento negativo nei confronti della rinnovazione artificiale del bosco mediante taglio raso piuttosto che mediante taglio sal-tuario e sul modello della rinnovazione naturale.

Rientrato in Italia, ed in seguito a concorso, nel 1913 Pavari divenne funzionario del Corpo Reale delle Foreste, destinato a Firenze col grado di sotto-ispettore forestale aggiunto, e addetto al nuovo Istituto Superiore Forestale Nazionale trasportato a Firenze da Vallombrosa. Collaborò alla riorganizzazione di esso e, dal gennaio 1914 al giugno 1915, fu assistente alla cattedra di Selvicoltura e Tecnologia. È di questo periodo la preparazione della parte generale dello *Studio preliminare sulla cultura di specie forestali esotiche in Italia* pubblicato negli « Annali dell'Istituto » nel 1916 e

di cui la parte descrittiva apparve dopo la guerra, nel 1921. Appena venticinquenne, Pavari pubblicò, con questo studio, una delle sue opere più vigorose e più personali, di singolare importanza sia dal punto di vista teorico che pratico. Rimaneggiando la classificazione delle zone fitoclimatiche di Mayr con l'introduzione di nuovi concetti ecologici, Pavari preparava le basi per una nuova impostazione della selvicoltura italiana su basi biologiche e fitogeografiche; e fondava sull'ecologia comparata le norme pratiche per l'introduzione in Italia di specie forestali a rapido accrescimento, di cui egli era convinto assertore. Per comprendere appieno il valore di queste ricerche, esse vanno viste anche sotto l'aspetto dell'economia forestale italiana: con esse, il problema dello squilibrio tra produzione e consumo di legname veniva inquadrato in maniera integrale e ne veniva indicata una sollecita, seppure inevitabilmente parziale, soluzione. Una conseguenza pratica delle proposte di Pavari fu, tra l'altro, l'istituzione di stazioni sperimentali per lo studio del comportamento delle specie esotiche.

Frattanto era scoppiata la guerra cui Pavari partecipò dal giugno del 1915, quasi sempre come ufficiale tecnico forestale al fronte nei servizi di tutela del bosco e di approvvigionamento di legname per l'Esercito. Congedato nel maggio 1919 col grado di capitano, egli veniva poi inviato in missione presso il Segretariato Affari Civili del Comando Supremo per l'organizzazione dei servizi forestali nelle nuove provincie.

La guerra non impedì a Pavari di completare la sua preparazione e di continuare i suoi studi. All'Ufficio legnami dell'Esercito, infatti, egli ebbe la ventura di poter assiduamente collaborare con Serpieri la cui guida ed i cui insegnamenti furono, per Pavari, una preziosa integrazione di quelli ricevuti, dopo il ritorno da Tharandt, da uomini come Cotta, Ludovico Piccioli e Di Tella. Vedevano la luce, in questi anni, numerosi studi ed articoli su problemi dei rimboschimenti, sulla situazione forestale dell'Altopiano di Asiago, della Val d'Adige, dei Lessini, dei Berici, del Monte Baldo, del Carso, e sui boschi demaniali dell'Istria e delle altre nuove provincie.

Tornata la pace, per circa tre anni Pavari ebbe modo, come amministratore della Foresta Demaniale di Vallombrosa, di ulteriormente ampliare la propria preparazione e di perfezionarla. Fu un periodo di studi e di esperienze durante il quale egli poté approfondire i problemi già trattati ed impostarne altri di nuovi. Ma fu anche in questo periodo che Pavari si accostò alla carriera didattica. Dapprima incaricato di un corso di Selvicoltura presso la Scuola Agraria dell'Università di Bologna, nel 1921 egli conseguì la libera docenza per titoli in Selvicoltura presso la Scuola di Agricoltura di Milano dove, nel 1922, tenne un corso della stessa materia. Nell'aprile del 1922, su proposta del Consiglio Accademico dell'Istituto Superiore Forestale di Firenze, venne affidato a Pavari l'incarico di organizzare e di dirigere la Stazione Sperimentale di Selvicoltura di nuova istituzione. Nel dicembre del 1924, in seguito a concorso, egli ottenne la nomina di professore non stabile presso l'Istituto Superiore Forestale di Firenze per la direzione della Stazione Sperimentale di Selvicoltura che ne faceva parte come cattedra di

ruolo. Conseguita la nomina a professore stabile nel 1927, egli passò nel ruolo dei Direttori delle Stazioni Sperimentali Agrarie alle dipendenze del Ministero dell'Agricoltura e Foreste, così definitivamente assumendo la carica di Direttore della Stazione Sperimentale di Selvicoltura di Firenze e tenendo per incarico, presso la Facoltà Agraria e Forestale dell'Università di Firenze, i corsi di Selvicoltura dal 1922 al 1944, e di Botanica Forestale dal 1944 al 1958.

La nomina a Direttore della Stazione Sperimentale di Firenze costituiva, per Pavari, il raggiungimento dell'ultima meta ed il premio più ambito. Per quasi quarant'anni, dal 1922 sino alla sua morte avvenuta il 17 gennaio 1960, Pavari fece della Stazione Sperimentale di Firenze il centro propulsore che guidò l'intero rinnovamento della selvicoltura italiana. In essa egli prodigò, con infaticabile energia, tesori di insegnamenti, di esperienze, di lavoro e di esempio di dedizione alla ricerca, così da ottenere, alla Stazione che fu sua stessa creatura, i riconoscimenti più autorevoli non solo in campo nazionale ma anche in quello internazionale.

Mi sono un poco dilungato nel tracciare le linee biografiche del periodo che, nella vita di Pavari, è culminato col suo insediamento alla Stazione di Selvicoltura di Firenze: la sua stessa complessa figura mi ha obbligato a farlo. È tuttavia evidente che è nel periodo successivo che Pavari ha dato la piena misura della sua personalità. Riassumere l'attività dell'ultimo quarantennio della sua vita, e farne una degna valutazione critica è cosa oltremodo difficile: a me, essa è resa quasi impossibile dalla troppo scarsa coincidenza di preparazione e di interessi scientifici. E ciò tanto più che, se Pavari era fondamentalmente un naturalista, sarebbe una troppo monca ed ingiusta valutazione della sua attività quella che non tenesse conto del fatto che, affrontando i problemi della selvicoltura, egli dovette continuamente impostarne e risolverne non soltanto gli aspetti scientifici ma anche quelli tecnici ed economici.

Impari come sono alla bisogna, ed approfittando del fatto che di Pavari molto già è stato detto ed è stato scritto davanti ad assemblee più specializzate od in riviste più tecniche, tenterò soltanto di delineare un rapido quadro della polimorfa attività che Pavari concretò in oltre 260 pubblicazioni.

Un importante gruppo di ricerche, cui Pavari si dedicò già prima della sua definitiva sistemazione fiorentina, ma che riprese anche successivamente, è quello relativo alla bonifica dei terreni argillosi, del rimboschimento delle regioni caldo-aride e della protezione dei terreni acclivi dal dissesto idrogeologico. Quanto siano gravi queste questioni, considerate sul piano economico e sociale, appare a tutti chiaro; come si tratti di problemi di difficilissima soluzione, lo dimostra la loro stessa antichità; e ciò dà un particolare valore all'impostazione ecologica data da Pavari ai suoi contributi, in ogni caso caratterizzati dal rigore scientifico e sperimentale. Di carattere anche più fondamentale sono le ricerche che mirano alla conoscenza ed alla valutazione dei fattori da cui dipendono la conservazione e la produttività dei boschi; una particolare valutazione viene fatta del fattore antropico, di cui Pavari mette in evidenza l'incidenza negativa sulla evoluzione del bosco. Non meno importante è il ciclo di lavori che studiano, seguendo un

organico programma di esperienze, le condizioni specifiche dei boschi nei singoli ambienti del nostro Paese; ed io ritengo utile, ai fini di cogliere le caratteristiche della *forma mentis* del Nostro, sottolineare soprattutto l'insistenza con cui egli prospetta ogni problema forestale anzitutto nel suo aspetto naturalistico e biologico.

Un problema di fondo, per la nostra selvicoltura, è quello della produzione legnosa; e ad esso Pavari si dedicò, si può dire per tutta la sua vita, con originalità di vedute e con infaticabile entusiasmo. Come già ho accennato, egli era convinto fautore dell'opportunità di introduzione, in Italia, di specie forestali esotiche. Può apparire curioso che questo apostolo della selvicoltura naturalistica sia, in certo modo, caduto in contraddizione con sé stesso, caldeggiando l'importazione e la diffusione di specie di altri paesi e, così, violando la composizione naturale dei nostri boschi. La facile obiezione non mancò di venirgli rivolta; ma, pur prescindendo dalla constatazione di fatto che, specie forestiere occasionalmente importate ad opera dell'uomo od anche di fattori naturali hanno spesso trovato, nei nuovi territori, condizioni tanto favorevoli da divenire invadenti, l'importazione propugnata da Pavari si basava sulla ecologia e sulla biologia comparata ed era sottoposta al vaglio della sperimentazione. Pavari, del resto, affermava come non sia possibile rinunciare alle specie esotiche, quando queste offrano la possibilità di soluzioni economicamente favorevoli, per puro rispetto ad un principio che certamente egli amava ma del quale, io penso, non gli sfuggiva il carattere di romantico naturalismo. E le sue convinzioni erano, in ogni modo, confortate dall'esperienza di altri paesi che, ricorrendo alla coltivazione di specie esotiche, hanno ottenuto, in pochi decenni, produzioni legnose altrimenti irraggiungibili. Contro un altro, ed anche più concreto, timore urtava peraltro la sua politica forestale: che, con le specie esotiche, si introducessero anche nuovi parassiti e nuovi microorganismi, così correndo il rischio di provocare squilibri biologici e di alterare, nelle zone d'importazione, l'esistente equilibrio di forze. Ma Pavari sapeva che l'introduzione di parassiti non è più legata, oggi, alla cultura di specie esotiche; e sosteneva che, anzi, la cultura di specie esotiche era il mezzo più naturale per riparare alle disastrose conseguenze della mancanza di resistenza delle specie indigene di fronte ai parassiti nuovi.

Le piante forestali esotiche che Pavari ha studiato per prime ed alle quali ha forse dedicato maggior mole di studio sono alcune specie di Eucalitti e l'Abete di Douglas. Ma ad esse, molte altre se ne sono poi aggiunte tanto che il loro totale si avvicina ad una novantina anche se, di queste, solo un numero relativamente piccolo ha superato l'esame della possibilità di coltivazione in Italia. I lavori che Pavari ha dedicato a siffatti problemi possono essere distinti in due gruppi, nel primo dei quali sono da comprendere gli studi che servono in certo modo da orientamento, e che contengono le basi concettuali e l'esposizione dei criteri bio-ecologici che hanno guidato la sua sperimentazione; ed è in questi lavori che è proposta la classificazione fitoclimatica che va col nome di classificazione di Mayr-Pavari e della quale ho fatto già cenno. Il secondo gruppo, contiene la documentazione e la discus-

sione dei risultati ottenuti e costituisce il bilancio di tanti anni di esperienze: un bilancio incondizionatamente attivo e che, in ogni modo, documenta una prodigiosa attività.

Ma, anche se il suo interesse era prevalentemente diretto alle specie, esotiche, Pavari non ha dimenticato quelle nostrane. Notevoli, a questo riguardo, sono i suoi studi sulle brughiere lombarde e sul loro popolamento a base di pino silvestre, sulla ecologia e sulla cultura del pino marittimo e del pino domestico; ma soprattutto degna di rilievo è la sua monografia del cipresso in Toscana che, da sola, vale a dare la misura di questo selvicoltore per il quale ogni problema del bosco andava esaminato su basi strettamente naturalistiche, biologiche ed ecologiche.

Molti altri sono gli argomenti che costituiscono l'ossatura dell'opera di Pavari e, se anche non mi è dato di farne una elencazione completa, non è possibile tacere dei suoi numerosi contributi nel campo della genetica forestale e del miglioramento genetico delle piante da bosco. Si tratta di problemi che Pavari ha studiato sotto punti di vista diversi; fondamentali, sotto l'aspetto applicativo, sono le sue ricerche sulle provenienze e razze di Abete bianco; sotto l'aspetto dell'applicazione della genetica alla patologia forestale, sono ancora da ricordare i suoi brillanti contributi alla soluzione dei problemi posti dal cancro corticale del castagno. Ma la rassegna dell'attività scientifica di Pavari sarebbe troppo incompleta se non si ricordasse come, pure assorbito dallo studio di tanti problemi, così impegnativi per l'economia forestale italiana, egli abbia sempre trovato il tempo per continuare le ricerche su temi ecologici che, certamente, sono quelli che meglio appagavano la sua vocazione di naturalista: le pubblicazioni ad essi relative punteggiano, si può dire, tutta intera la sua attività; ed un particolare risalto meritano altresì quelle sintesi mirabili del suo pensiero sui problemi più fondamentali della selvicoltura europea, che sono rappresentate dalle numerose conferenze da Lui tenute sia in Italia che all'estero.

Ma Pavari non era soltanto uno studioso ed uno sperimentatore: egli era anche un Maestro. Scrittore brillante, efficace e di insuperabile chiarezza, egli era altresì un parlatore vivace, dalla comunicativa immediata e che sapeva affascinare l'uditorio non tanto per una ornata facondia quanto per il calore e la convinzione che poneva nel suo insegnamento. Intere generazioni di forestali, di studiosi e di tecnici, sono uscite dalla sua scuola, la quale vanta anche nomi illustri di allievi già affermati o addirittura già famosi: primo tra tutti quello di De Philippis che gli fu successore nell'insegnamento di selvicoltura nella Facoltà Agraria e Forestale di Firenze: inoltre quelli di Susmel, di Allegri e di molti altri.

Tanti anni di assiduo e fecondo lavoro fecero di Pavari la più alta e più indiscussa autorità nel campo della selvicoltura italiana. Si può dire che, da quarant'anni a questa parte, non si sono fatti, in Italia, lavori forestali di qualche importanza senza prima sollecitarne la consulenza: basti citare, come semplici esempi, la questione delle piante da cellulosa, le alberature delle Bonifiche pontine, le alberature di Arborea. Ma anche nel campo della selvicoltura europea, quella di Pavari fu una posizione di preminenza. Lo

dimostrano le sollecitazioni che tanti centri culturali forestali di numerose nazioni straniere gli rivolgevano affinché egli, in un modo o nell'altro, partecipasse attivamente alla loro vita, nonché il prestigio ch'Egli godeva presso Istituzioni Internazionali di coordinamento politico-economico di problemi forestali, quali la F.A.O., l'O.E.C.E., la Commissione Europea Forestale ed altre ancora, le quali continuamente ricorrevano alla sua consulenza. Nella F.A.O., egli era anche presidente onorario della Sotto-Commissione per i problemi forestali italiani. Ma le istituzioni, le Commissioni, gli Enti, ai quali Pavari portò il prezioso contributo della sua larghissima competenza, formerebbero un troppo lungo elenco; basterà ricordare ch'Egli era direttore del Centro di Studi del Castagno del C.N.R., Presidente dell'Istituto Nazionale del Legno del C.N.R., membro del Consiglio Superiore dell'Agricoltura e Foreste, del Consiglio d'Amministrazione dell'Azienda di Stato per le Foreste Demaniali e del Consiglio Direttivo dell'Ente Nazionale per la Cellulosa e per la Carta. Fu inoltre Presidente dell'Unione Internazionale degli Istituti di Ricerche Forestali per il triennio 1954-1956, Delegato Ufficiale del Governo Italiano nella Commissione Internazionale del Pioppo e nella Commissione Internazionale del Castagno della F.A.O. e membro del Gruppo Nazionale di Esperti per gli Eucalipti della F.A.O.

L'alto valore scientifico della sua opera, gli valse il riconoscimento di numerosissime Accademie. Oltre che corrispondente della nostra, fu socio ordinario dell'Accademia Italiana di Scienze Forestali, corrispondente dell'Accademia delle Scienze di Torino, dell'Accademia di Agricoltura di Torino, dell'Accademia della Vite e del Vino di Siena, socio ordinario dell'Accademia di Agricoltura di Francia (unico membro straniero nella Sezione di Selvicoltura), socio dell'Accademia delle Scienze Finlandese, socio ordinario della Società Forestale Finlandese, della Società Forestale degli Stati Uniti d'America, della Società Forestale dell'Argentina, dell'Accademia di Scienze Agrarie di Berlino, dottore *honoris causa* in Scienze Forestali al Politecnico di Dresda, medaglia «Burckhardt» dell'Università di Göttingen, medaglia d'oro al Merito Silvano in campo nazionale, cavaliere al Merito Agricolo di Francia, I° Premio Marzotto per l'Agricoltura.

Ma un aspetto ancora deve essere ricordato, di Pavari, onde non lasciare troppo incompleto il suo ricordo: la sua grande umanità. Amantissimo della famiglia, egli era un semplice, un mite, un uomo buono ed amabile che amava la natura e che, naturalmente, amava anche il suo prossimo. Pavari non aveva nemici, ognuno che lo conosceva, sia pure superficialmente come, purtroppo, lo conobbi io, gli diventava subito amico: tanta era la sua cordialità, tanto era spontanea la simpatia che da lui emanava e la bontà che spirava dai suoi occhi e dal suo sorriso. Tale era l'Uomo di cui, maldestramente, ho cercato di tratteggiarvi la figura.

Lavoratore che non ha conosciuto sosta, egli ha vigorosamente contribuito al progresso scientifico ed economico del nostro Paese e ne è stato, per tutta la vita, un fedele servitore. Noi lo ricordiamo con accorato rimpianto, orgogliosi di averlo noverato fra i nostri consoci.

Parole pronunciate dal Vice Presidente dell'Accademia, prof. Vincenzo Arangio-Ruiz, davanti alle due Classi riunite nella seduta antimeridiana dell'II febbraio.

Cari Colleghi,

il tragico evento che per quasi un anno avevamo sentito incombere sulla nostra Compagnia, ma non senza che ci sorreggesse un tenue filo di speranza, si è dolorosamente compiuto: e dal 24 gennaio FRANCESCO GIORDANI, nostro Presidente amatissimo, non è più con noi.

Quanto grave sia la perdita per la Scienza da lui prediletta, e quanto per la Nazione intera, non saprei dirvi in quest'ora angosciata: a dir della prima mi mancherebbe d'altronde la competenza, e dire della seconda non potrei senza una documentazione della quale tutti, ciascuno per quel tanto che più o meno casualmente gli è dato conoscere, sappiamo che risulterà gigantesca. Ma erano in lui, e in misura così eccezionale da potersi dire unica nella esperienza di molti fra noi, qualità di mente e di cuore che ci hanno toccati e ci toccano in profondità.

Era la sua una mente privilegiata, nella quale all'educazione scientifica particolare, che sappiamo incomparabile, si accompagnava la facoltà d'impadronirsi di ogni e più complesso problema di scienza e di vita, riducendolo ai suoi termini fondamentali e risolvendolo nel modo più semplice e sicuro. L'argomentazione che così egli presentava in ogni circostanza poteva perfino far sorgere, in chi occasionalmente l'ascoltasse, l'impressione dell'ovvio: ma non era questo il sentimento di chi, essendosi già per sua parte arrovellato sullo stesso problema o avendo visto altri ad arrovellarvisi, fosse in grado di valutare la genialità di quella perfetta aderenza della soluzione al problema, e l'estrema rapidità di quell'intuito sovrano.

Di qui l'ineguagliabile prestigio col quale, pur dovendo nell'adempimento delle gravi mansioni sovente affidategli operare scelte fra interessi contrastanti e pronunciare la parola decisiva nel conferimento d'incarichi e di onori, egli ha potuto prendere così delicati provvedimenti conservando sempre nel giudizio unanime degli interessati la fiducia dovuta all'arbitro più equo e consapevole. E certo nessuno di noi potrebbe valutare in pieno lo sforzo di meditazione che queste ed altre incombenze, anche di ordine amministrativo, gli imponevano: ma ben sappiamo come la coscienza del prestigio di cui godeva, certamente chiara nel suo spirito ad onta dell'innata modestia, gli abbia più volte impedito di far presente, in confronto di nuove richieste, il sovraccarico di lavoro a cui avrebbe dovuto andare incontro: così il suo organismo si è logorato anzi tempo, finché l'immane fatica non lo ha abbattuto.

In questa Accademia egli ha tenuto la Presidenza poco più di due anni, anzi di fatto, fra una ed altra fase della dura malattia che lo ha portato alla tomba, per brevi periodi, ciascuno di pochi mesi. Ma per sei anni era stato attivissimo Vice Presidente, guidando con mano ferma e con cordiale sentimento di collegialità la Classe di Scienze fisiche matematiche e naturali. E nei pochi periodi in cui ha esercitato la Presidenza non vi è stato problema dell'Accademia di cui non si sia personalmente e appassionatamente occupato, seguendo con vera angoscia situazioni refrattarie ad una immediata soluzione e risolvendo tutte le altre, fino alle più modeste, con quella scrupolosa competenza di amministratore e quel benefico calore umano che erano sue virtù dominanti.

Altro e molto di più sarà detto di lui, da colleghi assai più competenti di chi oggi vi parla, quando lo commemoreremo: oggi io dovevo solo dire quello che è nel sentimento desolato di noi tutti, cioè che in Francesco Giordani abbiamo perduto, tutti e ciascuno, un grande amico, anzi un caro fratello, ed anche per chi è tanto più carico di anni un fratello maggiore. Vi prego solo di convalidare col vostro silenzio la decisione che i nostri Rendiconti, dell'una e dell'altra Classe, siano editi, per il fascicolo relativo a questa adunanza, listati a lutto, e v'invito a raccogliervi qualche istante nel ricordo di Francesco Giordani, *Lynceorum princeps*.

La seduta è stata sospesa in segno di lutto.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio Anziano G. Levi chiede di essere dispensato dalla presidenza, che viene pertanto assunta dal Collega Cassinis il quale, dopo il prof. Levi, è il più anziano tra i Soci Nazionali presenti.

Il prof. Cassinis, rendendosi interprete degli unanimi sentimenti della Classe, esprime, con commosse parole, il più profondo dolore per la morte dell'amato Presidente prof. Francesco Giordani, avvenuta a Napoli il 24 gennaio c.a., dopo una lunga e dolorosa malattia che tutti i Colleghi hanno seguito, giorno per giorno, con angosciata trepidazione.

Il Socio Anziano Cassinis annuncia che il Presidente Giordani sarà degnamente commemorato in una prossima seduta plenaria e non crede pertanto di dover oggi illustrare gli altissimi meriti scientifici dello Scomparso. Desidera soltanto ricordare la grandezza e la nobiltà del Suo animo e rinnovare i sentimenti del più vivo cordoglio dell'intera Accademia per la dolorosa e grave perdita di un Uomo, quale Francesco Giordani, che il Sodalizio altamente si onora di aver potuto annoverare tra i suoi più illustri Presidenti.

Il Socio Anziano Cassinis, dopo aver espresso la certezza che il ricordo del compianto Presidente rimarrà imperituro nel cuore di tutti i Soci, invita la Classe ad osservare un minuto di raccoglimento.

Comunica quindi la dolorosa notizia della morte del Socio Nazionale prof. Alberico Benedicenti, della Categoria V (Sezione Fisiologia), deceduto il 2 febbraio c.a. e del Socio Straniero prof. Arthur Day, della Categoria IV (Geologia, Paleontologia, Mineralogia e applicazioni), della cui morte, che risale al 2 marzo 1960, l'Accademia è venuta solo ora a conoscenza.

Alberico Benedicenti, Socio Nazionale dal 1938, fu Direttore dell'Istituto di Farmacologia di Genova, da lui creato, ed effettuò importanti ricerche nel campo della Farmacologia, della Chimica-fisica e della Chimica-biologica, ottenendo risultati di grande interesse ed originalità. Fu anche Autore di un fortunatissimo libro di storia della medicina dal titolo «Malati, Medici e Farmacisti», che attesta la sua grande cultura storica ed umanistica.

Arthur Day, Socio Straniero dal 15 agosto 1924, fu Direttore del Geophysical Laboratory della Carnegie Institution di Washington ed eseguì personalmente numerosissimi lavori intesi a studiare, con i più perfezionati metodi della Chimica-fisica moderna, le condizioni di formazione di importanti minerali e rocce. La sua opera fu veramente classica e fondamentale.

Alla memoria degli illustri Consoci scomparsi il prof. Cassinis eleva un pensiero di reverente omaggio.

Dà quindi la parola al Socio Tonzig che commemora il compianto Collega Aldo Pavari.

Sono presenti i familiari dello Scienziato scomparso e, in rappresentanza della Stazione Sperimentale di Selvicoltura di Firenze, della quale il prof. Pavari fu Direttore, il dott. Allegri e il prof. Morandini.

Hanno inviato messaggi di adesione i proff. Giuliani e Patrone, rispettivamente Presidenti dell'Accademia Economico-Agraria dei Georgofili e dell'Accademia Italiana di Scienze Forestali di Firenze, il prof. Glesinger, Direttore della Direzione Foreste e Prodotti Forestali della F.A.O., il prof. De Horatis, della Facoltà Agraria e Forestale dell'Università di Firenze, il prof. Susmel della già citata Stazione Sperimentale di Selvicoltura e numerosi Colleghi, amici e discepoli dell'illustre Scienziato.

Il Socio Anziano Cassinis ringrazia il Collega Tonzig per la sua elevata orazione ed esprime ai familiari del prof. Pavari le rinnovate condoglianze dell'Accademia e sue personali per la perdita del valoroso Collega, del quale tutti apprezzavano le alte doti di studioso e di realizzatore e che sempre sarà ricordato con affetto.

Comunica quindi che il prof. Spadolini ha accettato di commemorare il Socio Gilberto Rossi, ma ha pregato la Presidenza, la quale ha aderito alla richiesta, di rinviare la commemorazione stessa all'anno accademico 1961-62.

Dà poi notizia che nel prossimo mese di marzo avrà luogo la commemorazione del Socio De Lorenzo, a cura dei Colleghi D'Erasmo e Pagliaro, che illustreranno rispettivamente la figura e l'opera del compianto Collega sotto l'aspetto del geologo e sotto quello dell'umanista.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Socio Anziano Cassinis comunica che è presente alla seduta la prof.ssa Alla Massevitch, Vicepresidente del Consiglio Astronomico dell'Accademia delle Scienze dell'U.R.S.S. e, mentre prega l'illustre ospite di portare il saluto dei Lincei alla sua Accademia, auspica un sempre più fecondo scambio di rapporti fra i due Enti.

Il prof. Cassinis è lieto di informare i Colleghi, su richiesta del Socio Pensa, che lo schema di Statuto dell'erigenda Fondazione « Camillo Golgi » è stato ormai predisposto e che la Fondazione stessa potrà contare su un capitale iniziale di circa L. 7.500.000. Mentre rinnova i più vivi ringraziamenti ai Collega Pensa e Pupilli per la nobile iniziativa da essi intrapresa, assicura che il suddetto schema di Statuto verrà preso in esame dalla Presidenza per essere quindi portato, in conformità della prassi accademica, all'approvazione delle Classi riunite.

Dà quindi lettura di una circolare del « Centre International Provisoire de Calcul », relativa alla prossima pubblicazione degli atti del « Colloque sur le traitement numérique des équations différentielles ordinaires, des équations intégrales et intégro-différentielles », svoltosi a Roma dal 20 al 24 settembre 1960.

Comunica infine che dal 6 marzo al 6 maggio 1961 avrà luogo nell'Istituto d'Igiene « G. Sanarelli » dell'Università di Roma, un corso complementare di Igiene pratica.

CONGRESSI

Il Socio Anziano Cassinis informa i Colleghi dell'ottimo esito dei lavori preparatori per l'organizzazione dei due Convegni, che saranno tenuti nel corrente anno accademico, rispettivamente sul tema: « Le funzioni della Geologia nei lavori di interesse pubblico » e sul tema: « Equilibri biologici ed insetticidi ».

Prega quindi il Socio Penta di riferire in merito alla prima delle suddette manifestazioni.

Il prof. Penta ricorda che, in conformità delle decisioni adottate dalla Accademia, su proposta del Collega Gortani, è stato indetto un Convegno per discutere il tema delle funzioni applicative della Geologia ai lavori pubblici o privati che abbiano riflessi pubblici e che, all'uopo, fu nominata dall'Accademia, nell'adunanza generale dell'8 giugno 1960, una Commissione composta dai Soci Giorgio e G. B. Dal Piaz, D'Erasmo, Gortani, Merla e dallo stesso prof. Penta, che ebbe l'incarico di coordinare il lavoro della predetta Commissione.

L'oratore comunica che la Commissione, dopo averlo nominato Presidente-relatore generale del Convegno, affidando la presidenza onoraria al Collega Gortani, ha ormai ultimato il programma. Quale periodo del Convegno è stata scelta la terza decade di maggio, con riserva di fissare tempestivamente la data definitiva della manifestazione, i lavori della quale richiederanno, con ogni probabilità, tre giorni, mattina e pomeriggio.

Sono stati invitati, quali relatori, i proff. Cadisch, Socio Straniero della Accademia, Calembert, Goguel, Kieslinger, nonché i Colleghi Gortani, G. B. Dal Piaz, Merla, Desio e Trevisan. Ad eccezione dei proff. Goguel e Merla che, per precedenti impegni, sono stati costretti a declinare l'incarico, i relatori designati hanno fatto pervenire la loro adesione. Saranno inoltre invitati a prender parte ai lavori studiosi e tecnici che notoriamente hanno interesse per l'argomento.

Prende quindi la parola il Socio Ghigi per illustrare l'organizzazione del Convegno sul tema: « Equilibri biologici ed insetticidi », che è stato fissato per mercoledì 10 e giovedì 11 maggio p. v.,

La Commissione di studio, costituita dall'Accademia e successivamente integrata, è composta dallo stesso Socio Ghigi, dai Colleghi Cambi, Grandi, Puntoni, Quilico, Tonzig e dai proff. Speroni e Pavan.

La Commissione, che si è riunita varie volte, ha provveduto alla designazione dei singoli relatori e alla divisione del lavoro di questi, fondandosi su criteri che consentano di trattare degli equilibri biologici in relazione ai diversi elementi organici ed inorganici. Saranno inoltre invitati studiosi particolarmente competenti.

Il diario dei lavori è stato pertanto predisposto nel modo seguente:

Dopo una introduzione del Socio Ghigi, al quale è stato affidato il compito di Presidente del Convegno, il Collega Grandi farà una relazione

generale sull'argomento, il prof. Vittorio Del Vecchio riferirà sulla parte sanitario-igienica, mentre il prof. Riccardo Milani parlerà del problema delle popolazioni di Insetti resistenti agli insetticidi e il Collega Tonzig dei danni provocati dagli insetticidi agli Insetti pronubi. Prenderà quindi la parola il Socio Grandi per leggere la seconda parte, conclusiva, della sua relazione.

Successivamente parleranno il prof. Mario Pavan, per illustrare l'utilità delle Formiche nella lotta biologica contro le processionarie ai pini in difesa delle foreste, il prof. Giovanni Speroni e il Socio Quilico, che si occuperanno della parte chimica e, infine, ancora il Socio Ghigi che concluderà riassumendo i risultati del Convegno e formulando quelle proposte che risulteranno opportune per risolvere il grave problema dei danni enormi apportati al complesso della natura e degli squilibri biologici, problema questo in merito al quale è ormai urgente che sia detta una parola equilibrata ed autorevole da parte di un corpo scientifico qualificato, quale è appunto l'Accademia dei Lincei.

Il Socio Anziano Cassinis ringrazia i Colleghi Penta e Ghigi, nonché i membri delle due Commissioni organizzatrici e formula sinceri voti per il miglior successo dei due Convegni.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Anziano Cassinis, annuncia che è uscito il fascicolo V dei Rendiconti (novembre 1960) e che è imminente la pubblicazione del VI.

Il Socio Sansone presenta il volume del prof. Cassina, dal titolo: « Critica dei principi della matematica e questioni di logica » con le seguenti parole:

« Il volume del prof. Ugo Cassina dell'Università di Milano, che io ho l'onore di presentare all'Accademia, è una raccolta di articoli pubblicati dall'autore nel corso di un trentennio, articoli che nel loro insieme formano un complesso di ricerche tra loro coordinate sulla critica dei principi della matematica e su alcune questioni di logica.

« Il prof. Cassina, che è uno dei più noti scolari diretti di Giuseppe Peano e che delle Opere del suo Maestro è stato un appassionato editore, commenta e divulga questioni che interessano sia coloro che professano l'insegnamento sia coloro che amano soffermarsi sui fondamenti filosofici della scienza da essi coltivata.

« Il volume, composto di ventitrè capitoli tutti redatti in forma perspicua, è ricco di precisi riferimenti bibliografici e di note critiche particolarmente per quel che riguarda le questioni geometriche.

« Anche in questa occasione merita di esser ricordata la Casa Editrice Cremonese che tanto interesse porta all'editoria matematica ».

Il Socio Margaria presenta un volume contenente le « Pubblicazioni dell'Istituto di Fisiologia della Università di Milano », che comprende 103 Note uscite nel periodo 1957-1960.

Il Socio Zappa illustra il volume I delle « Opere scelte » di Gaetano Scorza, pubblicato a cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del C.N.R.,

già incluso nell'elenco delle opere pervenute in omaggio all'Accademia, che figura nel fascicolo dei Rendiconti della seduta del mese di novembre 1960, con le seguenti parole:

« Il presente volume (il primo di tre) contiene quasi tutti gli scritti di Gaetano Scorza apparsi nel periodo che va dal 1898 al 1915. Gaetano Scorza è uno dei maestri della scuola italiana di Geometria algebrica, e la sua figura ha acquistato maggior rilievo col passare degli anni: infatti egli ebbe più degli altri ben chiara l'idea dell'importanza che avrebbe ottenuto nello sviluppo della geometria lo strumento dell'algebra moderna, e la sua teoria delle matrici di Riemann è uno dei primi esempi concreti di algebrizzazione di fatti geometrici. I recenti sviluppi della geometria, specie in Francia ed in America, sono una piena conferma dell'esattezza del punto di vista dello Scorza.

« I lavori pubblicati in questo primo volume appartengono al primo periodo di attività dello Scorza, caratterizzato da interessi più propriamente geometrici, mentre il secondo volume, in corso di stampa, si riferisce al periodo di elaborazione della teoria delle matrici di Riemann, che getta un ponte tra la geometria e l'algebra moderna; il terzo volume infine, relativo al periodo che va dal 1921 alla morte del nostro indimenticabile maestro, raccoglierà gli studi di carattere più nettamente algebrico. In tutti i volumi sono però intramezzati anche scritti di carattere didattico, storico e filosofico, che mettono in luce la particolare concezione matematica dello Scorza: la matematica mista come opera d'arte, come ricerca di bellezza e di armonia.

« L'Unione Matematica Italiana, il Consiglio Nazionale delle Ricerche, e l'editore Cremonese, si sono resi benemeriti nel curare la raccolta e la ristampa degli scritti del grande studioso italiano che ha lasciato nei suoi discepoli un ricordo vivissimo ».

Il Socio Anziano Cassinis, dopo aver comunicato che è pervenuto all'Accademia il Trattato di storia della medicina, edito in quattro tomi, sotto la direzione del prof. A. Pazzini, dell'Istituto di Storia della Medicina dell'Università di Roma, ringrazia tutti i Colleghi che hanno presentato opere in omaggio.

Il Segretario Accademico presenta le pubblicazioni pervenute in dono all'Accademia.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci Picone, Carobbi, Penta, Solaini, D'Ancona, G. B. Dal Piaz, G. Levi, Supino, Tonzig, Bonino, Montalenti, Cotronei, Stefanelli, Quilico e Olivo.

Viene letto l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

KRALL G. — Moltiplicatore critico λ_{cr} per volte autoportanti. Note II, III e IV.

CARRARO F. - Osservazioni sulla geologia della regione compresa fra Pontebernardo e Sambuco (fianco sinistro della Valle Stura di Demonte, Alpi Marittime) (pres. dal Socio G. B. DAL PIAZ).

DOLCINI C. e DOLCINI B. - Impiego dell'etero-poli-acido fosfo-molibdico giallo per la colorazione delle proteine separate mediante elettroforesi su carta (pres. dal Corresp. G. AMANTEA).

DOLCINI C. e DOLCINI B. - Superficie d'espansione su carta da filtro di aliquote di soluzioni proteiche in funzione della concentrazione (pres. dal Corresp. G. AMANTEA).

RIZZOLI C. e ZANNOTTI M. - Studio statistico delle grandezze cellulari nel nucleo dell'ipoglosso nell'uomo di diversa età (pres. dal Socio O. M. OLIVO).

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta dell'11 febbraio 1961

- BALABAN G. Ju. — *Real'nyj mir v svete universal'noj teorii podvižnogo ravnovesija*. Hamilton, Kiev Printers Limited, 1960. Pp. 47, in-8°.
- CACCURI Scipione. — *Cardiopatie e attività lavorativa*. Roma, Istituto di Medicina Sociale, 1960. Pp. 22, in-8° (Argomenti di Medicina Sociale, 14).
- CASSINA Ugo. — *Critica dei principi della matematica e questioni di logica*. Roma, Edizioni Cremonese, 1961. Pp. VII-519, in-8°, con figg.
- Catalogo delle opere contenute nella Biblioteca [dell'Istituto di Storia della Medicina dell'Università di Roma]*. Vol. I: *A-B*. Roma, Istituto di Storia della Medicina dell'Università di Roma, 1960. Pp. XVI-377, in-4° (in ciclostile).
- DESIRELLO N. — *La misteriosa energia che regge l'Universo*. 3^a ed. ancora ampliata. *Energia Atomica - Elettroni - Mesoni - Ultramesoni - Idrogeno - Uranio - Fissione e Fusione Atomica - Legge del Reticolo - Architettura Ultratomica - Pianeti - Stelle - Galassie - Ampliamento Leggi Avogadro, Ampère e II di Keplero - Energia Cosmica*. Torino, S.E.I., 1960. Pp. 154, in-8°.
- JUCCI Carlo. — *Le Società degli insetti*. Pavia, Tipografia del Libro, 1960. Pp. 24, in-8° (Symposia Genetica et Biologica Italica).
- LUYTEN Willem J. — Vedi: *Search (A) for faint blue stars*.
- MARGARIA Rodolfo. — Vedi: *Pubblicazioni dell'Istituto di Fisiologia della Università di Milano*.
- MAUGERI Salvatore. — *Patologia generica da rumori*. Roma, Istituto di Medicina Sociale, 1961. Pp. 16, in-8° con tavv. (Argomenti di Medicina Sociale, 15).
- PAZZINI Adalberto. — Vedi: *Trattato di Storia della Medicina*.
- Pubblicazioni dell'Istituto di Fisiologia della Università di Milano*. [A cura di R. Margaria]. Anni Accademici 1957-1960. Volume miscellaneo.
- RIMA Alessandro. — *Contributo allo studio della temperatura nel Cantone Ticino*. Estr. da « Rivista Tecnica della Svizzera Italiana », 1960, nn. 2-3-4.
- *Del campo gravitazionale*. S.n.t.
- SCHATZMAN E. — *Les réactions nucléaires importantes en astrophysique*. Estr. da « Le Journal de Physique et le Radium », vol. XXI, 1960, maggio.
- Search (A) for faint blue stars*. XXII: *The star density in high galactic latitude*. By Willem J. Luyten. Minneapolis, The Observatory, University of Minnesota, 1960. Pp. 5, in-8°.
- TATAFIORE Enrico. — *L'importanza medico-sociale dell'auxologia*. Roma, Istituto di Medicina Sociale, 1960. Pp. 46, in-8° (Argomenti di Medicina Sociale, 17).
- Trattato di Storia della Medicina*. Sotto la direzione del prof. A. Pazzini. Vol. I, libro I, p. I e p. II; vol. I, libro II; vol. I, libro III. Roma, Istituto di Storia della Medicina dell'Università di Roma, 1959-60. Noll. 4, in-4° (In ciclostile).

A. SIGNORINI e G. COTRONEI.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta dell'11 marzo 1961

Presiede il Socio anziano GINO CASSINIS

NOTE DI SOCI

Meccanica. — *Moltiplicatore critico λ_{cr} per volte autoportanti.*

Nota II del Socio GIULIO KRALL e di DOMENICO CALIGO, presentata (*) dal Socio G. KRALL.

4. (**) *Sugli equilibri tenso-flessionali.* — a) Proseguiamo nelle premesse con alcune generalità sugli equilibri tenso-flessionali. Hanno, questi, importanza in quanto segue non per l'analisi della stabilità dell'equilibrio (sulla quale influiscono non molto sensibilmente) bensì per controllare che le sollecitazioni specifiche critiche σ_{cr} , calcolate in base ai carichi critici, non superino il limite σ_p di proporzionalità.

b) Cominciamo con il rilevare che se, ad esempio, è $\psi_0 = \pi/2$ (come e nella fig. 7 che illustra un notevole esempio di volta circolare continua in più campate con copertura a sheds) e quindi T_z non si annulla ai bordi, non c'è un rimedio analogo a quello adottato per S; i regimi statici (3) vanno ancora bene, ma occorre sommare ad essi un regime ulteriore, corrispondente a quello che si genera nella volta senza carichi sulla superficie, ma con applicati idealmente ai bordi sforzi eguali e contrari a quelli che non si annullano: — $T_z(x, \psi_0)$, — $S(x, \psi_0)$.

Si potrebbe anche non considerare — $S(x, \psi_0)$, salvo a disporre del tirante di bordo dimensionato per un tiro (analogo a (6')) $Z(x) = \int_0^x S(x, \psi_0) dx$,

(*) Nella seduta dell'11 febbraio 1961.

(**) Continuiamo le numerazioni della Nota I.

o, più in generale, $Z = g_s(\psi_0) \int_0^x t(x) dx$; ma tant'è procedere più rigorosamente per $S(x, \psi_0)$ come per $T_2(x, \psi_0)$.

Il regime statico da sovrapporre, indotto da forze applicate ai bordi, è molto complesso; induce non solo sforzi superficiali T'_2, S', T'_1 (applichiamo l'apice per distinguerli dai primieri, T_2^0, S^0, T_1^0 , cui va allora applicato l'indice °), ma anche momenti flettenti e taglio nel senso della normale. Il loro calcolo, che si riporta alle classiche equazioni del Love ⁽¹²⁾ per le lastre



Fig. 7. - Sala a tracciare (Ansaldo - Genova).

curve, è difficile ma superabile numericamente grazie a tabellazioni sistematiche compendiate in un volume (cfr. ⁽⁴⁾), che comincia là dove termina la già citata voce «Volte autoportanti» ⁽³⁾. Rileviamo che in seguito si terrà conto di questi equilibri flessionali solo per verificare se vien superato il limite σ_p di proporzionalità. Chè, se così avviene, i carichi critici g_{cr} o p_{cr} calcolati per un modulo di elasticità costante diventano illusori. Ma, come faremo vedere in una Nota successiva, dopo aver esaurito il problema nell'ambito lineare, quei valori illusori servono, attraverso un'osservazione opportuna, per calcolare i valori effettivi.

(12) A. E. H. LOVE, *A treatise on the Mathematical Theory of Elasticity* (The University Press, Cambridge 1952), Cap. XXIII e segg.

c) Si ritiene lecito trascurare il suddetto regime flessionale, perché qui si considera il caso $\psi_0 = \pi/2$ e per g si ammette esista il tirante di bordo che assorbe Z (si rilevi che il regime additivo dà dei T_r' , localizzati nell'intorno di $\pm \psi_0$, di somma Z per ogni bordo e momenti flettenti secondari nel piano delle direttrici rapidamente smorzantisi procedendo verso il vertice); per p non occorre ammettere niente, giacché S si annulla in $\pm \psi_0$. Naturalmente, in tal guisa non si parla delle volte a direttrice circolare di apertura $2\psi_0 < \pi$, volte in ogni caso tecnicamente non molto raccomandabili per le quali, diminuendo $2\psi_0$, il regime flessionale secondario diventa sin troppo importante quando non si saldino lungo le generatrici di bordo travi in spessore sottile opportunamente dimensionate. Per volte più ribassate della volta a tutto sesto, indipendenti da questo accorgimento, non resterà che fissare l'attenzione su quelle a base cicloidica, che ammettono un regime di sola tensione superficiale; lo ammettono anche meglio quelle a base ellittica ⁽¹³⁾ ma le espressioni per T_2 , S , T_r sono sì complesse da non potersi adoperare se non in forma tabellare, inadatta questa, come subito si vedrà, per gli sviluppi algoritmici che richiede l'analisi della stabilità.

d) Prima di chiudere questa premessa merita raffrontare gli sforzi superficiali T_2 , S , T_r della soluzione effettiva (flesso-estensionale)

$$T_2 = T_2^o + T_2^i, \quad S = S^o + S^i, \quad T_r = T_r^o + T_r^i$$

con quelli T_2^o , S^o , T_r^o della soluzione estensionale pura (a membrana) ai quali ci riferiamo in seguito. Per il carico g (non invece per p) appaiono questi ultimi in certo senso strani per quel $T_r < 0$ ($0 < T_r$) su *tutta* la direttrice (cfr. fig. 3) e per il tiro, localizzato in $\pm \psi_0$, $Z = - \int_0^{\psi_0} T_r \cdot R d\psi$, che sta ad equilibrarli con il momento esterno M_o .

Ed è infatti:

$$\int_{-\psi_0}^{\psi_0} T_r \cdot R \cos \psi \cdot R d\psi = M_o(x)$$

essendo, per $g =$ costante uniformemente diffuso su tutta la superficie della volta,

$$M_o(x) = (2 R \psi_0 \cdot g) \cdot \frac{L^2}{2} \begin{cases} \xi(1 - \xi), & \text{per timpani snodati} \\ \left[\xi(1 - \xi) - \frac{1}{6} \right], & \text{per volte continue su infinite campate.} \end{cases}$$

Orbene, gli sforzi T_2 , S , T_r effettivi si possono dare avvalendosi delle deduzioni tratte in ⁽⁴⁾, con riferimento a due coppie di valori per i parametri geometrici a/L , h/L di una volta intorno ai quali fanno rosa assai ristretta,

(13) Op. cit. in ⁽³⁾ pp. 747-752.

come ha osservato Aas Jakobsen, i parametri delle volte più notevoli sino ad ora costruite. Sicché si hanno due tipi, I e II, di volte, *lunghe* o *corte*, così caratterizzati:

$$\text{Tipo} \begin{cases} \text{I, lungo,} & a/L = 0,36 \quad ; \quad h/L = 0,0025; \\ \text{II, corto,} & a/L = 2,70 \quad ; \quad h/L = 0,0081. \end{cases}$$

Eliminati in tal guisa due parametri dalla tabellazione, occorre ancora sviluppare il carico costante g in serie trigonometrica

$$g(x) \sim \frac{4}{\pi} g \sum_{1,3,5,\dots} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{L} x,$$

(togliendo g , si ha da qui lo sviluppo dell'unità) e soffermarsi sul solo primo termine

$$g(x) = \frac{4}{\pi} g \sin \frac{\pi}{L} x;$$

il quale, agli effetti globali (momento flettente M), rappresenta bene il carico uniforme; si ha infatti, al mezzo ($x = L/2$), integrando l'equazione $M''(x) = -g(x)$ (per $M = 0$, agli estremi): $M(L/2) = \frac{4L^2}{\pi^3} g = \frac{L^2}{7,7516} g$ in luogo di $\frac{L^2}{8} g$. Con queste semplificazioni si possono allora scrivere gli sforzi T_2, S, T_1 effettivi nella forma analoga alla (3),

$$(3) \quad \begin{cases} T_2 = ga \sin \frac{\pi}{L} x \cdot t_2(\psi), \\ S = \mp g \tilde{t}(x) \cdot s(\psi), \\ T_1 = \frac{g}{a} \tilde{m}(x) \cdot t_1(\psi), \end{cases}$$

con $\tilde{t}(x)$ ed $\tilde{m}(x)$ taglio e momento nella trave corrispondente alla volta libera agli estremi o incastrata dalla continuità su più campate, ma calcolati *non* per il carico uniformemente distribuito $q = 1$ bensì per $q = \sin \pi x/L$. Il $4/\pi$ a fattore non appare giacché è già compreso nelle espressioni di t_2, s, t_1 che diamo in Tabella I per i sopracitati Tipi I e II talchè, considerando per semplicità il carico uniforme in luogo di quello armonico, si dovrebbe porre $q = \pi/4$ in luogo di $q = 1$. Il termine $\sin \pi x/L$, che interviene al posto dell'unità in T_2 , deriva dal fatto che il carico è armonico rispetto ad x , anziché costante; ma tale termine può essere tolto senz'altro e sostituito con 1 (o con $\pi/4$, più propriamente) tanto più che, se si tenesse conto di tutti i termini dello sviluppo in serie per g , si avrebbe in $x = 0, L$ un superamento dell'unità per un noto fenomeno (cosiddetto di Gibbs) tipico delle serie trigonometriche nei punti di discontinuità.

Quanto al taglio $\tilde{t}(x)$ ed al momento $\tilde{m}(x)$, che qui abbiamo introdotto per estendere la portata della suddetta tabella anche alle volte su infinite

campate, si ha

$$\tilde{t}(x) = \begin{cases} \frac{L}{\pi} \cos \frac{\pi}{L} x, \\ \frac{L}{\pi} \cos \frac{\pi}{L} x, \end{cases} \quad \tilde{m}(x) = \begin{cases} \frac{L^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi}{L} x, & \text{per volta libera,} \\ \frac{L^2}{\pi^2} \left[\sin \frac{\pi}{L} x - \frac{2}{\pi} \right], & \text{per volta su infinite campate.} \end{cases}$$

Avvertiamo che per scrivere la presente tabella si sono rilevate le funzioni t_2, s, t_1 dalle tabelle della citata opera ⁽⁴⁾; ivi è usato per argomento l'angolo φ contato da un bordo all'altro, cosicché cresce da 0 a $2\psi_0$, mentre noi qui ci riferiamo alla colatitudine $\psi = \varphi - 90^\circ$. I valori tabulari, là riportati a meno del fattore gL , comune a T_2, S, T_1 , sono stati qui moltiplicati ordinatamente per

$$L/a, \pi, \pi^2 a/L.$$

per adeguarli alle formule (3); a piè di ogni colonna è citata la pagina e la colonna corrispondente in ⁽⁴⁾.

Si noti che l'intervallo $(0, 90^\circ)$ da noi considerato per la ψ corrisponde all'intervallo $(90^\circ, 180^\circ)$ per la φ , onde il cambiamento di segno nella s per effetto della sua antisimmetria rispetto al colmo. Si noti ancora che, dopo le moltiplicazioni sopra dette, si può calcolare la soluzione a membrana anche direttamente dalle formule

$$t_2 = -\frac{4}{\pi} \cos \psi = -1,27 \cos \psi,$$

$$s = \frac{8}{\pi} \sin \psi = 2,55 \sin \psi,$$

$$t_1 = -\frac{8}{\pi} \cos \psi = -2,55 \cos \psi.$$

Le figure 3 a, 3 b illustrano l'andamento delle $t_i = t_i(\psi)$ ovvero $t_i = t_i(y)$, ($y = a \cos \psi$) e merita raffrontarle con la $t_i(\psi)$ della soluzione a membrana e con quella alla Navier date in fig. 3 calcolate con la relazione tipica per le travi inflesse, nel caso specifico

$$T_i = \frac{M}{\mathfrak{J}} \cdot y',$$

con \mathfrak{J} momento di inerzia del semicerchio rispetto all'asse baricentrico da cui si conta l'ordinata y' .

L'andamento movimentato (che si ritrova del resto nelle travi in parete alta, cfr. *Manuale* cit. in ⁽³⁾, p. 729) non deve stupire; il carattere esasperato di t_1 in prossimità dei bordi appare evidente e giustifica Z impulsivo assimilato a una forza per la valutazione dell'elemento tirante.

Infine, a scanso di ambiguità, si noti che in ⁽⁴⁾ l'incastro della volta si riferisce all'incastro nei timpani della lastra che la sostituisce, mentre i timpani rimangono snodati.

La perturbazione (ivi considerata e avente carattere secondario), che dal timpano corre smorzandosi verso il mezzo, qui non si considera.

Nella Tabella I, si riporta per completezza anche G_a , momento nel piano della direttrice.

e) Tutto ciò premesso, passando al cuore del problema, cioè all'analisi qualitativa degli equilibri sintetizzati dalle (3), diremo che, nelle Note citate in ⁽¹⁾, è stata data una soluzione teorica senz'altro giusta, informata

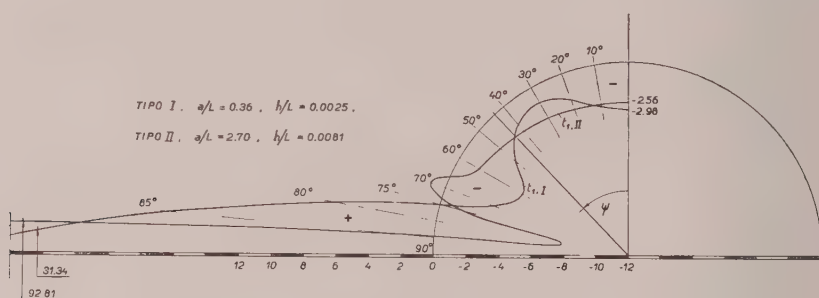


Fig. 3 a.

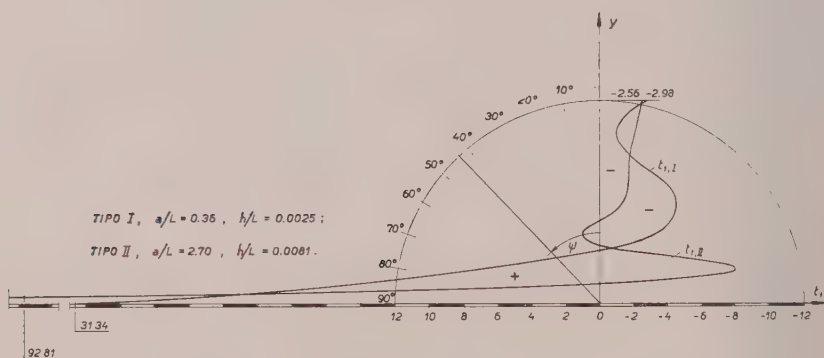


Fig. 3 b.

ad una precisa estensione all'elastostatica delle volte cilindriche di quel principio del Dirichlet che portò per primo il rigore nelle questioni di stabilità in generale. Passando però alla ricerca di formule definitive per i g_{cr} o p_{cr} critici, allora incominciarono le grandi rinunce, le ipotesi non sempre legittime o, quanto meno, se legittime dal punto di vista della ricerca di loro limitazioni inferiori, tali da apparire poi troppo al di sotto della realtà sperimentale.

Sicché, dovendo raccogliere in ⁽³⁾ alla voce *Stabilità* (pp. 626-629) risultati concreti per la pratica, è avvenuto a noi stessi di dare limitazioni quasi empiriche ai risultati ottenuti o di presentare formule non meno empiriche, tratte da vari Autori dalla teoria dei tubi circolari soggetti a pressione esterna, formule di cui proprio non si riesce a vedere l'applicabilità nel caso delle volte autoportanti.

TABELLA 1.

Colatitudine ψ	Ordinata y $y = 1 - \cos \psi$	Soluzione a membrana				Tipo I: $a/L = 0,36$; $h/L = 0,0025$				Tipo II: $a/L = 2,76$; $h/L = 0,008$			
		z_2	s	t_x	t_z	t_2	s	t_x	$10^4 G_2/gL^2$	t_2	s	t_x	$10^4 G_2/gL^2$
0°	I	— 1,27	0	— 2,55	— 1,24	— 1,28	0	— 2,98	2,06	— 1,28	0	— 2,56	0
5°	0,996	— 1,26	0,22	— 2,54	— 1,23	— 1,27	0,25	— 2,89	1,97	— 1,27	0,22	— 2,54	0
10°	0,985	— 1,25	0,44	— 2,51	— 1,21	— 1,26	0,49	— 2,61	1,70	— 1,26	0,44	— 2,51	0
15°	0,966	— 1,23	0,66	— 2,46	— 1,19	— 1,23	0,70	— 2,20	1,20	— 1,23	0,66	— 2,46	0
20°	0,940	— 1,20	0,87	— 2,39	— 1,15	— 1,20	0,87	— 1,75	0,42	— 1,20	0,87	— 2,39	0
25°	0,906	— 1,15	1,08	— 2,31	— 1,11	— 1,16	1,01	— 1,35	— 0,65	— 1,16	1,08	— 2,31	0
30°	0,866	— 1,10	1,27	— 2,21	— 1,07	— 1,11	1,11	— 1,11	— 1,99	— 1,11	1,27	— 2,21	0,01
35°	0,819	— 1,04	1,46	— 2,09	— 1,03	— 1,05	1,20	— 1,13	3,53	— 1,05	1,46	— 2,09	0,02
40°	0,766	— 0,98	1,64	— 1,95	— 0,99	— 0,98	1,31	— 1,47	5,11	— 0,98	1,64	— 1,92	0,01
45°	0,707	— 0,90	1,80	— 1,80	— 0,95	— 0,90	1,46	— 2,14	6,48	— 0,90	1,80	— 1,76	— 0,06
50°	0,643	— 0,82	1,95	— 1,64	— 0,90	— 0,82	1,69	— 3,05	7,40	— 0,82	1,94	— 1,73	— 0,13
55°	0,574	— 0,73	2,09	— 1,46	— 0,83	— 0,73	1,99	— 4,00	7,62	— 0,73	2,10	— 1,79	0,04
60°	0,500	— 0,64	2,21	— 1,27	— 0,73	— 0,64	2,37	— 4,68	7,00	— 0,64	2,25	— 1,44	0,55
65°	0,423	— 0,54	2,31	— 1,08	— 0,60	— 0,53	2,78	— 4,62	5,55	— 0,53	2,32	— 0,11	0,60
70°	0,342	— 0,44	2,39	— 0,87	— 0,45	— 0,44	3,13	— 3,20	3,53	— 0,44	2,27	0,96	— 1,26
75°	0,259	— 0,33	2,46	— 0,66	— 0,27	— 0,35	3,29	0,27	— 1,43	— 0,35	2,27	— 1,87	— 4,50
80°	0,174	— 0,22	2,51	— 0,44	— 0,10	— 0,24	3,00	6,61	0,13	— 0,24	2,71	— 8,13	— 4,22
85°	0,087	— 0,11	2,54	— 0,22	0,01	— 0,09	2,03	16,65	0,61	— 0,09	3,23	2,72	1,69
86°	0,070	— 0,09	2,54	— 0,18	0,02	— 0,05	1,72	19,98	0,56	— 0,05	3,11	11,35	2,52
87°	0,052	— 0,07	2,54	— 0,13	0,03	— 0,02	1,36	21,91	0,47	— 0,02	2,81	23,72	2,82
88°	0,035	— 0,04	2,54	— 0,09	0,03	0	0,96	24,84	0,34	0	2,25	40,66	2,45
89°	0,017	— 0,02	2,55	— 0,04	0,02	+	0,50	27,97	0,18	+	1,35	63,26	1,42
90°	0	0	2,55	0	0	0	0	31,32	0	0	0	92,81	0
dedotte da op. cit. in (4)		p. 222 (o) o p. 224 (o)	p. 228 (o) o p. 230 (o)	p. 216 (o) o p. 218 (o)	p. 222 (4)	p. 228 (4)	p. 216 (4)	p. 206 (4)	p. 224 (4)	p. 230 (4)	p. 218 (4)	p. 210 (4)	

N.B. Le applicazioni di questa Tabella I saranno date come complementi a queste ricerche.

Non ci restò, quindi - finite che furono le due trattazioni sulle volte cilindriche recentemente apparse, quella cit. in ⁽⁴⁾ e riferita agli equilibri tenso-flessionali, la cit. in ⁽³⁾, più orientativa - che riprendere il vecchio problema partendo dalle deduzioni teoriche fatte nelle Note cit. ⁽¹⁾, che per completezza riassumiamo in modo autonomo; ed affrontare finalmente le difficoltà algoritmiche per quel che effettivamente sono. Il che ci è stato agevolato, come sempre, grazie all'intervento determinante di Mauro Picone, che ha messo a disposizione i mezzi moderni di calcolo numerico di cui dispone il suo impareggiabile Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo del C.N.R.

In una Nota successiva daremo il riassunto sopra annunciato con qualche utile complemento per la impostazione sistematica del criterio di Dirichlet per l'analisi della stabilità dell'equilibrio elastico delle volte sottili di tipo anche diverso da quello di cui qui si tratta.

Astronomia (Astrofisica Solare). — *L'organizzazione dell'Osservatorio Astronomico di Roma per l'osservazione dell'eclisse totale di Sole del 15 febbraio 1961. Risultati generali delle osservazioni.* Nota ^(*) del Corrisp. MASSIMO CIMINO.

1. L'attenzione del mondo intero, e degli italiani in particolare, è stata richiamata sull'eclisse totale di Sole del 15 febbraio 1961 per l'eccezionale circostanza che la fascia della totalità attraversava territori densamente popolati e nei quali esistono numerosi Osservatori Astronomici. Soltanto in Italia erano compresi in detta fascia i tre Osservatori di Bologna, Firenze e Teramo, mentre Torino e la Succursale a Campo Imperatore dell'Osservatorio Astronomico di Roma si trovavano sull'orlo della totalità. A Roma erano coperti, nella fase massima, circa i 99/100 del disco solare, ma bastava l'esigua frazione del disco rimasta scoperta per impedire del tutto l'osservazione della cromosfera e della corona con la nuovissima Torre Solare. Per osservare il fenomeno nella fase di totalità, l'Osservatorio di Roma è stato perciò costretto a spostare alcuni dei suoi strumenti in località comprese nella fascia della totalità.

Le condizioni di osservazione del fenomeno in Italia si presentavano piuttosto mediocri. La linea centrale della fascia della totalità correva dalla riviera ligure a quella adriatica passando in vicinanza di Alassio, Pisa, Osimo ⁽¹⁾, mentre i bordi sfioravano Torino, Reggio Emilia e le Valli di Comacchio a nord, l'Isola d'Elba, Narni, il Gran Sasso e Ortona a sud. Le statistiche meteorologiche prevedevano ⁽²⁾, in questa zona e nel mese di febbraio intorno alle ore 9 del mattino, una percentuale di giorni sereni non superiore al 35 % (M. Cimone). Inoltre la fase massima del fenomeno aveva luogo intorno alle 8,35 del mattino, con un'altezza minima del Sole sull'orizzonte di 10°,5 sulla costa ligure e massima di 14°,5 su quella adriatica, cioè sempre piuttosto bassa e quindi con maggiore probabilità di avere il Sole tra banchi di nuvole o di foschia al momento della totalità. Tutte queste ragioni consigliavano di disperdere gli strumenti in diverse località e a diversa altitudine, onde giocare, in caso di tempo generalmente avverso, su condizioni locali particolari.

(*) Presentata nella seduta dell'11 marzo 1961.

(1) Molti dati utili sulle modalità del fenomeno in molte città italiane si trovano in « Annuario dell'Osservatorio Astrofisico di Catania per il 1961 », a cura di M. G. FRACASTORO. Anche: A. KRANJC, *Astronomical data for the Solar Eclipse 15 February 1961*. Centro Studi Astrofisica, Bologna 1960.

(2) Cfr. L. SANTOMAURO, *Climatological data for Italy*, ibidem, 1960.

Una oculata scelta dei posti di osservazione non si presentava del tutto facile. Durante l'estate del 1960, chi scrive si mise in movimento visitando la maggior parte delle Stazioni Meteorologiche dell'Aeronautica Militare comprese nella zona utile. Dopo esauriente discussione egli si orientò su tre località: Imperia, la cima del Monte Cimone e Macerata.

La costa ligure presentava l'*handicap* di un Sole più basso sull'orizzonte al momento della totalità. Però, da Alassio verso la frontiera, vi era una buona probabilità che, in caso di perturbazione meteorologica interessante tutta l'Italia settentrionale, proprio in quel tratto di costa si verificassero delle schiarite *specialmente verso il mare*, ove doveva trovarsi il Sole durante il fenomeno. Della veridicità di questa informazione e della limpidezza dell'orizzonte lo scrivente ha potuto accertarsi durante i 20 giorni precedenti il fenomeno, dedicati al montaggio degli strumenti. La città di Imperia fu preferita per gli appoggi che la spedizione ha potuto ottenere presso l'Osservatorio Meteorologico e Sismico locale⁽³⁾. La spedizione ad Imperia era guidata dallo scrivente e di essa facevano parte gli astronomi: T. Fortini, M. A. Giannuzzi, M. Torelli, R. Flamini, oltre il personale tecnico.

La cima del Monte Cimone fu scelta per due ragioni: ottenere, se possibile, fotografie della corona da grande altezza (2.200 m) con una camera in montatura equatoriale *fissa al suolo*; cogliere l'occasione di cielo sereno nel caso che un banco di nuvole basse coprisse la zona della totalità. La spedizione al Cimone era guidata dal dott. G. Caprioli dell'Osservatorio di Roma, e di essa hanno fatto parte i Signori A. Boccitto (limitatamente alla fase di montaggio e prova) e G. A. Mazza⁽⁴⁾.

Infine, non poteva esser del tutto trascurata la costa adriatica, a causa della suddetta maggiore altezza del Sole sull'orizzonte al momento della totalità. In generale però, si prevedeva un orizzonte caliginoso; la città di Macerata fu scelta come zona nella quale la probabilità di un orizzonte libero ad est era maggiore. La spedizione era guidata dal dott. N. Virgopia dell'Osservatorio, accompagnato dal signor A. Boccitto⁽⁵⁾.

(3) Gli strumenti furono situati nella palestra dell'Istituto Scolastico, prospiciente il mare e completamente protetta dal vento dagli altri tre lati. Qualche inconveniente, che poteva derivare da luci, fumo di camini, traffico, è stato eliminato per il cordiale concorso di tutta la cittadinanza che, su mia richiesta, nel giorno dell'eclisse non ha acceso una luce, né un camino fino alle ore 9, mentre il traffico è stato deviato dalla nostra zona. Anche nel piccolo porto le caldaie di alcuni piroscafi sono rimaste spente.

(4) Sulla cima del Monte Cimone esiste una attrezzatissima stazione Meteorologica dell'Aeronautica Militare. L'astrografo fu collocato in una stanza provvista di ampia vetrata verso est. L'accesso alla cima del monte è relativamente facile nella stagione estiva. Nel mese di gennaio invece, a causa della neve alta, si è dovuto effettuare il trasporto a spalla degli strumenti (2 quintali) per 3 chilometri circa.

(5) Lo strumento fu collocato sulla terrazza dell'edificio ove ha sede la Stazione Meteorologica dell'Aeronautica Militare. Anche in questa città la cittadinanza è venuta cordialmente incontro alle necessità della spedizione, facendo in modo che nessun inconveniente potesse disturbare l'osservazione del fenomeno.

2. Contemporaneamente all'organizzazione delle stazioni a terra è stata presa l'iniziativa di osservare l'eclisse da bordo di aerei e di palloni.

a) Con la collaborazione dell'Aeronautica Militare, sono stati effettuati voli con 5 aviogetti monoposti, volanti a circa 10.000 m. di altezza, provvisti di camere fotografiche automatiche dirette verso prua ⁽⁶⁾. Nel momento della totalità gli apparecchi puntavano verso il Sole e mettevano in movimento le camere. Ovviamente, si potevano ottenere soltanto delle *istantanee*; le fotografie non avrebbero perciò potuto, con grande probabilità, competere con quelle prese a terra con strumenti fissi e provvisti di moto di inseguimento del Sole sulla sfera celeste. Ma, a parità di esposizione, sarebbe stato assai minore il velo per la luce diffusa del cielo, mentre in caso di cattivo tempo con nuvolosità fino ai 5-6 mila metri (quota degli altri aerei), quelle prese da bordo degli aviogetti sarebbero state le *uniche* fotografie della corona.

b) Con la collaborazione della stessa Aeronautica Militare e dell'Istituto Nazionale di Geofisica è stato lanciato un pallone sonda capace di arrivare ai 30.000 metri di quota, portante una cinepresa disposta in modo da fotografare l'intera volta celeste riflessa da uno specchio convesso orizzontale. Il lancio mirava ad ottenere, se possibile, un collegamento della corona esterna con la luce zodiacale. Questo è stato il primo tentativo in Italia di fotografie solari ad alta quota. La costruzione dell'apparecchio e la coordinazione della complessa operazione di lancio, inseguimento e recupero erano affidate al prof. R. Cialdea dell'Istituto di Fisica dell'Università di Roma ⁽⁷⁾.

c) Con la collaborazione del Centro di Studio di Fisica dello Spazio e della Marina Militare sono stati eseguiti sondaggi ionosferici per lo studio del campo magnetico terrestre da 90 km di altezza, ove si hanno le maggiori fluttuazioni per l'esistenza, in quella parte dell'atmosfera terrestre, di intense correnti elettriche, fortemente influenzate dalla radiazione solare e dall'azione gravitazionale del Sole e della Luna. L'impianto funzionava sul Monte Conaro presso Ancona, nella zona riservata della Marina Militare. È stata impiegata per la prima volta una nuova tecnica, detta dell'impulso modulato, ideata dal prof. M. Cutolo dell'Istituto di Fisica Tecnica dell'Università di Napoli, il quale ha anche diretto la spedizione. Per la prima volta durante una eclisse totale di Sole è stata costruita la curva di risonanza intorno alla girofrequenza degli elettroni alla quota di riflessione, che ha permesso di ricavare l'intensità del campo magnetico in quota.

d) Alla nostra organizzazione ad Imperia si sono appoggiate tre missioni straniere; una americana dell'*Haward College Observatory*, guidata dal

(6) Piloti: Capitani Pacini, Mangani, Ghisleri e Tenenti Civoli, Laita, Nastri.

(7) In realtà si trattava di due palloni in *tandem*; essi sono stati lanciati alle ore 7,45 dall'aeroporto di Pisa, raggiungendo la quota massima di 23 mila metri e discendendo poi lentamente per lo scoppio di uno dei palloni. Ciò ha facilitato il recupero dell'apparato, arrivato intatto al suolo. Durante il volo il pallone è stato seguito dagli apparati di radiosonda e radar dell'aeroporto militare di Pisa e, nella fase di atterraggio, da un elicottero delle guardie di Finanza, che hanno provveduto al recupero della camera.

direttore prof. D. H. Menzel e con la partecipazione del prof. G. E. Moreton, con un programma fotometrico; l'altra dell'*Osservatorio Astronomico di Stoccolma*, guidata dal prof. Y. Öhman, per fotografie dello spettro delle protuberanze; la terza dell'*Osservatorio Astronomico di Parigi-Meudon*, guidata dai signori M. Marin e L. Hemeret, con programma fotometrico.

3. Il programma generale delle tre stazioni a terra, così come quello degli aviogetti, aveva uno scopo fotometrico: tracciare cioè le *isofote coronali* e riferire, fin tanto che possibile, la brillantezza della corona a quella del centro del disco solare (calibrazione assoluta). È noto che la luce della corona è, nella grandissima parte, luce diffusa della fotosfera. La corona presenta anche uno spettro a righe di *emissione*, derivante dall'eccitazione di atomi fortemente ionizzati (Fe XIV, Fe XIII, Ni XII, ecc.); ma, in prima approssimazione, questa emissione può essere trascurata. La luce diffusa, invece, possiamo dividerla in due componenti: la *componente K* diffusa dagli elettroni liberi e la *componente F* diffusa da particelle, di dimensioni atomiche secondo alcuni autori, o di qualche micron secondo altri. La percentuale relativa delle due componenti varia con la distanza dal bordo solare, prevalendo la prima nelle zone più vicine al bordo, la seconda in quelle più lontane. Il nostro programma si riferisce alla misura della *somma* delle due componenti (intensità totale), dalla quale si potranno ricavare le due componenti K ed F confrontandola con misure di polarizzazione, ovvero dalla misura dell'intensità residua di righe di assorbimento dello spettro della componente F, ottenute da altri osservatori. È pure noto che la conoscenza della componente K permette di risalire alla determinazione della densità elettronica nella corona, che è lo scopo ultimo delle osservazioni fotometriche. Inoltre, specialmente dalle fotografie a larga scala, si potrà studiare la forma delle strutture coronali, intimamente legata ai fenomeni di attività solare (protuberanze, brillamenti, macchie, ecc.) e all'andamento delle linee di forza dei campi magnetici solari.

Diamo ora un breve rendiconto della strumentazione e del materiale raccolto.

a) *Stazione di Imperia*. - I) Camera orizzontale «Askania» di 5 m di focale e 14 cm di apertura, con celostato ad un solo specchio alluminato di 30 cm. Filtro giallo in vetro otticamente lavorato davanti all'obiettivo. Lastre *Superpancro fotomeccanica Ferrania*, 28 din, formato 18×24 . Per la fotometria della corona interna e media e per lo studio delle formazioni coronali, sono state scattate 9 fotografie durante la totalità, con tempi di posa da $1/3$ a 16 secondi, ed altre 3 durante la susseguente fase parziale, con speciale filtro neutro di trasmissione conosciuta, per il collegamento della brillantezza coronale a quella della fotosfera.

II) Cannocchiale in montatura equatoriale con inseguimento, provvisto di lente da coronografo di 11 cm di apertura e 185 cm di lunghezza focale, con filtro interferenziale per la riga spettrale $H\alpha$ di 0,5 Å di banda passante, della Ditta «Halle» di Berlino. Per lo studio dell'oscuramento al bordo in

luce di idrogeno e per la fotometria della cromosfera e della zona più interna della corona, sono state scattate 55 fotografie durante l'eclisse e 16 fuori eclisse per confronto, su pellicola Kodak IV-E. I tempi di esposizione vanno da $1/3$ a $1/4$ di secondo a partire da 8 minuti prima della totalità e fino al II contatto e per altri 2 minuti dopo il III contatto, con una frequenza media di un fotogramma ogni 7 secondi, e da 1 a 30 secondi durante la totalità, con 6 fotogrammi.

III) Cercatore di comete a largo campo per l'osservazione visuale e descrizione del fenomeno.

b) *Stazione sul Monte Cimone.* — I) Astrografo con obbiettivo a 4 lenti del tipo Petzvall, 16 cm di apertura e 80 cm di lunghezza focale, su montatura equatoriale con inseguimento. Filtro giallo di gelatina avanti alla lastra fotografica. Lastre ultra-pancro Ferrania, 19 din, formato 9×12 . Durante la totalità sono state scattate 4 fotografie con tempi da 2 a 40 secondi per fotometria della corona esterna e forma dei pennacchi, ed altre 4 durante la susseguente fase parziale, attraverso speciale filtro neutro di trasmissione conosciuta. II) Camera Leica della Zeiss con teleobbiettivo di focale equivalente a 40 cm, per foto a colori a scopo documentario.

c) *Stazione di Macerata.* — Camera per aerofotografia, tipo K-37 con obbiettivo Kodak Aero-Ektar diaframmato a 8 cm, lunghezza focale 30 cm, e filtro giallo davanti all'obbiettivo, su montatura equatoriale con inseguimento. Su pellicola Avio-pancro Ferrania, 21 din, formato 24×24 sono state scattate 5 fotografie con tempo di posa da 1 a 50 secondi nella totalità, per la fotometria della corona esterna, e due nella fase parziale con filtro neutro di trasmissione conosciuta.

4. Contemporaneamente ai programmi ora descritti, lo scrivente ha osservato visualmente la corona con un cannocchiale a largo campo e piccolo ingrandimento. La descrizione che segue è fatta sulla base di una registrazione con un magnetofono e controllata dall'esame di alcune fotografie.

a) *Condizioni meteorologiche ad Imperia durante l'eclisse; illuminazione generale.* — Al sorgere del Sole un banco di foschia copriva l'orizzonte marino ad est, con una fascia sensibilmente più scura per un'altezza di circa 6 gradi; nettamente visibile però il Sole durante la levata. Successivamente però, il Sole apparve completamente fuori della foschia, e così si mantenne durante tutta l'eclisse. Cielo assolutamente sereno, mare calmo, assenza completa di vento. Nei primi minuti dopo il sorgere del Sole si ebbe il normale aumento della illuminazione generale col caratteristico colore rosato; ma, contrariamente ai giorni normali, l'illuminazione anziché continuare ad aumentare, rimase costante, per una specie di compensazione tra l'aumento dell'altezza del Sole sull'orizzonte e l'avanzare del disco scuro della Luna su quello solare, cosicché fino a qualche minuto prima del secondo contatto si ebbe come un prolungato mattino con aria molto fresca e col suo caratteristico Sole pallido. Il mare si manteneva di colore cilestrino grigio, con riflessi rosati del Sole. Per questo fatto gli osservatori non hanno avuto la

sensazione netta della diminuzione progressiva della luce, come avviene nelle eclissi con Sole alto sull'orizzonte. Soltanto a partire da 5 minuti prima della totalità si cominciò ad avvertire un sensibile decrescere della illuminazione ed una debolissima brezza circa 2 minuti prima. Al contrario, alla fine della totalità l'illuminazione crebbe assai rapidamente. Chi scrive non ha notato l'avanzare della cortina d'ombra sulla terra, ma essa è stata veduta distintamente a Pisa ⁽⁸⁾ dalla dott.ssa G. Armellini-Conti, già astronomo all'Osservatorio di Roma, come una leggera nebbia di color bruno-rossiccio, mentre in occasione di altra eclisse lo stesso osservatore aveva notato una colorazione livida, dovuta forse alla zona nordica ove si svolse il fenomeno. Ad Imperia non ho veduto stelle in prossimità del Sole; altri ne hanno notate alcune lontane dal Sole, senza riconoscerle.

Durante la totalità, l'illuminazione totale è stata assai più forte che in altre occasioni (per esempio a Khartoum o in Svezia); il cielo di un grigio azzurro si confondeva col mare di colore analogo, sul quale la corona si specchiava, in un quadro di irreale e incomparabile bellezza. La forte luminosità del cielo, dovuta in parte a leggera caligine e in parte alla forte inclinazione del cono d'ombra, ha fatto sì che la corona sia apparsa ovunque relativamente poco estesa. Chi scrive vide a Khartoum la punta sottilissima di un grande pennacchio estendersi fino a 4 diametri solari ⁽⁹⁾, mentre nel caso presente i pennacchi apparivano tutti tagliati, ad una distanza certamente non superiore ad un diametro e mezzo. Questa maggiore luminosità del cielo durante la totalità in confronto di altre eclissi è stata notata anche dalla dott.ssa Armellini-Conti, che ha potuto leggere distintamente, con vista normale su tabelle ottiche, caratteri di 1 millimetro.

b) *Descrizione della corona.* Visti distintamente al cannocchiale i *grani di Baily*, la cui comparsa ha servito a dare il « via » alle camere fotografiche. Una fotografia scattata alla camera orizzontale con 1/3 di secondo contemporaneamente al « Via » mostra tre grani sovraesposti, un arco di cromosfera di 80° circa e la grande protuberanza eruttiva a nord-est (angolo di posizione 52° circa) assieme ad un po' di corona. Manca l'altra notevole protuberanza a nord-ovest (a 300° circa in prossimità del III contatto) ancora coperta dal bordo lunare. Infatti quest'ultima non è stata veduta al principio, ma è apparsa dopo, intensificandosi, quasi fiammeggiasse, col progredire della totalità. Altra notevole protuberanza ad un angolo di 135°. A Pisa la corona è stata notata 15 secondi prima e dopo la totalità.

Sia ad occhio nudo che col cannocchiale la corona è apparsa relativamente poco estesa, al massimo non più di 1 diametro e un quarto, di forma

(8) La dott.ssa G. ARMELLINI-CONTI ha osservato l'eclisse a Pisa, al piccolo Osservatorio dell'Università, con un equatoriale e ad occhio nudo, eseguendo un disegno schematico molto utile per la descrizione delle formazioni coronali, ed altri rilievi di cui diremo in seguito.

(9) Cfr. M. CIMINO, *La spedizione scientifica dell'Osservatorio Astronomico di Roma a Khartoum per l'eclisse totale di Sole del 25 febbraio 1952. Risultati generali delle osservazioni*, questi « Rendiconti », serie VIII, vol. XII, pp. 26-33 (1952).

rettangolare, assai poco sviluppata al polo nord solare, ove presentava dei finissimi filamenti, più estesa e rotondeggiante al polo sud, con una serie di sottili punte. Complessivamente, una corona di tipo intermedio, come era da aspettarsi.

A prima vista, due pennacchi si imponevano all'attenzione dell'osservatore, a nord-est e nord-ovest, inclinati verso l'equatore solare, contribuivano a dare alla corona quell'aspetto rettangolare di cui si è parlato. Partendo dal polo nord solare e procedendo verso est troviamo le seguenti formazioni.

I) intorno al polo, per un arco di 15° verso est e 25° verso ovest, una serie di finissimi filamenti radiali, poco luminosi;

II) uno dei due grandi pennacchi, con una base di attacco al bordo solare da 15° a 55° , profilo verso il nord ben marcato, con una diramazione minore verso l'alto, sfumato largo a circa 1 diametro solare sulla luce del cielo, decisamente abbattuto verso l'equatore;

III) un pennacchio con base da 55° a 100° , composto di numerosi filamenti in senso radiale;

IV) da 100° a 145° una larga formazione coronale finemente striata;

V) da 145° a 280° la corona è sensibilmente più estesa che al polo nord e presenta una serie di piccoli pennacchi più o meno intensi e poco definiti, i principali con angoli di posizione approssimativamente a: 175° , 190° , 210° , 250° , 270° ;

VI) il secondo grande pennacchio a nord-ovest, con base da 290° a 335° , anche esso abbattuto verso l'equatore, col bordo a nord ben definito e una diramazione in atto, con tendenza a formare una punta sottile e un arco nell'interno.

c) *Ombre volanti.* — A partire da circa due minuti prima del 2° contatto sono state viste chiaramente, sopra una parete rivolta verso il Sole, le ombre volanti, come strisce scure, distanti 3-5 cm l'una dall'altra e procedenti da ovest verso est. Più precisa la descrizione fatta dalla dott.ssa Armellini-Conti a Pisa: «Le ombre sono apparse come chiazze a forma di pesce, molto allungate, guizzanti, disposte in sequenze parallele tra loro (almeno approssimativamente) inclinate come il profilo dell'ombra lunare, intercalate con filamenti che sembravano sottolinearne il profilo. Le sequenze si spostavano in senso perpendicolare alla lunghezza delle chiazze d'ombra, con velocità che mi è parsa variabile tra i 15 e i 20 cm/sec; la distanza tra le sequenze tra i 10 e i 12 cm».

d) *Tempo del II contatto.* — Ad Imperia il «via» è stato dato alla vista dei grani di Baily, 1^s,3 dopo il contatto teorico; il dott. Caprioli sul Monte Cimone ha trovato un ritardo di 1^s,9 al momento della scomparsa dei grani.

Le spese per le spedizioni dell'Osservatorio di Roma sono state sostenute per una metà dal Consiglio Nazionale delle Ricerche, per l'altra metà dall'Osservatorio stesso e dal Centro di Studio di Fisica dello Spazio.

Mi è grato cogliere l'occasione per ringraziare: il Signor Ministro della Difesa e lo Stato Maggiore della Difesa-Aeronatica per tutti i mezzi così generosamente messi a nostra disposizione; il Generale Giansanti e i suoi collaboratori, Colonnelli Fea e Pisone, per l'uso delle Stazioni Metereologiche e la valida collaborazione nel lancio dei palloni sonda; il Colonnello Cazzaniga e collaboratori pei voli con gli aviogetti; il Capitano Vittori, Direttore della Stazione del Monte Cimone, che ha attivamente collaborato per l'impianto e per gli aiuti al nostro personale; l'on. prof. A. Amadeo, direttore dell'Osservatorio Metereologico e Sismico di Imperia e i suoi collaboratori, per l'ospitalità nei locali dell'Osservatorio e per gli innumerevoli aiuti ed appoggi; i Signori Sindaci di Imperia e di Macerata per tutte le gentilezze e le provvidenze prese onde facilitare il nostro lavoro di sistemazione degli strumenti ed assicurare, con una organizzazione veramente perfetta, la migliore riuscita dell'impresa.



Fig. 1. -- La corona solare fotografata dalla Stazione dell'Osservatorio Astronomico di Roma ad Imperia, con camera orizzontale di 5 metri: posa 16 secondi (*Il nord è in alto, l'est a destra*).

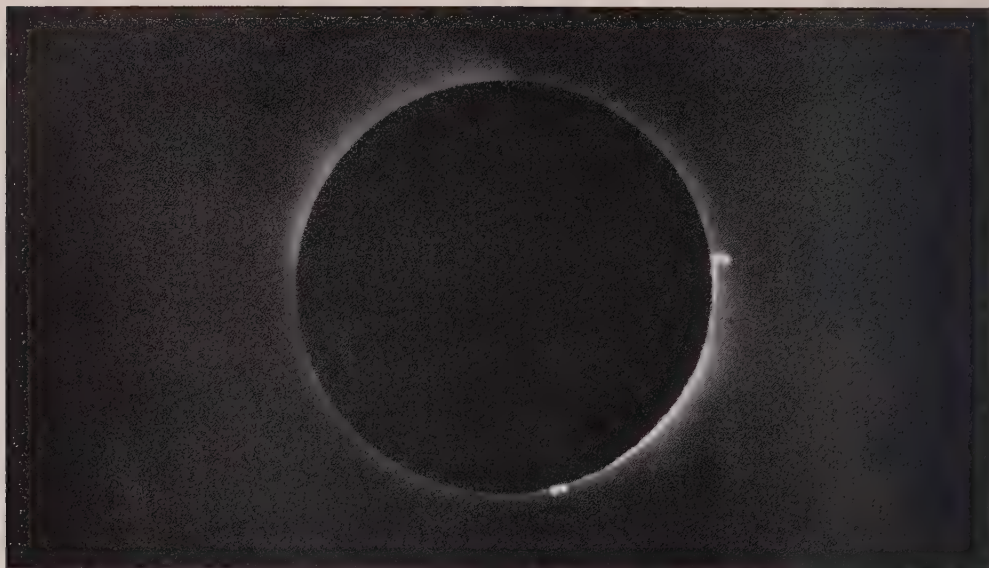


Fig. 1. – La corona solare interna. Si vede la grande protuberanza a nord-est e un arco di cromosfera. La foto è stata scattata 1 secondo dopo il 2° contatto; posa di 1 secondo (*Il nord è in alto, l'est a destra*).



Fig. 2. – Lancio di palloni sonda per la fotografia da grande altezza della corona e della luce del cielo. Il lancio è stato organizzato dall'Osservatorio Astronomico di Roma, dall'Istituto Nazionale di Geofisica e dall'Aeronautica Militare.

Fisiologia vegetale. — *Ricerche sulla permeabilità delle cuticole alle radiazioni ultraviolette.* — I. *Piante di duna.* Nota^(*) del Corrisp. CARLO CAPPELLETTI.

Le nostre conoscenze sul problema della cuticola sono di data abbastanza remota, perché la presenza di questo strato sulle membrane delle cellule di origine epidermica, viene facilmente messa in evidenza da molte colorazioni in uso nella tecnica microscopica. Certe cuticole spesse sono visibili anche senza colorazione. Ma solo in data relativamente recente gli studi sulla cuticola hanno ripreso con nuova lena, sia per indagare la fine struttura anche submicroscopica, sia per conoscere le condizioni di permeabilità verso certe soluzioni usate come anticrittogamici od insetticidi di tipo emulsionabile e liposolubili. La letteratura in questo campo è vastissima (cfr. Jesse D. Skoss, 1955). Infatti le soluzioni impiegate per giungere nell'interno delle foglie devono per primo attraversare la strato cuticolare, strato che costituisce la barriera di protezione dell'epidermide fogliare, la cui struttura e costituzione è ben lungi dall'essere omogenea. Si tratta come vedremo di una eterogeneità di ordine chimico, in quanto si può dire che ogni specie abbia una cuticola chimicamente diversa dalle altre, di ordine fisiologico in quanto lo spessore della cuticola è mutevole con l'età del tessuto (sottile da giovane, più spesso da adulto), ed inoltre differisce a seconda del microclima dell'individuo, per cui già nella stessa specie ci troviamo di fronte a cuticole differenti almeno in senso quantitativo. La cuticola della pagina superiore di una foglia differisce da quella della pagina inferiore.

Secondo M. Meyer (1938) la porzione esterna delle foglie delle piante superiori consta di tre strati principali, suddivisibili talvolta anche in un numero maggiore per ulteriore differenziazione di alcuni di essi.

Il più esterno è costituito da cutina pura la quale in molte piante viene coperta da uno strato di cera. Segue, come strato di trapasso verso la membrana cellulosica più interna, il cosiddetto strato cuticolare. Le zone più esterne di questo strato constano di un miscuglio di cutina e sostanze cerosi. Nelle zone più profonde dello strato cuticolare appare più evidente la cellulosa come sostanza di supporto scheletrico e negli spazi intermicellari di essa si depositano sostanze cutiniche e cerosi.

Numerosi sono i lavori che dimostrano l'assorbimento delle radiazioni U.V. da parte dell'epidermide di foglie (Metzner, 1930; C. H. Shull e H. B. Lemon, 1931; H. M. Benedict, 1934; S. Pràt, 1936) ma non era stato precisato a quale porzione della cuticola (senso lato) fosse dipeso l'assorbimento di luce. Le osservazioni di Wuhriann-Meyer (1941) hanno portato un notevole

(*) Presentata nella seduta dell'11 marzo 1961.

contribuito allo studio della funzione delle cere, sia dopo estrazione dalla pianta, sia su piante *in toto*. In *Clivia nobilis* vi è un notevole aumento di permeabilità della luce di 3.500 Å nelle foglie dopo che queste sono state trattate con piridina, la quale, sciogliendo la cera, toglie uno degli impedimenti al passaggio della luce. In generale le cere estratte dalle cuticole delle piante assorbono poca luce nella gamma compresa fra 3.500 e 2.750 Å; la cera di *Clivia* costituisce una eccezione perché l'assorbe notevolmente. Le cere di *Copernicia*, e del sughero da tappi, sciolte in cloroformio, hanno un massimo di estinzione fra 3.000 e 2.900 Å; la curva di estinzione della cera di *Ricinus* non presenta alcun massimo, ma aumenta regolarmente con il diminuire della lunghezza d'onda. La massima estinzione si ha con la cera di *Pinus*: uno strato di 15 μ assorbe circa 9/10 della luce.

Le cuticole presentano inoltre una doppia rifrazione che è variabile nello spessore degli strati; viene ammesso che questo fenomeno sia da attribuire in gran parte agli strati cerosi che sono diversamente orientati nella struttura submicroscopica. Le ricerche di Roelofsen (1952) sono state condotte soprattutto sulla cuticola di *Clivia nobilis*; e dopo opportuna estrazione per lunghi periodi di tempo ed a diverse temperature con cloroformio, piridina e tetracloruro di carbonio, si è constatato che la cuticola che era stata sempre considerata come isotropa, è in realtà birifrangente. La doppia rifrazione degli strati sottostanti, liberi da cera, si suppone sia dovuta ad una struttura lacunare. Per spiegare le proprietà ottiche degli strati cuticolari si deve ammettere che la cera sia presente nelle lacune in forma di piccole lamine oblunghe che occupano una posizione lievemente obliqua. Siccome dopo la eliminazione delle cere la maggior parte degli strati cuticolari mostra ancora una debole doppia rifrangenza, si ammette che questo strato possa contenere ancora un tipo di cera che non viene allontanata dai solventi ordinari e che non viene alterato con il calore. Le molecole di queste cere potrebbero essere adsorbite in una posizione definita nelle lacune delle membrane.

Una buona messa a punto dei lavori sulla chimica della cutina che per la sua complessità non si ritiene di riportare qui, è riferita nel lavoro di Kreger e Mader (1958).

Gli studi sulle cuticole hanno urtato sempre contro la notevole difficoltà di avere una certa quantità di materiale puro, perché il distacco dalla foglia (organo nel quale di solito si fanno le migliori preparazioni) è talvolta operazione molto ardua. Anche i fusti possono talvolta offrire buone sorgenti di cuticole, soprattutto se sono stati gelati (*Nerium*) per cui con la necrosi delle cellule epidermiche lo strato cuticolare si solleva a lembi. Ma vi è sempre il dubbio di aver anche una certa quantità di membrane epidermiche insieme con la cuticola, per cui la tecnica usata nelle mie esperienze, e che ha dato buoni risultati, è quella proposta da Wallace (1955) con l'uso della pectinasi al 5% in soluzione lievemente acida (pH 5-4,5) mantenendo una temperatura di circa 28-30° almeno per le prime ore. L'aggiunta di piccole quantità di merzolato sodico impedisce lo sviluppo di germi, per cui si può prolungare per alcuni giorni la permanenza dei tondelli fogliari

a contatto con la pectinasi. Successivamente si libera il materiale dall'enzima e si rimette in acqua (con merziolato) e si procede al distacco delle cuticole. Non tutte le specie lasciano staccare la cuticola con la stessa facilità, anche di fronte ad un trattamento enzimatico della stessa entità; per alcune, e sono quelle con cuticola spessa, il distacco è facile, per altre diventa un lavoro penoso, che mette alla prova la pazienza dell'operatore, mentre per un certo numero di specie il distacco è quasi impossibile perché la cuticola si frammenta in piccoli pezzetti che difficilmente possono venire ulteriormente usati per ricerche di spettrofotometria. I lembi di cuticola maggiori vengono lavati più e più volte in acqua distillata con merziolato e finalmente montati fra due pezzi di carta nera, nella quale viene praticato un piccolo foro di circa 2 mm di diametro, in modo da poter agevolmente manipolare il pezzo e saggiare la trasparenza ecc.

In questo primo gruppo di ricerche si è lavorato su materiale allo stato secco, cioè lasciato a temperatura ambiente per alcuni giorni, in modo da togliere qualsiasi effetto determinato dalla presenza di strati d'acqua che possono per loro conto modificare i risultati della permeabilità.

Apparecchiatura: per queste prove fu allestita un'apparecchiatura così costituita: come sorgente luminosa fu adoperata una lampada ad idrogeno del tipo usato per la spettrofotometria con il Bekmann; il lembo di cuticola montato su portaoggetto in quarzo veniva posto sul tavolino di un microscopio: tutta l'ottica del microscopio era in quarzo, e fu usato un obbiettivo che forniva una immagine ingrandita circa 10 volte. L'immagine centrata sulla fessura del collimatore dello spettrografo veniva controllata visualmente, per accertarsi della assoluta omogeneità del preparato che non avesse fessure o screpolature, od altre impurità materiali tali da fare da schermo al passaggio dei raggi.

Lo spettrogramma veniva fatto con esposizioni per tempi successivi partendo da una prima esposizione di 8'' e successivamente raddoppiando il tempo base (8'') fino ad una esposizione massima di 512''.

In tal modo per ogni cuticola venivano fatti 6 successivi spettrogrammi con esposizione crescente in progressione geometrica, in modo da poter successivamente utilizzare questi dati per la determinazione delle trasparenze.

Per ogni lastra si faceva analoga esposizione per la sorgente di luce senza interposizione di alcuno schermo, o cuticola, in modo da ottenere l'annerimento della lastra con la sola sorgente luminosa incidente.

Ogni lastra permetteva di esaminare solo due cuticole. Le lastre del tipo « fotomeccanico » adatte per queste ricerche venivano poi sviluppate con rivelatore standard, con controllo del tempo di sviluppo e della temperatura del bagno.

La misura della intensità dell'annerimento delle lastre veniva eseguita con un apparecchio adatto alla lettura di spettrogrammi su lastre, con fotocellula Weston, e misura della deviazione galvanometrica. Poiché in pratica si è visto che era inutile la lettura di spettrogrammi con esposizioni brevi, la lettura dell'annerimento si è limitata alle esposizioni maggiori e precisamente a quelle di 256'' e di 512''.

Dato che la lampada ad idrogeno fornisce uno spettro continuo da 4000 Å fino a circa 2150 Å (con alcune righe di più forte emissione comprese fra 4500 e 3600 Å) sono state fatte le letture dell'annerimento delle lastre ad intervalli regolari e precisamente in corrispondenza delle seguenti lunghezze d'onda:

$$\text{Å } 4500 - 4000 - 3500 - 3200 - 3000 - 2700 - 2500 - 2400 - 2300 - 2200.$$

Il sistema ottico impiegato, con vetri porta oggetto in quarzo, ecc. permetteva alla luce della lampada ad idrogeno una permeabilità che praticamente si limitava alla riga Cd 26 di 2144 Å. Di solito l'ultima lettura veniva fatta fino a 2200 Å, perché oltre questo valore le cuticole sono del tutto opache, e l'ultimo valore attendibile è quello a 2300 Å.

Eseguiti gli spettrogrammi su lastra per tempi di esposizione crescenti in ragione geometrica, si deduceva la permeabilità della cuticola in funzione dell'annerimento dell'emulsione fotografica che è tanto maggiore quanto maggiore è la permeabilità della cuticola a quella determinata lunghezza d'onda della luce incidente.

Nelle zone dello spettro in cui la cuticola assorbe tutta la luce, la lastra fotografica necessariamente non viene impressionata. Nelle letture della opacità della lastra (annerimento della emulsione) la deviazione galvanometrica era massima nelle zone della lastra non impressionate dalla luce, e minima dove l'annerimento era massimo. Cioè la deviazione galvanometrica risulta inversa della permeabilità della cuticola.

Per i calcoli relativi sono state applicate le formule per la valutazione dell'annerimento (o densità ottica) delle lastre. Indicando la intensità della luce incidente con I^0 e l'intensità della luce emergente dalla lastra con I la densità ottica si misura in base all'assorbimento S che si esprime con la relazione:

$$S = \log_{10} \frac{I^0}{I}.$$

Essendo la formula legata ad una funzione logaritmica, le esposizioni delle lastre dovevano essere fatte con una progressione geometrica come sopra riferito.

Per semplificare la notazione, dopo aver fatto i calcoli relativi, si è preferito esprimere la permeabilità della cuticola *nella quantità percentuale della luce trasmessa*. Perciò una cuticola molto opaca a quelle determinate radiazioni ha una percentuale di trasmissione prossima allo zero, ed inversamente cuticole molto trasparenti hanno una percentuale di trasmissione molto elevata.

Aver fatto esposizione per tempi progressivamente maggiori ha avuto lo scopo (oltre che per ragioni di calcolo) di controllare i termini estremi di permeabilità verso le porzioni più rifrangibili dello spettro dell'U.V. Operando in queste condizioni il calcolo non può dare valori molto esatti in fatto di proporzionalità, fra la permeabilità elevata in gamme dello spettro poco rifrangibili (come per esempio a 4000 e 3.500 Å) per il fatto che con le forti

esposizioni la lastra raggiungeva facilmente un annerimento che si può dire totale, per cui la deviazione galvanometrica è praticamente nulla; tale condizione di annerimento della lastra viene raggiunta anche con esposizioni della lastra per tempi notevolmente più brevi.

Nelle porzioni estreme dell'U.V. con tempi di esposizione molto lunghi si può avere (in alcuni casi) un debole annerimento, mentre, come si è detto, nelle porzioni meno rifrangibili l'annerimento della lastra è totale.

Nelle ricerche sulla densità ottica di un mezzo ha grande importanza anche lo spessore dello strato attraversato dalla luce, cioè lo spessore della cuticola. In queste ricerche non si è creduto opportuno di tener conto dello spessore della cuticola, ma di considerarla non alla stregua di un semplice schermo, bensì come una unità fisiologica e morfologica a sé stante, indipendentemente dallo spessore. Appunto in considerazione di questo si è tenuto conto della posizione della cuticola sulla superficie fogliare, se apparteneva alla pagina superiore o alla inferiore, se si trattava di foglia in età giovanile od adulta, insomma si è considerato lo studio della cuticola non solo dal punto di vista esclusivamente fisico, ma anche da quello ecologico e morfologico, condizioni importantissime per una esatta comprensione delle funzioni assolute della cuticola nella economia della pianta.

In questo primo gruppo di ricerche sono state prese in considerazione cuticole di piante di *duna*, raccolte nella stagione estiva in piena zona soleggiata.

Siamo di fronte ad un campo di studio del tutto inesplorato, e salvo poche osservazioni di Autori che hanno preferito estendere la ricerca solo su poche specie vegetali, dove il distacco cuticolare era particolarmente facile per la natura del mesofillo, per le altre le nostre conoscenze sono quasi nulle, per cui il piano di lavoro che mi propongo di svolgere in futuro è una ricerca metodica di un buon numero di cuticole tratte dai vegetali più disparati e di saggiare la loro permeabilità alle radiazioni U.V., nella gamma d'onde comprese fra 4.500 e 2.200 Å.

L'esame della tabella in cui sono riportate le permeabilità percentuali alla luce, a lunghezza d'onda comprese fra 4.500 e 2.200 Å, ci permette di fare numerose osservazioni.

Emerge innanzi tutto il fatto che vi è una *specificità di permeabilità spettrale*, nel senso che ogni specie di pianta ha un proprio « tipo » di permeabilità, il quale è indipendente dall'ambiente in cui cresce l'individuo. Così ad esempio due specie crescenti presso a poco nello stesso ambiente, *Berberis vulgaris* e *Clematis flammula*, hanno una permeabilità cuticolare del tutto differente e precisamente: mentre il *Berberis* è permeabile in alto grado fino a 4.000 Å (66 %), (pari alla permeabilità di *Clematis* a questa lunghezza d'onda), scende ad appena il 7 % a 3.500 Å, mentre *Clematis* ha una permeabilità a questa lunghezza d'onda del 39 %. A 3.200 Å si può dire che la cuticola di *Berberis* sia quasi impermeabile (passa solo il 2 % dopo il massimo periodo di esposizione della lastra) e tale bassissima permeabilità si estende a tutto il resto dello spettro. Per *Clematis* la permeabilità si estende fino alle por-

zioni più rifrangibili dello spettro, ed è ancora sensibile a 2.200 \AA . La differenza di comportamento spettrale di queste due specie consiste nella larga permeabilità spettrale di *Clematis* (che è fra le cuticole più trasparenti alle radiazioni U.V.) ed una permeabilità solo alla prima parte dell'U.V. in *Berberis*, mentre si può dire praticamente impermeabile a lunghezze d'onda inferiori a 3.500 \AA .

Fra le specie che crescono nella parte più esterna della spiaggia, quasi lambite dall'acqua salsa, vi sono *Cakile maritima* la cui cuticola presenta

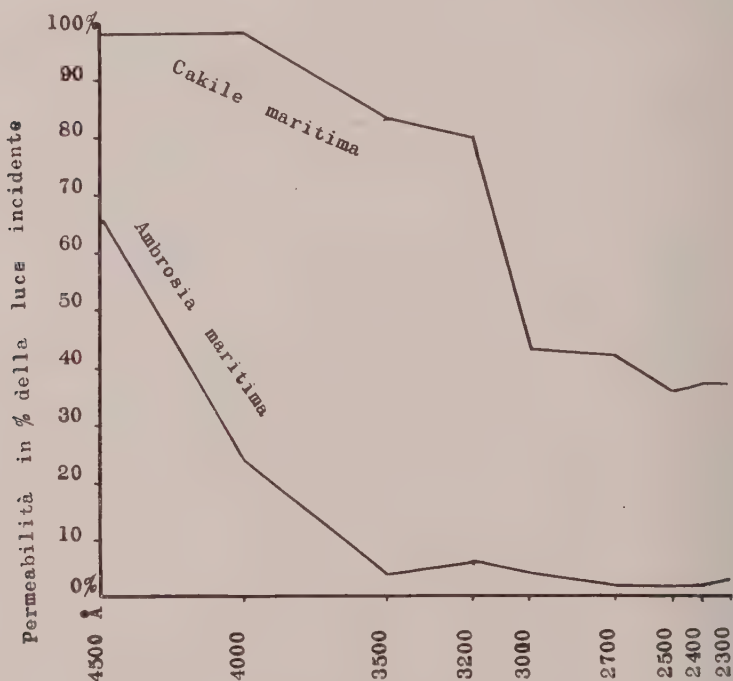


Fig. 1. - Permeabilità alle radiazioni comprese fra 4.500 e 2.300 \AA di cuticole di foglie adulte di *Cakile maritima* Scop. e di *Ambrosia maritima* L.

una larga permeabilità allo spettro U.V., mentre quasi nello stesso ambiente cresce *Convolvulus soldanella* specie alquanto succulenta, la quale, al contrario, presenta una elevata permeabilità solo a 4.500 \AA ma si abbassa immediatamente a 4.000 \AA e successivamente a 3.500 \AA , per restare sempre pochissimo permeabile fino a 2.400 \AA .

L'habitus di queste due specie, *Cakile* e *Convolvulus soldanella* è poco diverso, anche in considerazione della loro notevole succulenza mentre il tipo delle loro cuticole è nettamente distinto, in particolare per la rapidissima caduta della permeabilità fra 4.500 e 4.000 \AA che si nota in *Convolvulus*; in *Cakile* la permeabilità non differisce quasi in questo intervallo dello

spettro. Una differenza ancora maggiore si osserva confrontando la rappresentazione grafica della permeabilità (fig. 1) nella quale sullo stesso grafico sono poste le percentuali di luce trasmessa, nelle varie lunghezze d'onda, da *Cakile* e da *Ambrosia maritima*, altra specie quest'ultima che, nel litorale veneto di Jesolo, cresce abbondante e spesso frammista a *Convolvulus* nelle stesse associazioni (*Cakiletum* e *Ammophiletum*). *Ambrosia maritima*, già poco permeabile (appena il 66 %) a 4.500 Å passa al 24 % a 4.000 Å; la permeabilità scende a valori molto bassi a lunghezze d'onda minori.

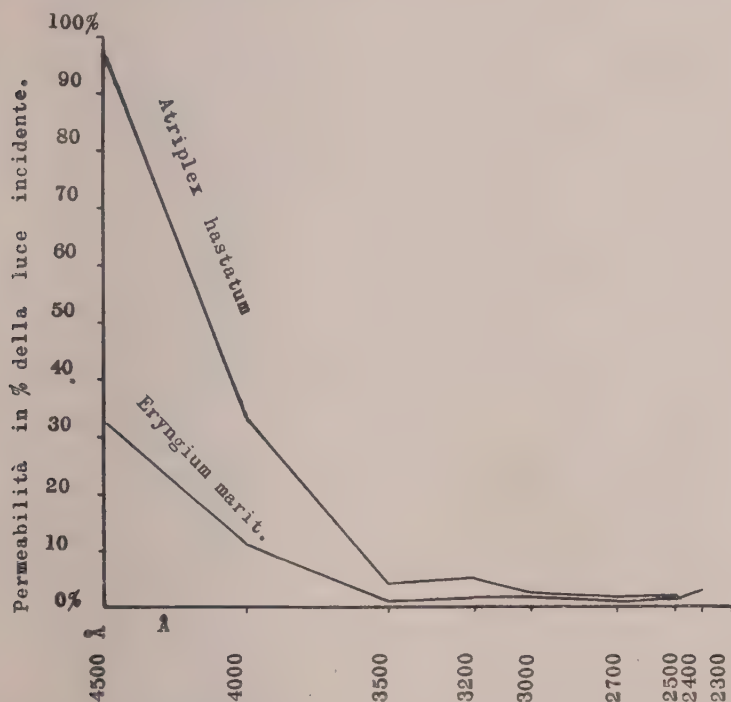


Fig. 2. — Permeabilità alle radiazioni ultraviolette comprese fra 4.500 e 2.300 Å di cuticole di foglie adulte di *Atriplex hastatum* L. e di *Eryngium maritimum* L.

Nella fig. 2 viene posto il confronto fra due altre specie dello stesso ambiente di duna che manifestano una netta differenza di permeabilità della loro cuticola: *Atriplex hastatum* ed *Eryngium maritimum*. In queste si nota una netta differenza nella permeabilità alle radiazioni di maggior lunghezza d'onda che è elevata per *Atriplex* (96 %) piccola per *Eryngium* (32 %). I due tracciati si avvicinano verso i 3.500 Å, e restano entrambi bassissimi nella parte più rifrangibile dello spettro, tanto che il diagramma ha un andamento quasi parallelo per entrambe le specie.

Anche per le altre specie che crescono un po' più indietro nella duna e che hanno una differente statura, ci si trova di fronte a dati numerici che

dimostrano una chiara specificità nella permeabilità cuticolare, indipendentemente dall'*habitat*. Hanno una larga permeabilità (in senso quantitativo) alle porzioni più rifrangibili dello spettro: *Clematis flammula* di cui si è già detto, seguita da *Rubus fruticosus*, mentre *Lonicera etrusca* e più ancora *Teucrium chamaedrys* manifestano una permeabilità molto più ridotta a partire da 4.000 Å in avanti; la permeabilità accenna a forte diminuzione anche nella cuticola di *Populus nigra* a partire da 3.500 Å.

Carthamus tinctorius è una specie che malgrado la compattezza e succulenza delle proprie foglie presenta una cuticola con larga permeabilità spettrale.

Un tipo particolare di permeabilità si osserva in *Medicago marina*, nella quale la permeabilità, elevata fino a 4.500 Å (96 %) si abbassa bruscamente a 4.000 Å (16 %), ed ancora a 3.500 Å (5 %) per restar bassissima alle lunghezze d'onda inferiori. Al contrario *Echinophora spinosa* ha una elevatissima permeabilità fino a 3.500 Å (92 %) per abbassarsi repentinamente a 3.200 Å (9 %).

È stato fatto infine il rapporto fra le permeabilità a 4.500 Å e quella a 4.000 Å; il rapporto così ottenuto indica immediatamente la caduta di permeabilità in questo settore, se il numero è superiore all'unità, mentre la permeabilità resta invariata se il rapporto è pari all'unità. Analogo rapporto è stato fatto mediante le percentuali di permeabilità fra 4.000 Å e 3.500 Å, zona questa nella quale sono più numerose le specie che manifestano una caduta di permeabilità, come potei vedere soprattutto nello studio sulle cuticole di specie sempreverdi della zona mediterranea.

L'esame della tabella dei rapporti fra 4.500 e 4.000 Å mostra che la massima differenza (rapporto pari a 6) si osserva in *Medicago maritima*, seguita da *Eryngium maritimum* (3) *Convolvulus soldanella* (2,9), *Atriplex hastatum*, *Lonicera etrusca*, *Teucrium chamaedrys*, ed *Ambrosia maritima*. Tutte le altre specie esaminate hanno rapporti più bassi, cioè hanno una caduta di permeabilità inferiore al 50 %.

Analogamente l'esame della tabella dei rapporti fra 4.000 e 3.500 Å indica una seconda soglia di cadute che, in valore assoluto, sono quasi sempre superiori alle precedenti. Il valore massimo si osserva in *Eryngium maritimum* (11) al quale segue *Berberis vulgaris* (9,4) *Atriplex hastatum* (8,25), *Ambrosia maritima* e *Populus nigra* (6) e *Medicago marina* (4,4).

Hanno in generale rapporti molto bassi quelle specie nelle quali la permeabilità spettrale si mantiene elevata fino alle radiazioni di più breve lunghezza d'onda, come per esempio *Cakile maritima*, *Rubus fruticosus*, ecc.

Le specie prese in considerazione in questa Nota appartengono per la grande maggioranza a quelle di duna, anche in senso sociologico, e tali sono: *Cakile maritima*, *Convolvulus soldanella*, *Medicago marina*, *Ambrosia maritima*, *Echinophora spinosa*, *Eryngium maritimum*, *Atriplex hastatum*, che se pure cresce su duna, è anche specie ruderale, mentre *Clematis flammula* è specie della macchia, come *Lonicera etrusca*.

TABELLA I.

Permeabilità percentuale alla luce U.V. di cuticole fogliari di piante adulte crescenti sul litorale e su dune (racc. agosto).

Cuticola della foglia di:	Lunghezza d'onda della luce in Å									Rapporto fra la percentuale di permeabilità a 4.500 Å : 4.000 Å	Rapporto fra la percentuale di permeabilità a 4.000 Å : 3.500 Å
	4.500	4.000	3.500	3.200	3.000	2.700	2.500	2.400	2.300		
<i>Convolvulus soldanella</i> L.	96	33	27	16	14	8	8	8	—	2,9	1,2
<i>Melicago marina</i> L.	96	16	5	7	5	2	2	3	3	6,0	4,4
<i>Cakile maritima</i> Scop.	98	98	83	80	43	42	36	37	—	1,0	1,18
<i>Ambrosia maritima</i> L.	66	24	4	6	4	2	2	2	3	2,7	6
<i>Eryngium maritimum</i> L.	32	11	1	2	2	1	2	3	—	3	11
<i>Echinophora spinosa</i> L.	96	96	92	9	6	3	3	3	—	1	1,04
<i>Atriplex hastatum</i> L.	96	33	4	5	2	1	1	—	—	2,9	8,25
<i>Carthamus tinctorius</i> L.	96	66	41	46	28	24	20	20	12	1,4	1,6
<i>Clematis flammula</i> L.	96	66	39	45	27	25	22	27	27	1,4	1,7
<i>Berberis vulgaris</i>	96	66	7	2	2	1	2	—	—	1,4	9,4
<i>Lonicera etrusca</i> Santi	96	34	8	15	10	5	4	7	7	2,8	4
<i>Teucrium chamaedrys</i> L.	96	34	8	9	7	4	4	6	—	2,8	4
<i>Rubus fruticosus</i> L.	96	49	33	52	33	31	24	28	—	1,95	1,48
<i>Populus nigra</i> L.	96	96	16	18	9	6	5	8	—	1	6

Convergono nella duna anche specie appartenenti ad altre associazioni, come quelle del bosco caducifoglio quali: *Berberis vulgaris*, *Rubus fruticosus*, *Teucrium chamaedrys*, *Populus nigra*. Al bosco sempreverde appartiene *Clematis flammula*.

Considerando ora la permeabilità cuticolare alle radiazioni U.V. delle specie prese in esame, e confrontandole con il loro significato fitosociologico ed ecologico, appare subito evidente come non vi sia una relazione fra il tipo della cuticola, ed il tipo ecologico della specie. Basti a rendersene conto il semplice confronto fra due specie tipiche di duna: *Ambrosia maritima*, e *Cakile maritima*, le cui permeabilità sono indicate nella fig. 1, dove vi è una netta differenza sia di ordine quantitativo sia qualitativo. Analogamente dicasi per altre specie adattate secondariamente alla duna ma appartenenti naturalmente ad altre associazioni, alcune perfino di sottobosco sempreverde, come *Clematis flammula*. *Rubus fruticosus* è specie tipicamente ombrofila, e la sua grande permeabilità cuticolare potrebbe dar ragione di questo suo peculiare *habitat* che normalmente è sottratto alle intense radiazioni: anche *Clematis flammula* rientrerebbe in questo gruppo. Al contrario non si può spiegare la larga permeabilità di *Carthamus tinctorius*, che è specie ruderale e di solito di località ad elevata illuminazione. Per le specie di duna, se si fa eccezione per *Cakile maritima*, le altre sono in generale abbastanza permeabili fino a 3.500 \AA , ma oltre tale limite la permeabilità cuticolare scende a valori molto bassi e talvolta bassissimi. Una coincidenza fra il tipo di permeabilità e l'*habitat* della specie può essere riscontrata in diversi casi, ma non sempre è valida questa relazione. Ritengo che, come già dissi, la permeabilità cuticolare sia un carattere specifico, dovuto in parte allo spessore della cuticola, ma in gran parte al tipo dei costituenti chimici della cuticola stessa, che sulla scorta di queste osservazioni viene fatto di ritenere debbano essere ben diversi e specifici.

Finora le nostre conoscenze sulla chimica della cuticola sono piuttosto frammentarie e limitate a pochissime specie, come ebbi a ricordare in precedenza. Lo spettro della permeabilità, con un andamento così diverso da specie a specie, conferma l'ipotesi che ci dobbiamo trovare di fronte a composizioni chimiche e strutture chimico-fisiche differenti dipendenti da caratteri specifici. Sulla scorta di queste mie osservazioni sarà possibile in futuro una scelta oculata di piante le quali, per possedere cuticole con differenze profondissime di fronte alla permeabilità spettrale, potranno essere scelte per un esame chimico approfondito disponendo di una massa sufficiente di cuticola.

Ho già in avanzato studio osservazioni su specie di ambienti differenti, da quelle di tipo sempreverde e mediterranea, alle specie alpine. Quest'ultime per essere esposte a radiazioni solari di un'ampiezza spettrale maggiore (rispetto alle piante planiziarie) con l'aumentare della quota, particolarmente nella gamma dell'U.V., costituiscono materiale importante per l'estensione di questo studio.

Sulla scorta delle attuali osservazioni fatte con piante crescenti nell'ambiente di duna, non è possibile per il momento tentare una classifica-

zione di tipi di cuticole aventi spettri di assorbimento caratteristici di gruppo. Ogni specie ha uno spettro che è abbastanza caratteristico la cui dipendenza con l'ambiente in cui cresce la pianta sarà oggetto di studio.

Per alcune specie che possono crescere anche in ambienti notevolmente diversi sarà agevole controllare gli effetti determinati dall'ambiente stesso, come per esempio *Berberis* che si spinge dal mare fino a circa 1.500 metri e anche fino a 2.000, come principale componente delle associazioni arbustive del *Berberidion*.

Per altre specie strettamente legate alla duna, questo evidentemente non è possibile, e potrà essere studiato solo in funzione dell'età della foglia nel corso dell'annata vegetativa.

Dalle osservazioni su riferite si possono per ora trarre le seguenti *conclusioni*:

Considerata la cuticola come unità morfologica e studiando quella della pagina superiore della foglia, si può affermare che la sua permeabilità alla luce è elevatissima alla lunghezza d'onda di 4.500 \AA (che corrisponde all'ultima porzione violetta dello spettro visibile) per la quasi totalità delle specie, con valori che si aggirano dal 98 al 95 %; solo *Eryngium maritimum* ha una permeabilità ridotta al 32 %.. Nell'ultravioletto prossimo 4.000 \AA si osserva una caduta notevole della permeabilità in ben 8 specie sulle 14 studiate, ed una caduta di permeabilità ancor maggiore si verifica a 3.500 \AA , con altre 8 specie sulle 14 esaminate.

Le specie che hanno ancora una discreta permeabilità oltre i 3.200 \AA sono: *Carthamus tinctorius*, *Cakile maritima*, (fra quelle spiccatamente di duna) e *Clematis flammula*, *Rubus fruticosus* fra le specie di bosco, occasionalmente adattate alla duna.

La permeabilità è praticamente nulla oltre i 2.300 \AA .

Queste osservazioni mostrano l'esistenza di tipi cuticolari ben distinti di fronte alle radiazioni più rifrangibili dello spettro, differenze che devono avere verosimilmente un riferimento nella composizione chimica delle cuticole stesse.

BIBLIOGRAFIA.

- BENEDICT H. M., *Effect of ultraviolet Radiation on Growth and on the calcium and phosphorus contents of Plants*, « Bot. Gaz. », 96, pp. 330-341 (1934).
DAGMAR LAUTENSCHLAGER FLEURY, *Über die Ultravioletturchlässigkeit von Blattepidermen*, « Ber. Schweizerischen Bot. Ges. », Bd. 65, 343-386 (1955).
DRIGO A. e ALOCCO G., *Fisica pratica*. Padova (1945).
KREGER D. R. e MADER H., *Wachs, Cutin, Kork*, in « Hand. d. Pflanzenphysiologie », Bd. X, pp. 249-299 (1958).
LEE BEATRICE, *The plant cuticle*. - II. *A macrochemical study*, « Annals of Botany », vol. 39, 755-768 (1925).
LEE B. e PRIESTLEY J. H., *The plant cuticles*. - I. *Its structure, distribution and function*, « Annals of Botany », vol. 38, 525-545 (1924).

- MARTENS P., *Recherches sur la cuticule*. - III. *Structure, origine et signification du relief cuticulaire*, « Protoplasma », Bd. 20, 483 (1934).
- METZNER P., *Über das optische Verhalten der Pflanzengewebe im langwelligeren ultravioletten Licht*, « Planta », 10, pp. 281-313 (1930).
- MEYER M., *Die submicroscopische Struktur der kutinisierten Zellmembranen*, « Protoplasma », Bd. 29, p. 552 (1938).
- ROELOFSEN P. A., *On the submicroscopic structure of cuticular cell walls*, « Acta Botan. Neerlandica », vol. I, pp. 100-114 (1952).
- SHULL C. A. e LEMON B. H., *Penetration of seed coats by ultraviolet Radiation*, « Bot. Gaz. », 92, pp. 420-429 (1931).
- SKOSS JESSE D., *Structure and composition of plant Cuticle in relation to environmental Factors and Permeability*, « Botan. Gazette U.S.A. », 177, pp. 55-72 (1955).
- WALLACE H. ORGELL, *The isolation of plant Cuticle with Pectin Enzymes*, « Plant Physiology », vol. 30, p. 78 (1955).
- WUHRMANN-MEYER K. e M., *Untersuchungen über die Absorption Ultravioletter Strahlen durch Kutikular- und Wachsschichten von Blättern*, « Planta », Bd. 32, p. 43 (1941).

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi funzionale. — *Sur un problème d'isomorphie de S. Banach.* Nota IVAN SINGER, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

1. S. Banach a posé [1] le problème suivant, qui est resté non résolu jusqu'à présent (voir, par exemple, [9], chap. I, § 1, et [5], § 3, remarque 4°):

Désignons par (I) la classe de tous les espaces de Banach de dimension infinie, qui jouissent de la propriété suivante: E est isomorphe ⁽¹⁾ à chacun de ses hyperplans fermés ⁽²⁾. Est-il vrai que tout espace de Banach de dimension infinie, E, appartient à la classe (I)?

Au sujet de ce problème, dans le travail [12] nous avons démontré, entre autres, les résultats suivants:

(A) Soit E un espace de Banach tel qu'un sous-espace complémenté E_x de E est isomorphe à l'un des espaces c_0, l^p ($1 \leq p < +\infty$), ou, plus généralement, à un espace de Banach B tel que $B \in (I)$. Alors $E \in (I)$.

(B) $C([0, 1]) \in (I)$ et $L^p([0, 1]) \in (I)$ pour $1 < p < \infty$.

(C) Si $E \in (I)$, alors $E^* \in (I)$.

Le but de la présente Note est de démontrer, pour quelques autres espaces de Banach E, de dimension infinie, que $E \in (I)$. En particulier, on verra que tous les espaces de Banach classiques jouissent de cette propriété. Les démonstrations reposent sur le théorème (A) ci-dessus.

2. THÉORÈME 1. — Soit E un espace de Banach séparable contenant un sous-espace G isomorphe à l'espace c_0 . Alors $E \in (I)$.

Démonstration. En vertu d'un théorème de Sobczyk (voir, par exemple, [11], théorème 4), G est nécessairement complémenté dans E, donc on peut appliquer le théorème (A) ci-dessus.

COROLLAIRE 1. — Soit E un espace de Banach séparable, ayant l'une des propriétés suivantes:

a) E est un sous-espace complémenté de $C([0, 1])$.

b) E est un sous-espace arbitraire, de dimension infinie, de c_0 .

c) E est un espace à base absolue, qui n'est pas isomorphe à un dual d'espace de Banach.

Alors $E \in (I)$.

(*) Nella seduta dell'11 marzo 1961.

(1) Au sens de [1], i.e.: algébriquement et topologiquement.

(2) C'est-à-dire: à chacun de ses sous-espaces vectoriels fermés maximaux. Dans ce qui suit, au lieu de « sous-espace vectoriel fermé » nous dirons, pour abrégé, « sous-espace ».

En effet, dans le cas *a*), en vertu de [11], corollaire 2, E contient un sous-espace isomorphe à c_0 . Dans le cas *b*), en vertu d'un théorème de Banach ([1], p. 194, théorème 1), E contient un sous-espace isomorphe à c_0 . Enfin, dans le cas *c*), en vertu de [6], lemme 1 et de [10], théorème 1, E contient un sous-espace isomorphe à c_0 .

Dans le cas où l'on ne suppose aucune propriété de séparabilité, on a le

THÉORÈME 2. — Soit E^* le dual d'un espace de Banach E , et supposons que E^* contient un sous-espace isomorphe à c_0 . Alors $E \in (I)$ et $E^* \in (I)$.

Démonstration. — En vertu de [3], théorème 4, E contient un sous-espace complété isomorphe à l^1 , donc on peut appliquer le théorème (A), d'où $E \in (I)$. En vertu de (C) on a aussi $E^* \in (I)$.

COROLLAIRE 2. — Soit E un espace de Banach contenant un sous-espace isomorphe à c_0 . Alors $E^* \in (I)$.

En effet, cela résulte du théorème 2, si l'on plonge canoniquement l'espace E dans son bidual E^{**} .

3. Dans ce paragraphe nous allons compléter le théorème (B) ci-dessus avec les cas $p = 1$ et $p = +\infty$, et le théorème (A) avec le cas $p = +\infty$.

THÉORÈME 3. — Soit E un sous-espace complété, de dimension infinie, d'un espace de Banach isomorphe à un espace du type (L) ⁽³⁾. Alors $E \in (I)$.

Démonstration. — En vertu de [11], corollaire 4, E contient un sous-espace complété E_1 , isomorphe à l^1 , donc on peut appliquer le théorème (A) ci-dessus.

Comme l'espace $L^1([0, 1])$ est un espace du type (L), on a le

COROLLAIRE 3. — $L^1([0, 1]) \in (I)$. De plus, si E est un sous-espace complété de $L^1([0, 1])$, alors $E \in (I)$.

Passons au cas $p = +\infty$.

THÉORÈME 4. — $m \in (I)$.

Démonstration. — En vertu d'une remarque de C. Bessaga et A. Pełczyński ([5], § 3), tous les hyperplans fermés de m sont isomorphes, donc il suffit de trouver un seul hyperplan fermé H tel que m soit isomorphe à H . Soit

$$H = \{y = \{\eta_1, \eta_2, \dots\} \in m \mid \eta_1 = 0\}.$$

Alors l'application T définie par

$$T(\{\xi_1, \xi_2, \dots\}) = \{0, \xi_1, \xi_2, \dots\} \quad (\{\xi_1, \xi_2, \dots\} \in m)$$

est évidemment un isomorphisme isométrique de m sur H , d'où le théorème.

COROLLAIRE 4. — Soit E un espace de Banach, ayant l'une des propriétés suivantes:

a) E contient un sous-espace E_1 isomorphe à m .

b) E contient un sous-espace isomorphe à $C(T)$, où T est un espace de Hausdorff compact extrêmement disconnexe.

(3) Rappelons qu'une lattice de Banach est appelée « espace du type (L) », si $x \geq 0$ et $y \geq 0$ entraînent $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$.

c) E contient un sous-espace isomorphe à $L^\infty([0, 1]) \equiv M([0, 1])$.

Alors $E \in (I)$.

En effet, dans le cas *a*), en vertu d'une remarque de [11], p. 222, E_1 est complémenté dans E , donc on peut appliquer le théorème (A), en y posant $B = m$. Dans le cas *b*), en vertu d'une remarque de [8], E contient un sous-espace E_1 isomorphe à m , donc on n'a qu'à appliquer *a*). Enfin, dans le cas *c*), en vertu de [2], § 2, E contient un sous-espace E_1 isomorphe à m , et l'on peut appliquer *a*).

4. Comme l'espace J de R. C. James [7] présente certaines propriétés d'isomorphie pathologiques – par exemple, il n'est pas isomorphe au carré Z^2 d'aucun espace de Banach Z ([5], remarque 1^o) – nous voulons remarquer ici que, toutefois $J \in (I)$. En effet, en vertu des résultats de [7], J est isométriquement isomorphe à J^{**} , et, en même temps, à un hyperplan fermé de J^{**} , d'où, compte tenu de la remarque de [5] déjà utilisée dans la démonstration du théorème 4 ci-dessus, $J^{**} \in (I)$. Comme J est isomorphe à J^{**} , il s'ensuit que $J \in (I)$.

5. Désignons par (S) la classe de tous les espaces de Banach E de dimension infinie, qui jouissent de la propriété suivante: tout sous-espace de dimension infinie de E appartient à (I) . Alors le corollaire 1 *b*) peut s'exprimer ainsi:

$$e_0 \in (S).$$

Dans ce qui suit nous démontrerons pour quelques autres espaces de Banach E , de dimension infinie, que $E \in (S)$.

THÉORÈME 5. – $\ell^p \in (S)$ ($1 \leq p < +\infty$).

Démonstration. – Soit E un sous-espace arbitraire, de dimension infinie, de ℓ^p . En vertu de [11], lemme 2 ⁽⁴⁾, E contient un sous-espace E_1 , isomorphe à ℓ^p et complémenté dans ℓ^p . Alors E_1 est aussi complémenté dans E , donc, en vertu du théorème (A) ci-dessus, $E \in (I)$, ce qui achève la démonstration.

6. Enfin, nous démontrerons un théorème qui contient comme cas particuliers le corollaire 1 *b*) et *c*), ainsi que le cas $p = 1$ du théorème 5:

THÉORÈME 6. – Soit X un espace de Banach non réflexif, possédant une base absolue (« unconditional basis »). Alors $X \in (S)$.

Démonstration. – Soit E un sous-espace arbitraire, de dimension infinie, de X . En vertu de [4], corollaire 1, E contient ou bien un sous-espace G_1 isomorphe à e_0 , ou bien un sous-espace G_2 isomorphe à ℓ^1 . Dans le premier

(4) Dans la démonstration de ce lemme, donné dans [11], p. 215, il y a quelques erreurs d'impression, parmi lesquels nous mentionnons les suivantes: dans la formule (5), au lieu de

$\sum_{i=p_m}^{p_m} \text{ il faut lire } \sum_{i=p_m-1}^{\infty}$; dans la formule (7) au lieu de $\sum_{i=p_m-1}^{\infty}$ il faut

lire $\sum_{i=p_m+1}^{\infty}$.

cas, en vertu du théorème 1, on a $E \in (I)$. Dans le second cas, en vertu de [3], corollaire 7⁽⁵⁾, G_2 contient un sous-espace E_x isomorphe à l^1 et complétement dans E , d'où, en vertu du théorème (A), $E \in (I)$.

Le théorème 6 est démontré.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] S. BANACH, *Théorie des opérations linéaires*, Varsovie (1932).
- [2] S. BANACH et S. MAZUR, *Zur Theorie der linearen Dimension*, « *Studia Math.* », t. 4, pp. 100–112 (1933).
- [3] C. BESSAGA et A. PELCZYŃSKI, *On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces*, « *Studia Math.* », t. 17, pp. 151–164 (1958).
- [4] C. BESSAGA et A. PELCZYŃSKI, *A generalization of results of R. C. James concerning absolute bases in Banach spaces*, « *Studia Math.* », t. 17, pp. 165–174 (1958).
- [5] C. BESSAGA et A. PELCZYŃSKI, *Banach spaces non-isomorphic to their cartesian squares. I*, « *Bull. Ac. pol. sci. sér. math. astr. et phys.* », t. 8, nr. 2, pp. 77–80 (1960).
- [6] R. C. JAMES, *Bases and reflexivity of Banach spaces*, « *Ann. of Math.* », t. 52, pp. 518–527 (1950).
- [7] R. C. JAMES, *A non-reflexive Banach space isometric with its second conjugate space*, « *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* », t. 37, pp. 174–177 (1951).
- [8] R. C. JAMES, *Projections in the space (m)* , « *Proc. Amer. Math. Soc.* », t. 6, pp. 899–902 (1955).
- [9] I. KAPLANSKY, *Functional analysis*, Surveys in applied mathematics, t. 4: *Some aspects of analysis and probability*, New-York (1958).
- [10] S. KARLIN, *Bases in Banach spaces*, « *Duke Math. Journ.* », t. 15, pp. 971–985 (1958).
- [11] A. PELCZYŃSKI, *Projections in certain Banach spaces*, « *Studia Math.* », t. 19, pp. 209–228 (1960).
- [12] I. SINGER, *Sur les espaces de Banach à base symétrique* (en russe), « *Revue de math. pures et appl.* », t. 6, nr. 1 (1961), sous presse.

(5) Nous utilisons le fait que ce corollaire reste valable si l'on y remplace « équivalent » par « isomorphe ».

Analisi matematica. — *Sull'approssimazione uniforme delle funzioni olomorfe con funzioni razionali aventi i poli prefissati.* Nota di GAETANO FICHERA, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

In una ricerca compiuta durante la mia permanenza presso il Mathematics Research Center dell'U. S. Army e pubblicata, oltre che come Technical Report di quel Centro ⁽¹⁾, in due Note lincee ⁽²⁾, mi ero occupato del problema riguardante l'approssimazione uniforme di una funzione $f(z)$, olomorfa in un campo A limitato, e continua nella chiusura \bar{A} di A , mediante combinazioni lineari di funzioni razionali aventi poli semplici in punti prefissati esterni ad A .

È forse non inutile tornare sull'argomento per considerare il problema più generale relativo alla approssimazione uniforme della $f(z)$ in \bar{A} mediante funzioni razionali le quali abbiano poli di ordine prefissato (non necessariamente semplici) in punti assegnati. Il risultato che verrà stabilito mi sembra costituire un nuovo contributo alla teoria della approssimazione delle funzioni olomorfe mediante funzioni razionali, in quanto — a differenza dei risultati finora noti — vengono date le condizioni necessarie e sufficienti cui deve soddisfare un insieme perché esso sia quello dei punti singolari per le funzioni approssimanti, non escludendo che l'insieme delle singolarità possa avere punti di accumulazione in \bar{A} ⁽³⁾. Occorre dire che il teorema che verrà stabilito nella presente Nota scaturisce, quale abbastanza immediata conseguenza, dai risultati ottenuti nelle due Note sopracitate e dai procedimenti là istituiti.

Il campo limitato A abbia per frontiera $n + 1$ curve chiuse di Jordan: Σ_0 (contorno esterno) $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$ (contorni interni), a due a due disgiunte e ciascuna dotata di curvatura continua. Sia A_0 il campo illimitato di frontiera Σ_0 e A_i il campo limitato di frontiera Σ_i ($i = 0, 1, \dots, n$).

Sia $\{z_k\}$ ($k = 1, 2, \dots$) una successione di punti tutti esterni ad A , a due a due distinti, e $\{v_k\}$ una successione di interi positivi.

Vogliamo determinare le condizioni necessarie e sufficienti cui debbono soddisfare le due successioni $\{z_k\}$ e $\{v_k\}$ perché, data comunque una $f(z)$ continua in \bar{A} ed olomorfa in A e assegnato $\epsilon > 0$, esista una funzione razionale

(*) Nella seduta dell'11 marzo 1961.

(1) *On the completeness of sequences of reciprocals of linear functions*, «Math. Res. Center U. S. Army», Tech. Rep. 117 — October 1959.

(2) *Approssimazione uniforme delle funzioni olomorfe mediante funzioni razionali aventi poli semplici prefissati*, Nota I e Nota II. «Rend. Acc. Naz. dei Lincei», serie VIII, volume XXVII, fasc. 5 e 6 — novembre-dicembre 1959.

(3) Per la bibliografia sull'argomento, cfr. le due Note citate in ⁽²⁾. D'ora in avanti, indicherò la prima di esse con N_1 e la seconda con N_2 .

propria $R_\varepsilon z$ avente in ogni z_k , se non vi è regolare, un polo al più di ordine ν_k , regolare in ogni punto z del piano non appartenente a $\{z_k\}$ e tale che $|f(z) - R_\varepsilon(z)| < \varepsilon$ in ogni $z \in \bar{A}$. In altri termini, considerata la successione $\{R_\varepsilon(z)\}$ costituita da tutte quelle funzioni ottenute dalle seguenti: $(z - z_k)^{-1}$, $z - z_k^{-2}$, ..., $(z - z_k)^{-\nu_k}$ al variare di k , si tratta di determinare sotto quali condizioni per $\{z_k\}$ e $\{\nu_k\}$ essa è completa per l'approssimazione delle funzioni continue in \bar{A} ed olomorfe in A , cioè è completa nello spazio $\Omega(A)$ introdotto in N_2 .

Sussiste il seguente teorema.

Sia Z l'insieme di tutti i punti di $\{z_k\}$. La successione $\{R^{(i)}(z)\}$ è completa in $\Omega(A)$ se e solo se: 1° nessuno degli insiemi $A_i \cap Z$ ($i = 0, 1, \dots, n$) è vuoto; 2° detto $\{z_h^{(i)}\}$ l'insieme di tutti i punti distinti costituenti $A_i \cap Z$ ($i = 0, 1, \dots, n$), ciascuna delle serie $\sum_h \nu_h^{(i)} d(z_h^{(i)})$ è divergente, avendo indicato con $d(z_h^{(i)})$ la distanza di $z_h^{(i)}$ da \bar{A} e con $\nu_h^{(i)}$ l'elemento ν_k di $\{\nu_k\}$ se è $z_h^{(i)} = z_k$.

La condizione è sufficiente. In base al teorema VII di N_2 occorre far vedere che se $\alpha(B)$ è una misura complessa definita su ogni boreliano B contenuto in $\Sigma = \bigcup_{i=0}^n \Sigma_i$, dall'essere

$$(I) \quad \int_{\Sigma} R^{(i)}(\zeta) \zeta' d\alpha = 0 \quad (4)$$

per ogni s , segue

$$\int_{\Sigma} \frac{\zeta' d\alpha}{\zeta - z} = 0$$

per ogni z esterno ad A .

Per ogni i ($i = 0, 1, \dots, n$) esiste una misura α_i definita sui boreliani di Σ_i tale che per $z \in A_i$ riesce

$$a(z) \equiv \int_{\Sigma} \frac{\zeta' d\alpha}{\zeta - z} = \int_{\Sigma_i} \frac{\zeta' d\alpha_i}{\zeta - z}.$$

Le α_i scritte in corrispondenza alle funzioni $R^{(i)}(z)$ che hanno i poli in A_i implicano le seguenti eguaglianze:

$$\left[\frac{d^n}{dz^n} \int_{\Sigma_i} \frac{\zeta' d\alpha_i}{\zeta - z} \right]_{z=z_h^{(i)}} = 0$$

$$(n = 1, 2, \dots, \nu_h^{(i)} - 1, \quad h = 1, 2, \dots)$$

pertanto la funzione $a(z)$ ha uno zero di ordine $\nu_h^{(i)}$ almeno in $z_h^{(i)}$. Per la divergenza della serie $\sum_h \nu_h^{(i)} d(z_h^{(i)})$ deve essere, in accordo al lemma X di N_2 , $a(z) \equiv 0$ in A_i .

(4) ζ' denota la derivata rispetto all'arco del punto variabile su Σ . Il verso dell'arco crescente è quello antiorario su Σ_0 e quello orario su $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$.

La condizione è necessaria. Sia $\{R^{(i)}(z)\}$ completa in $\Omega(A)$ e, per assurdo, sia $A_i \cap Z$ vuoto, oppure, nel caso contrario, sia

$$(2) \quad \sum_h v_h^{(i)} d(z_h^{(i)}) < +\infty.$$

Se $A_i \cap Z$ è vuoto, diciamo $G(z)$ una qualsiasi funzione non identicamente nulla olomorfa in A_i (anche in $z = \infty$ se $i = 0$) e ivi limitata. Se $A_i \cap Z$ non è vuoto e si verifica la (2), diciamo $w = \Phi(z)$ la funzione che rappresenta conformemente A_i nel disco unitario $|w| < 1$. La funzione $\Phi(z)$ è di classe uno in \bar{A}_i (e olomorfa in $z = \infty$ per $i = 0$). Detto M un numero non superato in \bar{A}_i da $|\Phi_i(z)|$ riesce

$$(3) \quad |1 - \Phi(z)| \leq M d(z),$$

denotando ora $d(z)$ la distanza di z da Σ_i . Per la (2) e la (3), il prodotto di Blaschke

$$\prod_h \left[\frac{\Phi(z) - \Phi(z_h^{(i)})}{\Phi(z_h^{(i)})\Phi(z) - 1} \frac{\overline{\Phi(z_h^{(i)})}}{|\Phi(z_h^{(i)})|} \right]^{v_h^{(i)}}$$

converge assolutamente e uniformemente in ogni insieme chiuso contenuto in A_i verso una funzione $G(z)$ non identicamente nulla, limitata in A_i , ivi olomorfa (anche in $z = \infty$ se $i = 0$) e verificante le condizioni:

$$G^{(m)}(z_h^{(i)}) = 0 \quad (h = 1, \dots; m = 0, \dots, v_h^{(i)} - 1).$$

Per ogni boreliano B di Σ poniamo:

$$\alpha(B) \left\{ \begin{array}{l} = 0 \quad \text{se } B \subset \Sigma_j \text{ con } j \neq i \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_B G(\zeta) d\zeta \quad \text{se } B \subset \Sigma_i, \end{array} \right.$$

dopo aver prolungato $G(z)$ quasi ovunque su Σ_i mediante i suoi limiti angolari. Si ha

$$\alpha(z) \equiv \int_{\Sigma} \frac{\zeta' d\alpha}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma_i} \frac{\zeta' G(\zeta)}{\zeta - z} |d\zeta| \left\{ \begin{array}{l} = 0 \quad \text{se } z \in A_j \text{ con } j \neq i \\ = -G(z) \quad \text{se } z \in A_i. \end{array} \right.$$

Ne segue

$$\int_{\Sigma} R^{(s)}(\zeta) \zeta' d\alpha = 0$$

per ogni s , talché, per la supposta completezza della successione $\{R^{(s)}(\zeta)\}$ dovrebbe essere $\alpha(z) \equiv 0$ all'esterno di A . Ciò non è vero per $z \in A_i$.

Osservazione. — Le ipotesi su Σ , che escludono la presenza di punti angolosi, potrebbero apparire come «condizioni di comodo» ammesse per facilitare le dimostrazioni. Non è questo il caso. La presenza di un punto angoloso su Σ renderebbe falso il teorema. Si consideri infatti il campo A

limitato internamente dalla curva Σ_r di equazione polare $\rho^{\pi/\alpha} = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{\alpha} \vartheta$, $0 \leq \vartheta \leq \alpha$ (essendo $0 < \alpha < \pi$) avente nell'origine un punto angoloso, ed esternamente dalla circonferenza: $\rho = 2$. Sia $\{z_k\}$ la successione costituita dai punti $z_j^{(0)} = 2 + j$ ($j = 1, 2, \dots$) e dai punti $z_h^{(1)} = h^{-1} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \right)$ ($h = 1, 2, \dots$). Assumiamo $v_k = 1$. È facile verificare che sono soddisfatte le condizioni del teorema. Tuttavia il sistema $\{(z = z_k)^{-1}\}$ non è completo. Considerata nel campo A_r limitato da Σ_r la funzione $G(z)$ data dal prodotto infinito assolutamente e uniformemente convergente nell'interno di A_r :

$$G(z) = \prod_{h=1}^{\infty} \frac{i h^{\frac{\pi}{\alpha}} z^{\frac{\pi}{\alpha}} + 1}{i (h^{\frac{\pi}{\alpha}} - 1) (z^{\frac{\pi}{\alpha}} - i) - h^{\frac{\pi}{\alpha}}}$$

si constata che essa, scegliendo per $z^{\pi/\alpha}$ la determinazione principale, è olomorfa in A_r e limitata. Si ha inoltre $G(z_h) = 0$ ($h = 1, 2, \dots$). Ragionando come nella seconda parte della dimostrazione del teorema (dimostrazione della necessità) si conclude che il sistema $\{(z - z_k)^{-1}\}$ non è completo.

Analisi matematica. — *Sul calcolo approssimato degli autovalori delle trasformazioni compatte e delle relative molteplicità.* Nota I di LUCIANO DE VITO, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

Sia $\{\lambda_k\}$ una successione decrescente di numeri reali positivi e sia $\{p_k\}$ una successione di numeri reali non minori di 1. Esista un intero positivo n' tale che, per ogni intero $n \geq n'$, la serie $\sum_{k=1}^n p_k \lambda_k^{2^n}$ risulti convergente. Detta t_n la somma della serie $\sum_{k=1}^n p_k \lambda_k^{2^n}$ ($n \geq n'$), ci proponiamo di dare un procedimento di calcolo per difetto e per eccesso dei numeri λ_s , $s = 1, 2, \dots$, che si basa sulla conoscenza dei numeri t_n , $n = n', n' + 1, \dots$, e dei numeri p_k , $k = 1, 2, 3, \dots, s - 1$.

Tale procedimento di calcolo può riuscire utile nella determinazione numerica degli autovalori di trasformazioni lineari verificanti opportune ipotesi, che ora veniamo a precisare. Siano S un insieme lineare sul corpo reale o sul corpo complesso, T una trasformazione lineare definita in S e tale che: $T(S) \subset S$. Supponiamo che T soddisfi le seguenti condizioni:

1° l'equazione

$$(1) \quad T(u) - \lambda u = 0$$

ammette un numero discreto (cioè un numero finito o un'infinità numerabile) di autovalori tutti reali ed ognuno di tali autovalori ha molteplicità finita;

2° denotata con $\{\lambda_k\}$ la successione dei moduli dei detti autovalori, è possibile ordinare i λ_k in modo che risulti:

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots$$

e indicata con p_k la somma delle molteplicità degli autovalori di (1) che hanno modulo eguale a λ_k , la serie $\sum_k p_k \lambda_k^{2^n}$, per ogni intero n maggiore o eguale di un certo n' , risulta convergente. In corrispondenza ad una trasformazione lineare T verificante tali condizioni 1° e 2°, il procedimento di calcolo cui prima si è accennato consente allora la determinazione numerica dei moduli degli autovalori di (1): $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, nell'ipotesi che si conoscano le molteplicità di tali autovalori, od anche soltanto i numeri p_k , ($k = 1, 2, \dots$), ed i numeri t_n con $t_n = \sum_k p_k \lambda_k^{2^n}$.

In taluni casi, i numeri t_n possono calcolarsi direttamente a partire dalla trasformazione T stessa. Si consideri, ad esempio, lo spazio hilbertiano complesso S delle funzioni $u(x)$ di quadrato sommabile nell'intervallo reale (a, b) rispetto ad una misura non negativa μ (ove il prodotto scalare è definito nel modo consueto) e si indichi con $K(x, y)$ una funzione definita in

(*) Nella seduta dell'11 marzo 1961.

$(a, b) \times (a, b)$, hermitiana, tale che: I) per ogni $u(y) \in S$, fissato μ -quasi ovunque x in (a, b) , la funzione di $y: K(x, y) u(y)$ sia μ -sommabile in (a, b) ; II) la funzione di $x: \int_{(a, b)} |K(x, y) u(y)| d\mu_y$ appartenga ad S ; III) posto, per ogni intero $n \geq 1$:

$$K_n(x, y) = \int_{(a, b)} K(x, \eta) K_{n-1}(\eta, y) d\mu_\eta, \quad K_0(x, y) = K(x, y),$$

esista un intero $n' \geq 1$ tale che $|K_{n'-1}(x, y)|^2$ sia sommabile rispetto a $\mu \times \mu$ in $(a, b) \times (a, b)$. La trasformazione lineare di S in sé:

$$T(u) = \int_{(a, b)} K(x, y) u(y) d\mu_y$$

è hermitiana, totalmente continua e verifica le ipotesi 1° e 2°; inoltre si ha:

$$t_n = \int_{(a, b) \times (a, b)} |K_{n-1}(x, y)|^2 d\mu_x d\mu_y \quad n \geq n'$$

ove:

$$K_n(x, y) = \int_{(a, b)} K(x, \eta) K_{n-1}(\eta, y) d\mu_\eta, \quad K_0(x, y) = K(x, y) \quad (1).$$

Caso particolare di quello ora considerato è il caso in cui S è lo spazio cartesiano ad r dimensioni e T è una trasformazione lineare hermitiana di S in sé, di matrice $\{a_{i,h}\} \equiv A$; allora, indicati con $a_{i,h}^{(n)}$ gli elementi della matrice $A^{(n)} = A * A^{(n-1)}$ (con $A^{(0)} = A$) si ha:

$$t_n = \sum_{i,h}^{1,r} |a_{i,h}^{(n)}|^2.$$

Sarà poi fatto vedere che la conoscenza dei numeri p_k è perfettamente equivalente alla conoscenza di numeri che separino le quantità λ_k in un senso che verremo a ben precisare.

Mostreremo anche un procedimento di calcolo per eccesso del numero p_1 e, più in generale, del numero p_k , il quale si basa sulla conoscenza dei numeri p_1, \dots, p_{k-1} e di t_n ($n = n', n' + 1, \dots$). Tale ultimo procedimento può servire ad integrare il classico metodo di Ritz per il calcolo degli autovalori. Si consideri infatti, ad esempio, la trasformazione

$$T(u) = \int_{(a, b)} K(x, y) u(y) d\mu_y$$

dianzi introdotta, con $K(x, y)$ verificante le condizioni già menzionate ed inoltre definito positivo; ove non si conosca la molteplicità di λ_1 , il metodo

(1) Cfr. G. FICHERA, *Lezioni sulle trasformazioni lineari*, 1954, Ist. Mat. Univ. Trieste, p. 237.

di Ritz non consente di limitare inferiormente il numero λ_2 com'è ben evidente. Se però si sa che il numero intero $m - 1$ limita superiormente la molteplicità di λ_1 , si può senz'altro assumere come limitazione inferiore per λ_2 l' m -esima radice dell'equazione

$$\det \left\{ \int_{(a,b)} T(w_i) \bar{w}_h d\mu - \lambda \int_{(a,b)} w_i \bar{w}_h d\mu \right\} = 0$$

(ove w_1, \dots sono funzioni di S linearmente indipendenti).

Un'altra possibilità di integrare il metodo di calcolo di Ritz (per trasformazioni T , integrali, aventi il nucleo verificante le I) II) III)) che ci basa sulla conoscenza di uno almeno dei numeri t_n ($n \geq n'$), è fornita dalla seguente osservazione: Se le lettere $p_1^{(m)}, p_2^{(m)}, \dots, \lambda_1^{(m)}, \lambda_2^{(m)}, \dots, t_n^{(m)}$ hanno significato analogo a quello delle p_k, λ_k, t_n , in relazione alla m -esima trasformazione approssimante di Ritz, si ha:

$$0 \leq \lambda_k^{2n} - |\lambda_k^{(m)}|^{2n} \leq t_n - t_n^{(m)}, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} [t_n - t_n^{(m)}] = 0$$

come è immediato constatare. Ne viene che, accanto alla successione $\{\lambda_k^{(m)}\}_m$ fornita dal metodo di Ritz, che converge a λ_k per difetto, si può considerare anche la successione $\{v_k^{(m)}\}$ con

$$v_k^{(m)} = (|\lambda_k^{(m)}|^{2n} - t_n^{(m)} + t_n)^{1/2n}$$

che converge a λ_k per eccesso. Per la determinazione di $t_n^{(m)}$ si può evitare il calcolo di tutte le radici $\lambda_1^{(m)}, \lambda_2^{(m)}, \dots$ della equazione secolare relativa alla m -esima approssimazione di Ritz, ricorrendo alla formula, di immediata dimostrazione:

$$t_n^{(m)} = \int_{(a,b) \times (a,b)} |H_n^{(m)}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})|^2 d\mu_{\mathcal{Y}} d\mu_{\mathcal{Z}}$$

con:

$$H_n^{(m)}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}) = \sum_{i=1}^m u_k(\mathcal{Z}) \int_{(a,b)} K_{n-1}(x, \mathcal{Y}) \overline{u_k(x)} d\mu_x$$

ove u_1, \dots, u_m è un sistema ortonormale di funzioni relative alla m -esima approssimazione di Ritz.

1. Esponiamo dapprima l'idea su cui si basa il procedimento di calcolo per difetto e per eccesso dei numeri λ_k , di cui sopra si è detto.

È ben noto e del resto si verifica subito, che:

$$(2) \quad \left(\sum_{h \geq s} p_h \lambda_h^{2n} \right)^{1/n} \geq \lambda_s^2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{h \geq s} p_h \lambda_h^{2n} \right)^{1/n} = \lambda_s^2$$

$$(3) \quad \left(\sum_{h \geq s} p_h \lambda_h^{2^{n+2}} \right) \left(\sum_{h \geq s} p_h \lambda_h^{2^n} \right)^{-1} \leq \lambda_s^2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{h \geq s} p_h \lambda_h^{2^{n+2}} \right) \left(\sum_{h \geq s} p_h \lambda_h^{2^n} \right)^{-1} = \lambda_s^2.$$

$$(7') \quad b_{1,n} = t_{n+1} t_n^{-1},$$

$$b_{s,n} = \max \left| 0, \left(t_{n-1} - \sum_{k=1}^{s-1} p_k^{n/(n+1)} a_{k,(n-1)^2}^{n+1} \right) \left(t_n - \sum_{k=1}^{s-1} p_k b_{k,n^2}^n \right)^{-1} \right|, \quad s=2, 3, \dots$$

dimosteremo che:

I. — Per ogni intero positivo $n \geq n'$ riesce: $a_{s,n} \geq \lambda_s^2$, $b_{s,n} \leq \lambda_s^2$ e inoltre si ha:

$$(8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{s,n} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_{s,n} = \lambda_s^2.$$

Incominciamo con il dimostrare che:

II. — Per ogni intero positivo $n \geq n'$ riesce: $a_{1,n^2}^n \geq p_1^{1/n} \lambda_1^{2n}$ e inoltre si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{1,n^2}^n - p_1^{1/n} \lambda_1^{2n})^{1/n} = 0.$$

Riesce: $a_{1,n} = t_n^{1/n} = \left(\sum_{h \geq 1} p_h \lambda_h^{2n} \right)^{1/n} \geq p_1^{1/n} \lambda_1^{2n}$, donde la prima parte dell'asserto.

Per il teorema del valor medio, si ha l'esistenza di un numero $c_{1,n}$ tale che:

$$p_1^{1/n} \lambda_1^{2n} \leq c_{1,n} \leq a_{1,n^2}^n, \quad a_{1,n^2}^n - p_1 \lambda_1^{2n^2} = n c_{1,n}^{n-1} (a_{1,n^2}^n - p_1^{1/n} \lambda_1^{2n}).$$

Ne viene:

$$\begin{aligned} (a_{1,n^2}^n - p_1^{1/n} \lambda_1^{2n})^{1/n} &= n^{-1/n} c_{1,n}^{(1-n)/n} (a_{1,n^2}^n - p_1 \lambda_1^{2n^2})^{1/n} \\ &\leq n^{-1/n} p_1^{(1-n)/n^2} \lambda_1^{2(1-n)} \left(\sum_{h \geq 2} p_h \lambda_h^{2n^2} \right)^{1/n} = n^{-1/n} p_1^{(1-n)/n^2} \lambda_1^{2(1-n)} \left(\sum_{h \geq 2} p_h \lambda_h^{2n^2} \lambda_1^{-2n^2} \right)^{1/n}. \end{aligned}$$

Si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1/n} p_1^{(1-n)/n^2} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{h \geq 2} p_h \lambda_h^{2n^2} \lambda_1^{-2n^2} \right)^{1/n^2} = \lambda_2^2 \lambda_1^{-2} < 1.$$

Da quest'ultima relazione si trae:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{h \geq 2} p_h \lambda_h^{2n^2} \lambda_1^{-2n^2} \right)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\sum_{h \geq 2} p_h \lambda_h^{2n^2} \lambda_1^{-2n^2} \right)^{1/n^2} \right]^n = 0$$

donde:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{1,n^2}^n - p_1^{1/n} \lambda_1^{2n})^{1/n} = 0.$$

III. — Per ogni intero positivo $n \geq n'$ riesce $0 < b_{1,n^2} \leq \lambda_1^2$ e inoltre:

$$(9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_1^{2n} - b_{1,n^2}^n)^{1/n} = 0.$$

Poiché $\{b_{1,n}\}$ è una successione non decrescente, come segue dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, e dato che $\lim_{n \rightarrow \infty} b_{1,n} = \lambda_1^2$, come subito si verifica, è intanto provato che $b_{1,n} \leq \lambda_1^2$.

Per il teorema del valor medio, esiste un numero $d_{1,n}$ tale che:

$$b_{1,n^2} \leq d_{1,n} \leq \lambda_1^2, \quad \lambda_1^{2n} - b_{1,n^2}^n = n d_{1,n}^{n-1} (\lambda_1^2 - b_{1,n^2}).$$

Ne viene:

$$(10) \quad (\lambda_1^{2n} - b_{1,n^2})^{1/n} \leq n^{1/n} \lambda_1^{\frac{2}{n} \cdot 1} (\lambda_1^2 - b_{1,n^2})^{1/n}.$$

Si ha d'altra parte:

$$\begin{aligned} (\lambda_1^2 - b_{1,n^2})^{1/n} &= \left[\lambda_1^2 - \left(\sum_{h \geq 1} p_h \lambda_h^{2n^2+2} \right) \left(\sum_{h \geq 1} p_h \lambda_h^{2n^2} \right)^{-1} \right]^{1/n} = \\ &= \left\{ \left[\sum_{h \geq 2} p_h (\lambda_1^2 - \lambda_h^2) \lambda_h^{2n^2} \right]^{1/n^2} \left(\sum_{h \geq 1} p_h \lambda_h^{2n^2} \right)^{-1/n^2} \right\}^n \end{aligned}$$

e poich 

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{h \geq 2} p_h (\lambda_1^2 - \lambda_h^2) \lambda_h^{2n^2} \right]^{1/n^2} \left(\sum_{h \geq 1} p_h \lambda_h^{2n^2} \right)^{-1/n^2} = \lambda_1^2 \lambda_1^{-2} < 1$$

risulta

$$(11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_1^2 - b_{1,n^2})^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left[\sum_{h \geq 2} p_h (\lambda_1^2 - \lambda_h^2) \lambda_h^{2n^2} \right]^{1/n^2} \left(\sum_{h \geq 1} p_h \lambda_h^{2n^2} \right)^{-1/n^2} \right\}^n = 0.$$

Poich  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} \lambda_1^{\frac{2}{n} \cdot 1} = \lambda_1^2$, da (10) e (11) si trae la (9).

IV. - Sia s un intero ≥ 2 . Se, per ogni intero k compreso tra 1 e $s-1$, riesce

$$a_{k,n} > \lambda_k^2, \quad b_{k,n} \leq \lambda_k^2,$$

si ha

$$a_{s,n} \geq \lambda_s^2, \quad b_{s,n} \leq \lambda_s^2.$$

Si ha:

$$\begin{aligned} a_{s,n} &= \left(t_n - \sum_{k=1}^{s-1} p_k b_{k,n^2}^n \right)^{1/n} = \left(\sum_{k \geq 1} p_k \lambda_k^{2n} - \sum_{k=1}^{s-1} p_k b_{k,n^2}^n \right)^{1/n} \geq \\ &\geq \left(\sum_{h \geq s} p_h \lambda_h^{2n} \right)^{1/n} \geq p_s^{1/n} \lambda_s^2 \geq \lambda_s^2, \end{aligned}$$

donde

$$a_{s,n} \geq \lambda_s^2.$$

Da questa dimostrazione si trae anche

$$(12_s) \quad a_{s,n^2}^n \geq p_s^{1/n} \lambda_s^{2n}.$$

Possiamo ora far vedere che: $b_{s,n} \leq \lambda_s^2$.

Dalla (12_k) si trae: $p_k \lambda_k^{2n+2} \leq p_{k,(n+1)^2}^{n/(n+1)} a_{k,(n+1)^2}^{n+1}$. Ne viene:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{h \geq 1} p_h \lambda_h^{2n+2} - \sum_{k=1}^{s-1} p_k \lambda_k^{2n/(n+1)} a_{k,(n+1)^2}^{n+1} \right) \left(\sum_{h \geq 1} p_h \lambda_h^{2n} - \sum_{k=1}^{s-1} p_k b_{k,n^2}^n \right)^{-1} \leq \\ \leq \left(\sum_{h \geq s} p_h \lambda_h^{2n+2} \right) \left(\sum_{h \geq s} p_h \lambda_h^{2n} \right)^{-1} \leq \lambda_s^2. \end{aligned}$$

Il teorema IV   in tal modo dimostrato. Inoltre, dalla dimostrazione di questo teorema, segue subito che:

V. - Per ogni intero $s > 0$ riesce:

$$(12_s) \quad a_{s,n^2}^n \geq p_s^{1/n} \lambda_s^{2n}.$$

Analisi matematica. — *Maggiorazione del gradiente delle funzioni del calore.* Nota di GIORGIO ADLER, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

Benché siano note numerose maggiorazioni per il gradiente delle soluzioni di equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico (maggiorazioni di tale genere sono stabilite pure dall'autore stesso, vedere [1]), per quanto mi consta, non ne esistono per il gradiente delle soluzioni di equazioni di tipo parabolico. In questa Nota esporrò alcune maggiorazioni per il gradiente delle soluzioni dell'equazione del calore, che è la più importante di tipo parabolico.

1. — DEFINIZIONI.

Ci occuperemo dell'equazione

$$(*) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = a \frac{\partial u}{\partial t} \quad (a > 0, \text{costante}), (n = 1, 2, \dots).$$

Sia Ω un campo (insieme aperto e connesso) dello spazio (x_1, \dots, x_n) , Σ la sua frontiera. Per semplicità supporremo Ω limitato. Indicheremo il diametro di Ω con d . Sia $P(x_1, \dots, x_n)$ il punto generico dello spazio.

Sia T_P l'iperpiano tangente a Σ nel punto P di Σ . Sia ξ_1^P, \dots, ξ_n^P (*) un sistema di coordinate rettilinee di origine P , i cui assi $\xi_1^P, \dots, \xi_{n-1}^P$ siano collocati nell'iperpiano T_P , e l'asse ξ_n^P sia la normale di Σ in P . Sia $Y_P(r)$ l'intorno del punto P sulla superficie Σ , formato dal componente dell'insieme dei punti di Σ interni al cilindro $\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^{p^2} = r^2$, $-\infty < \xi_n < +\infty$, componente che contiene P .

Diremo che il campo Ω appartiene alla classe $\mathcal{A}(r)$ se in ogni punto della sua frontiera esiste l'iperpiano tangente, ed inoltre è soddisfatta la proprietà seguente: esiste un numero $r > 0$ tale che per ogni punto P di Σ è possibile trovare:

1° una ipersfera di raggio r , la cui frontiera contiene P , e la cui parte interna è collocata in Ω ;

2° una ipersfera di raggio r , la cui frontiera contiene P , e che contiene almeno un punto esterno ad Ω e non contiene nel suo interno nessun punto di $Y_P(r)$.

(*) Nella seduta dell'11 marzo 1961.

(1) L'indice superiore P verrà omissso ove ciò non dia luogo ad equivoco.

Chiamiamo il campo Ω ρ -convesso, se esiste un numero $\rho > 0$ tale che per ogni punto P di Σ si trova una ipersfera di raggio ρ , la cui frontiera contiene P , e il cui interno non contiene nessun punto di Ω .

Si verifica facilmente, nel caso che $\Omega \in \mathcal{A}(\rho)$, che ogni retta parallela alla normale di Σ nel punto P interseca $Y_P(\rho)$ in un solo punto, al più. Nel sistema di coordinate appartenenti al punto P , sia

$$\xi_n = f_P(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \quad \left(\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2 \leq \rho^2 \right)$$

l'equazione di $Y_P(\rho)$. In virtù del fatto summenzionato f_P è una funzione univalente.

La funzione $F(R)$ ($R \in \Sigma$), definita su Σ , dove

$$R = (\xi_1^P, \dots, \xi_{n-1}^P, \xi_n^P = f_P(\xi_1^P, \dots, \xi_{n-1}^P))$$

è il punto generico di Σ , sarà assegnata in $Y_P(\rho)$ sotto la forma

$$F(R) = F_P(\xi_1^P, \dots, \xi_{n-1}^P).$$

Diremo la funzione F definita su Σ di classe $\mathcal{H}_r(\alpha, K)$, se esistono due costanti $K > 0$, $0 < \alpha \leq 1$, non dipendenti da P , tali che

$$|F_P(\xi'_1, \dots, \xi'_{n-1}) - F_P(\xi''_1, \dots, \xi''_{n-1})| \leq K \left[\sum_{i=1}^{n-1} (\xi'_i - \xi''_i)^2 \right]^{\alpha/2} \\ \left(\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i'^2 \leq \rho^2, \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i''^2 \leq \rho^2 \right).$$

Introduciamo per la funzione $F(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, t)$, definita sulla porzione $\Sigma \times (0 \leq t \leq T)$ della frontiera del dominio $\Omega \times (0 < t < T)$, le notazioni seguenti:

$$M_0(F) = \sup_{\substack{P \in \Sigma \\ 0 \leq t \leq T}} F(P, t) - \inf_{\substack{P \in \Sigma \\ 0 \leq t \leq T}} F(P, t),$$

$$M_1(F) = \sup_{\substack{P \in \Sigma \\ 0 \leq t \leq T \\ 1 \leq i \leq n-1}} \left| \frac{\partial F_P(0, \dots, 0, t)}{\partial \xi_i^P} \right|,$$

$$M_2(F) = \sup_{\substack{P \in \Sigma \\ 0 \leq t \leq T}} \sup_{\substack{1 \leq i, j \leq n-1 \\ \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2 = \rho^2}} \left| \int_0^r \left(\frac{\partial^2 F_P(\eta \alpha_1, \dots, \eta \alpha_{n-1}, t)}{\partial \xi_i^P \partial \xi_j^P} \right)^2 d\eta \right| \\ \left(\alpha_i = \frac{\xi_i}{\rho}, i = 1, \dots, n-1 \right),$$

$$M_t(F) = \sup_{\substack{P \in \Sigma \\ 0 \leq t \leq T}} \left| \frac{\partial F(P, t)}{\partial t} \right|.$$

Nel caso $n = 1$ per definizione:

$$M_1(F) \equiv M_2(F) \equiv K \equiv 0.$$

2. - DECOMPOSIZIONE DELLE FUNZIONI DEL CALORE.

Sia $U(P, t)$ la soluzione della (*) in $\Omega \times (0 < t \leq T)$, che soddisfa la condizione iniziale e la condizione al contorno seguenti:

$$\begin{aligned} U(P, 0) &= u(P) & P \in \Omega + \Sigma, \\ U(P, t) &= \varphi(P, t) & (P, t) \in \Sigma \times (0 \leq t \leq T), \end{aligned}$$

dove $u(P)$ e $\varphi(P, t)$ sono funzioni assegnate. Decomponiamo $U(P, t)$ nel modo seguente:

$$U(P, t) = H(P) + W(P, t) + Z(P, t),$$

dove $H(P)$ è una funzione armonica, W e Z sono soluzioni della (*), soddisfacenti le condizioni:

$$\begin{aligned} H(P) &= u(P) & P \in \Sigma, \\ \begin{cases} W(P, 0) = u(P) - H(P) \\ W(P, t) = 0 \end{cases} & & \begin{matrix} P \in \Omega + \Sigma, \\ (P, t) \in \Sigma \times (0 \leq t \leq T), \end{matrix} \\ \begin{cases} Z(P, 0) = 0 \\ Z(P, t) = \varphi(P, t) - u(P) \end{cases} & & \begin{matrix} P \in \Omega + \Sigma, \\ (P, t) \in \Sigma \times (0 \leq t \leq T). \end{matrix} \end{aligned}$$

Tenuto conto che la maggiorazione del gradiente di H è un problema già risoluto, in definitiva, il nostro problema si riduce alla maggiorazione del gradiente di W e di Z , soddisfacenti risp. condizione al contorno e condizione iniziale omogenee.

3. - CONDIZIONI AL CONTERNO OMOGENEE.

TEOREMA 1. - *Supponiamo:*

1° il campo Ω convesso;

2° (i) la funzione $W(P, t)$ soddisfacente la (*) in $\Omega \times (t > 0)$ e di classe C^1 in $(\Omega + \Sigma) \times (t \geq 0)$,

(ii) $W(P, t) = 0$ per $(P, t) \in \Sigma \times (t \geq 0)$,

(iii) $|\text{grad}_P W(P, 0)| \leq M$ per $P \in \Omega + \Sigma$.

Allora per ogni punto $(P, t) \in (\Omega + \Sigma) \times (t \geq 0)$ si ha

$$|\text{grad}_P W(P, t)| \leq M.$$

TEOREMA 2. - *Supponiamo:*

1° il campo Ω ρ -convesso;

2° la condizione 2° del Teorema 1 soddisfatta.

Allora per ogni punto $(P, t) \in (\Omega + \Sigma) \times (t \geq 0)$ si ha

$$|\text{grad}_P W(P, t)| \leq C_n(\rho, d)M,$$

dove

$$C_2(\rho, d) = \frac{d/\rho}{\log(1 + d/\rho)} \quad , \quad C_n(\rho, d) = \frac{(n-2)d/\rho}{1 - (1 + d/\rho)^{2-n}} \quad (n \geq 3)^{(2)}.$$

TEOREMA 3. - Supponiamo:

1° il campo Ω convesso;

2° la condizione 2° del Teorema 1 soddisfatta.

Allora per ogni punto $(P, t) \in (\Omega + \Sigma) \times (t \geq 0)$ si ha

$$|\text{grad}_P W(P, t)| < M \left(\frac{4}{\pi} + \frac{16}{ad^2} t \right) e^{-\frac{\pi^2}{ad^2} t}.$$

TEOREMA 4. - Supponiamo che (limitandoci al caso $n = 3$) siano soddisfatte le condizioni del Teorema 2.

Allora per ogni punto $(P, t) \in (\Omega + \Sigma) \times (t \geq 0)$ si ha

$$|\text{grad}_P W(P, t)| < M \left(1 + \frac{d}{2\rho} \right) \left(\frac{4}{\pi} + \frac{16}{ad^2} t \right) e^{-\frac{\pi^2}{ad^2} t} \quad (3).$$

4. - CONDIZIONI INIZIALI OMOGENEE.

TEOREMA 5. - Supponiamo:

1° $\Omega \in \mathcal{A}(r)$;

2° (i) la funzione $Z(P, t)$ soddisfacente la (*) in $\Omega \times (0 < t \leq T)$ e di classe C^1 in $(\Omega + \Sigma) \times (0 \leq t \leq T)$,

(ii) $Z(P, 0) = 0$ per $P \in \Omega + \Sigma$,

(iii) per ogni valore $0 \leq t \leq T$ si ha

$$\frac{\hat{c}_{Z_P}(\xi_1^P, \dots, \xi_{n-1}^P, t)}{\hat{c}_{\xi_i^P}^P} \in \mathcal{H}_r(\alpha, K) \quad (i = 1, \dots, n-1).$$

Allora esistono costanti A_1, A_2, B_1, B_2 , che dipendono soltanto dalla forma di Ω ⁽⁴⁾, tali che per ogni punto $(P, t) \in (\Omega + \Sigma) \times (0 \leq t \leq T)$ risulta

$$|\text{grad}_P Z(P, t)| < (A_1 \sqrt{T} + A_2 T) M_t(Z) + B_1 M_1 + B_2 \frac{K}{\alpha}.$$

TEOREMA 6. - Supponiamo che siano soddisfatte le condizioni 1°, 2° (i), (ii) del Teorema 5, e la condizione seguente:

2° (iii) la traccia $Z(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, t)$ amette seconde derivate rispetto alle variabili ξ_1, \dots, ξ_{n-1} , e le derivate $\frac{\partial^2 Z}{\partial \xi_i \partial \xi_j}$ sono assolutamente integrabili insieme ai loro quadrati.

(2) Si osserva, che per $\rho \rightarrow \infty$ dal Teorema 2 si ottiene il Teorema 1. Nel caso $n = 1$ i Teoremi 1 e 2 sono identici.

(3) Si osserva, che per $\rho \rightarrow \infty$ dal Teorema 4 si ottiene il Teorema 3 per $n = 3$.

(4) Per risparmiare spazio, non scriviamo le forme esplicite di queste costanti in funzione di r e di n . Nel caso $n = 1$ risulta $r = d/2$.

Allora con le costanti che figurano nel Teorema 5 si ha per ogni punto $(P, t) \in (\Omega + \Sigma) \times (0 \leq t \leq T)$:

$$|\operatorname{grad}_P Z(P, t)| < (A_1 \sqrt{T} + A_2 T) M_t(Z) + B_1 M_1 + B_2 \left| \frac{n-1}{3} M_2(Z) \right|.$$

OSSERVAZIONE 1. — Nei Teoremi 5 risp. 6 i termini che contengono le quantità K/α risp. $M_2(Z)$ non possono essere omessi.

OSSERVAZIONE 2. — Nei Teoremi 5 e 6 la funzione $A_1 \sqrt{T} + A_2 T$ non può essere sostituita da una costante indipendente da T .

BIBLIOGRAFIA.

- [1] G. ADLER, *Maggiorazione del gradiente delle funzioni armoniche mediante i loro valori al contorno*, « Atti dell'Accad. Naz. dei Lincei ». (La Memoria sarà presentata nella seduta dell'11 marzo 1961).

Radio-astronomia. - *Risultati dell'osservazione radioelettrica dell'eclissi totale di Sole del 15 febbraio 1961.* Nota di MAURIZIO PIATTELLI, presentata (*) dal Corrisp. G. RIGHINI.

L'eclissi totale di Sole del 15 febbraio è stata osservata in Arcetri mediante 4 radiometri, funzionanti su diverse lunghezze d'onda e con diversi tipi d'antenna a montatura equatoriale. Tali radiometri erano curati da due gruppi distinti d'osservatori, di cui il primo appartenente all'Osservatorio Astrofisico di Arcetri ed il secondo allo Air Force Cambridge Research Center.

Due dei radiometri funzionavano sulla lunghezza d'onda di 3 cm, uno su quella di 23 cm ed uno su quella di 160 cm. La seguente tabella riporta i dati essenziali di queste apparecchiature:

Lunghezza d'onda	3,1 cm	3,05 cm	23 cm	160 cm
Diametro o guadagno d'antenna	1,20 m	1,80 m	5 m	18 db
Ricevitore tipo . . .	supereterodina ad autocorr.	super. autocorr. e polarimetro	supereterodina ad autocorrel.	supereterodina a potenza tot.
Banda accettazione .	40 MHz	20 MHz	20 MHz	1 MHz
Costante di tempo d'integrazione	5 ^s	10 ^s	5 ^s	10 ^s

Tutte le antenne coi loro supporti e meccanismi di guida come pure il polarimetro a 3 cm ed il radiometro a 160 cm erano stati costruiti in Arcetri. I radiometri a 3,1 cm ed a 23 cm erano di costruzione americana ed erano stati appositamente inviati per l'eclissi nel dicembre scorso. Il solo radiometro a 160 cm esisteva in Arcetri prima che il programma d'osservazione dell'eclissi totale venisse varato.

I risultati preliminari possono essere riassunti nella riduzione dei dati ottenuti mediante il polarimetro a 3 cm poiché alla lunghezza d'onda di 160 cm l'osservazione dell'eclissi ha dato risultati negativi, a causa delle eccessive dimensioni del diametro radioelettrico solare, due o tre volte maggiore di quello ottico. Il Sole presentava un minimo d'attività, e non si

(*) Nella seduta dell'11 marzo 1961.

aveva quindi alcuna area localizzata di emissione, inoltre, il basso valore del flusso ricevuto era fortemente influenzato da interferenze locali.

Il radiometro a 23 cm era curato dal gruppo americano, e non è nostro compito ridurre i dati da esso ottenuti; tuttavia, alcuni di essi saranno presentati per il confronto con quelli ottenuti a 3,05 cm.

I dati ottenuti mediante il radiometro a 3,1 cm sono identici a quelli ottenuti col polarimetro.

Dato che l'eclissi avveniva con Sole basso sull'orizzonte, le curve di correzione per l'assorbimento troposferico sono state determinate mediante l'osservazione del sorgere del Sole alcuni giorni prima e dopo l'eclisse stessa.

Sorgere del Sole del 16-2-61

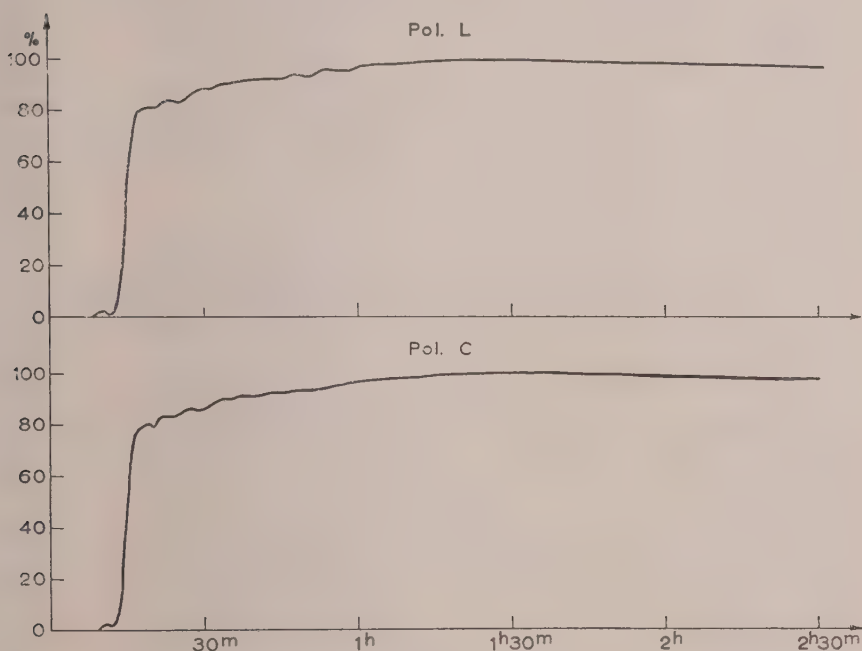


Fig. 1.

In fig. 1 è riportata un'osservazione tipica del sorgere del Sole, effettuata il 16 febbraio 1961. L'antenna ha seguito il Sole dall'altezza 0° fino ad una altezza di circa 25° . Si noti che il sorgere effettivo del Sole avviene ad una altezza maggiore data la presenza della catena appenninica. Successivamente l'antenna è stata riportata ad altezza 0° per registrare una nuova curva che tenesse conto dell'emissione del suolo e dell'effetto dello aumento di temperatura d'antenna a causa dei lobi secondari. Le curve mostrate in fig. 1 sono state corrette per questa temperatura, e rappresentano quindi l'emissione solare totale con riferimento alla temperatura del cielo.

La differenza fra la radiazione del Sole ad altezze di circa 20-25 gradi e quella al sorgere è dovuta all'assorbimento subito dalla radiazione nella troposfera.

In fig. 2 la curva registrata durante l'eclissi, corretta per la temperatura del suolo, è confrontata con la media delle curve registrate nei giorni 14-16-17-18 febbraio. L'involuppo massimo dovuto alla scintillazione è stato riportato con linea tratteggiata allo scopo di mettere in evidenza eventuali

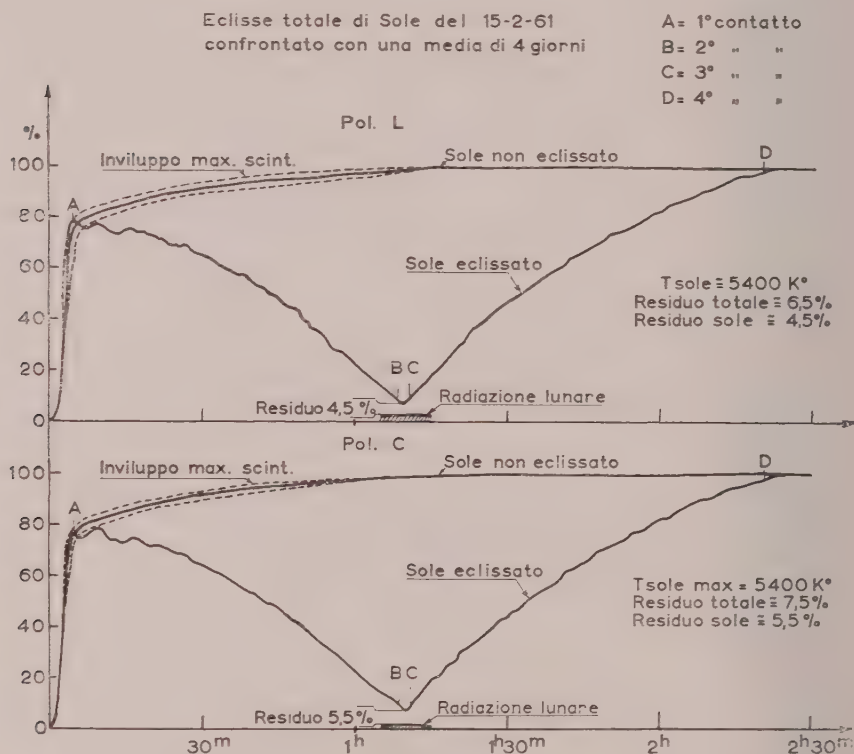


Fig. 2.

variazioni nella curva di assorbimento dell'eclissi dovuta a questo effetto. Sull'asse delle ascisse sono i tempi che intercorrono dal sorgere effettivo del Sole in poi.

I risultati preliminari dell'osservazione sono:

a) la differenza fra il tempo del quarto contatto ottico e quello radio è di circa 1,5 minuti. Essendo la durata totale dell'eclissi di circa 136 minuti risulta che il diametro del Sole alla lunghezza d'onda di 3 cm è di circa il 2% maggiore del diametro della Luna. Questa a sua volta era per l'eclissi del 15 febbraio maggiore del 3% del diametro ottico del Sole;

b) il residuo totale della radiazione è risultato del 5,5% della radiazione massima per la polarizzazione circolare e del 4,5% della polarizza-

zione lineare. Questo residuo totale è stato corretto per la radiazione lunare che ammontava al 2 % della radiazione totale del Sole.

Nella tabella seguente sono raccolti i valori delle temperature registrate durante l'eclisse,

Temperatura massima del Sole a 25° di altezza $\sim 5.400^{\circ} \text{K}$

Temperatura minima del Sole eclissato $\sim 1350^{\circ} \text{K}$

Temperatura dovuta alla Luna (misurata nei giorni 16 e 17) $\sim 108^{\circ}$

c) è stata notata una leggera asimmetria fra la totalità radio e quella ottica ed in particolare la totalità in polarizzazione lineare sembra anticipata e quella circolare ritardata.

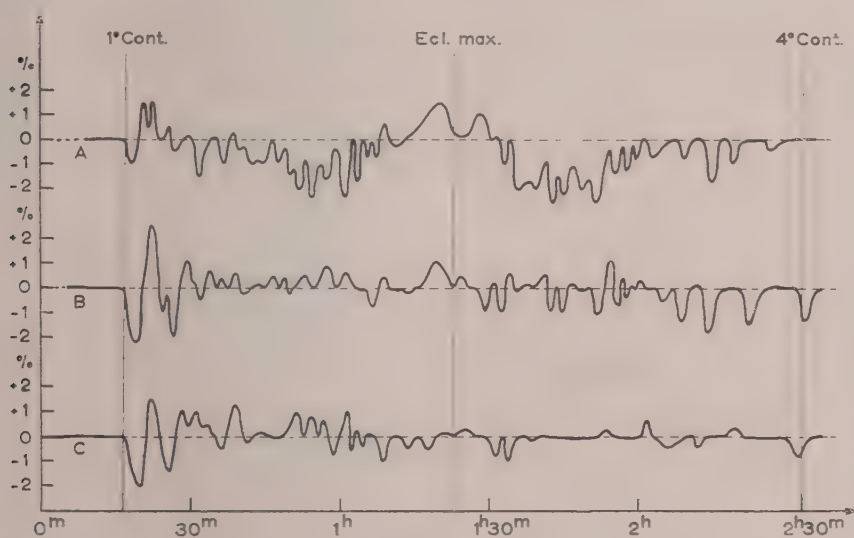


Fig. 3.

Allo scopo di determinare le eventuali sorgenti radio della superficie solare in fig. 3 sono state riportate differenze fra la curva media dell'eclisse e le variazioni di flusso intorno a questa. Le prime due curve B e C sono rispettivamente fluttuazioni intorno alla curva media della polarizzazione lineare e polarizzazione circolare. La curva A riporta l'eccesso di polarizzazione circolare su quella lineare in % della massima radiazione. Questa mostra un andamento sinusoidale che può essere interpretato come un indizio di un aumento della polarizzazione circolare al bordo solare.

L'ammontare massimo del residuo solare ed il diametro radio ottenuto possono darci un'idea dell'intensità emessa dai bordi del Sole che come è noto sono più brillanti della superficie solare stessa.

Il residuo totale della lunghezza d'onda di 23 cm è risultato essere di circa il 25 %.

Astronomia (Astrofisica). — *Lo spettro della corona solare nell'eclisse del 15 febbraio 1961*. Nota di MARIO RIGUTTI e DORA RUSSO, presentata (*) dal Corrisp. G. RIGHINI.

Durante l'eclisse totale di Sole del 15 febbraio 1961 è stato fotografato lo spettro della corona per mezzo di uno spettrografo sulla cui fenditura veniva formata l'immagine del Sole con un celostato e un obbiettivo in uviol avente un diametro di 150 mm e una focale di 1500 mm. L'immagine del Sole, sulla fenditura, aveva quindi un diametro di circa 15 mm.

Lo spettrografo, già descritto in altra Nota [1], è costituito da un collimatore ricavato da un elemento extra assiale ($\Phi = 80$ mm) di uno specchio parabolico di 60 cm di focale, da uno specchio piano, da due prismi con angolo rifrangente di 60° e facce di 60×90 mm² e da un obbiettivo del tipo triplo Taylor ($\Phi = 70$ mm, $f = 50$ cm).

Le dispersioni sul piano immagini sono di 34,5 Å/mm a λ 3950, di 49,4 Å/mm a λ 4330, di 67,9 Å/mm a λ 4540, di 76,3 Å/mm a λ 4980, di 147,8 Å/mm a λ 6200.

La fenditura era stata posta nell'angolo di posizione 45° , a 28° dall'equatore solare. La larghezza della fenditura era di 0,026 mm equivalenti a $4''$ sul Sole.

Durante la fase della totalità furono eseguite due pose, una della durata di 15 secondi e una della durata di 60 secondi sulla stessa lastra (emulsione II a D, Kodak).

Negli spettri sono visibili sia lo spettro continuo solcato da righe di emissione dovuto alla corona interna sia una parte dello spettro di assorbimento solare della corona esterna. Sullo spettro della corona interna era presente pure lo spettro di una protuberanza quiescente, già osservata al filtro monocromatore Halle il giorno precedente l'eclisse, che si trovava nell'angolo di posizione 39° e quindi nelle prossimità del centro della fenditura dello spettrografo.

La circostanza di avere uno spettro di protuberanza ci ha permesso una misura delle righe coronali piuttosto rapida e precisa. Partendo da alcune righe intense dello spettro della protuberanza facilmente identificabili, si sono potute ottenere buone determinazioni delle lunghezze d'onda delle righe di emissione della corona interna. Le misure sono state eseguite al macromicrometro Mioni dell'Osservatorio astrofisico di Arcetri. L'errore medio delle misure era di ± 3 micron e pertanto le identificazioni devono ritenersi sicure.

(*) Nella seduta dell'11 marzo 1961.

Lo spettro coronale, estendentesi sulla lastra da λ 3950 a λ 6200, presentava 5 righe di emissione molto deboli eccezione fatta per la riga verde a λ 5303.

Le righe sono le stesse osservate nel 1952 da Righini [2] nella stessa zona spettrale.

Nella Tabella I diamo i risultati delle misure. Vengono dati: nella colonna 1 un numero d'ordine, nella 2 le lunghezze d'onda, nella 3 l'elemento emettente, nella 4 una stima dell'intensità, nella 5 la designazione spettroscopica, nella 6 il potenziale di ionizzazione.

TABELLA I.
Righe della corona.

1	2	3	4	5	6
1	3986,88	Fe XI	1	$3P_1 - {}^1D_2$	261
2	4086,50	Ca XIII	0	$3P_2 - 3P_1$	655
3	4231,40	Ni XII	10	$2P_{3/2} - 2P_{1/2}$	318
4	5116,03	Ni XIII	5	$3P_2 - 3P_1$	350
5	5302,86	Fe XIV	50	$2P_{1/2} - 2P_{3/2}$	355

Altri dati sulle intensità delle righe e dello spettro continuo potranno essere dati solo in futuro, dopo che sarà stato eseguito lo studio fotometrico dello spettro stesso.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] G. GODOLI e M. RIGUTTI, «La Ric. Sc.», 25, 2770 (1955).
 [2] G. RIGHINI, «Rend. Sc. fis., mat. e nat.», 12, 563 (1952).

Geodesia. — *Un metodo di compensazione di un blocco di strisciate.* — I. *Principio generale e compensazione planimetrica.* Nota di MARIANO CUNIETTI e GIUSEPPE INGHILLERI (*), presentata (**) dal Socio L. SOLAINI.

Una porzione di superficie terrestre di forma presso a poco quadrata viene rilevata a scopi cartografici con metodo fotogrammetrico mediante un blocco di strisciate. Il blocco è l'insieme di un certo numero di strisciate parallele che si ricoprono lateralmente in proporzione tale da garantire la copertura completa del territorio considerato. Come è noto ogni strisciata è formata da una successione di fotogrammi che si ricoprono longitudinalmente per almeno il 60 %.

Ogni modello stereoscopico ottenuto da due fotogrammi successivi ha zone di sovrapposizione con altri modelli e precisamente zone di ricoprimento longitudinale con i modelli della stessa strisciata e zone di ricoprimento laterale con i modelli delle strisciate adiacenti. Il blocco va perciò inteso come un insieme di fotogrammi vincolati a condizioni intrinseche, interne ed esterne; le condizioni intrinseche si riferiscono ai legami di natura geometrica che dai fotogrammi permettono la costruzione dei modelli; le condizioni interne prescrivono invece che tutti i punti compresi nelle zone di sovrapposizione laterale e longitudinale dei modelli abbiano coordinate univocamente determinate; le condizioni esterne impongono che le coordinate di alcuni punti del blocco o altri elementi (ved. strumenti ausiliari, abbiano valori noti determinati indipendentemente.

Poiché per la presenza di errori nelle operazioni di presa e di restituzione, analogica o analitica, non si può costruire un blocco che soddisfi le condizioni intrinseche, interne ed esterne contemporaneamente, si rende necessaria l'operazione detta di compensazione del blocco.

La soluzione più generale di questo problema è senz'altro quella che tiene conto simultaneamente dei tre tipi di vincoli sopra menzionati. Le equazioni da usarsi in una impostazione la più generale possibile sono quelle esprimimenti vettorialmente il legame fra i punti del terreno e i punti sulla lastra, già rese note in alcune pubblicazioni [1] [2]. Tuttavia il numero delle incognite e quindi la complessità del sistema derivante ne riducono, almeno fino ad ora, l'applicabilità, e forse la convenienza, nella pratica.

Vengono perciò suggeriti da diversi Autori, e sono già attualmente applicati, alcuni criteri non rigorosi di risoluzione del problema [3] [4] [5] [6].

(*) Dell'Istituto di Geodesia, Topografia e Fotogrammetria e del Centro di Addestramento e Studi Fotogrammetrici del Politecnico di Milano.

(**) Nella seduta dell'11 marzo 1961.

Questi criteri approssimati partono dall'ovvio principio di soddisfare separatamente secondo una successione prestabilita, i tre tipi di vincoli esistenti nel blocco; inoltre in generale è ritenuto conveniente ricavare separatamente alcuni tipi di incognite e in particolare compensare la planimetria del blocco separatamente dall'altimetria.

Ogni metodo approssimato di compensazione dei blocchi deve tener conto di alcune esigenze che qui si enunciano:

1° il procedimento di ripartizione degli errori deve essere omogeneo su tutto il blocco. Sull'intera area cioè, l'errore quadratico medio di posizione e di quota dei punti deve essere quanto più costante possibile o almeno non deve presentare disuniformità e discontinuità notevoli;

2° le condizioni geometriche che vincolano internamente ed esternamente il blocco debbono essere tutte soddisfatte;

3° le condizioni interne ed esterne debbono essere soddisfatte con il minimo danno per le condizioni intrinseche. La compensazione cioè deve portare a dei risultati che siano il meno possibile in disaccordo con ciascun modello. In caso contrario infatti, nella fase di restituzione, l'orientamento assoluto dei modelli sarebbe molto incerto e si avrebbero notevoli discrepanze fra modelli contigui della stessa strisciata o di strisciate adiacenti;

4° inoltre deve essere semplice nella sua impostazione, facilmente adattabile agli schemi di volo più disparati, senza esigenze particolari nel numero, nella posizione dei vincoli esterni e aperto all'impiego dei più comuni tipi di dati ausiliari.

Il procedimento di compensazione del quale si danno in questa Nota i fondamenti analitici, ci sembra soddisfare appieno a tutti i requisiti sopra esposti.

Anch'esso, come altri procedimenti, è di tipo approssimato e mantiene la separazione fra compensazione altimetrica e compensazione planimetrica.

Inoltre il metodo qui illustrato, prevede una separazione fra condizioni intrinseche e condizioni interne ed esterne da soddisfare. L'operazione di calcolo parte dal modello formato, quando cioè le condizioni intrinseche sono già soddisfatte. Come è ben noto in Geodesia operativa e come è già stato fatto notare da alcuni fotogrammetri [7], questa separazione è lecita purché sia dimostrabile che le operazioni che portano ai singoli elaborati di partenza siano fra loro indipendenti. Il paragone geodetico più evidente è quello della compensazione delle reti trigonometriche, nelle quali intervengono i dati già preventivamente elaborati e relativi agli angoli od alle direzioni misurate e compensate separatamente per ciascuna stazione.

L'equivalente delle stazioni nel procedimento di compensazione dei blocchi di strisciate sono i modelli o gruppi di modelli che si suppongono già formati nel migliore dei modi.

Il risultato della compensazione del blocco è costituito da una rete di punti sul terreno, le cui coordinate soddisfano il meglio possibile le condizioni intrinseche dei modelli e completamente le condizioni interne ed esterne.

Il procedimento di compensazione seguito è quello ben noto delle osservazioni indirette, secondo il metodo detto per variazioni di coordinate. Gli elementi necessari per il calcolo vengono ricavati dai modelli e sono costituiti da angoli fra piani o fra direzioni. Direzioni e piani sono a loro volta definiti da punti del modello stesso. Gli angoli che così si ottengono non dipendono dagli errori di posizione, di dimensione o di giacitura del modello o del gruppo di modelli, né dagli errori commessi nella formazione dei modelli che precedono o che seguono; essi sono influenzati unicamente dagli errori di formazione o di collegamento dei soli modelli o gruppi di modelli usati per dedurne gli elementi angolari.

Possiamo usare per questi elementi che non sono direttamente misurati, il termine, già introdotto da altri Autori [8] [9], di «quasi osservazione». Le quasi osservazioni relative ad un gruppo di modelli sono indipendenti dalle quasi osservazioni relative a modelli di altri gruppi, ma internamente ai modelli o ai gruppi di modelli sono fra loro correlate. Inoltre poiché sulla precisione delle quasi osservazioni influiscono gli errori di misura e la geometria del gruppo, esse non hanno tutte lo stesso errore medio e quindi lo stesso peso.

Un'altra approssimazione del procedimento suggerito sarà perciò quella di trascurare queste correlazioni e ritenere uguali i pesi di questi elementi angolari.

Come si è detto, gli elementi angolari misurati da introdurre nel calcolo vengono ottenuti dalle coordinate di un certo numero di punti relative al sistema di riferimento arbitrario intrinseco di ciascun modello o gruppo di modelli.

Le equazioni alle misure o equazioni generatrici stabiliscono che l'elemento angolare misurato è un invariante rispetto a tutte le trasformazioni e traslazioni del modello o gruppo di modelli

$$(1) \quad I(x^* y^* z^*) = I(X, Y, Z).$$

Le coordinate con asterisco ($x^* y^* z^*$) sono riferite al sistema intrinseco, le coordinate (X, Y, Z) sono invece le coordinate finali riferite al sistema assoluto del terreno e quindi unico per tutto il blocco di strisciate prese in considerazione; esse inoltre costituiscono le incognite del nostro problema.

Per la presenza degli errori negli elementi misurati quando i dati di misura sono sovrabbondanti non si potrà giungere ad una soluzione che soddisfi tutte le equazioni (1). La (1) si trasformerà in una equazione generata del tipo:

$$(2) \quad I_i(x^* y^* z^*) - I_i(X, Y, Z) = v_i.$$

Nella (2) il primo termine è un valore numerico ottenibile col calcolo dai dati di ogni modello o gruppo di modelli; il secondo termine contiene le incognite, cioè le coordinate compensate dei punti; v_i è lo scarto o residuo fra l'elemento angolare misurato e il suo valore compensato e rappresenta l'errore dell'elemento misurato dovuto alla deformazione del modello o

gruppo di modelli ottenuti soddisfacendo le sole condizioni intrinseche. La soluzione è raggiunta imponendo il noto principio dei minimi quadrati, e cioè che sia minima la somma dei quadrati dei residui v_i .

Questa soluzione soddisfa perciò il requisito di rendere minime le discrepanze fra i modelli e i punti compensati [vedi condizione (3)].

Le equazioni generate (2) hanno espressioni differenti l'una per la compensazione planimetrica, l'altra per la compensazione altimetrica.

Il tipo di equazione da usarsi nella planimetria esprime la differenza o residuo v fra il coseno dell'angolo definito da tre punti e calcolato mediante le coordinate riferite al sistema intrinseco e il coseno calcolato con le coordinate assolute degli stessi tre punti:

$$(3) \quad \left[\frac{l'l' + mm' + nn'}{\sqrt{(l^2 + m^2 + n^2)(l'^2 + m'^2 + n'^2)}} \right]_* - \frac{l'l' + mm' + nn'}{\sqrt{(l^2 + m^2 + n^2)(l'^2 + m'^2 + n'^2)}} = v$$

ove

$$\begin{aligned} l &= X_1 - X_2 & l' &= X_2 - X_3 \\ m &= Y_1 - Y_2 & m' &= Y_2 - Y_3 \\ n &= Z_1 - Z_2 & n' &= Z_2 - Z_3. \end{aligned}$$

L'asterisco posto come indice alla parentesi quadra sta ad indicare che la funzione deve essere calcolata usando le coordinate dei punti riferite al sistema legato a ciascun modello intrinseco.

Come si è detto, le equazioni del tipo (3) sono adatte per la sola compensazione planimetrica; infatti i piani determinati dai tre punti le cui coordinate intervengono nell'equazione sono in generale poco inclinati rispetto al piano (XY) a causa delle piccole variazioni esistenti fra le coordinate Z rispetto alle corrispondenti variazioni delle coordinate planimetriche. Le equazioni del tipo (3) legano perciò assai debolmente le coordinate Z dei punti; le uniche incognite da considerare nelle (3) sono le coordinate X e Y .

Ogni modello del blocco, ha con i modelli contigui elementi sufficienti per concatenarsi planimetricamente. Gli elementi angolari da introdurre nelle (3) debbono perciò essere relativi ad un numero sufficiente di punti interni ad un solo modello, ma situati nella zona di sovrapposizione sia laterale che longitudinale. L'insieme di questi angoli costituisce una rete di triangoli che collega tutti i modelli del blocco. In ogni modello si potranno scrivere $2(n-2)$ equazioni generate del tipo (3) essendo n il numero totale dei punti ivi prescelti.

Le equazioni generate del tipo (3) non possono ovviamente essere usate per la soluzione numerica del problema non essendo lineari nelle incognite X, Y . Per ridurle tali occorre come è noto svilupparle in serie nell'intorno di un loro valore sufficientemente approssimato. Per ricavare dei valori approssimati delle incognite è conveniente ricorrere allo stesso criterio usato nelle compensazioni delle triangolazioni geodetiche. Si calcolano cioè le coordinate dei punti attraverso una serie continua di equazioni (3) che risolvano il problema senza però tener conto dei dati sovrabbondanti, ma solo

di quelle strettamente indispensabili. Si deve cioè procedere ad una operazione che potremmo chiamare di « cucitura dei modelli » sia longitudinalmente nel senso delle strisciate, sia trasversalmente fra strisciate adiacenti.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] SCHMID H. H., *A general analytical solution to the problem of photogrammetry*. Ballistic Research Laboratories. Aberdeen proving ground, Maryland.
- [2] CUNIETTI M., *Generalizzazione dei procedimenti di calcolo ed operativi nella triangolazione aerea analitica*, « Bollettino di Geodesia e Scienze affini », A. XIX, n. 4, 1960.
- [3] JERIE H. G., *Block adjustment by Means of analogue computers*, « Photogrammetria », n. 4, 1957-58.
- [4] VAN DER WEELE A. J., *Rational adjustment of blocks of aerial triangulation*, « Photogrammetria », n. 4, 1955-56.
- [5] INSTITUT GEOGRAPHIQUE NATIONAL. *Méthodes de détermination du canevas de restitution des cartes à petites échelles*, Communication à la Commission III - Congrès de Stockholm, Juillet 1956.
- [6] BRANDENBERGER A., *Zur Praxis der Räumlichen Lufttriangulation*, Zürich 1951.
- [7] THOMPSON E. H., *Some observations analytical aerial triangulation*. « Photogrammetria », n. 3, 1959-60.
- [8] VERMEIR P. A., *La triangulation aérienne photogrammétrique*, « Bulletin de la Soc. Belge de Photogrammétrie », n. 35, marzo 1954.
- [9] ROELOFS R., *Practical example of adjustment of aerial triangulation by the method of least squares*, « Photogrammetria », n. 1, 1953-54.

Geologia. — *Osservazioni sulla geologia della regione compresa fra Ponteb Bernardo e Sambuco (fianco sinistro della Valle Stura di Demonte, Alpi Marittime)* ^(*). Nota di FRANCESCO CARRARO, presentata ^(**) dal Socio GB. DAL PIAZ.

INTRODUZIONE. — La regione cui si riferisce la presente Nota è compresa nel Foglio Dronero-Argentera (Foglio N. 78-79) della Carta Geologica d'Italia alla scala 1:100.000 ⁽¹⁾ rilevato da S. Franchi [20] e pubblicato nel 1930; questo foglio ed alcuni studi dello stesso Franchi [10] sono i soli che riguardino con una certa organicità e completezza l'area in esame. Autori posteriori hanno dato interessanti notizie, ma esclusivamente di dettaglio, su alcuni punti della zona: fra questi soprattutto A. Faure-Muret [4, 5, 6, 7] per il Complesso Autoctono, D. Schneegans [18] e Y. Gubler [12] per il Subbrianzone e M. Gidon [11] per il Brianzone.

Già S. Franchi in alcune note [10] e nella carta geologica [20], distingue da un punto di vista sia tettonico che stratigrafico, due complessi nelle formazioni sedimentarie sulla sinistra della media Stura di Demonte, l'Autoctono ed il Brianzone. Studi successivi, soprattutto ad opera di D. Schneegans [18], portarono a suddividere il Complesso Brianzone di S. Franchi in uno Subbrianzone ed in uno Brianzone in senso stretto.

Nel settore rilevato affiorano perciò quattro diverse unità (fig. 1), dall'esterno verso l'interno:

- 4) Complesso Brianzone;
- 3) Complesso Subbrianzone;
- 2) Complesso Autoctono;
- 1) Massiccio Cristallino dell'Argentera.

Nella regione sono state da me eseguite due campagne di rilevamento, nel 1958 e nel 1959.

I contributi portati dal mio lavoro di rilevamento e dalla successiva elaborazione dei dati e materiali raccolti furono oggetto della mia tesi di laurea [1]; essi sono di varia importanza e riguardano tutti i quattro Complessi rappresentati nel settore. I più interessanti però, a mio avviso, sono i nuovi

(*) Lavoro eseguito sotto gli auspici e con il contributo finanziario del C.N.R. nell'Istituto di Geologia dell'Università di Torino.

(**) Nella seduta dell'11 febbraio 1961.

(1) Più particolarmente essa è raffigurata nelle tavolette topografiche III SW Bersezio e III SE M. Nebiùs del foglio N. 78.

dati raccolti in relazione alla tettonica dei Complessi Subbrianzonese e Brianzonese, assai complicata e finora poco studiata, alla trattazione della quale intendo dedicare in particolare una seconda Nota.

Nella presente mi limiterò pertanto a dare le serie stratigrafiche sommarie dei tre complessi, con un accenno ai nuovi dati da me raccolti ed una trattazione generale della tettonica della regione.

MASSICCIO CRISTALLINO. - La limitata fascia di terreni appartenenti al Massiccio Cristallino dell'Argentera (fig. 1) presenta, nel settore rilevato,



Fig. 1. - Schizzo tettonico della regione studiata alla scala 1 : 100.000.

L'area è delimitata dalla linea punteggiata mentre le linee a tratto continuo separano, limitatamente all'area studiata, i quattro complessi.

svariati tipi litologici a partire dagli gneiss biotitico-cloritici originari fino alle, più comuni, migmatiti embrechitiche ed anatessitiche ed anche ai graniti di anatessi. Le caratteristiche ed i rapporti delle varie facies petrografiche sono stati ampiamente descritti da R. Malaroda [13, 14], R. Malaroda & G. Schiavinato [16], R. Sacchi [17] e C. De Pol [2].

COMPLESSO AUTOCTONO. - I terreni rappresentanti il Complesso Autoctono nella regione studiata costituiscono una fascia parallela al bordo del Massiccio Cristallino (fig. 1). La serie stratigrafica va dal Werfeniano allo Oligocene e comprende un Trias in facies lagunare-salmastra, alla base rappresentato anche da quarziti arenacee con *ripple-marks* (cfr. R. Malaroda [13, p. 2444]), un Lias fossilifero, calcareo e poco potente, un Giurese medio-

superiore essenzialmente ardesiaco (« terre nere » degli Autori precedenti), un Cretaceo calcareo e calcareo-arenaceo molto potente, perlopiù sterile, ed un Terziario rappresentato da calcari a Nummuliti alla base e da arenarie con intercalazioni ardesiache (« grès di Annot » degli Autori precedenti) alla sommità. È stata da me ritrovata la località fossilifera sinemuriàna già segnalata dal Franchi ([10], p. 254) presso S. Anna di Sambuco (fig. 1) (coord. chilom. 1158-4826). Le forme che vi compaiono, suddivise nei due livelli già distinti dal Franchi, sono:

2) livello ad *Arnioceras* (« livello ad Arieti » di S. Franchi):

– numerosi resti di Ammoniti riferibili alle specie: *Angulaticeras dumortieri* (Fucini), *Coroniceras* (*Primarietites*) cfr. *isis* (Reynes) e *Arnioceras* spp. plur. ind. ⁽²⁾;

– numerosi esemplari di Belemniti con rostro corto e tozzo, sezione ovale, infundibolo profondo e profilo ellissoidale, riferibili alla specie *Nanobelus acutus* (Miller);

– piastre colonnari con cinque punte ed altri resti di Crinoidi riferibili alla specie *Pentacrinus tuberculatus* Miller;

1) livello a *Liogryphaea arcuata* Lam. (« livello a *Gryphaea arcuata* Lam. » di S. Franchi):

– valve di Ostreidi caratterizzati da umbone molto ricurvo e avvolto, riferibili alle specie *Liogryphaea arcuata* Lam. e *L. obliquata* Lam.;

– esemplari mal conservati di Brachiopodi di piccole dimensioni (largh. 8 mm) con ornamentazione a coste radiali, riferibili al genere *Rhynchonella*;

– resti di valve di Lamellibranchi con ornamentazione a coste radiali molto pronunciate ed orecchiette, riferibili ai generi *Pecten* e *Chlamys*;

– resti di Ammoniti irriconoscibili.

Ho potuto inoltre confermare l'abbassamento del limite Giurese-Cretaceo proposto da A. Faure Muret ([5], p. 284) rispetto alla serie stratigrafica data dal Franchi, grazie al ritrovamento di un livello ad *Inoceramus* sp. e Belemniti a q. 1680 lungo la mulattiera che da Moriglione S. Lorenzo porta al Pilone (coord. chilom. 1344-4538). Numerosi sono stati infine gli orizzonti

(2) Le determinazioni sono state effettuate da C. Sturani che si sta occupando dello studio della più ricca fauna da lui raccolta al Colle del Purriac (estremo NW del Massiccio dell'Argentera). In aggiunta alle forme già elencate, provengono da S. Anna anche le seguenti:

Arnioceras mendax Fucini;

Arnioceras insigne Fucini;

Asteroceras obtusum (Sow.);

Asteroceras suevicum (Quenst.).

Le ultime due specie, con l'*Angulaticeras dumortieri* (Fucini), sono caratteristiche della « zona ad *obtusum* ». La presenza delle forme sopraelencate mette in evidenza che anche qui, come nella classica località del Colle del Purriac [19], nei calcari neri ad Ammoniti sono rappresentate diverse zone del Sinemuriano s.s. e del Lotaringiano.

stratigrafici, distinti in zone vicine da A. Faure-Muret [5, 6], R. Malaroda [13, 14] e C. Sturani [19], che ho potuto riconoscere e descrivere, soprattutto in base allo studio delle microfacies. Fra questi ricorderò solo il sottile livello (poche decine di centimetri) di calcari arenacei zeppi di piccoli Gasteropodi, tra i quali riconobbi *Diastoma* cfr. *costellatum* Lam., che è stato individuato lungo il Rio Conforent fra le puddinghe a *Microcodium* ed i calcari a Nummuliti.

Quanto alla tettonica, è stata confermata la struttura ad anticlinale rovesciata del Complesso Autoctono in corrispondenza alla Cordiera (tav. II, fig. 1; tav. III, fig. 1) e alle Rocce Bianche; la direzione assiale della piega è all'incirca SE-NW, l'asse immerge leggermente verso NW e il piano assiale è immerso verso SW di un angolo variabile oscillante attorno ai 45°. Ho potuto inoltre mettere in evidenza lo sradicamento dell'anticlinale ed un accenno alla retroflessione, particolari visibili nella profonda incisione del Vallone della Madonna (tav. II, fig. 1).

Sono state poi segnalate, oltre a quella già descritta del Rio Conforent (tav. II, fig. 2), altre piccole faglie trasversali alla Cordiera (tav. II, fig. 1) e al M. Bersaio.

COMPLESSO SUBBRIANZONESE. - La serie stratigrafica subbrianzonese è stata tratteggiata con relativa esattezza dagli Autori precedenti; i termini sono, sommariamente, dal basso all'alto: un Trias medio breccioide, un Trias superiore a facies lagunare-salmastra, una formazione di transizione retico-hettangiana essenzialmente rappresentata da calcareniti, un Giurese inferiore dato da calcari selciferi e da brecce, un Giurese medio calcareo e calcareo-dolomitico, un Giurese superiore calcareo, un Cretaceo calcareo-ardesiaco ed un Paleogene molto variabile, con calcari a Nummuliti, brecce, ed un *Flysch* marnoso-arenaceo.

Mi sembra meriti accenno il ritrovamento di un livello fossilifero al M. Ruisass (coord. chilom. 1596-4857), livello che mi ha permesso di datare con sufficiente esattezza la formazione del Giurese medio che affiora in quel punto. Tra i fossili rinvenuti si notano, in ordine di frequenza: Belemniti con rostro piuttosto allungato, Coralli di varie specie, in forme generalmente individuali, Lamellibranchi allungati, alcuni dei quali riferibili al genere *Mytilus* ed altri presentanti una ornamentazione a coste concentriche, rare *Nerinee*, piccoli Brachiopodi ed Alghe.

Ben evidente appare, nel Subbrianzonese della regione, l'eteropia di facies in corrispondenza ai termini rappresentanti il Giurese medio. Alle Rocce Forni (tav. III, fig. 2) si vedono chiaramente i calcari neri lastroidi e compatti, che generalmente rappresentano questo termine stratigrafico, passare lateralmente a un complesso di calcari dolomitici compatti. La scogliera dolomitica forma le pareti più meridionali delle Rocce Forni, dove la si incontra per la prima volta nei terreni subbrianzonesi venendo da Ovest, e continua nei due torrioni centrali del M. Salè (tav. IV, fig. 1) ove si chiude mostrando altrettanto chiari rapporti eteropici, come per il versante orientale ha messo

in rilievo L. Ezechieli [3]. Fenomeni analoghi sono stati segnalati altrove nel Subbrianzone del l'Argentera da S. Franchi [20] e da R. Malaroda [14, p. 44]. Entro la facies di scogliera la dolomitizzazione non è uniforme ed è più spinta verso la parte alta, dove si hanno anche delle vere e proprie dolomie. Unici fossili, piuttosto rari, presenti nella roccia calcareo-dolomitica, sono resti di Echinodermi, perlopiù grosse piastre colonnari di Crinoidi.

Risulta anche, dal mio studio, una maggior diffusione rispetto a quella prima conosciuta, delle lardellature di *Flysch* marnoso-arenaceo nelle strutture tettoniche a scaglie del Complesso Subbrianzone; la esatta potenza, inoltre, dei calcari nummulitici è stata valutata pari a circa 12 m a differenza di quanto erroneamente calcolato per la nostra zona da Y. Gubler [12], che non aveva notato la piccola faglia trasversale in corrispondenza alla Cima Piconiera.

La tettonica del Subbrianzone, estremamente complicata e che ha rivelato molti nuovi particolari, non può essere illustrata qui e verrà trattata in una Nota successiva. È possibile ora anticiparne solo alcuni tratti essenziali. Si può così accennare che, in base a varie considerazioni, il Complesso Subbrianzone è stato suddiviso in una serie di elementi che sono dall'alto al basso:

- 3) Elemento M. Bodoira-M. Ruisass;
- 2) Elemento Cima Piconiera;
- 1) Elemento Rocce Forni-M. Salè-M. Omo.

1. *Elemento Rocce Forni-M. Salè-M. Omo.* - È questa l'unità più estesa del Complesso Subbrianzone, che si prolunga verso Est per lungo tratto, come ha messo in evidenza L. Ezechieli [3]. Lo stile di questo elemento è quello di pieghe sinclinali (Rocce Forni, M. Salè) (tav. III, fig. 2; tav. IV, fig. 1) ed anticlinali (M. Omo) di tipo simmetrico.

2. *Elemento Cima Piconiera.* - Presenta un regime a scaglie listriche, separate da lardellature di materiali plastici. Una evidentissima faglia trasversale, sfuggita ad Y. Gubler che proprio qui ha eseguito lo studio della serie stratigrafica [12], interessa questo elemento in corrispondenza alla Cima Piconiera e continua verso Nord in un importante disturbo trasversale, sottolineato da una serie di diapiri gessosi che vanno dal Colle del Mulo, attraverso la Testa di Bandia (tav. IV, fig. 2), fino ad un isolato affioramento nella Valle Chiaffrea. Questa notevole linea di scorrimento trasversale, lungo la quale la zolla orientale ha subito uno spostamento verso Nord, non notata dagli Autori precedenti, ha completamente falsato le loro interpretazioni della tettonica locale, avendo portato ad attribuire unità del Complesso Subbrianzone al Brianzone.

3. *Elemento M. Bodoira - M. Ruisass.* - Lo stile tettonico che caratterizza questo Elemento è quello a scaglie embricate, con locale conservazione di qualche cerniera, generalmente di tipo anticlinale.

COMPLESSO BRIANZONESE. - La serie stratigrafica che ho potuto ricostruire nel settore rilevato coincide in linea di massima con quelle date da S. Franchi [20] e da M. Gidon [11]. Essa si può così riassumere in sintesi: sopra un Permiano superiore rappresentato dal basso all'alto da porfiriti metamorfosate, scisti sericitici e quarziti conglomeratiche, si ha un Werfeniano quarzitico-arenaceo alla base ed in facies lagunare-salmastra alla sommità ed un Anisico rappresentato da calcari cristallini, al tetto del quale sta un livello di calcari brecciati.

La tettonica del Complesso Brianzonese è già stata delineata da M. Gidon [11]; egli ha distinto nella zona da me studiata tre elementi:

- 1) « *Zone siliceuse de la Gardetta* ».
- 2) « *Nappe du Rocca Peroni* ».
- 3) « *Nappe du Sautron* ».

A questi ne ho aggiunto un quarto:

- 4) Elemento Cima di Test.

1. *Fascia gessosa subbrianzonese-brianzonese*. - Questo elemento tettonico corrisponde solo in parte alla « *Zone siliceuse de la Gardetta* » di M. Gidon. Si tratta di una estesa fascia di gessi e carnirole (tav. IV, fig. 2), saliti con meccanismo diapirico lungo un importante piano di scorrimento longitudinale, che è stata tenuta distinta sia dal punto di vista stratigrafico che tettonico perché non può essere riferita né al Complesso Subbrianzonese né a quello Brianzonese. Essa comprende i gessi dei Colli Cologna, Margherina, Salsas Blancias, Valcavera e della Testa di Bandia (tav. IV, fig. 2).

Elemento Rocca Peroni. - Inglobate nei diapiri gessosi della fascia subbrianzonese-brianzonese, si ritrovano in alcuni punti delle lame di materiali diversi. Esiste una evidente continuità, non notata da M. Gidon, tra i trucioli compresi nei gessi del Passo della Gardetta ed i resti dell'Elemento Rocca Peroni, più sviluppato ad Occidente, fuori dell'area studiata [11].

Elemento Sautron. - Questo elemento, con struttura di grossa scaglia molto raddrizzata, che continua per un lungo tratto verso Ovest (Rocca la Meja, Bric Servino, ecc.) e che sparisce invece bruscamente in corrispondenza al disturbo trasversale Colle del Mulo-Valle Chiaffrea, è stato esattamente delimitato nella mia zona da M. Gidon [11].

Elemento Cima di Test. - Si tratta di una nuova unità da me proposta e che compare oltre il Colle del Mulo, verso Est, allineata lungo la direttrice tettonica dell'Elemento Sautron.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] CARRARO F., *Studio geologico del fianco sinistro della Valle Stura di Demonte nel tratto compreso fra Pontebernardo e Sambuco*, Tesi di Laurea in Scienze Geologiche, Università di Padova (manoscritto inedito) (1960).
- [2] DE POL C., *Geologia dei terreni cristallini al margine del Massiccio dell'Argentera tra Vinadio, Pietraporzio e Bagni di Vinadio*, Tesi di Laurea in Scienze Geologiche, Università di Milano (manoscritto inedito) (1960).
- [3] EZECHIELI L., *Studio geologico del fianco sinistro della Valle Stura di Demonte nel tratto compreso tra Sambuco e Vinadio*, Tesi di Laurea in Scienze Geologiche, Università di Padova (manoscritto inedito) (1960).
- [4] FALLOT P. & FAURE-MURET A., *Sur l'extension du décollement de la série de couverture subalpine*, «Compt. Rend. Ac. Sc.», 228, 616-619 (1949).
- [5] FAURE-MURET A., *Etudes géologiques sur le Massif de l'Argentera-Mercantour et ses enveloppes sédimentaires*, «Mém. Carte Géol. France», 336 pp., 19 tt., 1 carta (1955).
- [6] FAURE-MURET A. & FALLOT P., *La formation a Microcodium au pourtour de l'Argentera-Mercantour*, «Bull. Soc. Géol. France», ser. 6, 4, 111-138, 10 ff. n. t. (1954).
- [7] FAURE-MURET A. & SUTER G., *Sur la tectonique du revers italien de l'Argentera-Mercantour*, «Compt. Rend. Ac. Sc.», 228, 406-408 (1949).
- [8] FRANCESCHETTI B., *Osservazioni sulla tettonica della regione del Monte Oserot (fianco sinistro della Valle Stura di Demonte fra Pontebernardo e Bersezio, Alpi Marittime)*, «Rend. Acc. Naz. Lincei», ser. 8, 26, 533-541, 2 tt. n. t. (1959).
- [9] FRANCESCHETTI B., *Nuove osservazioni sulla geologia della regione montuosa posta a Nord della Stura di Demonte fra Pietraporzio e Bersezio (Alpi Marittime)*, «Rend. Acc. Naz. Lincei», ser. 8, 29, 1-2, 87-94, 1 t. n. t. (1960).
- [10] FRANCHI S., *Relazione sui principali risultati del rilevamento geologico nelle Alpi Marittime eseguito nelle campagne 1891-92-93*, «Boll. R. Comit. Geol. It.», 25, 231-258 (1894).
- [11] GIDON M., *La zone briançonnaise en haute Ubaye, haute Maira et haute Stura*, Tesi, Università di Grenoble (manoscritto inedito) (1958).
- [12] GUBLER Y., *L'Eocène subbriançonnais à NE du Massif de l'Argentera*, «Compt. Rend. Somm. Soc. Géol. France», 82-86 (1955).
- [13] MALARODA R., *L'Istituto di Geologia dell'Università di Torino. Attività svolta durante l'anno 1955*, «La Ricerca Scientifica», 26, 2439-2447 (1956).
- [14] MALARODA R., *Studi geologici sulla dorsale montuosa compresa fra le basse Valli della Stura di Demonte e del Gesso (Alpi Marittime)*, «Mem. Ist. Geol. Min. Univ. Padova», 20, 127 pp., 12 ff. n. t., 13 tt., 1 carta geologica alla scala 1:25.000 (1957).
- [15] MALARODA R., *L'Istituto di Geologia dell'Università di Torino. Attività svolta nel quadriennio 1956-1959*, «La Ricerca Scientifica», 30, 1366-1378 (1960).
- [16] MALARODA R. & SCHIAVINATO G., *Osservazioni preliminari sui fenomeni di anatessi nel settore italiano del Massiccio dell'Argentera*, «Boll. Soc. Geol. It.», 76, 21 pp., 1 f. n. t., 7 tt. (1957).
- [17] SACCHI R., *Geologia della regione a SW di Vinadio (Massiccio Cristallino dell'Argentera)*, «Boll. Serv. Geol. It.», 81, 24 pp., 7 ff. n. t., 3 tt., 1 carta geol. alla scala 1:25.000 (1961).
- [18] SCHNEEGANS D., *La géologie des nappes de l'Ubaye-Embrunais entre la Durance et l'Ubaye*, «Mém. Carte Géol. France», 339 pp., 46 ff. n. t., 10 tt., carta e profili geologici alla scala 1:20.000 (1938).
- [19] STURANI C., *Studio geologico dei terreni sedimentari situati all'estremo nord-occidentale del Massiccio dell'Argentera (Alpi Marittime)*, Tesi di Laurea in Scienze Naturali, Università di Torino (manoscritto inedito) (1961).
- [20] *Carta Geologica d'Italia* alla scala 1:100.000. Foglio 78-79: Dronero-Argentera (rilevamenti di S. Franchi). R. Ufficio Geologico (1930).

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

TAVOLA I.

Fig. 1. — Panoramica della regione studiata dal M. Bodoira. Sono indicati i limiti fra i singoli complessi.

MC: Massiccio Cristallino, CA: Complesso Autoctono, CS: Complesso Subbrianzone, CB: Complesso Brianzone; (1) Becco Grande (m 2766), (2) Colle del Mulo (m 2543), (3) Cima Piconiera (m 2565), (4) M. Nebiùs (m 2600), (5) M. Bersaio (m 2352), (6) Valle Stura.

(fot. B. Franceschetti)

Fig. 2. — Panoramica della regione studiata dalla Cima di Test.

MC: Massiccio Cristallino, CA: Complesso Autoctono, CS: Complesso Subbrianzone, CB: Complesso Brianzone, Φ : disturbo trasversale Colle del Mulo-Valle Chiaffrea; (1) M. Bersaio (m 2352), (2) Cima Piconiera (m 2565), (3) M. Bodoira (m 2747).

(fot. R. Malaroda)

TAVOLA II.

Fig. 1. — *Complesso Autoctono*. L'anticlinale rovesciata del M. Nebiùs sul fianco sinistro del Vallone della Madonna (veduta dal Colle Piconiera). Lo sradicamento della piega è reso ben evidente, nel centro della fotografia, dal chiudersi a cuneo verso il basso degli strati rappresentanti il Cretaceo superiore. La linea tratteggiata indica una evidente faglia trasversale.

MC: Massiccio Cristallino; o: arenarie di Annot, e: Eocene, c: Cretaceo, g: Giurese.

(fot. F. Carraro)

Fig. 2. — *Complesso Autoctono*. La faglia trasversale del Rio Conforent. Il contatto tettonico fra i termini rappresentati il Cretaceo (a destra) e l'Oligocene (a sinistra) è ben evidente e risulta direttamente visibile nella fotografia ove esso corrisponde alla linea bianca continua.

Φ : linea di faglia; o: arenarie di Annot, c: Cretaceo.

(fot. B. Franceschetti)

TAVOLA III.

Fig. 1. — *Complesso Autoctono*. La Cordiera ed il M. Nebiùs visti dal M. Ruisass. Sullo sfondo della fotografia si osserva il Massiccio Cristallino dell'Argentiera, e tra questo ed il Complesso Subbrianzone, che è in primo piano, si estende ben evidente l'anticlinale retroflessa del Complesso Autoctono.

MC: Massiccio Cristallino, CS: Complesso Subbrianzone; o: arenarie di Annot, e: Eocene, c: Cretaceo; (1) M. Nebiùs (m 2600) (la cresta che si stacca a destra di esso costituisce la Cordiera), (2) Valle Stura, (3) Vallone della Madonna.

(fot. F. Carraro)

Fig. 2. — *Complesso Subbrianzone*. Le Rocce Forni viste dal M. Nebiùs. A sinistra in basso si osserva il limite fra il Complesso Autoctono ed il Subbrianzone, mentre a destra in alto si ha quello tra Subbrianzone e Brianzone. Le Rocce Forni, che occupano la parte centrale della fotografia, sono costituite da due scaglie, una superiore formata da calcari del Giurese medio, ed una inferiore che presenta una struttura sinclinale, con al nucleo



Fig. 1.

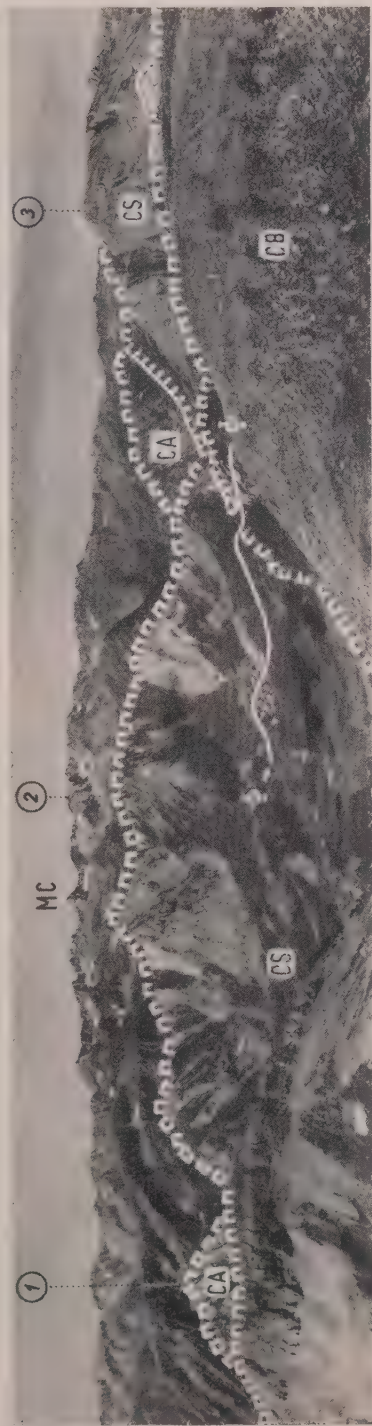


Fig. 2.



Fig. 204

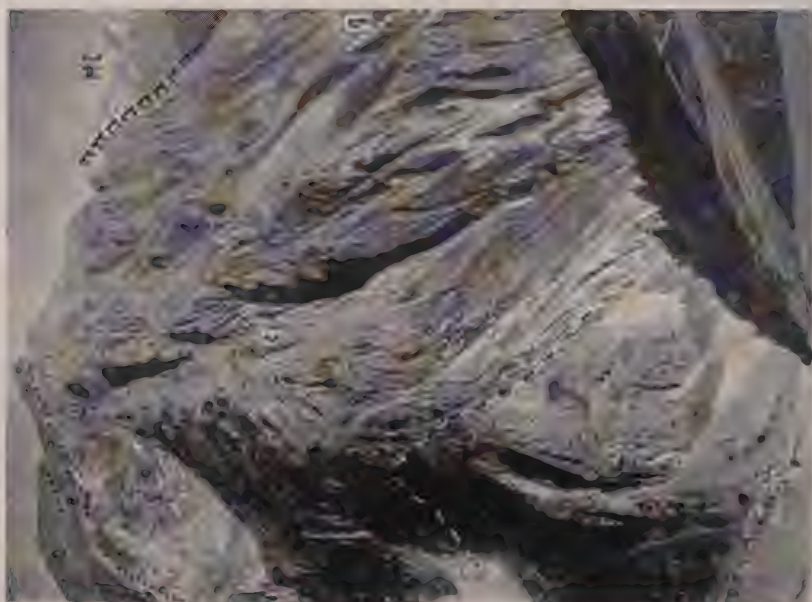


Fig. 205

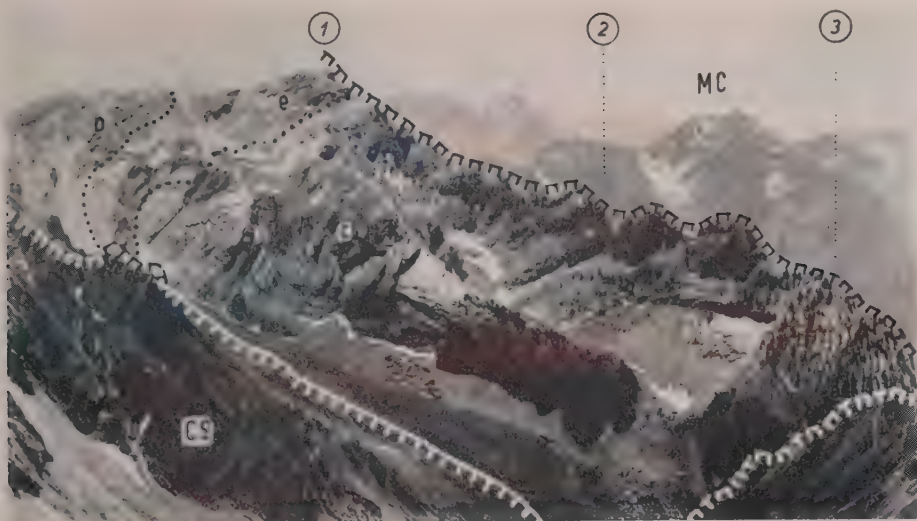


Fig. 1.



Fig. 2.

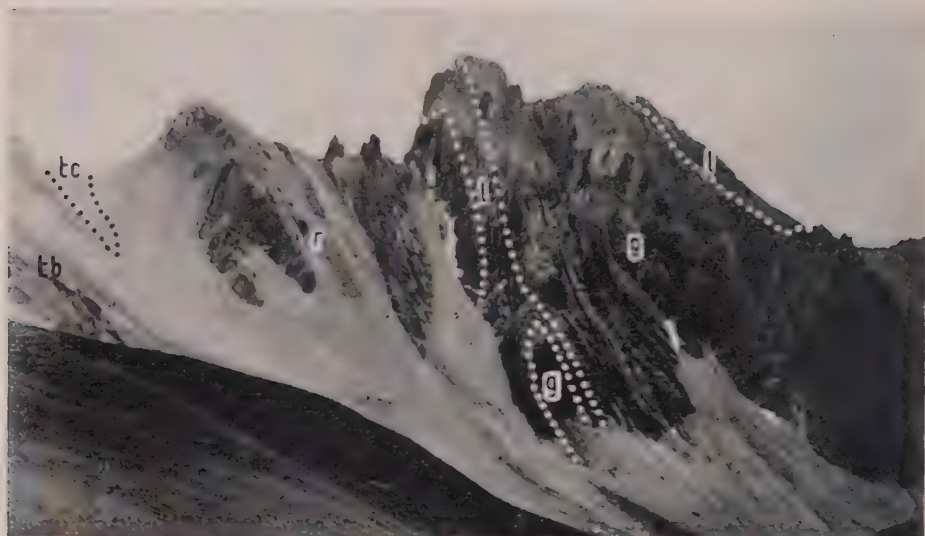


Fig. 1.

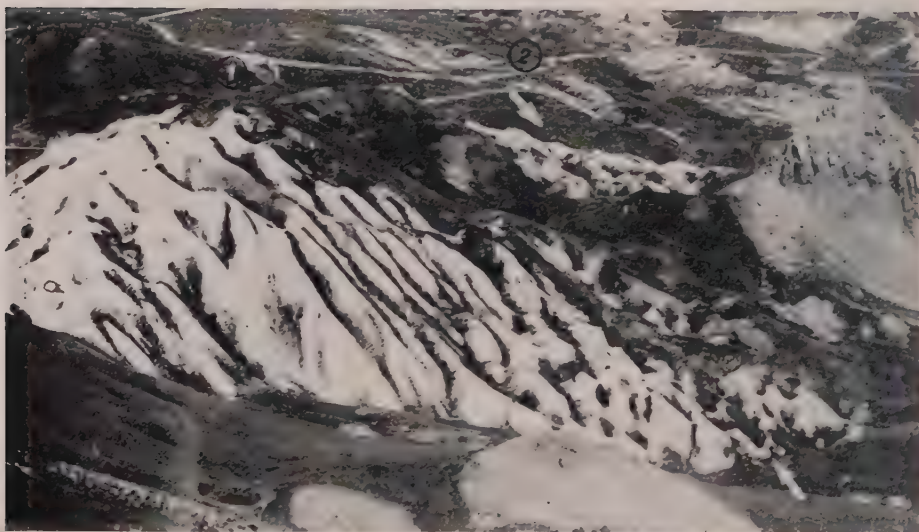


Fig. 2.

calcarei dolomitici compatti del Giurese medio in eteropia di facies con calcari neri stratificati. Il limite fra le due scaglie è rappresentato dalla linea punteggiata, mentre quello fra le due facies eteropiche è dato dalla linea continua. La linea, infine, a tratti alterni bianchi e neri, indica il disturbo trasversale Colle del Mulo-Valle Chiaffrea.

CA: Complessò Autoctono, CB: Complesso Brianzonese; gc: Giurese calcareo, gd: Giurese dolomitico; (1) M. Bodoira (m 2747), (2) Cima Piconiera (m 2565), (3) Testa di Bandia.
(*fol. R. Malaroda*)

TAVOLA IV.

Fig. 1. - *Complesso Subbrianzonese*. Il Gruppo del Salè visto dal M. Ruisass. La struttura sinclinale del M. Salè (in basso al centro è visibile una piccola scaglia che ne rappresenta una complicazione locale), che continua verso Est quella delle Rocce Forni, ha al nucleo i calcari dolomitici compatti del Giurese medio ed ai fianchi, spesso molto laminati, successivamente le breccie ed i calcari selciferi del Giurese inferiore e le calcareniti con il livello ad *A. contorta* Portl. del Retico-Hettangiano.

g: Giurese medio, l: Giurese inferiore, r: Retico-Hettangiano, tc: Trias medio (carniole), tb: Trias medio (breccie).
(*fol. F. Carraro*)

Fig. 2. - *Complesso Brianzonese*. Calanchi nei pendii gessosi della Testa di Bandia, visti dalla Cima Piconiera. Le due frecce indicano la direzione approssimata del disturbo trasversale Colle del Mulo-Valle Chiaffrea.

(1) Testa di Bandia, (2) strada militare Vallone dell'Arma-Colle del Mulo.

(*fol. F. Carraro*)

Istologia. — *Studio statistico delle grandezze cellulari nel nucleo dell'ipoglosso nell'uomo di diversa età*^(*). Nota di CARLO RIZZOLI e MARIA ZANNOTTI, presentata^(**) dal Socio O. M. OLIVO.

Si deve a Giuseppe Levi [5, 6, 7] la dimostrazione sperimentale che le cellule di alcuni organi non obbediscono alla legge del volume costante, formulata da Driesch e che, negli organi costituiti da tali elementi cosiddetti perenni (Bizzozzero), l'accrescimento è dovuto, fin da momenti assai precoci dello sviluppo, in larghissima misura od esclusivamente all'incremento del volume cellulare. Per quanto riguarda gli elementi nervosi una serie notevolissima di ricerche di Levi, Olivo e delle loro scuole e poi di altri [1, 3, 4, 8-12] hanno minutamente analizzato le modalità dell'accrescimento dei pirenofori ed i rapporti con l'estendersi del territorio di innervazione.

In particolare nelle ricerche di Olivo e coll. il problema è stato impostato con criteri statistici. La massima parte dei dati sperimentali raccolti riguardano però gli elementi dei gangli nervosi sensitivi, ove, per la forma abbastanza regolare dei pirenofori, la valutazione delle dimensioni è sottoposta a minori errori sperimentali. Scarsissime sono invece le ricerche riguardanti gli elementi motori che, con la loro forma irregolare, i numerosi prolungamenti dendritici, la disposizione non centrale del nucleo, presentano difficoltà di rilevazione notevolissime. Fra le poche ricerche sugli elementi motori vanno segnalate quelle di Olivo e Gagliano [9] che hanno dimostrato, nelle cellule piramidali di Betz, un continuo incremento delle grandezze massime dei pirenofori fino ad età molto avanzata.

In queste nostre ricerche abbiamo iniziato l'esame delle modificazioni di grandezza degli elementi motori in rapporto all'età, mediante lo studio delle variazioni statistiche delle aree di sezione dei pirenofori dell'ipoglosso nell'uomo.

L'ipoglosso è un nucleo di facile individuazione, costituito da elementi molto voluminosi e caratteristici, esclusivamente motori, e il cui territorio di innervazione periferica è conosciuto e bene delimitato. In realtà il nucleo dell'ipoglosso presenta una suddivisione in più gruppi cellulari secondari, dei quali uno ventromediale innerva la muscolatura propria della lingua, uno ventrolaterale il muscolo genioglosso e uno caudale lo stilo e ioglosso. (Clara [2]).

Per vedere se nel nucleo fossero individuabili aggruppamenti cellulari caratterizzati da diversa grandezza media, abbiamo esaminato, in una donna

(*) Dall'Istituto di Istologia e Fisiologia Generale dell'Università di Bologna, diretto dal prof. O. M. Olivo.

(**) Nella seduta dell'11 febbraio 1961.

di 67 anni, più campioni colti a differenti livelli regolarmente spaziati lungo tutto il nucleo.

MATERIALE E TECNICA.

Per queste ricerche ci siamo serviti di 17 midolli allungati di soggetti delle seguenti età: 2, 4, 6 mesi di vita fetale; 5, 13, 30, 33, 48, 54, 58, 60, 67, 77, 78, 80, 82, 85 anni. Fissazione del materiale in formolo, inclusione in paraffina, sezione in serie di 25μ di spessore, raccogliendo una sezione ogni 10, colorazione con violetto di cresile 1%, in soluzione acquosa.

Per ciascun nucleo abbiamo raccolto campioni di 100 pirenofori, scelti secondo le regole statistiche di casualizzazione, da più sezioni e fotografati all'ingrandimento finale sul positivo di 1000 diametri. Sulla fotografia si misurava planimetricamente l'area di sezione di tutti e solo gli elementi provvisti di dendriti, tenendo conto di tutta la superficie cellulare compresa nel piano di sezione, incluse le espansioni citoplasmatiche. Tali aree di sezioni sono state utilizzate direttamente per l'analisi: la forma irregolare dei pirenofori rendeva infatti discutibile il calcolo di un volume medio riportato alla sfera, come fatto in genere dagli Autori per gli elementi sensitivi. Sui campioni misurati per ciascuna età è stata eseguita la usuale elaborazione statistica delle seriazioni di frequenze: classificazione del materiale raccolto in classi di 50 in $50\mu^2$, calcolo della media aritmetica, scarto quadratico, indice di variabilità. Si sono infine classificati gli elementi di ciascun campione in base alle loro aree di sezione e si sono calcolate le medie dei due gruppi di 5 elementi minimi e massimi di ciascuna popolazione.

Le curve di accrescimento di tali gruppi di elementi *plus e minus* varianti estremi sono state confrontate con le variazioni della media dei campioni, come fatto da Olivo nello studio dei gangli sensitivi.

In uno dei nuclei da noi esaminati (donna di anni 67) sono stati fotografati e misurati tutti gli elementi presenti in 11 sezioni raccolte a intervalli regolari a partire dalla estremità rostrale del nucleo. Il confronto diretto e statistico degli 11 campioni così ottenuti ci ha consentito un primo esame delle modalità con cui variano le dimensioni dei pirenofori a vari livelli del nucleo dell'ipoglosso.

RISULTATI SPERIMENTALI.

1. *Variazione delle aree di sezione cellulari in rapporto all'età.* In Tabella I abbiamo raccolto i parametri statistici delle seriazioni di frequenza di 50 in $50\mu^2$, centesimate, per tutto il materiale esaminato (media, moda, scarto, indice di variabilità, limiti di variazione). In tutti i campioni esaminati la variabilità delle aree di sezione dei pirenofori è continua, secondo una curva a campana con lieve obliquità sinistra (media poco discosta dalla moda Tabella I, coll. 1 e 2). Le spezzate di frequenza empiriche possono riportarsi

con buona approssimazione alle curve binomiali aventi il medesimo scarto, frequenza totale e media, calcolate sulle aree della curva normale. Nei tre feti esaminati dal 2° al 6° mese il nucleo dell'ipoglosso è costituito da elementi piccoli (medie minime di tutto il materiale raccolto), di dimensioni piuttosto omogenee (scarti quadratici e indici di variazione modesti), ricchi di tigroide con prolungamenti dendritici sottili e numerosi.

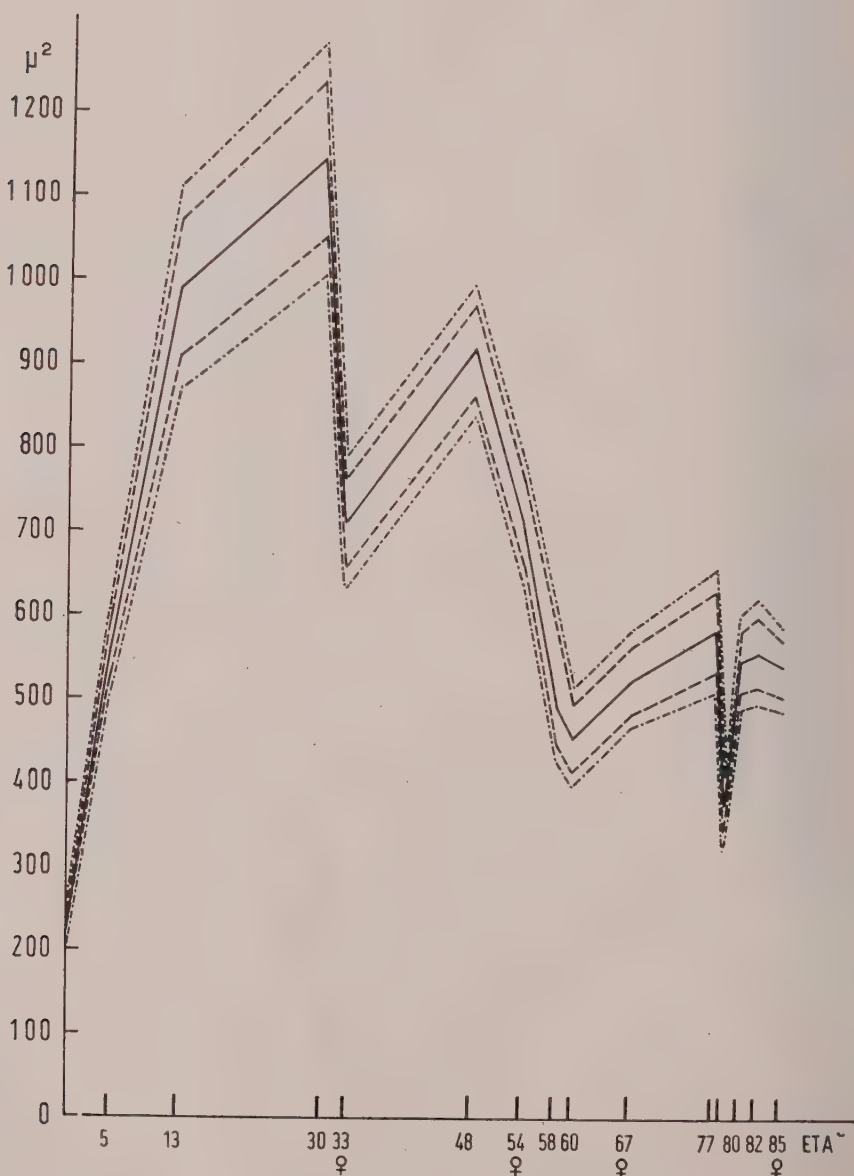


Fig. 1.

TABELLA I.

Età	Media μ^2	Classe modale	Scarto	Indice di variazione	Classe minima	Classe massima	Ampiezza di variabilità
Feto mesi 2	274	250-300	72,62	0,265	100	450	350
» 4	259,50	200	101,78	0,392	100	550	450
» 6	221	200	66,01	0,299	100	400	300
Anni 5	558,08	500	133,64	0,239	200	900	700
» 13	996,59	800	404,08	0,405	300	2100	1800
» 30	1152	700	513,07	0,445	150	2850	2700
» 33	717,50	550-700	242,06	0,337	350	1550	1200
» 48	927,46	900	265,36	0,286	250	1600	1350
» 54	712,50	600	244,78	0,343	300	1400	1100
» 58	489	400	190,79	0,390	150	1000	850
» 60	455,50	450	187,33	0,411	50	1000	950
» 67	527,50	350	196,32	0,372	200	1050	850
» 77	585	550-600	253,91	0,434	150	1250	1100
» 78	377	200-300	164,91	0,437	100	850	750
» 80	555	500	205,45	0,370	150	1200	1050
» 82	558	500	203	0,364	150	1200	1050
» 85	543,50	400	195,40	0,359	200	1000	800

Nei soggetti giovani di 5, 13 e 30 anni si osservano invece le medie più elevate di tutto il gruppo di campioni raccolti. Gli elementi più grandi come media e come valori singoli sono stati riscontrati nel caso di anni 30. In questi soggetti il nucleo è costituito da elementi ricchi di tigroide, in forma di zolle e granuli, con dendriti voluminosi e ramificati. Nei soggetti tra i 33 e i 58 anni si riscontrano medie nettamente e progressivamente meno elevate rispetto

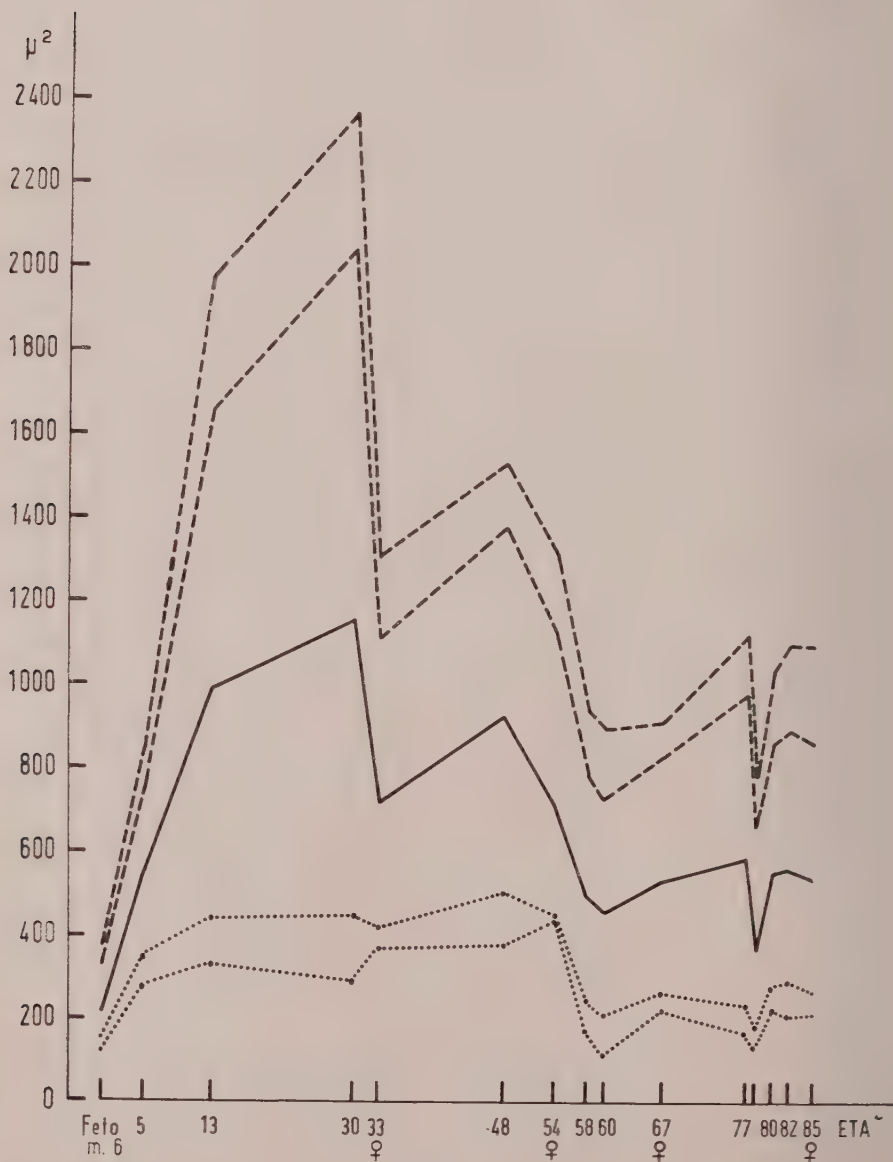


Fig. 2.

ai soggetti più giovani. Le variazioni individuali da caso a caso sono notevoli (vedi ad esempio i valori particolarmente bassi del caso di 33 anni). Gli elementi del nucleo hanno l'abituale aspetto multipolare, con tigroide abbondante ben colorabile. Tra il 58° e 85° anno le medie delle aree di sezione tendono a stabilizzarsi su valori piuttosto bassi, tra i 400 e 550 μ^2 , con oscillazioni modeste da un campione all'altro, dovute presumibilmente alla variabilità fluttuante (vedi anche le Tavole I-IV).

Nel grafico n. 1 sono riportate le medie dei campioni misurati in funzione dell'età, insieme agli intervalli di sicurezza della media, corrispondente a

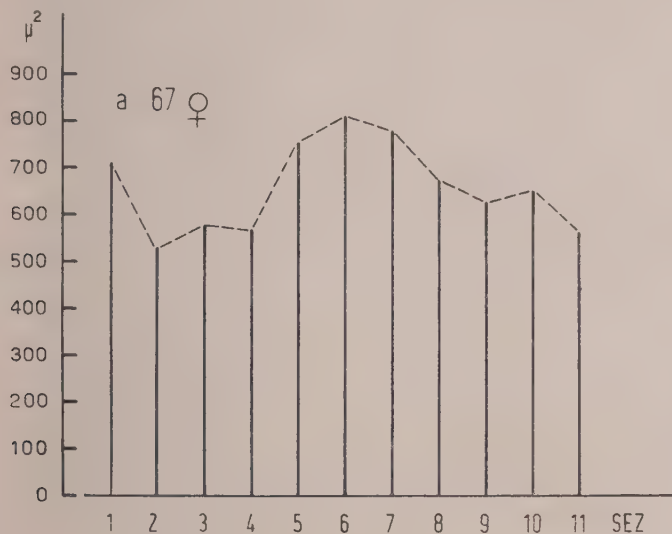


Fig. 3.

due, tre volte l'errore standard (limiti di sicurezza del 95-99%). Questo rende facile l'apprezzamento delle significatività delle differenze tra medie in stadi successivi, dovendo considerarsi distinte statisticamente quelle i cui intervalli di sicurezza non si ricoprono. Dall'esame del grafico risulta che gli incrementi tra il 6° mese di vita fetale ed il 5° anno e tra il 5° e il 13° anno sono statisticamente significativi e cioè certamente superiori ai limiti dell'errore sperimentale e di campionamento. Non significative vanno invece considerate le differenze tra il 13° e il 30° anno di età, mentre di nuovo altamente significativa è la caduta dei valori medi che si osserva nel grafico tra il 3° e il 6° decennio di vita, ed infine non superiori all'errore sperimentale le oscillazioni delle medie nella senescenza. Le dimensioni cellulari del nucleo dell'ipoglossa aumentano pertanto nei primi due decenni di vita, si stabilizzano intorno ai valori massimi nel successivo decennio, per andare poi incontro ad un notevole decremento (pari ad oltre il 50-60%) dall'età media all'inizio della senescenza.

TABELLA II.

μ^2	VETRINO N°											Totale
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
250	—	10,8	—	7,1	4,2	—	—	4,2	—	—	5,4	1,8
300	—	8,1	—	—	—	—	—	2,1	2,1	2,3	—	2,4
350	—	5,4	15,4	14,3	4,2	3,7	2,6	2,1	8,3	4,5	10,8	4,1
400	—	2,7	—	7,1	—	3,7	2,6	6,4	10,4	11,4	10,8	5,9
450	—	5,4	7,7	—	2,1	—	2,6	2,1	12,5	4,5	10,8	4,6
500	—	16,2	15,4	7,1	—	3,7	—	14,9	10,4	11,4	8,1	8,1
550	6,7	13,5	15,5	—	2,1	3,7	5,1	10,6	12,5	9,1	10,8	8,4
600	19,9	5,4	—	28,6	14,6	3,7	2,6	10,6	4,2	0,1	13,5	9,5
650	6,7	10,8	15,4	14,3	2,1	11,1	10,2	2,1	12,5	4,5	8,1	7,6
700	13,3	—	15,4	—	10,4	7,4	10,2	17,0	16,7	11,4	8,1	10,6
750	26,7	5,4	7,7	—	6,2	3,7	7,7	—	8,3	2,3	—	5,1
800	13,3	8,1	—	7,1	14,6	7,4	12,8	6,4	2,1	0,1	—	7,6
850	6,7	5,4	7,7	7,1	10,4	—	5,1	6,4	4,2	4,5	—	4,9
900	6,7	—	7,7	7,1	10,4	11,1	17,9	4,2	—	—	5,4	5,9
950	—	—	—	—	4,2	11,1	10,2	2,1	2,1	4,5	—	3,5
1000	—	—	—	—	8,3	7,4	—	2,1	—	9,1	5,4	1,9
1050	—	—	—	—	4,2	7,4	—	2,1	2,1	—	2,7	1,9
1100	—	—	—	—	2,1	3,7	10,2	2,1	—	—	—	0,5
1150	—	2,7	—	—	—	3,7	—	2,1	—	—	—	0,3
1200	—	—	—	—	—	3,7	—	—	—	—	—	0,3
1250	—	—	—	—	—	—	—	—	2,1	—	—	—
1300	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1350	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2,3	—	0,3
1400	—	—	—	—	—	—	—	—	2,1	—	—	0,3
1450	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1500	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1550	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1600	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1650	—	—	—	—	—	—	—	2,1	—	—	—	0,3
M	716,66	545,94	584,61	578,57	759,37	807,41	788,46	675,53	638,54	652,27	564,86	666,66
σ	144,12	206,11	153,54	217,75	192,80	228,46	185,45	233,02	211,47	226,70	197,79	211,11
i.v.	0,201	0,377	0,263	0,376	0,254	0,283	0,235	0,345	0,331	0,347	0,350	0,332

Nel diagramma n. 2 è riportato in grafico l'andamento delle cellule minime e massime sempre in funzione dell'età. Le aree di sezione dei gruppi di pirenofori massimi e minimi del nucleo si accrescono con modalità molto analoghe a quelle della media della popolazione di cui fanno parte. Per gli elementi più grandi l'incremento è forte dal 6° mese al 5° anno e dal 5° al 13° (rispettivamente del 130-140% circa, rispetto al 100% della popolazione nel suo complesso), moderato tra il 13° e il 30° anno, notevole decremento nei successivi tre decenni di vita. Per i più piccoli l'incremento è limitato ai due primi decenni di vita (rispettivamente del 130% tra il 6° mese ed il 5° anno e del 30% circa tra il 5° anno e il 13°), successivamente le variazioni sono modeste con una tendenza al decremento nell'età più tarda. Le modalità sostanzialmente analoghe con cui crescono nel nucleo elementi piccoli, medi e grandi dimostra, a nostro avviso, che per tutta la vita gli elementi dell'ipoglosso sono tutti funzionalmente impegnati.

2. *Variazioni delle aree di sezione dei pirenofori in diversi punti di un singolo nucleo.* — Sono stati fotografati e misurati 11 campioni di cellule da altrettante sezioni regolarmente scalate lungo il nucleo di una donna di anni 67. Le seriazioni di frequenza di 50 in 50 μ^2 degli 11 campioni raccolti sono riportati, insieme ai loro parametri ed alla seriazione cumulata e centesimata di tutto il nucleo, nella Tabella. II. Nel grafico n. 3 le medie dei singoli campioni sono riportate in funzione della loro posizione del nucleo. Tra i campioni raccolti a diversi livelli del nucleo si notano cospicue differenze delle dimensioni medie (differenza massima 265 μ^2 tra la sezione n. 2-545 μ^2 e la sezione n. 6-807 μ^2). Le variazioni delle medie dei gruppi cellulari non sono casuali (fig. 3), ma seguono una certa regola topografica. La estremità più craniale del nucleo è costituita da cellule molto voluminose: si tratta di popolazioni numericamente assai ridotte ove l'inclusione di elementi di altra origine non è escludibile con certezza. Nelle successive tre sezioni prevalgono gruppi cellulari di dimensioni modeste, i più piccoli di tutti quelli raccolti. Seguono poi una serie di campioni corrispondenti alla parte centrale del nucleo, nei quali si osservano gli elementi più voluminosi e le medie più elevate; nel 3° caudale del nucleo i valori medi dei campioni raccolti si abbassano di nuovo.

La distribuzione delle grandezze cellulari del nucleo dell'ipoglosso non è dunque uniforme.

CONCLUSIONI E DISCUSSIONE.

1° Gli elementi del nucleo dell'ipoglosso sono distribuiti a tutte le età ed in tutto il nucleo secondo una variabilità continua, a campana con leggi di variazioni grosso modo binomiale.

2° Dal 2° al 6° mese di vita fetale i fenomeni di accrescimento dei pirenofori sono modesti e restano compresi nei limiti d'errore della tecnica di

ricerca. Il perfezionamento strutturale ed istochimico dei pirenofori è dunque almeno in parte indipendente dai fenomeni dell'accrescimento dimensionale.

3° L'incremento delle aree di sezione dei pirenofori dal 6° mese di vita fetale al 5° anno e dal 5° al 13° anno deve ritenersi reale e cioè di intensità superiore non solo ai limiti dell'errore sperimentale ma anche alle variazioni massime riscontrate tra gruppi cellulari in diversa posizione di uno stesso nucleo. L'incremento tra il 13° ed il 30° anno non supera tali soglie di significatività.

4° L'accrescimento più rapido ed imponente delle aree di sezione dei pirenofori si verifica dunque nei primi due decenni di vita. L'accrescimento poi rallenta o si arresta nel successivo decennio. Tali limiti di tempo devono ritenersi approssimativi, legati al tipo di materiale di cui si è potuto disporre per questa ricerca.

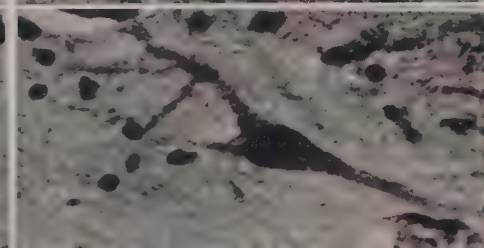
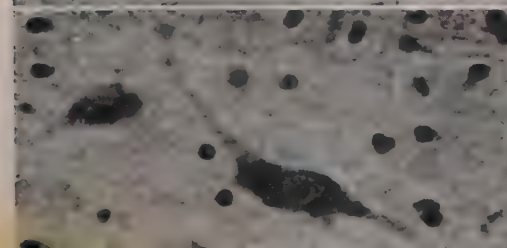
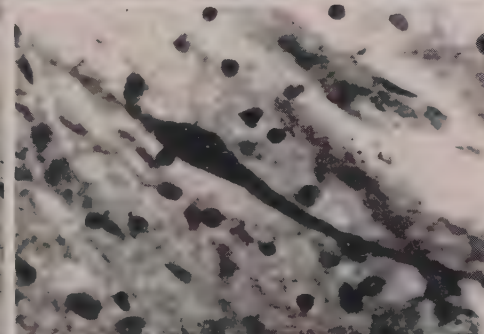
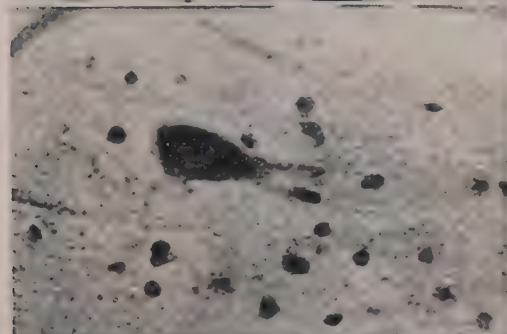
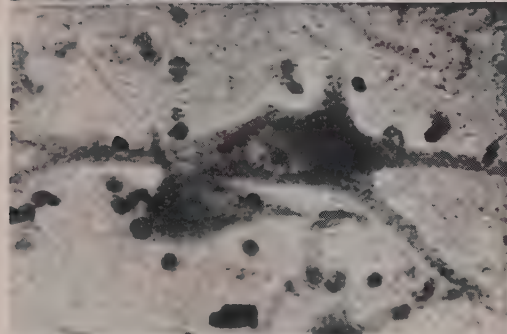
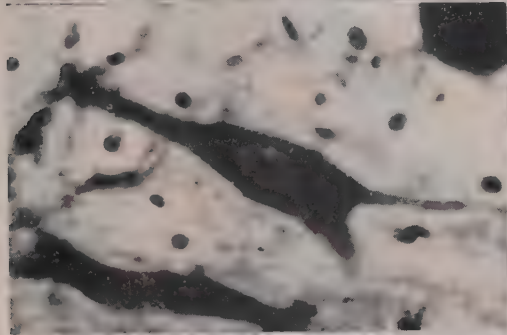
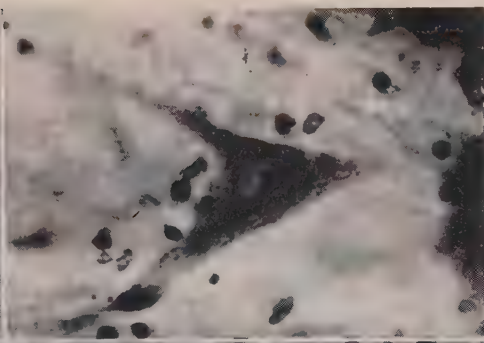
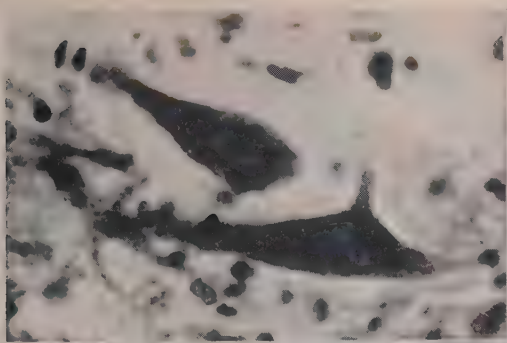
5° Dal 3° al 6° decennio, per quanto si può dedurre dai dati ancora piuttosto frammentari da noi raccolti, si osserverebbe nel nucleo una sostanziale riduzione delle dimensioni cellulari medie.

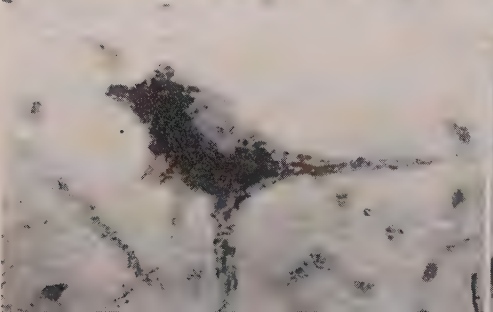
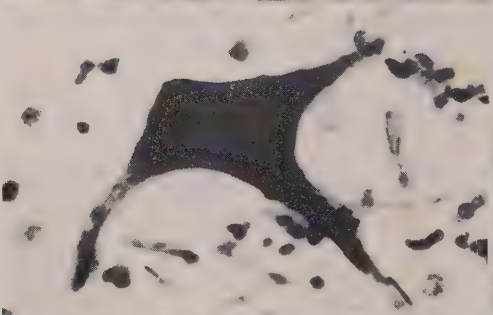
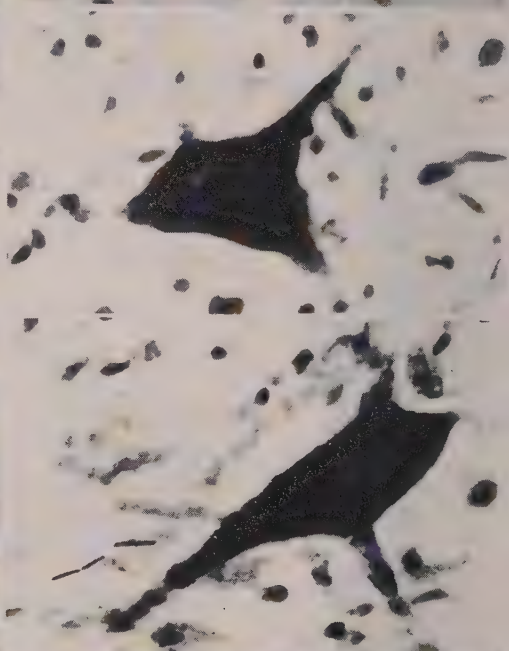
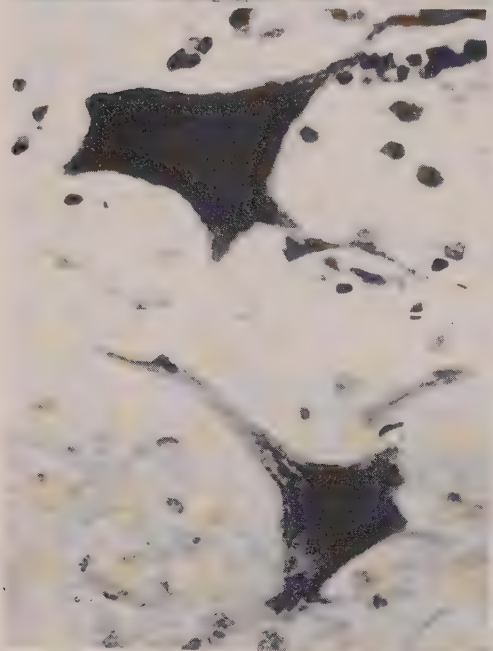
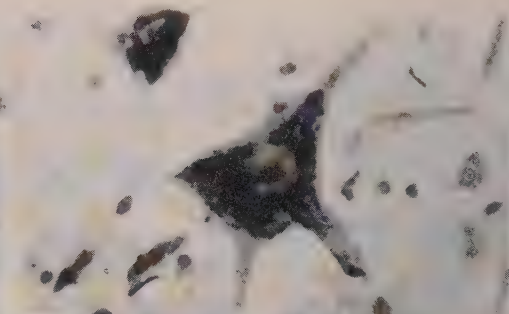
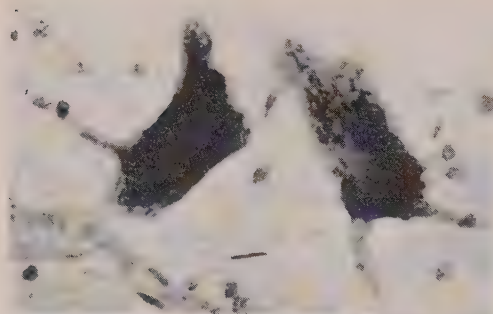
6° A partire dal 60° anno circa le medie delle aree di sezione dei pirenofori si stabilizzano su valori ridotti a meno della metà di quelli dell'età giovanile e rimangono tali fino ad una età assai avanzata.

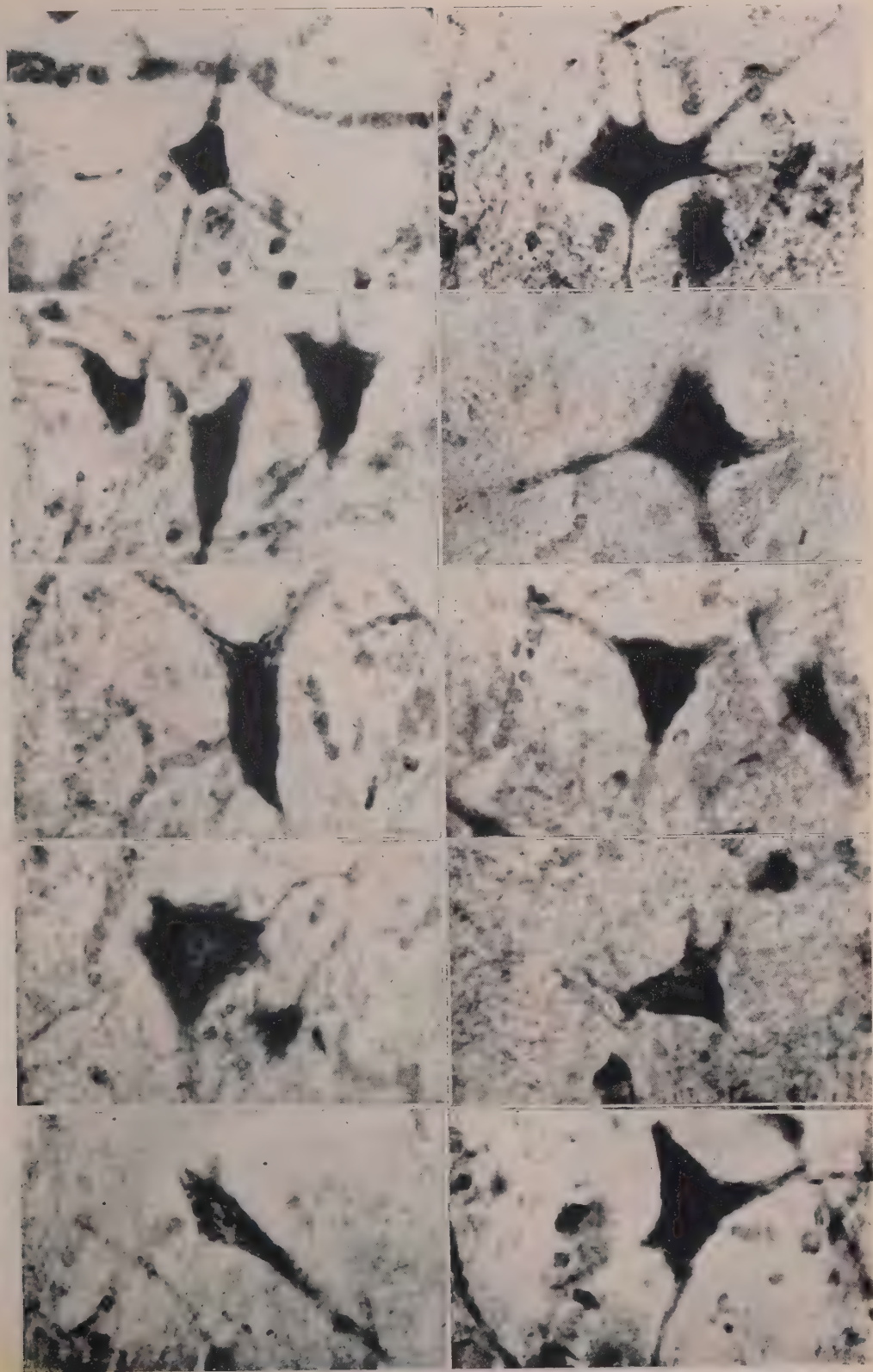
7° Infine i dati preliminari che abbiamo raccolto dall'esame sistematico di un nucleo intero dimostrano che è probabile che nell'ipoglosso si trovino giustapposti e forse in parte sovrapposti gruppi cellulari discreti distinguibili in base alle loro differenti dimensioni. In particolare nella parte centrale del nucleo sarebbero raccolti i gruppi cellulari più voluminosi. Alle estremità popolazioni di minore grandezza media. Un tale aggruppamento tattico dei pirenofori potrebbe essere effettivamente in rapporto ai differenti muscoli innervati dal nucleo o alle modalità varie di attività motoria da esso controllate.

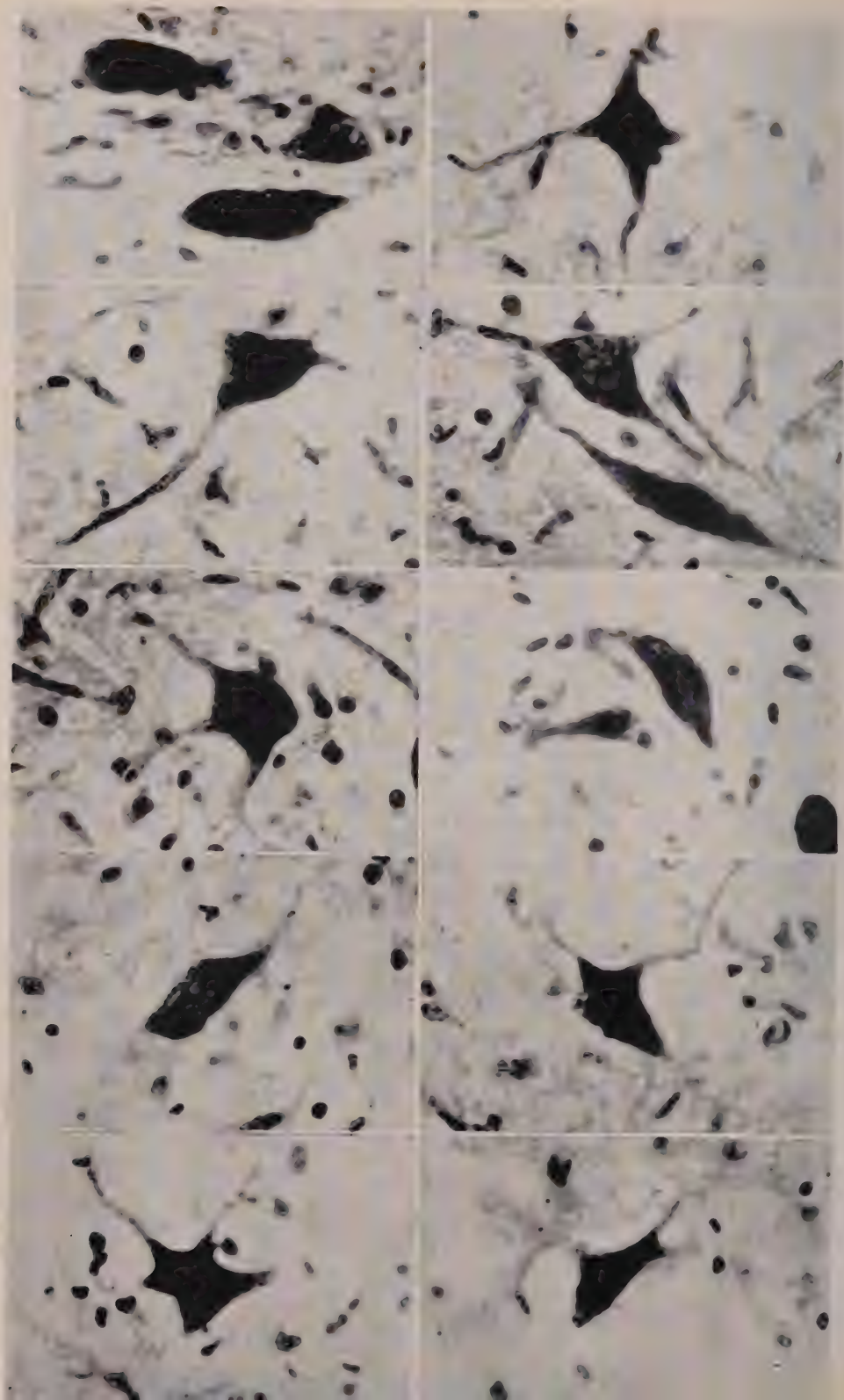
AUTORI CITATI.

- [1] CHI PING, *On the growth of the largest nerve cells in the superior cervical sympathetic ganglion of the albino rat from birth to maturity*, « Journ. of comp. Neurol. », 33 (1921).
- [2] CLARA MAX, *Das Nervensystem des Menschen* Verlag von Johann Ambrosius, Barth. Leipzig.
- [3] DONALDSON e NAGASAKA, *On the increase in the diameters of nerve cells bodies and of the fibers from them, during the later phases of growth*, « Journ. of comp. Neurol. », 29 (1918).
- [4] KENJI NITTONO, *On the growth of the neurons composing the gasserian ganglion of the albino rat between birth and maturity*, « Journ. of comp. Neurol. », 32 (1920).
- [5] LEVI G., *Vergleichende Untersuchungen über die Grösse der Zellen*, « Verh. d. Anat. Ges. 19. Vers. in Genf. », 1905.
- [6] LEVI G., *Ricerche sul volume delle cellule*, « Mon. Zool. Ital. », 16 (1905).
- [7] LEVI G., *Wachstum und Körpergrösse*, « Ergeb. der Anat. und Entw. gesch. », 26, 87 (1925).
- [8] MORPURGO e TIRELLI, *Sullo sviluppo dei gangli intervertebrali del coniglio*, « Ann. di Fren. e Sc. affini », 3 (1928).









- [9] OLIVO O. M. e GAGLIANO, *Modificazioni di forma e di grandezza delle cellule piramidali della circonvoluzione centrale anteriore umana durante l'accrescimento somatico*, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », 1 (1925); « Atti VII Congr. Soc. It. di Neurol. » Torino 1926, publ. 1929.
- [10] SHINKISHI HATAI, *Number and size of the spinal ganglion cells and dorsal root fibers in the white rat at different ages*, « Journ. of comp. Neurol. », 12 (1902).
- [11] OLIVO O. M., PORTA E., BARBERIS L., *Grandezze delle cellule dei gangli spinali del pollo*, « Arch. It. Anat. Embr. », 29 (1932).
- [12] PILATI L., *Statistische untersuchungen über das wachstum der Nervenzellen der mensch. Spinalganglien*, « Z. Mikr. Anat. Forsch. », 44 (1938).

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

- Tav. I. – Cellule nervose dal nucleo dell'ipoglosso di un ragazzo di anni 13. Color. violetto cresile. Ingr. micr. 1000×.
- Tav. II. – Cellule nervose dal nucleo dell'ipoglosso di un uomo di anni 30. Color. violetto cresile. Ingr. micr. 1000×.
- Tav. III. – Cellule nervose dal nucleo dell'ipoglosso di un uomo di anni 48. Color. violetto cresile. Ingr. micr. 1000×.
- Tav. IV. – Cellule nervose dal nucleo dell'ipoglosso di una donna di anni 67. Color. violetto cresile. Ingr. micr. 1000×.

Fisiologia (Chimica fisiologica). — *Impiego dell'etero-poli-acido fosfo-molibdico giallo per la colorazione delle proteine separate mediante elettroforesi su carta* ^(*). Nota di CARLO DOLCINI e BIANCAMARIA DOLCINI, presentata ^(**) dal Corrisp. G. AMANTEA.

È in corso di sviluppo nel nostro Istituto un piano di ricerche sulle tecniche qualitative di colorazione delle proteine separate all'elettroforesi su carta, ed in particolare sui criteri di applicabilità di tali tecniche per determinazioni quantitative fotometriche. In proposito è stato riferito nella precedente Nota ⁽¹⁾ e, più esaurientemente, in altro lavoro ⁽²⁾. Nel piano era previsto, oltre all'ampliamento del campo di scelta delle sostanze coloranti di tipo classico per tale impiego, cioè fissantisi al materiale proteico per adsorbimento, lo studio di qualche nuovo metodo che raggiungesse lo scopo con meccanismo diverso; ciò nel tentativo di superare la situazione critica determinatasi nei riguardi dei risultati quantitativi ottenuti con le colorazioni per adsorbimento.

Gli appunti mossi a tali metodi ci sembrano assolutamente giustificati. Nostri esperimenti, eseguiti impiegando blu di bromofenolo ⁽³⁾ ed amido nero ro B, nonché dati esistenti in letteratura e relativi all'impiego del verde cresolo ⁽⁴⁾, del verde di lissamina ⁽⁵⁾ e di altri materiali, hanno dimostrato infatti che per i coloranti del tipo riferito, la *colorabilità C* (intesa come rapporto tra *quantità di colorante* adsorbito e *quantità di proteina*) non si mantiene costante, come sarebbe necessario perché tali metodi possono essere correttamente applicati a fini quantitativi. Essa varia in funzione della *concentrazione superficiale* (*Conc. sup.* in γ/mm^2) che il materiale proteico assume sulla carta, fattore quest'ultimo non valutabile sui foregrammi, e del quale l'azione può essere controllata soltanto in esperimenti specificamente predisposti allo scopo.

Nella nuova direzione abbiamo inizialmente tentato di utilizzare reazioni di riduzione e di diazotazione e di tali ricerche riferiremo in altra sede. Nella presente Nota esporremo soltanto i risultati ottenuti sfruttando un dato di fatto da noi recentemente riscontrato, e consistente nella fissazione dell'etero poli-acido fosfo-molibdico giallo sulle proteine deposte su carta da filtro e denaturate.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Perugia.

(**) Nella seduta dell'11 febbraio 1961.

(1) C. DOLCINI e B. DOLCINI, questi « Rendiconti », vol. XXX (1961).

(2) C. DOLCINI e B. DOLCINI, « Rivista di Biologia » (in corso di stampa).

(3) C. DOLCINI e B. DOLCINI, « Rivista di Biologia » (in corso di stampa).

(4) G. T. FRANGLEN e N. H. MARTIN, « J. Clin. Pathol. », 7, 87 (1954).

(5) G. A. L. GORRINGE, « Clin. Chim. Acta », 2, 353 (1957).

Avevamo avuto occasione di occuparci, a proposito della microdeterminazione del silicio nei materiali biologici⁽⁶⁾, degli etero-poli-acidi silico-molibdico e fosfo-molibdico gialli che rispettivamente Si e P danno con il molibdato di ammonio. Avevamo notato l'estrema sensibilità della reazione di riduzione di tali acidi complessi, che dà luogo ad una intensissima colorazione blu. Pertanto, occupandoci della evidenziazione delle proteine separate all'elettroforesi su carta mediante reazioni di riduzione, pensammo di ottenere lo sviluppo di colore blu a livello delle macchie proteiche, immerse in opportuna soluzione, per riduzione e precipitazione del fosfo-molibdato giallo.

Anche se i risultati ottenuti non si rivelarono rispondenti allo scopo (ché il prodotto di riduzione formatosi era trattenuto soltanto in quantità trascurabile dal materiale proteico), le prove eseguite ci permisero tuttavia di notare come l'acido fosfo-molibdico giallo si fissasse tanto stabilmente sulle macchie proteiche, da renderne impossibile l'asportazione mediante prolungati lavaggi in acqua corrente.

Tali preparati, immersi dopo i lavaggi in una soluzione riducente (nel caso particolare, acido ascorbico), virarono al blu, e ne risultò una evidenziazione delle macchie proteiche splendidamente contrastata dal fondo bianco delle strisce. Per la semplicità con cui tale colorazione è ottenibile, dato anche che ai fini qualitativi questa tecnica è tutt'altro che inferiore ai metodi in uso, abbiamo creduto opportuno riferirne in particolare.

1° *Preparazione del bagno colorante*: a 20-30 ml di una soluzione di un fosfato inorganico contenente P in proporzione dell'1 %, dopo aver aggiustato il pH a 1,7 con H_2SO_4 , si aggiungono 4-6 ml di molibdato di ammonio al 10 %. Rapidamente si forma acido fosfo-molibdico giallo che colora intensamente la soluzione e precipita in notevole quantità.

Si estrae con 200-300 ml di isobutanolo, meglio dopo aver portato con H_2SO_4 il pH ad un valore compreso tra 1 e 0,7.

2° *La colorazione delle proteine* si ottiene mediante immersione per 6 h delle strisce d'elettroforesi nell'isobutanolo saturo di acido fosfo-molibdico. Per eliminare il colore trattenuto dalla carta, è sufficiente lavare le strisce in acqua corrente per 10', facendo attenzione a che il getto non investa direttamente le zone comprendenti le macchie proteiche.

3° *Riduzione*. - La riduzione dell'ac. fosfo-molibdico giallo ad ac. fosfo-molibdico blu, molto conveniente nel caso si voglia procedere a letture densitometriche dirette sulle strisce di carta diafanizzate, può essere ottenuta indifferentemente secondo le seguenti modalità: a) esposizione per qualche minuto delle strisce essiccate in stufa, alle radiazioni ultraviolette della lampada di quarzo; b) immersione delle strisce per 3 h in una soluzione di ac. ascorbico 0,5 %; c) nebulizzazione con una soluzione ottenuta sciogliendo 0,05 g di benzidina o di benzidina cloridrato in 10 ml di ac. ace-

(6) C. DOLCINI e B. DOLCINI, « Rivista di Biologia », 121, 199 (1960).

cio: diluito 1 : 1 in acqua e successivamente portando a nec. Si affumicano quindi le strisce con vapori di ammoniaca.

4° *Eluizione*. - Qualora si intenda determinare il P captato a livello delle singole bande, si applica uno dei metodi classici al riguardo; se le macchie dopo il bagno colorante, sono già bene evidenti, si può tralasciare il procedimento di riduzione.

Sulla base degli ottimi risultati qualitativi ottenuti con la tecnica descritta, abbiamo iniziato lo studio del comportamento della *colorabilità C* in funzione della *Concomitanza superficiale* del materiale proteico sulla carta, facendo uso di frazioni isolate di proteine di plasma umano e di estratti d'organo; per le ragioni accennate nella precedente Nota⁽⁷⁾ e delle quali abbiamo esaurientemente discusso nei già citati lavori⁽⁸⁾, uno studio del genere ci permetterà di prendere in considerazione l'eventuale impiego della tecnica descritta a fini quantitativi.

(7) C. DOLCINI e B. DOLCINI, questi « Rendiconti », vol. XXX (1961).

(8) C. DOLCINI e B. DOLCINI, « Rivista di biologia » (in corso di stampa).

Fisiologia. — *Isteresi elastica del polmone*^(*). Nota di GIOVANNI CAVAGNA, GIORGIO BRANDI, FRANCESCO SAIBENE e GIORGIO TORELLI presentata^(**) dal Socio R. MARGARIA.

È possibile, nell'uomo, registrare direttamente il diagramma pressione-volume del polmone misurando le variazioni di volume per mezzo di uno spirometro e quelle di pressione endotoracica per mezzo di un palloncino introdotto nel terzo inferiore dell'esofago e collegato con un manometro. Durante la respirazione normale si rileva così un'area delimitata dalle curve in- ed espiratoria, che rappresenta il lavoro necessario per sostenere: *a*) la resistenza al passaggio dell'aria nelle vie aeree; *b*) la viscosità del tessuto polmonare e *c*) una eventuale isteresi elastica del polmone.

Nella presente ricerca il diagramma P—V del polmone è stato determinato nell'uomo a differenti valori di ventilazione polmonare e quindi di lavoro dinamico (fattori *a* e *b*): poiché questi fattori sono nulli quando la ventilazione si riduce a zero, l'entità dell'isteresi polmonare (fattore *c*) può essere apprezzata per estrapolazione a $\dot{V}_E = 0$.

Gli esperimenti sono stati eseguiti su tre soggetti maschi di età compresa fra i 26 e i 28 anni. Le variazioni di volume polmonare dei soggetti venivano registrate sull'ascissa di un oscillografo a raggi catodici: contemporaneamente le variazioni di pressione endotoracica, ottenute per mezzo di una sonda endoesofagea, rispetto alla pressione esistente a livello della bocca, venivano rilevate con un manometro differenziale a capacità, e registrate sull'ordinata del tubo a raggi catodici. Nelle figg. 1 e 2 sono illustrati i tracciati così ottenuti durante un atto respiratorio.

Dell'area (A) compresa nel diagramma P—V circa la metà è espressione del lavoro necessario per sostenere l'inspirazione, e metà per sostenere l'espirazione: il lavoro in- o espiratorio è perciò $\frac{A}{2}$: dividendo questo valore per

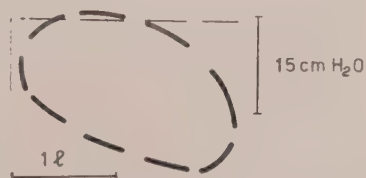


Fig. 1. — Diagramma P—V del polmone ottenuto sul soggetto C. P. durante lavoro.

Le interruzioni del tracciato sono ogni 0,138 sec. la linea orizzontale rappresenta lo zero di pressione (Pb). $\dot{V}_E = 109,09$ l/min, $V_T = 2,26$ l, $P_m = 7,97$ cm H₂O e $\dot{V}_m = 3,63$ l/sec.

(*) Ricerca effettuata nel Laboratorio di Fisiologia Umana dell'Università di Milano, col contributo finanziario della Comunità Europea del Carbone e dell'Acciaio (C.E.C.A.).

(**) Presentata nella seduta dell'11 marzo 1961.

l'ampiezza dell'atto respiratorio, V_T , si ottiene la pressione media $P_m = \frac{A}{2 V_T}$, necessaria per sostenere le variazioni di volume del polmone durante l'atto respiratorio, fatta esclusione della pressione necessaria per vincere la resistenza elastica.

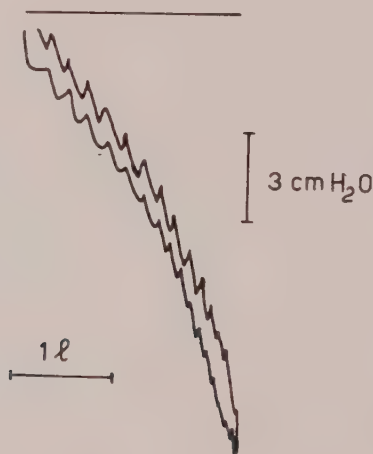


Fig. 2. - Diagramma P—V del polmone ottenuto sul soggetto F.S. a riposo.

$\dot{V}_E = 6,7$ l/min, $V_T = 2,52$ l, $P_m = 0,55$ cm H₂O e $\dot{V}_m = 0,22$ l/sec. La seghettatura del tracciato è dovuta alla sistole cardiaca.

Nella fig. 3 la pressione media è posta in funzione del flusso medio $V_m = \frac{2 V_T}{\tau}$, ove τ è la durata dell'atto respiratorio. Partendo dal presupposto che l'isteresi non sia apprezzabile, questa funzione deve originare dallo zero dei valori indicati sugli assi cartesiani: calcolata sui dati ottenuti a valori di $\dot{V}_E > 45$ l/min, essa è definita con sufficiente approssimazione dalla formula di Rohrer

$$(1) \quad P = a \dot{V} + b \dot{V}^2$$

I valori delle costanti a e b sono stati calcolati per i tre soggetti e riportati nella Tabella I.

A bassi valori di flusso, invece, i valori sperimentali di P_m sono sempre superiori a quelli calcolati secondo la (1), e la curva tracciata sui punti sperimentali non tende all'origine degli assi cartesiani, ma ad un valore reale di P_m . Valori di isteresi presumibilmente molto bassi possono essere messi in evidenza solo a valori molto bassi di flusso, perché in queste condizioni la pressione richiesta per la deformazione plastica del polmone, incide in misura relativamente maggiore.

Più aderente della (1) ai dati sperimentali appare essere la funzione

$$(2) \quad P_m = i + a' \dot{V}_m + b' \dot{V}_m^2$$

ove i esprime presumibilmente la pressione media necessaria per vincere l'isteresi polmonare. Le costanti i , a' , b' , sono state calcolate col metodo dei minimi quadrati, e i valori riportati nella Tabella I: la funzione (2) è

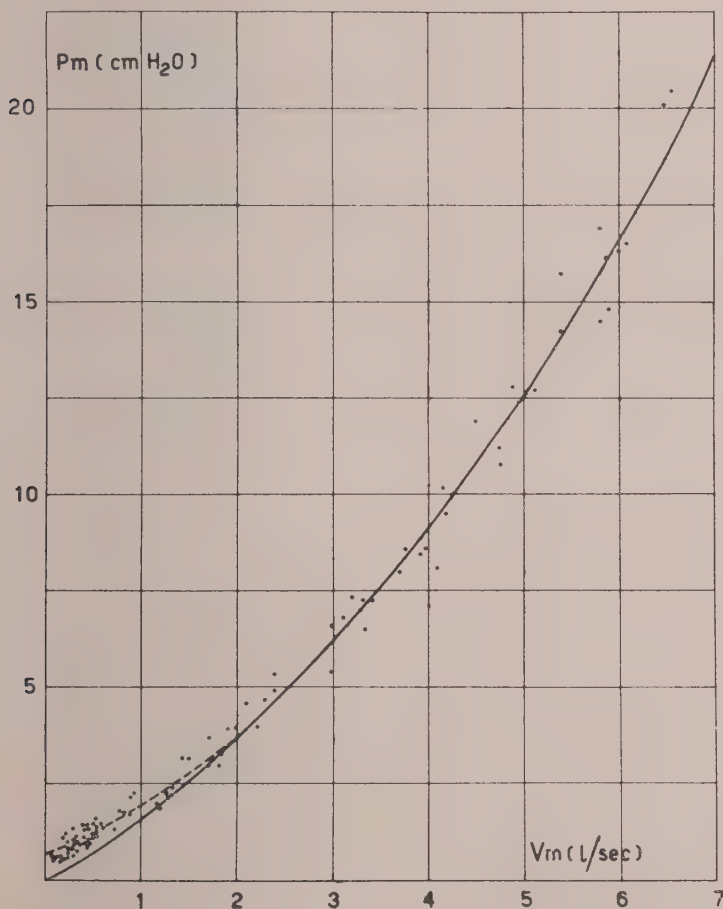


Fig. 3. — Pressione media (P_m) in funzione del flusso medio (\dot{V}_m) per il soggetto G. C.

La linea continua è stata tracciata secondo la funzione $P = a\dot{V} + b\dot{V}^2$, a e b essendo calcolati per valori di flusso medio maggiore di 1,5 l/sec. La linea tratteggiata è stata tracciata secondo la funzione $P_m = i + a'\dot{V}_m + b'\dot{V}_m^2$, utilizzando tutti i dati sperimentali. Per valori di $\dot{V}_m > 2$ l/sec le due curve praticamente si sovrappongono.

rappresentata dalla curva tratteggiata in fig. 3. Dalla Tabella I appare che l'introduzione del fattore i , per quanto di valore molto piccolo, implica variazioni notevoli delle costanti a e b .

TABELLA I.

Valori delle costanti: i , a , a' , b , b' della (1) e della (2) essendo P_m espresso in cm H₂O e \dot{V}_m in l/sec.

Soggetto	i	a	a'	b	b'
G. C.	0,711	1,359	0,973	0,236	0,281
C. P.	0,909	1,330	0,513	0,144	0,305
F. S.	0,521	0,743	0,501	0,311	0,337

Per un valore di flusso $V_m = 0,3$ l/sec, quale si ha normalmente nella ventilazione a riposo, la pressione necessaria per vincere l'isteresi polmonare, ammonta ad un valore relativamente molto apprezzabile, essendo circa uguale alla pressione necessaria per vincere le resistenze dinamiche.

Biologia. — *Identificazione degli ormoni steroidi nei testicoli e negli organi di Bidder di Bufo vulgaris*^(*). Nota di GIOVANNI CHIEFFI e CONCETTA LUPO, presentata^(**) dal Corrisp. G. MONTALENTI.

Una lacuna dell'endocrinologia comparata è rappresentata dalla quasi completa assenza di notizie circa la natura degli ormoni sessuali nei Vertebrati inferiori. Infatti se per gli estrogeni esistono delle ricerche frammentarie, gli androgeni sono del tutto sconosciuti.

Recentemente abbiamo iniziato l'analisi sistematica degli ormoni sessuali nelle varie classi di Vertebrati inferiori; l'identificazione nell'estratto testicolare di *Scylliorhinus stellaris* del testosterone, dei suoi precursori e dell'estradiolo-17_β [1] ci ha incoraggiato a estendere ad altri gruppi di Vertebrati tali ricerche.

In questa Nota riferiamo i risultati ottenuti con *Bufo vulgaris*: sono stati sacrificati 500 individui maschi nel mese di dicembre, corrispondente al periodo di riproduzione di questa specie nei dintorni di Napoli. I testicoli e gli organi di Bidder sono stati estratti separatamente con due metodi diversi, ma in entrambi i casi si è ricorso alla cromatografia su carta per l'identificazione degli steroidi.

Per l'estrazione degli ormoni dai testicoli abbiamo seguito la tecnica di Anliker et al. [2]: 141 gr di tessuto testicolare sono stati omogeneizzati ed estratti con acetone. Il residuo è stato idrolizzato con HCl N e diossano, prima di essere scartato; l'idrolizzato è stato estratto con etere-cloroformio 3 : 1. I due estratti, etero ed acetnico, sono stati evaporati e si sono ottenuti 5,289 gr di residuo. Questo è stato ripreso con metanolo e frazionato con etere di petrolio (40°-70°), al fine di eliminare i grassi. La soluzione acquoso-metanolica è stata quindi estratta in imbuto separatore con etere-cloroformio 3 : 1 e in estrattore in continuo con etere. I residui eteri riuniti sono stati ripresi con metanolo e frazionati 5 volte tra etere di petrolio e metanolo al 50 %. Dalla fase acquoso-metanolica, dopo estrazione con etere-cloroformio, si sono ottenuti 235 mg di residuo. Questo è stato ripreso con benzene ed estratto con NaOH N per separare la frazione fenolica. Il benzene è stato quindi portato a secco ottenendosi 18,9 mg di residuo neutro; dalla soluzione alcalina, dopo neutralizzazione ed estrazione con etere, si sono ottenuti 9 mg di residuo fenolico. Le due frazioni sono state esaminate separatamente per mezzo della cromatografia su carta.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Genetica dell'Università e nella Stazione Zoologica di Napoli con un contributo (RG-6455) della Division of General Medical Sciences, Public Health Service, U.S.A.

(**) Nella seduta dell'11 marzo 1961.

La frazione neutra è stata cromatografata con i sistemi di Bush A, B₃ e C [3] e con il sistema glicol propilenico-toluolo di Zaffaroni [4, 5]. Per purificare cromatograficamente l'estratto, la zona di carta che presentava un assorbimento alla luce ultravioletta ($\lambda = 254 \text{ m}\mu$), è stata ritagliata, eluita con metanolo e ricromatografata con un nuovo sistema. Dopo varie purificazioni cromatografiche (1, Bush C; 2, Zaffaroni; 3, Bush B₃; 4, Bush A) abbiamo individuato nel sistema Bush A un'unica macchia corrispondente per R_f al progesterone valutabile per confronto semiquantitativo sui $4 \mu\text{g}$. Sul cromatogramma finale, eseguito con sistema Bush A è stata praticata la reazione di Zimmermann: la macchia corrispondente al progesterone si è colorata in blu come la sostanza autentica.

Il residuo fenolico è stato cromatografato secondo un sistema modificato di Bush (metanolo 75 % - toluolo 1 : 1) [6]. Nel cromatogramma, colorato con soluzione acquosa all'1 % di FeCl_3 e $\text{K}_3[\text{Fe}(\text{CN})_6]$ [7], risultava la presenza di tracce di estradiolo-17 β .

Per l'estrazione degli steroidi dagli organi di Bidder abbiamo seguita la tecnica di Dean e Chester Jones [8]: 32 gr di tessuto sono stati omogeneizzati con acqua distillata ed estratti con etere-acetato di etile 2 : 1. Il residuo oleoso (gr 1,18), ottenuto dopo evaporazione di tali solventi, contiene la frazione neutra. Questa, dopo partizione tra etere di petrolio e metanolo al 70 % ed estrazione con cloroformio (mg 31), è stata cromatografata con il sistema di Zaffaroni e successivamente con il sistema Bush A. Da questa cromatografia è stata rilevata la presenza di tracce di progesterone.

Al tessuto omogeneizzato, dopo estrazione con etere-acetato di etile, è stato aggiunto metanolo nel rapporto di 1 : 1. Dopo centrifugazione il metanolo, contenente la frazione fenolica, è stato frazionato con etere di petrolio. La fase acquosa, dopo distillazione del metanolo, è stata alcalinizzata ed estratta con etere. Dall'etere si sono ottenuti 12 mg di residuo fenolico; questo è stato cromatografato con il sistema modificato di Bush (metanolo 75 % - toluolo 1 : 1); nel cromatogramma colorato con FeCl_3 e $\text{K}_3[\text{Fe}(\text{CN})_6]$ sono stati identificati, in base a valutazione semiquantitativa, 5 μg di estriolo, 2 μg di estrone e 2 μg di estradiolo-17 β .

DISCUSSIONE.

Nell'estratto testicolare di *Bufo vulgaris* sono stati identificati con la tecnica da noi seguita circa 28 $\mu\text{g}/\text{Kg}$ di progesterone e tracce di estradiolo-17 β . Dagli organi di Bidder sono stati isolati circa 150 $\mu\text{g}/\text{Kg}$ di estriolo, 60 $\mu\text{g}/\text{Kg}$ di estradiolo-17 β , altrettanti di estrone e inoltre tracce di progesterone.

Sebbene la presenza di progesterone e di estradiolo nel tessuto testicolare possa apparire a prima vista paradossale, trattandosi di ormoni ovarici, le recenti ricerche sulla biosintesi degli ormoni sessuali ne permettono una spiegazione.

Infatti da tempo era stata supposta la sintesi di progesterone nel testicolo per la presenza in esso di Δ^5 -pregnene-3 β -olo-20-one (pregnenolone) e di una 3 β -olo-deidrogenasi capace di ossidare questo steroide a progesterone [9].

Successivamente Slaunwhite et al. [10] con esperimenti *in vitro* in presenza di tessuto testicolare hanno dimostrato la formazione di 17 α -idrossi-progesterone, androstenedione e testosterone da progesterone C¹⁴.

Il processo di biosintesi dal pregnenolone al testosterone si verificherebbe nel testicolo, secondo gli Autori per la presenza di un sistema enzimatico capace di staccare la catena laterale in C-17 con conseguente formazione di androstenedione e successiva trasformazione di questo in testosterone. Quest'ultima reazione è reversibile, come lo dimostrano le ricerche sul metabolismo del testosterone [11] e avverrebbe per la presenza di un sistema enzimatico ossido-riduttivo, probabilmente contenente DPN [12].

L'isolamento del progesterone dal tessuto testicolare delle specie finora studiate (mammiferi) è risultato vano. Recentemente noi siamo riusciti ad identificare questo steroide nell'estratto testicolare di *Scylliorhinus stellaris* oltre ad androstenedione e testosterone [1]. Bisogna far notare però che mentre il rapporto tra testosterone ed androstenedione nel testicolo di mammiferi (uomo) è di 14 : 1 [13], nel caso di *Scylliorhinus stellaris* esso è di 5 : 7. Inoltre il progesterone, mai isolato nel testicolo di mammiferi, è presente in quantità doppia del testosterone.

Queste osservazioni c'inducono ad ammettere che la concentrazione dei diversi sistemi enzimatici responsabili della biosintesi del testosterone varii a seconda della specie studiata; cioè mentre nei mammiferi la concentrazione di quegli enzimi che catalizzano la trasformazione del progesterone ad androstenedione e a testosterone è molto elevata, in *Scylliorhinus* e ancor più in *Bufo*, questa è trascurabile, rispetto alla quantità di 3 β -olo-deidrogenasi. Ne deriverebbe così un accumulo a monte nel processo di sintesi del testosterone.

A tale conclusione siamo giunti dall'esame comparativo dei dati ottenuti con *Scylliorhinus* e *Bufo*, essendo partiti da quantità pressoché uguali di tessuto e avendo seguito la identica tecnica di estrazione.

D'altra parte Samuels et al. [14] a conclusione di alcune loro ricerche comparative sull'intensità del metabolismo del testosterone da parte di fegato di diverse specie di Vertebrati pongono l'ipotesi che: «... In the poikilothermes body temperature is ordinarily lower than that of the homeothermes and chemical reactions, both sintetic and degradative, would be slower in the presence of the same concentration of substrate and catalyst». Ci sembra dover escludere tale ipotesi per interpretare i nostri dati, in quanto se più lenti fossero i processi di sintesi, dovremmo osservare nei pecilotermi non un accumulo di uno o più prodotti intermedi bensì la presenza di tutti i composti se pure in concentrazione minore.

La presenza di tracce di estradiolo-17 β nell'estratto testicolare coincide con i risultati ottenuti da altri Autori nei mammiferi [15, 16] e in *Scylliorhinus stellaris* [1].

Secondo le più recenti ricerche sulla biosintesi degli ormoni steroidi, gli estrogeni si formerebbero nel tessuto testicolare probabilmente attraverso l'androstenedione [17]. Infatti ricerche *in vitro* hanno dimostrato la conversione dell'androstenedione in estrone attraverso la formazione del 19-idrossi- Δ^4 -androstene-3-17 dione per azione di una 19-idrossilasi presente nel tessuto placentare [18, 19].

Infine l'isolamento di estriolo, estrone ed estradiolo 17 β , di tracce di progesterone negli organi di Bidder conferma i risultati di Gallien e Châlumeau-Le Foulgoc [20] circa la presenza di estrogeni nell'ovario di anfi- bi.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] G. CHIEFFI, C. LUPO, «Nature», in corso di stampa.
- [2] R. ANLIKER, O. ROHR, L. RUZICKA, «Liebigs Ann. Chem.», 603, 109-114 (1957).
- [3] I. E. BUSH, «Biochem. J.», 50, 370-378 (1952).
- [4] A. ZAFFARONI, R. B. BURTON, E. H. KEUTMANN, «Science», 111, 6-8 (1950).
- [5] R. B. BURTON, A. ZAFFARONI, E. H. KEUTMANN, «J. Biol. Chem.», 188, 763-771 (1951).
- [6] O. W. SMITH, «Endocrinology», 67, 698-707 (1960).
- [7] G. M. BARTON, R. S. EVANS, J. A. F. GARINER, «Nature», 170, 249-250 (1952).
- [8] F. D. DEAN, I. CHESTER JONES, «J. Endocrinol.», 18, 366-371 (1959).
- [9] G. F. MARRIAN, *The determination of steroids in blood and urine*. In C. LIÈBECQ, *Proc. III Intern. Congress of Biochemistry*, pp. 511-515, Acad. Press, N. Y. (1956).
- [10] W. R. SLAUNWHITE, L. T. SAMUELS, «J. Biol. Chem.», 220, 341-352 (1956).
- [11] R. I. DORFMAN, R. A. SHIPLEY, *Androgens*, John Wiley a. Sons, N. Y. (1956).
- [12] M. L. SWEAT, L. T. SAMUELS, R. LUMRY, «J. Biol. Chem.», 185, 75-84 (1950).
- [13] R. ANLIKER, M. PERELMAN, O. ROHR, L. RUZICKA, «Helv. Chim. Acta», 40, 1517-1520 (1957).
- [14] L. T. SAMUELS, M. T. SWEAT, B. H. LEVEDAHAL, M. M. POTTNER, M. L. HELMREICH, «J. Biol. Chem.», 183, 231-239 (1950).
- [15] D. BEALL, «Biochem. J.», 34, 1293-1298 (1940).
- [16] J. W. GOLDZIEHER, I. S. ROBERTS, «J. Clin. Endocrinol. Metab.», 12, 143-150 (1952).
- [17] B. BAGGETT, L. L. ENGEL, L. BALDERAS, G. LANMANN, «Endocrinology», 64, 600-608 (1959).
- [18] J. E. LONGCHAMPT, C. GUAL, M. EHRENSTEIN, R. I. DORFMAN, «Endocrinology», 66, 416-419 (1960).
- [19] J. E. LONGCHAMPT, M. HAYANO, M. EHRENSTEIN, R. I. DORFMAN, «Endocrinology», 67, 843-848 (1960).
- [20] L. GALLIEN, M. T. CHALUMEAU-LE FOULGOC, «C. R. Acad. Sci.», 251, 460-462 (1960).

PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio Anziano Cassinis comunica alla Classe la dolorosa notizia della morte del Socio Nazionale Egidio Meneghetti della Categoria V (Sezione Fisiologia), spentosi il 4 corrente e del Socio Straniero Erwin Schrödinger della Categoria I (Matematica, Meccanica e applicazioni), deceduto il 4 gennaio c.a.

Egidio Meneghetti, Socio Corrispondente dal 15 febbraio 1947 e Nazionale dal 25 ottobre 1950, fu uno scienziato di fama internazionale per le sue fondamentali ricerche nel campo della farmacologia e un insigne Maestro, capo di una fiorente scuola. Ai grandi meriti scientifici unì altissime benemerenze di cittadino devoto alla Patria e alla libertà che servì, quale valoroso combattente, nella prima guerra mondiale e in quella di liberazione.

Erwin Schrödinger, che apparteneva all'Accademia dal 5 ottobre 1947, fu anch'egli uno scienziato di fama mondiale, soprattutto per i suoi importanti lavori sulla meccanica ondulatoria, della quale fu uno dei fondatori.

Alla memoria dei due illustri Colleghi scomparsi il prof. Cassinis eleva un pensiero di reverente omaggio.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Socio Anziano Cassinis porge il cordiale saluto della Classe e suo personale al prof. Giorgio Adler, dell'Istituto Matematico dell'Accademia d'Ungheria, e al prof. András Kósa, dell'Istituto Matematico dell'Università di Budapest, presenti alla seduta.

Il Socio Anziano Cassinis dà quindi notizia dei «Premi di collaborazione» banditi per il 1961 dalla Rivista Aeronautica e del bando di concorso dell'Istituto di Medicina Sociale a sette borse di studio per l'anno accademico 1960-61.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Anziano Cassinis annuncia che è uscito il fascicolo VI dei Rendiconti (dicembre 1960).

Il Socio Cappelletti presenta il volume XXVIII (supplemento 2°) della «Iconographia Mycologica» dell'Abate Bresadola, curato dal dott. Cerruti, dal titolo *Elaphomycetales et Tuberales*.

L'oratore è lieto di offrire all'Accademia questo volume, che fa onore alla micologia italiana, sia perché opera di un suo allievo, sia perché esso costituisce anche un omaggio al grande scienziato Oreste Mattiolo, in quanto le 48 tavole che accompagnano il testo (rappresentanti 69 specie o forme di *Elaphomycetaceae* e di *Tuberales*) provengono in gran parte dalla collezione

di acquarelli di Ipogei dell'Istituto Botanico di Torino fatti dipingere o disegnati direttamente dal compianto micologo verso la fine del secolo scorso e il principio del presente. Il Comitato per le onoranze Bresadoliane ha curato questa edizione; altri volumi seguiranno, possibilmente con ritmo regolare, dimostrando una buona vitalità della micologia in Italia.

Il Socio Segre presenta la versione inglese, intitolata « *Lectures on modern geometry* » di una sua opera, con le seguenti parole:

« Questo volume, apparso or ora nella Collezione delle Monografie Matematiche del Consiglio Nazionale delle Ricerche col titolo *Lectures on modern geometry*, costituisce una versione in inglese – notevolmente ampliata – di una mia opera precedente, uscita nel 1948 presso l'Editore Zanichelli e da tempo esaurita. Esso espone gli elementi dell'Algebra e della Geometria proiettiva iperspaziale collocandosi dal punto di vista astratto più generale e chiarendo gli stretti legami che così ne risultano tra i fondamenti di questi due rami della matematica.

« Numerose aggiunte hanno più che raddoppiato il numero delle pagine dell'edizione del 1948, tenendo debito conto di ricerche posteriori. Ricorderò soltanto al riguardo quelle riguardanti certi insiemi di punti dei così detti spazi di Galois, e lo studio di coniche e quadriche sopra corpi non commutativi. Il volume si chiude con una bella Appendice, contenente una metodica ed aggiornata trattazione dei piani grafici non desarguesiani finiti, dovuta al prof. Lucio Lombardo-Radice ».

Il Socio Anziano Cassinis ringrazia i Colleghi che hanno presentato opere in omaggio e si rallegra vivamente con il prof. Segre.

Comunica quindi che è pervenuta alla Biblioteca anche un'opera dell'Accademia della Repubblica Popolare Romana dal titolo « Probleme actuale de Biologie și științe agricole », dedicata all'Accademico prof. G. Ionescu-Sișești.

Il Segretario Accademico presenta le pubblicazioni inviate in dono all'Accademia.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci Picone, Cappelletti, Montalenti, Righini, Cimino, Solaini, Margaria e Rossi-Fanelli.

Viene letto l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

ROSSI FANELLI A., WYMAN J., ANTONINI E. e CAPUTO A. – Ricerche sul meccanismo dell'equilibrio con l'ossigeno dell'emoglobina. Effetto della concentrazione di emoglobina sulle caratteristiche dell'equilibrio con l'ossigeno (pres. dal Corrisp. A. ROSSI FANELLI).

CORRADINI P. e ALLEGRA G. – Studio conformazionale di una catena di polimero isotattico in soluzione e calcolo della sua lunghezza quadratica media imperturbata (pres. dal Socio G. NATTA).

CUNIETTI M. e INGHILLERI G. — Un metodo di compensazione di un blocco di strisciate. — II. Compensazione altimetrica ed uso dei dati degli strumenti ausiliari (pres. dal Socio L. SOLAINI).

DE VITO L. — Sul calcolo approssimato degli autovalori delle trasformazioni compatte e delle relative molteplicità. Nota II (pres. dal Socio M. PICONE).

RIGUTTI M. e RUSSO D. — Lo spettro di una protuberanza quiescente osservata nell'eclisse solare del 15 febbraio 1961 (pres. dal Corrisp. G. RIGHINI).

TURANO C., FASELLA P., VECCHINI P. e GIARTOSIO A. — Sulla composizione chimica della glutamico-aspartico transaminasi del cuore di Porco. Digestione chimotriptica dell'enzima ed isolamento del peptide contenente il coenzima (pres. dal Corrisp. A. ROSSI FANELLI).

Il Socio Picone presenta le seguenti Memorie:

GIORGIO ADLER: «Maggiorazione del gradiente delle funzioni armoniche mediante i loro valori al contorno».

ANDRÁS KÓSA: «Alcune estensioni di un metodo di M. Picone nel calcolo delle variazioni e loro applicazioni».

Per l'esame dei suddetti lavori viene nominata una Commissione composta dallo stesso Socio Picone e dai Colleghi Sansone e Miranda.

Il Socio Evangelisti presenta una sua Memoria dal titolo: «Modelli elettrici per reti di condotte».

Il predetto Socio presenta inoltre le sotto indicate quattro Memorie:

ENZO BELARDINELLI: «Analizzatori elettrici ed elettromeccanici per reti di condotte»;

GIOVANNI MARRO: «Modelli elettrici per la sintesi delle reti idrauliche»;

GIOVANNI MARRO: «Un modello elettrico per reti di distribuzione di gas compressi»;

EUGENIO SARTI: «Rappresentazione analogica degli elementi terminali per una rete di distribuzione di gas compressi».

Per l'esame dei quattro lavori viene nominata una Commissione composta dallo stesso prof. Evangelisti e dai Soci Picone e Ferrari.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Miranda, anche a nome dei Colleghi Picone e Sansone, legge la relazione sulla Memoria dell'ing. Roberto Vacca dal titolo: «Nuovi circuiti logici di addizione per calcolatrici elettroniche numeriche».

La relazione, che conclude proponendo la stampa del lavoro nelle Memorie accademiche, è messa ai voti dal Presidente e approvata all'unanimità.

Il Socio Amaldi, anche a nome del Collega Perucca e di altri Soci, prospetta alla Presidenza di voler considerare, per l'avvenire, l'opportunità di non includere nelle Commissioni per l'esame di Memorie i Soci presentatori delle Memorie stesse. Ciò, come è ovvio, al solo fine di lasciare le Commissioni più libere nell'esprimere il loro giudizio.

Il Socio Anziano Cassinis risponde che il Regolamento accademico non prevede tale esclusione e che, anzi, la prassi costantemente seguita da molti anni è stata quella di nominare, tra i commissari per l'esame di Memorie, i Soci presentatori dei lavori, e ciò, evidentemente, in considerazione della particolare competenza che i suddetti Soci hanno nelle materie alle quali si riferiscono le Memorie da esaminare. D'altra parte, sempre in conformità del Regolamento stesso, nella composizione delle Commissioni per l'esame di Memorie, la Classe ha la più ampia libertà di scelta, sempre, bene inteso, nell'ambito delle particolari competenze scientifiche.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta dell'11 marzo 1961

- BACKÈS F. — *Une autre forme de l'équation aux dérivées partielles du second ordre dont dépend le problème de la déformation des surfaces*. Estr. da « Bulletin de l'Académie Royale de Belgique (Classe des Sciences) », s. 5^a, t. XLIII, 1957, n. 7.
- *Étude de quelques transformations des courbes et des surfaces*. Bruxelles, Marcel Hayez Imprimeur de l'Académie Royale de Belgique, 1923. Pp. 72, in-8°, con figg.
- *L'extension en Géométrie cayleyenne et en Géométrie anallagmatique de la configuration de Morley-Petersen*. Estr. da « Bulletin de l'Académie Royale de Belgique (Classe des Sciences) », s. 5^a, t. XLV, 1959, n. 4.
- *La méthode du pentasphère oblique mobile et quelques-unes de ses applications*. Estr. da « Mémoires de l'Académie Royale de Belgique (Classe des Sciences) », t. XXVI, 1951, fasc. 2.
- *La méthode du pentasphère oblique mobile et ses applications*. Colloque de Géométrie différentielle tenu à Louvain du 11 au 14 avril 1951. S.n.t. Pp. 8, in-8°.
- *Nouvelles Recherches sur l'Applicabilité projective des Surfaces*. Estr. da « Mémoires de l'Académie Royale de Belgique (Classe des Sciences) », t. XXVI, 1952, fasc. 9.
- *Une propriété anallagmatique caractéristique des surfaces isothermiques*. Estr. da « Bulletin de l'Académie Royale de Belgique (Classe des Sciences) », s. 5^a, t. XLIV, 1958, [n.] 2.
- *Quelques propriétés relatives à une certaine configuration de vingt droites*. Estr. da « Bulletin de l'Académie Royale de Belgique (Classe des Sciences) », s. 5^a, t. XLV, 1959, [n.] 5.
- *Quelques remarques sur l'équation de Laplace*. Estr. da « Mathesis », vol. LVI, 1947.
- BACKÈS F. — *Recherches de Géométrie Anallagmatique*. Estr. da « Mémoires de l'Académie Royale de Belgique (Classe des Sciences) », t. XXIX, 1956, fasc. 8.
- *Sur certaines réseaux et leur rapport avec les surfaces minima*. Estr. da « Bulletin de l'Académie Royale de Belgique (Classe des Sciences) », s. 6^a, t. XL, 1954.
- *Sur des couples de surfaces applicables en géométrie cayleyenne*. Estr. da « Bulletin de l'Académie Royale de Belgique (Classe des Sciences) », s. 5^a, t. XXXV, 1949.
- *Sur la courbure géodésique*. Estr. da « Bulletin de l'Académie Royale de Belgique (Classe des Sciences) », s. 5^a, t. XL, 1954.
- *Sur la déformation, due à Bonnet, des surfaces à courbure moyenne constante*. Estr. da « Bulletin de l'Académie Royale de Belgique (Classe des Sciences) », s. 5^a, t. XL, 1954.
- *Sur la méthode de la variation des constantes arbitraires dans les systèmes canoniques*. Estr. da « Bulletin de l'Académie Royale de Belgique (Classe des Sciences) », s. 5^a, t. XXXVIII, 1952.
- *Sur les cercles qui possèdent des sphères focales*. Estr. da « Bulletin de l'Académie Royale de Belgique (Classe des Sciences) », s. 5^a, t. XXXVI, 1950.
- *Sur les congruences conjuguées à une surface*. Estr. da « Bulletin de l'Académie Royale de Belgique (Classe des Sciences) », t. XXXVII, 1951.
- *Sur les congruences de cercles*. Estr. da « Bulletin de l'Académie Royale de Belgique (Classe des Sciences) », s. 5^a, t. XXXIII, 1947.
- *Sur les congruences de cercles qui sont doublement stratifiables*. Estr. da « Bulletin de l'Académie Royale de Belgique (Classe

- des Sciences) », s. 5^a, t. XLII, 1956, [n.] 9.
- BACKÈS F. — *Sur les congruences pseudosphériques*. Estr. da « Mémoires de l'Académie Royale de Belgique (Classe des Sciences) », t. XXXI, 1959, fasc. 5.
- *Sur les congruences R*. Estr. da « Bulletin de l'Académie Royale de Belgique (Classe des Sciences) », s. 5^a, t. XXII, 1936, n. 6.
- *Sur les familles de surfaces, dont les lignes de courbure ont même projection conique*. Estr. da « Bulletin de l'Académie Royale de Belgique (Classe des Sciences) », s. 5^a, t. XVII, 1931.
- *Sur les lames liquides en équilibre*. Estr. da « Bulletin de l'Académie Royale de Belgique (Classe des Sciences) », s. 5^a, t. XI, 1955.
- *Sur les réseaux conjugués qui se reproduisent après quatre transformations de Laplace*. Estr. da « Bulletin de l'Académie Royale de Belgique (Classe des Sciences) », s. 5^a, t. XXI, 1935, n. 19.
- *Sur les sphères à deux paramètres dont les points caractéristiques sont répartis sur un cercle*. Estr. da « Bulletin de l'Académie Royale de Belgique (Classe des Sciences) », s. 5^a, t. XLII, 1956, [n.] 2.
- *Sur les surfaces P de la géométrie différentielle projective*. Estr. da « Bulletin de l'Académie Royale de Belgique (Classe des Sciences) », s. 5^a, t. XLVI, 1960, [n.] 5.
- *Sur les surfaces pseudosphériques et leur extension en Géométrie projective*. Estr. da « Bulletin de l'Académie Royale de Belgique (Classe des Sciences) », s. 5^a, t. XLVI, 1958 [n.] 5.
- *Sur l'existence d'une surface d'après les deux formes quadratiques fondamentales*. Estr. da « Bulletin de l'Académie Royale de Belgique (Classe des Sciences) », s. 5^a, t. XXXVI, 1950.
- *Sur quelques formules classiques d'analyse*. Estr. da « Mathesis », t. LXIII, 1954.
- *Sur quelques problèmes de dynamique*. Estr. da « Mathesis », t. LXIII, 1953.
- *Sur un cas de correspondance avec orthogonalité des éléments*. Estr. da « Bulletin de l'Académie Royale de Belgique (Classe des Sciences) », s. 5^a, t. XLI, 1955.
- *Sur un certain couple de surfaces projectivement applicables*. Estr. da « Mémoires de l'Académie Royale de Belgique (Classe des Sciences) », t. XXIV, 1950, fasc. 9.
- BACKÈS F. — *Sur un couple de cercles engendrant des congruences doublement stratifiables*. Estr. da « Bulletin de l'Académie Royale de Belgique (Classe des Sciences) », s. 5^a, t. XL, 1954.
- *Sur un couple de congruences W déduites d'un réseau conjugué spécial*. Estr. da « Bulletin de l'Académie Royale de Belgique (Classe des Sciences) », s. 5^a, t. XLII, 1956, [n.] 5.
- *Sur une classe de transformations de Darboux*. Estr. da « Bulletin de l'Académie Royale de Belgique (Classe des Sciences) », s. 5^a, t. XXXV, 1949.
- *Sur une configuration particulière des douze surfaces de Darboux*. Estr. da « Bulletin de l'Académie Royale de Belgique (Classe des Sciences) », [s. 5^a, t. XLI, 1955, n. 3].
- *Sur une Congruence particulière de Coniques*. Estr. da « Bulletin de l'Académie Royale de Belgique (Classe des Sciences) », [s. 5^a, t. XX, 1934].
- *Sur une extension de la notion d'asymptotique d'une surface*. Estr. da « Bulletin de l'Académie Royale de Belgique (Classe des Sciences) », s. 5^a, t. XLI, 1955, [n.] 7.
- *Sur une extension de la notion de système cyclique*. Estr. da « Bulletin de l'Académie Royale de Belgique (Classe des Sciences) », s. 5^a, t. XXXIV, 1948.
- *Sur une propriété caractéristique des Surfaces minima*. Estr. da « Bulletin de l'Académie Royale de Belgique (Classe des Sciences) », s. 5^a, t. XVII, 1931.
- *Sur une question relative aux systèmes triples orthogonaux*. Estr. da « Bulletin de l'Académie Royale de Belgique (Classe des Sciences) », [s. 5^a, t. XLIII, 1957, n. 2].
- *Sur un problème relatif aux formes de Pfaff*. Estr. da « Bulletin de l'Académie Royale de Belgique (Classe des Sciences) », s. 5^a, t. XXXV, 1949.
- BARTELS J., ROMANA A. and VELD-KAMP J. — *Geomagnetic data 1957 indices K and C, rapid variations*. Published with financial assistance from UNESCO. Amsterdam, International Union of Geodesy and Geophysics, Association of Geomagnetism and Aeronomy, 1961. Pp. x-281, in-8° (IAGA Bulletin, n. 21 L).

- BRESADOLA Jacopus. — *Iconographia Mycologica*. Vol. XXVIII, suppl. II: *Elaphomycetales et Tuberales*. [A cura di A. Ceruti]. Tridenti, Comitato Onoranze Bresadoliane, 1960. Pp. 48, in-8°, con tavv.
- CASTAGNETO Emilio. — *La procedura normale di trasferimento modello-nave da adattarsi dalla Vasca di Roma*. Relazione presentata l'11 giugno 1960 alla A.Te.Na. a Genova. Roma, Istituto Nazionale di Studi ed Esperienze di Architettura Navale (Vasca Navale), 1960. Pp. 24, in-8° (Relazione n. 35).
- CERUTI A. — Vedi: BRESADOLA Jacopus.
- COLONNETTI Gustavo. — *Dalla legge Casati alla scuola di domani*. Estr. da «Atti e Rassegna Tecnica della Società degli Ingegneri e degli Architetti in Torino», 1959, dicembre.
- *Les déformations héréditaires*. Estr. da «Bulletin Technique de la Suisse Romande», 1960, n. 12.
- *Les déformations non linéaires des corps solides*. Dixième Congrès International de Mécanique Appliquée. Stresa - 31 août 1960. Torino, Tipografia Lorenzo Rattero, s.d. Pp. 23, in-8°, con figg.
- *Elastoplasticità*. Saggio di interpretazione delle deformazioni plastiche come fenomeni ereditari. In *Civitate Vaticana*, ex Aedibus Academicis, 1960. Pp. 109, in-8°, con figg. (Pontificiae Academiae Scientiarum Scripta Varia, 19).
- *Intervento al Convegno di studio sui problemi dell'Università Italiana*. Bologna - 2 aprile 1960. Torino, Tipografia Lorenzo Rattero, s.d. Pp. 4, in-8°.
- *Massimo Sella*. Estr. da «La Ricerca Scientifica», a. XXIX, 1959, n. 10.
- *Il piano decennale per lo sviluppo della scuola*. Estr. da «Rassegna Parlamentare», a. I, 1959, n. 12.
- *Plasticité et fluage*. Estr. da «Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics», a. XII, 1959, n. 142, supplemento.
- *Plasticité et fluage*. Estr. da «Comptes-Rendus des Séances de l'Académie des Sciences», t. CCXLVII, 1958 [4 note].
- *Il progetto italiano per il salvataggio dei templi di Abu-Simbel*. Accademia Nazionale dei Lincei - 11 marzo 1961. Comunicazione... Torino, Tipografia Lorenzo Rattero, 1961. Pp. 19, in-4°, con figg.
- COLONNETTI Gustavo. — *Rapporti tra scienza ed industria*. Estr. da «Eur. Brewery Convention», 1960, [n.] 4.
- *Relazione del Presidente... alla chiusura del primo anno del corso di specializzazione in metrologia dell'O. R. S. A. S.p.A. Istituto Superiore di Tecnologia*. Torino, 18 giugno, 1960. Torino, Tipografia Lorenzo Rattero, s.d. Pp. 11, in-8°.
- [Scritto sugli articoli 33 e 34 della Costituzione Italiana]. Torino, Tipografia Lorenzo Rattero, s.d. Pp. 15, in-8°.
- *La Scuola e il Mercato Comune Europeo*. Conferenza tenuta al Collegio Universitario «Senatore Agnelli» di Torino il 18 marzo 1960. Torino, Tipografia Lorenzo Rattero, s.d. Pp. 9, in-8°.
- *Sur l'interprétation des déformations plastiques comme phénomènes héréditaires*. Estr. da «Colloque International de Rhéologie. Paris, 29 juin-4 juillet 1960», XCVIII.
- *Vérification expérimentale de la théorie héréditaire des déformations plastiques*. Estr. da «Comptes-Rendus des Séances de l'Académie des Sciences», t. CCLI, 1960.
- CONGRESSO (VI) DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA TENUTO A NAPOLI NEI GIORNI 11-16 SETTEMBRE 1959. — *Atti*. Roma, Edizioni Cremonese, 1960. Pp. 497, in-8°, con figg.
- DARLINGTON Jay E. — *The thing called space*. Chicago, Parkwy Press, 1961. Pp. 11-96, in-8°.
- ÉJGENSON M. S. — *Očerki fiziko-geografičeskijh prožavljenij solnečnoj aktivnosti*. L'vov, Izdatel'stvo L'vovskogo Universiteta, 1957. Pp. 232, in-8°, con figg.
- IONESCU - ȘIȘEȘTI G. — Vedi: *Probleme actuale de biologie și științe agricole*.
- ISTITUTO IDROGRAFICO DELLA MARINA. — *Tavole di marea, Mediterraneo-Mar Rosso-Golfo di Aden-Oceano Indiano Occidentale 1961*. Genova, Tipo-Litografia dell'Istituto Idrografico della Marina, 1960. Pp. 39, in-8°.
- *Tavole nautiche*. Nuova edizione. Genova, Tipo-Litografia dell'Istituto Idrografico della Marina, 1961. Pp. XIV-178, in-8°.
- LOMBARDO RADICE Lucio. — Vedi: SEGRE Beniamino.

Probleme actuale de biologie și științe agricole. Lucrare dedicată Acad. Prof. Ionescu-Șișești cu prilejul împlinirii a 75 de ani. București, Editura Republicii Populare Române, 1960. Pp. XXI-780, in-4°, con tavv. e figg.

ROMANA A. — Vedi: BARTELS J., ROMANA A. and VELDKAMP J.

SEGRE Beniamino. — *Lectures on modern geometry.* With an appendix by Lucio Lombardo Radice. Roma, Edizioni Cremonese, 1961. Pp. xv-479, in-8° (Consiglio Nazionale delle Ricerche. Monografie Matematiche, 7).

VELDKAMP J. — Vedi: BARTELS J., ROMANA A. and VELDKAMP J.

A. SIGNORINI e G. COTRONEI

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta dell'8 aprile 1961

Presiede il Socio anziano GINO CASSINIS

NOTE DI SOCI

Analisi matematica. — *Calcolo per difetto del più basso autovalore di un operatore ellittico del secondo ordine.* Nota di GAETANO FICHERA e MAURO PICONE, presentata (*) del Socio M. PICONE.

La presente Nota ha essenzialmente lo scopo di considerare un funzionale il cui estremo superiore è il più basso autovalore λ_1 relativo ad un generale problema al contorno per un operatore differenziale lineare alle derivate parziali di tipo ellittico del secondo ordine in r variabili.

Una limitazione inferiore per siffatto autovalore è stata recentemente data, nel caso del problema di Dirichlet, da uno degli Autori della presente Nota, deducendola da un criterio sufficiente di minimo per gli integrali multipli del Calcolo delle Variazioni. Il procedimento impiegato è suscettibile di essere esteso a più generali problemi al contorno (1). Per quelli ellittici del secondo ordine verrà qui dimostrato che il funzionale, fornito dal metodo, consente il calcolo per difetto di λ_1 . Si perverrà, in tal modo, ad estendere risultati particolari, indicati, in corrispondenza all'operatore di Laplace in due o tre variabili, da J. Barta [1] e più recentemente da M. H. Protter [13], [14] e da J. Hersch [6]. Verranno altresì considerati i problemi al contorno per un operatore ellittico nei quali il parametro, rispetto a cui si ricercano gli autovalori, interviene nelle condizioni al contorno. Anche per questi si perverrà al calcolo per difetto del più basso autovalore.

(*) Nella seduta dell'8 aprile 1961.

(1) Cfr. [11], [12].

I numeri fra parentesi quadra rimandano alla Bibliografia alla fine della presente Nota.

1. Con X^r indicheremo lo spazio cartesiano delle r variabili reali x_1, \dots, x_r e con A un campo limitato *propriamente regolare* di X^r ⁽²⁾. Siano $a^{hk}(x)$ ($h, k = 1, \dots, r$) funzioni reali del punto $x \equiv (x_1, \dots, x_r)$ di A misurabili e limitate in A con $a^{hk}(x) \equiv a^{kh}(x)$. Supponiamo che esista una costante positiva m tale che per ogni $x \in A$, quale si sia il vettore ξ a componenti reali ξ_1, \dots, ξ_r , riesca:

$$a^{hk}(x) \xi_h \xi_k \geq m |\xi|^2 \quad (3).$$

Sia $b(x)$ una funzione misurabile e limitata in A avente estremo inferiore positivo in A . Sia infine $p(x)$ una funzione non negativa e limitata definita sulla frontiera Σ di A e misurabile rispetto alla misura ipersuperficiale su Σ .

Indichiamo con $\mathcal{H}^1(A)$ lo spazio delle funzioni reali appartenenti a $\mathcal{L}^2(A)$ (cioè di quadrato sommabile in A) e dotate di derivate prime nel senso di Friedrichs e Sobolev appartenenti a $\mathcal{L}^2(A)$. Lo spazio $\mathcal{H}^1(A)$ è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare:

$$(u, v) = \int_A (u_{x_h} v_{x_h} + uv) dx \quad (dx = dx_1 \dots dx_r).$$

Poiché ogni funzione di $\mathcal{H}^1(A)$ è dotata di *traccia* su Σ ⁽⁴⁾ possiamo considerare in $\mathcal{H}^1(A) \times \mathcal{H}^1(A)$ il funzionale bilineare:

$$(1) \quad ((u, v)) = \int_A (a^{hk} u_{x_h} v_{x_k} + b(x) uv) dx + \int_{\Sigma} p uv d\sigma.$$

Poiché riesce per $u \in \mathcal{H}^1(A)$:

$$\int_{\Sigma} u^2 d\sigma \leq K \cdot (u, u)$$

con K costante indipendente da u ⁽⁵⁾, esistono due costanti positive h ed H tali che per ogni $u \in \mathcal{H}^1(A)$ riesce: $h(u, u) \leq ((u, u)) \leq H(u, u)$. Pertanto, introducendo in $\mathcal{H}^1(A)$ il nuovo prodotto scalare dato da (1), si ottiene uno spazio di Hilbert isomorfo al precedente. D'ora in avanti, parlando dello spazio di Hilbert $\mathcal{H}^1(A)$, supporremo che esso sia munito del prodotto scalare dato da (1).

(2) Per la definizione di campo *propriamente regolare* cfr. [3], [4]. Vogliamo qui ricordare che i campi limitati nei quali - in genere - si studiano i problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali, ancorché dotati di singolarità sulla frontiera (vertici, spigoli, ecc.) verificano di solito le condizioni che definiscono i campi propriamente regolari.

(3) In questa Nota viene adottata la convenzione sommatoria secondo cui rispetto ad un indice ripetuto due volte è sottintesa una sommazione.

(4) Cfr. loc. cit. ⁽²⁾.

(5) Cfr. [3] p. 62.

Sia \mathfrak{V} una varietà lineare di $\mathcal{H}^1(A)$ e $\bar{\mathfrak{V}}$ la sua chiusura in $\mathcal{H}^1(A)$. Faremo l'ipotesi che \mathfrak{V} abbia dimensione non nulla. L'operatore che ad un elemento di $\mathcal{H}^1(A)$ fa corrispondere se stesso pensato però come elemento di $\mathcal{L}^2(A)$ è — com'è ben noto — un operatore lineare e compatto (*teorema di selezione di Rellich*). Tale sarà pertanto la sua restrizione a \mathfrak{V} . Ne segue, per un teorema di Analisi funzionale, che assegnato comunque $u \in \mathcal{L}^2(A)$, esiste uno ed un solo elemento $G(u)$ di \mathfrak{V} tale che per ogni $v \in \mathfrak{V}$ riesca:

$$((G(u), v)) = \int_A uv \, dx \quad (6).$$

La G è una trasformazione lineare compatta di $\mathcal{L}^2(A)$ in $\bar{\mathfrak{V}}^{(7)}$, talché la sua restrizione a $\bar{\mathfrak{V}}$ è una trasformazione lineare e compatta di $\bar{\mathfrak{V}}$ in $\bar{\mathfrak{V}}$. La G , considerata nello spazio di Hilbert $\bar{\mathfrak{V}}$, è simmetrica dato che $((G(u), v)) = ((u, G(v)))$. Essa inoltre è definita positiva in $\bar{\mathfrak{V}}$. Ne segue l'esistenza di un insieme discreto di autovalori tutti positivi della trasformazione G : $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$ e di un sistema ortonormale di autosoluzioni $u_1, u_2, \dots, u_k, \dots$, con $u_k = \lambda_k^{-1} G(u_k)$ tali che in $\bar{\mathfrak{V}}$ sussiste la *rappresentazione spettrale* della G :

$$G(u) = \sum_k \frac{((u, u_k))}{\lambda_k} u_k.$$

Si ha inoltre per $u \in \bar{\mathfrak{V}}$ ($u \neq 0$)

$$\lambda_1 \leq \frac{((u, u))}{((G(u), u))} = \frac{\int_A (a^{hk} u_{x_h} u_{x_k} + bu^2) \, dx + \int_{\Sigma} p^2 u^2 \, d\sigma}{\int_A u^2 \, dx}$$

sussistendo il segno $=$ per $u = u_1$.

Sia Σ_0 l'insieme dei punti di Σ , eventualmente vuoto, dove ogni v di \mathfrak{V} è identicamente nulla. Indicheremo con Φ la classe dei vettori φ ad r componenti reali $\varphi^1, \dots, \varphi^r$ di classe uno in A , continui in \bar{A} , ivi dotati di divergenza $\varphi_{x_h}^h$ continua e tali che, se $\Sigma - \Sigma_0$ non è vuota, in ogni punto regolare di $\Sigma - \Sigma_0$ riesca:

$$\varphi \cdot n + p \geq 0,$$

avendo indicato con $n = (n_1, \dots, n_r)$ il versore normale interno. Detto $\alpha_{hk}(x)$ il reciproco di $a^{hk}(x)$ nella matrice degli a^{hk} , la $\alpha_{hk}(x)$ è una funzione misurabile e limitata di x in A dato che riesce in A : $\det(a^{hk}) \geq m^r$.

Definiamo in Φ il seguente funzionale:

$$P(\varphi) = \inf_{x \in A} [\delta(x) + \varphi_{x_h}^h(x) - \alpha_{hk}(x) \varphi^h(x) \varphi^k(x)].$$

(6) Cfr. [2] pp. 217-218.

(7) Cfr. [8] teor. 2-13-5 p. 49.

Sussiste il seguente teorema:

I. - *Riesce in* Φ : $P(\varphi) \leq \lambda_1$.

Sia infatti λ un valore reale tale che per qualche $\varphi \in \Phi$ riesca $P(\varphi) > \lambda$. La forma quadratica nelle $r+1$ variabili reali $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_r$:

$$a^{hk}(x) \xi_h \xi_k + [b(x) - \lambda + \varphi_{x_h}^h(x)] \xi_0^2 + 2 \varphi^h(x) \xi_0 \xi_h$$

è, allora, per ogni $x \in A$, definita positiva. Poiché riesce per ogni $u \in \overline{\mathcal{U}}$:

$$((u, u)) - \lambda \int_A u^2 dx =$$

$$\int_A \{ a^{hk} u_{x_h} u_{x_k} + [b(x) - \lambda + \varphi_{x_h}^h(x)] u^2 + 2 \varphi^h u u_{x_h} \} dx + \int_{\Sigma} (\varphi \cdot n + p) u^2 d\sigma,$$

se è $u \not\equiv 0$, si avrà:

$$\frac{((u, u))}{\int_A u^2 dx} > \lambda$$

e quindi $\lambda < \lambda_1$.

2. Vogliamo ora provare che, ammesse opportune ulteriori ipotesi, l'estremo superiore di $P(\varphi)$ in Φ è proprio λ_1 . Precisamente supporremo che:

1) sia Σ_0 un insieme chiuso contenuto in Σ che, se non è vuoto, è costituito da un numero finito di porzioni di ipersuperficie regolari a due a due prive di punti, non appartenenti ai loro bordi, in comune. La classe \mathcal{U} è costituita da tutte le funzioni di classe C^∞ in \bar{A} che si annullano su Σ_0 ;

2) le funzioni a^{hk} sono di classe uno in \bar{A} e le loro derivate prime sono ivi uniformemente hölderiane [$a^{hk} \in C^{1,h}(\bar{A})$], la b è uniformemente hölderiana in \bar{A} [$b \in C^{0,h}(\bar{A})$] e la p è tale su $\Sigma - \Sigma_0$ [$p \in C^{0,h}(\Sigma - \Sigma_0)$];

3) la funzione $G(f)$ è di classe uno in \bar{A} per ogni $f \in C^{0,h}(\bar{A})$ ed esiste un intero positivo n_0 tale che per $n > n_0$ $G^n(u)$ è di classe uno in \bar{A} , qualunque sia $u \in \mathcal{H}(A)$;

4) esiste una funzione ω di classe uno in \bar{A} e di classe due in A verificante le condizioni

$$\omega > 0 \quad \text{in } \bar{A} \quad , \quad (a^{hk} \omega_{x_k})_{x_h} - b(x) \omega < 0 \quad \text{in } A$$

$$a^{hk} \omega_{x_k} n_h - p \omega < 0 \quad \text{su } \Sigma - \Sigma_0.$$

È ben noto che, verificandosi la 2), $G(f)$ è di classe due in A se $f \in C^{0,h}(\bar{A})$. Il verificarsi della 3) implica che la funzione $u = G(f)$ è la soluzione del problema al contorno:

$$E(u) \equiv (a^{hk} u_{x_k})_{x_h} - bu = -f \quad \text{in } A$$

$$u = 0 \quad \text{su } \Sigma_0 \quad , \quad a^{hk} u_{x_k} n_h - pu = 0 \quad \text{su } \Sigma - \Sigma_0.$$

Sono verificate la 3) e la 4) se, ad esempio, uno dei due insiemi Σ_0 , $\Sigma - \Sigma_0$ è vuoto e Σ è di classe $C^{r,h}$ nell'intorno di ogni suo punto, oppure se, verificandosi tale ultima condizione, Σ_0 e $\Sigma - \Sigma_0$ hanno distanza positiva. Possono anche darsi condizioni sufficienti per il verificarsi della 3) e della 4) anche se Σ_0 e $\Sigma - \Sigma_0$ sono adiacenti ⁽⁸⁾. Ad esempio se $a^{hk} \equiv \delta^{hk}$ e Σ_0 è un dominio $(r-1)$ -dimensionale dell'iperpiano $x_r = 0$, limitato da una varietà regolare chiusa β a $r-2$ dimensioni, basta che $\Sigma - \Sigma_0$ sia di classe $C^{r,h}$ in ogni suo punto ed incontri Σ_0 in ogni punto di β secondo un angolo retto.

II. - Soddisfatte le 1), 2), 3), 4), si ha:

$$\lambda_1 = \sup_{\varphi \in \Phi} P(\varphi).$$

Sia $0 < \lambda < \lambda_1$. Esiste in $\mathcal{H}^1(A)$ la soluzione dell'equazione:

$$u - \lambda G(u) + G(f) = 0.$$

Se è $f \in C^{0,h}(\bar{A})$, per l'ipotesi 3), la u è di classe uno in \bar{A} (oltre che di classe due in A). Poiché riesce:

$$u = - \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k G^{k+1}(f) \equiv G_h(f)$$

essendo, per l'ipotesi 4), $G(f) \geq 0$ in \bar{A} , se è ivi $f \geq 0$ ⁽⁹⁾, sarà in \bar{A} $u \geq 0$, se è ivi $f \leq 0$. Assumiamo una funzione $f(x)$ negativa in A e tale che $f(x) \leq b(x) - \lambda$ e poniamo $w = u + 1$. Sarà allora:

$$w \geq 1 \quad \text{in } \bar{A} \quad ; \quad E(w) + \lambda w = f - b + \lambda \quad \text{in } A$$

$$a^{hk} w_{x_k} n_h - p w = -p \quad \text{su } \Sigma - \Sigma_0.$$

Poniamo:

$$\varphi^h(x) = - \frac{a^{hk} w_{x_k}}{w}.$$

Il vettore φ , avente le φ^h per componenti, appartiene a Φ ed è tale che $P(\varphi) \geq \lambda$. Ciò prova il teorema.

3. Denoti ora E_0 un qualsiasi operatore del secondo ordine ellittico-positivo in \bar{A} :

$$E_0 \equiv \frac{\partial}{\partial x_h} a^{hk} \frac{\partial}{\partial x_k} + c$$

con le a^{hk} appartenenti a $C^{r,h}(\bar{A})$ e c funzione arbitraria di $C^{0,h}(\bar{A})$. Sia $p \in C^{0,h}(\Sigma - \Sigma_0)$ e non negativa. È evidente che il problema di autovalori:

$$(2) \quad \begin{cases} E_0(u) + \mu u = 0 & \text{in } A \\ u = 0 & \text{su } \Sigma_0, \quad a^{hk} u_{x_k} n_h - p u = 0 & \text{su } \Sigma - \Sigma_0 \end{cases}$$

(8) Cfr. [5], [9].

(9) Cfr. [10] p. 705.

si riconduce al caso precedentemente trattato, relativo all'operatore E , ponendo:

$$\mu = \lambda - 1 - \max_{x \in \bar{A}} c(x)$$

e quindi $b(x) = 1 - c(x) + \max_{x \in \bar{A}} c(x)$.

Come funzionale $P(\varphi)$ corrispondente all'operatore E_0 è da assumere il seguente:

$$P(\varphi) = \min_{\bar{A}} [-c(x) + \varphi_{x_h}^h(x) - \alpha_{hk}(x) \varphi^h(x) \varphi^k(x)].$$

Soddisfatte le ipotesi del teorema II, per il più basso autovalore μ_x del problema (2) si ha:

$$\mu_x = \sup_{\varphi \in \Phi} P(\varphi)$$

come ovviamente segue dal teorema II.

In particolare, se E_0 è l'operatore di Laplace $\Delta_x \equiv \sum_{h=1}^r \frac{\partial^2}{\partial x_h^2}$, si ha:

$$P(\varphi) = \min_{\bar{A}} [\varphi_{x_h}^h(x) - |\varphi(x)|^2].$$

Tale funzione è già stata considerata da M. H. Protter [13] e J. Hersch [6].

4. Vogliamo ora estendere i risultati ottenuti al caso di problemi al contorno nei quali il parametro λ appare nella condizione al contorno oppure, simultaneamente, in questa e nell'equazione differenziale sul campo A . Per trattare contemporaneamente i due casi, porremo al modo seguente il problema di autovalori:

$$(3) \quad \begin{cases} E(u) + \theta \lambda u = 0 & \text{in } A \\ u = 0 & \text{su } \Sigma_0, \quad a^{hk} u_{x_h} n_h - p u + \lambda u = 0 & \text{su } \Sigma - \Sigma_0; \end{cases}$$

con θ denotiamo il numero 0 oppure il numero 1.

Conviene prima stabilire un teorema analogo al teorema I prescindendo da ipotesi di derivabilità dei coefficienti degli operatori differenziali considerati. Assumeremo allora per le a^{hk} , b , p e per la \mathcal{V} le stesse ipotesi fatte nel n. 1, con la sola aggiunta che Σ_0 , eventuale insieme dei punti di Σ dove tutte le v di \mathcal{V} si annullano, abbia misura ipersuperficiale minore di quello di Σ .

Definiremo ora in $\overline{\mathcal{V}}$ la $G(u)$ per mezzo delle equazioni:

$$((G(u), v)) = \theta \int_A u v \, dx + \int_{\Sigma} u v \, d\sigma$$

valide per ogni $v \in \overline{\mathcal{V}}$. La G esiste, è unica ed è una trasformazione lineare simmetrica, continua (definita o semidefinita positiva) di $\overline{\mathcal{V}}$ in se stessa.

Detto λ_1 l'estremo inferiore dello spettro della G in $\overline{\mathfrak{D}}^{(10)}$ si ha:

$$0 < \lambda_1 = \inf_{u \in \mathfrak{D}} \frac{((u, u))}{\theta \int_{\bar{A}} u^2 dx + \int_{\Sigma} u^2 d\sigma}.$$

Definiremo la classe Φ , se $\theta = 1$, come quella di tutti i vettori φ di classe uno in A , continui in \bar{A} ed ivi dotati di divergenza $\varphi_{x_k}^k$ continua. Se $\theta = 0$, per definire la Φ occorrerà aggiungere l'ulteriore condizione $P(\varphi) > 0$. La classe Φ è ovviamente non vuota.

Porremo inoltre:

$$Q(\varphi) \begin{cases} = \min \{ P(\varphi), \inf_{x \in \Sigma - \Sigma_0} (\varphi \cdot n + p) \} & \text{se } \theta = 1 \\ = \inf_{x \in \Sigma - \Sigma_0} (\varphi \cdot n + p) & \text{se } \theta = 0. \end{cases}$$

III. - *Riesce in Φ : $Q(\varphi) \leq \lambda_1$.*

La dimostrazione è analoga a quella del teorema I, avendosi nel caso attuale:

$$((u, u)) - \lambda ((G(u), u)) = \int_{\bar{A}} (a^{hk} u_{x_k} u_{x_k} - (b - \theta \lambda - \varphi_{x_k}^k u^2 + 2 \varphi^k u u_{x_k})) dx + \int_{\Sigma} (\varphi \cdot n + p - \lambda u^2) d\sigma.$$

Pertanto, se per qualche $\varphi \in \Phi$ riesce $Q(\varphi) > \lambda_1$, è allora, per ogni $u \in \overline{\mathfrak{D}}$: $((u, u)) - \lambda (G(u), u) > 0$ e quindi $\lambda < \lambda_1$.

Per provare l'analogo del teorema II occorre anche in questo caso ammettere le ipotesi 1), 2), 3), 4) ove, naturalmente, la 3) è da intendere riferita alla trasformazione G introdotta in questo numero. Il verificarsi di tale ipotesi implica l'equivalenza fra l'equazione $u = G(f)$ ed il sistema:

$$\begin{aligned} E(u) + \theta f &= 0 \quad \text{in } A \\ u &= 0 \quad \text{su } \Sigma_0, \quad a^{hk} u_{x_k} n_h - p u + f = 0 \quad \text{su } \Sigma - \Sigma_0 \end{aligned}$$

e quindi l'equivalenza fra l'equazione $u - \lambda G(u) = 0$ e la (3).

IV. - *Soddisfatte le ipotesi 1) 2), 3), 4), si ha:*

$$\lambda_1 = \sup_{\varphi \in \Phi} Q(\varphi).$$

Si procede come nella dimostrazione del teorema II e si costruisce la

$$G_\lambda = - \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k G^{k+1} \quad \text{per } 0 < \lambda < \lambda_1. \quad \text{Anche in tal caso, essendo per la 4),}$$

(10) Chiamiamo spettro della G - non conformemente alla definizione ordinaria - l'insieme non vuoto dei valori λ necessariamente reali per i quali l'equazione $u - \lambda G(u) = f$ non ammette soluzione, comunque si fissi $f \in \mathfrak{D}$.

$G(f) \geq 0$ in \bar{A} se è ivi $f \geq 0$, sarà in \bar{A} : $G_h(f) \geq 0$ se è ivi $f \leq 0$. Si assuma una $f(x) \in C^{0,h}(\bar{A})$ negativa in \bar{A} e tale che: $\theta f \leq b - \theta \lambda$ in \bar{A} e $f \leq p - \lambda$ su $\Sigma - \Sigma_0$. Posto $w = G_h(f) + 1$ e

$$\varphi^h(x) = - \frac{a^{hk} w_{x_k}}{w},$$

si verifica che $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^r) \in \Phi$ e $\bar{Q}(\varphi) \geq \lambda$. Ciò prova il teorema.

È evidente come nel caso $\theta = 1$ ($\theta = 0$) ci si possa liberare - ragionando come nel n. 3 - delle ipotesi di positività ammesse per $b(x)$ e $p(x)$ (per $p(x)$).

BIBLIOGRAFIA.

- [1] J. BARTA, *Sur la vibration fondamentale d'une membrane*, «C. R.», vol. 204, pp. 472-473 (1937).
- [2] G. FICHERA, *Lezioni sulle trasformazioni lineari*, «Ist. Matem. Università Trieste», 1954.
- [3] G. FICHERA, *Premesse ad una teoria generale dei problemi al contorno per le equazioni differenziali*, Corsi I.N.A.M., Veschi, Roma 1958.
- [4] G. FICHERA, *Alcuni recenti sviluppi della teoria dei problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali*, Atti Conv. internaz. Equaz. alle Der. Parz., Trieste 1954, Ediz. Cremonese, Roma, pp. 174-227.
- [5] G. GIRAUD, *Problèmes mixtes et problèmes sur des variétés closes, relativement aux équations linéaires du type elliptique*, «Ann. Soc. Polon. Mathem.», Tome XI, pp. 35-54 (1932).
- [6] J. HERSCH, *Sur la fréquence fondamentale d'une membrane vibrante: évaluations par défaut et principe de maximum*, «ZAMP», vol. XI, pp. 387-413 (1960).
- [7] J. HERSCH, *Un principe de maximum pour la fréquence fondamentale d'une membrane*, «C. R.», vol. 249, pp. 1074-76 (1959).
- [8] E. HILLE-R. S. PHILLIPS, *Functional Analysis and Semi-Groups*, «Amer. Math. Soc. Coll. Publ.», vol. XXXI (1959).
- [9] C. MIRANDA, *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*, Springer Verlag 1955.
- [10] M. PICONE, *Appunti di Analisi Superiore*, Rondonella, Napoli 1940.
- [11] M. PICONE, *Nuovi criteri sufficienti in un classico problema di calcolo delle variazioni*, «Ann. di Matem.», vol. 55, ser. IV (1961).
- [12] M. PICONE, *Criteri sufficienti per il minimo di un integrale unidimensionale del primo ordine nel vettore minimante*, «Memorie dell'Acc. Naz. dei Lincei», Classe Sc. fis., vol. VI, ser. VIII (1961).
- [13] M. H. PROTTER, *Lower bounds for the first eigenvalue of elliptic equations and related topics*, Tech. Report No. 8, Univ. of California, Berkeley 1958.
- [14] M. H. PROTTER, *Vibration of nonhomogeneous Membrane*, Tech. Report No. 5, Univ. of California, Berkeley 1959.

Matematica. — *Sulle funzioni che assumono tutti i valori intermedi.* Nota (*) del Corrisp. FRANCESCO G. TRICOMI.

Le funzioni continue assumono tutti i valori intermedi fra due loro valori ma, com'è ben noto, questa *non* è una loro proprietà caratteristica. Gli esempi che ordinariamente si dànno ⁽¹⁾ di funzioni discontinue godenti tuttavia della proprietà indicata, sono però relativi a funzioni $f(x)$ tali che certi valori compresi fra due loro valori $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$, vengono talvolta raggiunti *fuori* dell'intervallo (x_1, x_2) , e non sempre una volta sola. Ho cercato un esempio migliore, ho cercato cioè di costruire una funzione discontinua che raggiungesse, *una sola volta*, ciascun valore compreso fra y_1 e y_2 *nell'interno dell'intervallo* (x_1, x_2) , ma non vi sono riuscito. Mi è venuto così il sospetto che la cosa fosse impossibile. Effettivamente essa è impossibile, sussistendo il seguente teorema (che credo mai esplicitamente enunciato) la cui dimostrazione forma l'oggetto di questa breve Nota:

Se la funzione limitata $y = f(x)$, data nell'intervallo (a, b) , assume ogni valore compreso fra due suoi valori $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$, ($x_1 < x_2$) una ed una sola volta e lo raggiunge nell'intervallo (x_1, x_2) ; la funzione è necessariamente continua (e monotona).

Indichiamo rispettivamente con $A = f(a)$ e $B = f(b)$ i valori della nostra funzione negli estremi dell'intervallo di definizione (a, b) e supponiamo che sia $A < B$. (Altrimenti cambieremmo f in $-f$). Siano poi rispettivamente m ed M l'estremo inferiore e l'estremo superiore della funzione $f(x)$ (che si è supposta limitata) nello stesso intervallo (a, b) . Dico che è necessariamente

$$(1) \quad A \leq m \leq M \leq B.$$

Infatti, se fosse invece, poniamo, $M > B$, detto X un punto di Weierstrass per M , nel suo intorno potrà certo determinarsi un valore x_0 di x in corrispondenza al quale riesca

$$B < f(x_0) < M.$$

Ciò posto, sia Y una qualsiasi valore compreso fra B e $f(x_0)$ e quindi anche, *a fortiori*, fra A e $f(x_0)$.

Per ipotesi esisterà in (x_0, b) un punto ξ (ed uno solo) in cui si avrà $f(\xi) = Y$. Similmente, esisterà in (a, x_0) un altro punto ξ' (ed uno solo) in cui si avrà $f(\xi') = Y$. Ne segue che, nell'intero intervallo (a, b) , esisterebbero, contro il supposto, *due* punti ξ e ξ' in cui $f(x)$ raggiunge il valore Y . Non può dunque essere $M > B$.

(*) Presentata nella seduta dell'8 aprile 1961.

(1) Vedi per esempio G. H. HARDY, *A Course of Pure Mathematics*. (10th Ed., Cambridge, Univ. Press. 1955) § 101, p. 192.

Tal quale si dimostra che non può essere $m < A$. Vale dunque la (1).

Ovviamente una disuguaglianza analoga varrà in ogni intervallo (α, β) , contenuto in (a, b) . Pertanto, detti x_1 e x_2 due punti qualsiasi di (a, b) , con $x_1 < x_2$, gli estremi della funzione nell'intervallo (a, x_2) saranno compresi fra A ed $f(x_2)$, il che implica, tenuto conto che la funzione non riprende mai lo stesso valore,

$$A < f(x_1) < f(x_2);$$

dunque la funzione $f(x)$ è monotona (crescente) in tutto l'intervallo (a, b) .

Provato che la funzione è monotona la dimostrazione del teorema si completa con facilità.

Infatti, detto x_0 un qualsiasi punto interno ad (a, b) ⁽²⁾, esisteranno intanto i due limiti λ_1 e λ_2 di $f(x)$ avvicinandosi ad x_0 dalla sinistra e dalla destra, e sarà ovviamente $\lambda_1 \leq \lambda_2$.

Dico, in primo luogo, che $\lambda_1 = \lambda_2$.

Infatti, se fosse invece $\lambda_1 < \lambda_2$, posto

$$\varepsilon = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{3}$$

esisterà un intorno sinistro di x_0 , diciamolo I_1 , entro cui (eccettuato eventualmente il punto x_0) sarà sempre

$$f(x) < \lambda_1 + \varepsilon.$$

Similmente, esisterà un intorno destro di x_0 , diciamolo I_2 , entro cui (eccettuato eventualmente il punto x_0) sarà sempre

$$f(x) > \lambda_2 - \varepsilon.$$

Ma, dato il modo con cui è stato fissato ε , risulta

$$(\lambda_2 - \varepsilon) - (\lambda_1 + \varepsilon) = \lambda_2 - \lambda_1 - 2\varepsilon = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{3} > 0;$$

dunque, nell'intervallo $I_1 + I_2$ (in cui pure esistono valori di $f(x)$ minori di $\lambda_1 + \varepsilon$ e maggiori di $\lambda_2 - \varepsilon$) la funzione non potrebbe assumere nessun valore compreso fra $\lambda_1 + \varepsilon$ e $\lambda_2 - \varepsilon$, contrariamente al supposto.

Deve dunque essere $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

Inoltre, poiché, per la monotonia della funzione, è necessariamente

$$\lambda_1 \leq f(x_0) \leq \lambda_2$$

resta nel contempo dimostrato che è pure $f(x_0) = \lambda$.

La funzione $f(x)$ è dunque continua.

Dal teorema dimostrato discende subito il seguente corollario.

Se la funzione $\varphi(x)$ è derivabile in tutto un intervallo (a, b) e se, ivi, la sua derivata non prende mai due o più volte lo stesso valore, tale derivata è una funzione continua di x .

Infatti, per un noto teorema di Darboux la derivata in parola assume, nell'intervallo (x_1, x_2) , tutti i valori compresi fra i due suoi valori $\varphi'(x_1)$ e $\varphi'(x_2)$.

(2) Se x_0 fosse invece un estremo, il ragionamento si modifica in modo ovvio.

Meccanica. — *Moltiplicatore critico λ_{cr} per volte autoportanti.*
 Nota III del Socio GIULIO KRALL e di DOMENICO CALIGO, presentata (*)
 dal Socio G. KRALL.

§ 2. — IL PRINCIPIO DI DIRICHLET PER L'ELASTOSTATICA DELLE VOLTE SOTTILI.

5. — Per una configurazione $C_0: u = v = w = 0$ di equilibrio siano T_x, S, T_z gli sforzi corrispondenti ad una distribuzione di carico, X, Y, Z . Ai carichi si applichi un moltiplicatore λ .

Si tratta di determinare quei valori $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ di λ per cui esistono configurazioni di equilibrio prossime alla $u = v = w = 0$. Di questi valori, pensati ordinati in una successione discreta crescente, che effettivamente esiste, interessa il minore λ_1 . Si indica λ_1 con λ_{cr} giacché, se per $\lambda < \lambda_1$ la C_0 è stabile, per $\lambda = \lambda_1$ — avendosi due configurazioni possibili: la $u = v = w = 0$ e la u_1, v_1, w_1 , corrispondente a $\lambda = \lambda_1$ — si ha instabilità per un teorema di Poincaré sugli *equilibri di biforcazione* (di due *serie lineari* funzioni di un parametro).

Orbene, la determinazione della serie (spettro) λ_ρ , ($\rho = 1, 2, \dots$) e delle corrispondenti u_ρ, v_ρ, w_ρ configurazioni di equilibrio prossime alla $u = v = w = 0$, è ricondotta dal principio di Dirichlet⁽¹⁴⁾ alla ricerca delle estremali del principio variazionale

$$(8) \quad \delta\Phi = 0$$

con

$$(9) \quad \Phi = W + \lambda (\mathcal{L}_2^* - \mathcal{L}_2).$$

I termini che intervengono in Φ sono:

W l'energia elastica di deformazione corrispondente al passaggio dalla configurazione C_0 alla configurazione C , assegnata da u, v, w ;

\mathcal{L}_2^* il lavoro di 2° ordine, fatto dagli sforzi interni X_x, X_y, \dots (corrispondenti alla configurazione di equilibrio), nel passaggio dalla C_0 alla C , per la parte di secondo ordine $e_{xx}^{(2)}, e_{yy}^{(2)}, \dots$ della deformazione e ;

\mathcal{L}_2 il lavoro di 2° ordine, fatto dai carichi esterni, nel passaggio dalla C_0 alla C , come ad esempio avviene se tali carichi hanno il carattere di pressione idrostatica.

(*) Nella seduta dell'11 febbraio 1961.

(14) G. KRALL, *Stabilità dell'equilibrio elastico*, in « Annali di Matematica pura ed applicata », serie IV, T. XXIX (1949), e *Manuale dell'Ingegnere civile* (Cremonese, Roma 1959) pp. 550-563.

6. *Elementi elastici sulla superficie mediana di una volta cilindrica.* - Per esplicitare $W, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ conviene qualche premessa geometrica sulla flessione e sull'estensione di una superficie.

Rinviamo al classico trattato del Love⁽¹²⁾ per lo studio di una superficie generica e ci riferiamo ad una superficie cilindrica qualunque, della quale sia data la direttrice nella forma $R = R(\psi)$.

Per la *deformazione* e si prendono in considerazione i termini $e^{(1)}$ di primo ordine ed $e^{(2)}$ di secondo ordine, cosicchè da $e = e^{(1)} + e^{(2)}$ segue, per le componenti $e_1, e_2, \omega = e_{12}$ corrispondenti, nel piano cartesiano, alle e_{xx}, e_{xy}, e_{yy}

$$e_1 = e_1^{(1)} + e_1^{(2)}, \quad e_2 = e_2^{(1)} + e_2^{(2)}, \quad \omega = \omega^{(1)} + \omega^{(2)}.$$

Posto

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial \psi} \right), \quad \frac{\partial}{\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial \psi} \right),$$

si ha, secondo (1):

$$(10) \quad \begin{cases} e_1^{(1)} = u' & , & e_1^{(2)} = \frac{v'^2 + w'^2}{2}; \\ e_2^{(1)} = \frac{\dot{v} - w}{R} & , & e_2^{(2)} = \frac{1}{2R^2} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + 2\dot{w}v + v^2); \\ \omega^{(1)} = \frac{1}{R} \dot{u} + v' & , & \omega^{(2)} = \frac{w\dot{u} - \dot{v}u}{R^2} + \frac{\dot{w}w' + vw'}{R} - u'v'. \end{cases}$$

Queste espressioni (10) giova ripeterlo, sono valide per una volta cilindrica con direttrice di equazione intrinseca $R = R(\psi)$.

Per $R \rightarrow \infty$, dopo avere posto $R\psi = y$ e

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{1}{R} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y},$$

risulta in coordinate cartesiane

$$\begin{aligned} e_1^{(1)} &= \frac{\partial u}{\partial x} & , & & e_1^{(2)} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]; \\ e_2^{(1)} &= \frac{\partial v}{\partial y} & , & & e_2^{(2)} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]; \\ \omega^{(1)} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & , & & \omega^{(2)} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}$$

Per le *variazioni di curvatura* $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_{12}$, fornite da Love⁽¹⁵⁾, poichè il quadrato dell'elemento lineare sulla superficie è $ds^2 = dx^2 + R^2(\psi) d\psi^2$, risulta

$$(11) \quad \varkappa_1 = w'' \quad , \quad \varkappa_2 = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\dot{w}}{R} + \frac{v}{R} \right) \quad , \quad \varkappa_{12} = \frac{\dot{w}'}{R} + \left(\frac{v}{R} \right)';$$

(15) Cfr. op. cit. (12), pp. 524 e 543.

è sufficiente tener conto solo di questi termini di 1° ordine, perché nei nostri calcoli partiamo da distribuzioni non flessionali di sforzi interni limitati a T_1, T_2, S (escludendo la flessione: $G_1 = G_2 = H_{12} = H_{21} = 0$).

d) Per il passaggio dal contorno Ω_0 ($u = v = w = 0$) a quello Ω (per uno spostamento u, v, w assegnato) la trasformazione dell'elemento di superficie $d\Omega_0$ nel $d\Omega$ genera un elemento di volume dV , del quale interessa, per carichi idrostatici, la parte di secondo ordine in u, v, w , che indicheremo con $d_2 V$. Più precisamente, posto

$$dV = d_1 V + d_2 V$$

si ha ⁽¹⁶⁾

$$d_1 V = -w R d\psi dx,$$

$$(12) \quad d_2 V = \frac{v\dot{w} + v^2 + w^2 - \dot{v}w - Ru'w + Rw'u}{2} d\psi dx.$$

7. *Espressioni del potenziale elastico e del lavoro.* - Abbiamo ormai quanto occorre per passare al calcolo di $W, \mathcal{L}_2^*, \mathcal{L}_2$.

Si ha, secondo Love ⁽¹⁷⁾ (detto ν il modulo di Poisson),

$$(13) \quad W = W_f + W_e$$

con W_f energia di flessione (potenziale elastico flessionale) della superficie, data da

$$(13f) \quad W_f = \frac{Ek^3}{24(1-\nu^2)} \int_{\Omega} \{ \kappa_1^2 + 2\nu \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_2^2 + 2(1-\nu) \kappa_{12}^2 \} d\Omega,$$

e W_e energia dell'estensione (potenziale elastico estensionale) della superficie, data da

$$(13e) \quad W_e = \frac{Ek}{2(1-\nu^2)} \int_{\Omega} \left\{ e_1^2 + 2\nu e_1 e_2 + e_2^2 + \frac{1-\nu}{2} \omega^2 \right\} d\Omega.$$

In (13e), (13f) si è indicato con Ω il manto della volta.

Per il calcolo di \mathcal{L}_2^* dall'espressione generale

$$\mathcal{L}_2^* = \int_S (X_x e_{xx}^{(2)} + X_y e_{xy}^{(2)} + \dots) dS$$

per un corpo elastico qualunque S , soggetto a sforzi X_x, X_y, \dots corrispondenti all'equilibrio che si esamina, si ha nel caso attuale

$$(14) \quad \mathcal{L}_2^* = \int_{\Omega} (T_2 e_2^{(2)} + S \omega^{(2)} + T_1 e_1^{(2)}) d\Omega$$

con T_2, S, T_1 dati dalle (3); $e_2^{(2)}, \omega^{(2)}, e_1^{(2)}$, dalle (10).

(16) Cfr. op. cit. ⁽¹⁴⁾, p. 554 ove, però, manca, senza conseguenze per le deduzioni ivi riportate, il prodotto $Rw'u$, che compare nella (12).

(17) Cfr. op. cit. ⁽¹²⁾, pp. 530-531.

Se alle generatrici è applicato un tirante di bordo (cfr. n. 1 b e n. 3) a ζ_2^* va aggiunto un termine funzione del tiro Z

$$(14a) \quad \Delta \zeta_2^* = \int_0^{L/2} Z(x) e_1^{(2)}(x, \psi_0) dx.$$

Infine per ζ_2 , che vien fatto di dover considerare quando si hanno carichi esterni idrostatici (il che appare dalla stessa specificazione, che si va a dare) si ha

$$(15) \quad \zeta_2 = - \int_{\Omega} p d_2 V$$

con $d_2 V$ fornito dalla (12).

§ 3. - IL MULTIPLICATORE CRITICO λ_{cr} PER VOLTE AUTOPORTANTI. VOLTA SEMICIRCOLARE ISOLATA.

8. - a) Per il principio variazionale (8): o se ne scrivono le euleriane oppure se ne ricercano le estremali con metodo diretto.

Qui, proseguendo nello spirito delle Note ⁽¹⁾, ci atteniamo alla seconda via esprimendo u, v, w come combinazione lineare di funzioni note u_m, v_m, w_m soddisfacenti le condizioni ai limiti.

I coefficienti A_m, B_m, C_m della combinazione

$$(16) \quad u = \sum_1^{m_1} A_m u_m, \quad v = \sum_1^{m_2} B_m v_m, \quad w = \sum_1^{m_3} C_m w_m$$

sono a priori indeterminati. Per determinarli si introduce la (16) in (8) e si tiene conto di (13), (14) e (14a) - mancando ora il termine ζ_2 -; si è così riportati, con sole quadrature, da un funzionale in u, v, w e derivate prime e seconde ad una forma quadratica nelle A_m, B_m, C_m , di cui la prima parte W è definita positiva:

$$\Phi(A_m, B_m, C_m) = W + \lambda(\zeta_2^* + \Delta \zeta_2^*).$$

Talché, dalle condizioni di estremo

$$(17) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial A_m} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial B_m} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial C_m} = 0$$

si ha un sistema di equazioni algebriche lineari omogenee. Eguagliando a zero il determinante del sistema si ottengono $N = m_1 + m_2 + m_3$ radici, cioè i moltiplicatori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ sicuramente reali.

b) Per il seguito sarà utile fare le seguenti posizioni per il *carico critico*:

con una distribuzione di carico (2_g) uniforme sulla volta

$$(18_g) \quad g_{cr} = g\lambda_{cr} = \frac{\pi}{24} \frac{E}{1-\nu^2} 10^{-6} \bar{\lambda}_{cr},$$

con una distribuzione di carico (2_p) uniforme sulla proiezione orizzontale

$$(18_p) \quad p_{cr} = p\lambda_{cr} = \frac{1}{6} \frac{E}{1-\nu^2} 10^{-6} \bar{\lambda}_{cr}.$$

$$(18) \quad \bar{\lambda}_{cr} = \min \bar{\lambda}.$$

9. - a) Poiché è notissimo, ciò che appare del resto evidente dalle (13_e), (13_f), che W_e prevale fortemente su W_f , giacché W_e è dell'ordine di \hbar/R e W_f dell'ordine di $(\hbar/R)^3$ (e \hbar/R è, in linea pratica, dell'ordine dei centesimi), la terna a priori migliore pensabile è quella per cui si annulla W_e .

Si realizza tale ipotesi imponendo che sia nullo il termine $e^{(1)}$ dell'estensione, sia cioè, nel caso specifico, in virtù delle (10):

$$(19) \quad e_1^{(1)} = u' = 0, \quad \omega^{(1)} = \frac{\dot{u}}{R} + v' = 0, \quad e_2^{(1)} = \frac{\dot{v} - w}{R} = 0.$$

Una terna u, v, w che soddisfa le (19) dicesi *non estensionale*. Nelle Note citate in ⁽¹⁾ sono state indicate due terne siffatte; la più ragionevole per una volta semicircolare ($R = a$) appare la

$$(20) \quad \begin{cases} u = \Sigma A_m \frac{\cos m\psi}{m}, & v = \Sigma A_m \frac{x}{a} \sin m\psi, & w = \Sigma A_m \frac{mx}{a} \cos m\psi, \\ (0 \leq x \leq \frac{L}{2}, 0 \leq \psi \leq \pi/2), \end{cases}$$

e la simmetrica per $L/2 \leq x \leq L$. Questa terna (che fu contrassegnata con \mathcal{E} nelle precedenti Note ⁽¹⁾) corrisponde ad una inflessione a ginocchio con una discontinuità in mezzo, per $x = L/2$, ammissibile solo per locale plasticizzazione della sezione. La (20) annulla effettivamente le componenti del prim'ordine $e_1^{(1)}$, $\omega^{(1)}$, $e_2^{(1)}$ ed è osservabile in linea qualitativa quando si inflette una trave a sezione semicircolare in lamiera sottile; può aver senso considerarla soltanto per volte di lunghezza L grande rispetto al raggio a ($L/a > 20$) come comprovano anche esperienze puramente qualitative.

Introducendo la (20) in Φ e limitandosi ad un solo termine della serie, per m pari, si trova che nella (18_g) si deve porre il minimo, rispetto ad m , di

$$(21_g) \quad \bar{\lambda} = \left(10^2 \frac{\hbar}{a}\right)^3 (m^2 - 1)^2 \left(m^2 - \frac{1}{4}\right) \frac{m^2 + 24(1-\nu) \left(\frac{a}{L}\right)^2}{m^2 \left[(m^2 - 1)(m^2 - 4) + 12 \left(\frac{a}{L}\right)^2 \right]} \quad (21).$$

(18) Ad esempio, se $a/\hbar = 144$, $a/L = 0,36$ (volta di tipo lungo normale) secondo la (21_g), per $\nu = 0$, il minimo valore $\bar{\lambda}_{cr}$ di $\bar{\lambda}$, da introdurre nella (18_g), si consegue con $m = 4$ ed è 7,808: assumendo $E = 2 \cdot 10^6$ to m^{-2} , si avrebbe un carico critico $g_{cr} = 0,2618 \bar{\lambda}_{cr} = 2,044$ to m^{-2} .

b) Nelle Note citate ⁽¹⁾ prendemmo in considerazione anche una terna (l'la contrassegnata con \mathcal{C}) che non soddisfaceva alle (19) per calcolare λ_{cr} omettendo - col criterio di ricercare limitazioni inferiori - W_e (in effetti non nulla); si supponeva che l'intervento di qualche plasticizzazione locale valesse ad annullarla effettivamente. Tale omissione porta, però, a valori del moltiplicatore critico troppo inferiori alla realtà intuibile e, almeno grossolanamente, sperimentabile.

10. - *a)* Per queste ragioni è necessario riprendere i calcoli e adottare altre terne, senza omettere né W_e né il termine $\Delta \zeta_2^*$ dovuto al tiro Z (cfr. n. 7).

Passiamo, dunque, a considerare la terna (analoga alla (20)):

$$(22) \quad \begin{cases} u = \sum_{mn} A_{mn} \cos n\pi \frac{x}{L} \cos m\psi \\ v = \sum_{mn} B_{mn} \sin n\pi \frac{x}{L} \sin m\psi \\ w = \sum_{mn} C_{mn} \sin n\pi \frac{x}{L} \cos m\psi \end{cases}$$

Introdotta la (22) nella Φ si dovrebbero ricercare le coppie di interi m, n che consentono di soddisfare le (17) procurando un minimo.

In tal guisa si introduce un infestonamento della volta, effettivamente osservabile in qualche esperienza - anche solo qualitativa - su modelli. L'infestonamento, tanto più fitto quanto più è grande m , porta a ridurre W_e di fronte a W_f , giacché decresce con m , mentre W_f cresce, come si vede dalle loro espressioni (25) che riportiamo più avanti.

Questo equilibramento dei valori di W_e rispetto a W_f non è certo nuovo. Apparve sin dallo studio dell'asta con sforzo assiale con reazione elastica diffusa sulla portata. Ivi il minimo carico critico non si ha, come per il caso del solo vincolo agli estremi, per una inflessione sinusoidale senza nodi ma con $(n-1)$ nodi ed n intero tanto più grande quanto più forte è la reattività elastica diffusa.

A questa compete, per $w \neq 0$, un'energia elastica tipicamente estensionale. In due dimensioni, circostanze analoghe appaiono nella lastra soggetta a sforzi nel piano e poggiata - solidale su un suolo elastico. Per le superficie cilindriche appare nella formola di v. Mises che dà la pressione critica per un tubo timpanato agli estremi ⁽¹⁹⁾.

In questo tubo non intervengono però regimi del tipo qui considerato giacché niuna portanza nel senso della campata deve opporre il tubo alla pressione essendo questa uniformemente distribuita sul manto.

(19) Cfr. A. u. L. FÖPPL, *Drang und Zwang* (Oldenbourg, Berlin 1928); p. 373; ovvero op. cit. ⁽¹⁴⁾, p. 622.

Per la superficie a doppia curvatura si ritrova un increspamento analogo precisato ad esempio nelle notevoli formule di Zoelly e Schwerin per la pressione esterna uniforme, critica per una sfera.

b) Ma torniamo alla terna (22) e limitiamoci ad un solo termine nelle sommatorie, con i coefficienti così legati fra di loro:

$$A_{mn} = A/m, \quad B_{mn} = AL/(\pi a), \quad C_{mn} = AL m/(\pi a),$$

essendo A indeterminata, m ed n interi con m pari.

La (22) si riduce così alla

$$(23) \quad \begin{cases} u = A \cos n\pi \frac{x}{L} \cdot \frac{\cos m\psi}{m}, & v = A \frac{L}{n\pi a} \sin n\pi \frac{x}{L} \cdot \sin m\psi, \\ w = A \frac{m}{n} \frac{L}{\pi a} \sin n\pi \frac{x}{L} \cdot \cos m\psi. \end{cases}$$

Le condizioni (17) conducono a ricercare i valori di m e di n per i quali è minimo il rapporto

$$(24) \quad -\frac{W_e + W_f}{\Omega_2^* + \Delta\Omega_2^*} \quad (20).$$

Riportiamo le espressioni di W_f e di W_e , dedotte introducendo la (23), in (13_e), (13_f); esse sono, con riferimento al quadrante di volta $0 \leq x \leq L/2$, $0 \leq \psi \leq \psi_0 = \pi/2$,

$$(25_e) \quad W_e = \frac{\pi}{24} \frac{E}{1-\nu^2} \frac{h}{a} \frac{3}{4} \frac{n^2}{m^2} \left(\frac{\pi a}{L}\right)^2 LA^2,$$

$$(25_f) \quad W_f = \frac{\pi}{24} \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{h}{a}\right)^3 \frac{1}{16} n^2 \left(\frac{\pi a}{L}\right)^2 LA^2 \left\{ m^2 \left[1 - \frac{m^2-1}{n^2} \left(\frac{L}{\pi a}\right)^2 \right] - \right. \\ \left. - 2(1-\nu) \frac{m^2-1}{n^2} \left(\frac{L}{\pi a}\right)^2 \right\}.$$

Analogamente da (14) e (14_a), con la (23), si ottengono le espressioni:

$$\Omega_2^* = -g \left(\frac{L}{\pi a}\right)^2 \frac{LA^2}{4} \frac{1}{4m^2-1} \left\{ (m^2+1) \left(\frac{\pi a}{L}\right)^2 + \frac{m^2}{4n^2} \left[4m^4 - 14m^2 + 7 + (2m^2+1) \frac{n^2\pi^2}{3} \right] \right\}, \\ \Delta\Omega_2^* = g \left(\frac{L}{\pi a}\right)^2 \frac{LA^2}{4} \frac{m^2}{4n^2} \left[\frac{n^2\pi^2}{3} - 1 \right], \quad m \text{ pari},$$

con il carico g , mentre con il carico p non si considera $\Delta\Omega_2^*$ ed è

$$\Omega_2^* = -p \left(\frac{L}{\pi a}\right)^2 \frac{LA^2}{4} \frac{\pi}{16} \left[\left(\frac{\pi a}{L}\right)^2 + \left(\frac{m^2-1}{n^2}\right)^2 \right], \quad m \text{ intero} \geq 2.$$

La seguente ricerca, ulteriormente circoscritta ponendo $n = 1$, consisterà nel calcolare il minimo, rispetto ad m pari, delle funzioni che intervengono

nelle (18):

$$(26_g) \quad \bar{\lambda} = \left(10^2 \frac{h}{a} \right)^3 \frac{m^2 - 1/4}{m^2} \cdot$$

$$\frac{12 \left(\pi \frac{a}{L} \right)^4 \left(\frac{a}{h} \right)^2 + m^4 \left\{ \left[\left(\pi \frac{a}{L} \right)^2 + m^2 - 1 \right]^2 - 2(1-\nu) \frac{m^2 - 1}{m^2} \left(\pi \frac{a}{L} \right)^2 \right\}}{(m^2 + 1) \left(\pi \frac{a}{L} \right)^2 + m^2 (m^2 - 1) (m^2 - \pi^2/6 - 3/2)}$$

per la distribuzione di carico (2_g), e

$$(26_p) \quad \bar{\lambda} = \left(10^2 \frac{h}{a} \right)^3 \cdot$$

$$\frac{12 \left(\pi \frac{a}{L} \right)^4 \left(\frac{a}{h} \right)^2 + m^4 \left\{ \left[\left(\pi \frac{a}{L} \right)^2 + m^2 - 1 \right]^2 - 2(1-\nu) \frac{m^2 - 1}{m^2} \left(\pi \frac{a}{L} \right)^2 \right\}}{m^2 \left[\left(\pi \frac{a}{L} \right)^2 + (m^2 - 1)^2 \right]},$$

per la distribuzione di carico (2_p).

In una Nota successiva discuteremo le (26_g), (26_p) dal punto di vista tanto dei casi limiti quanto del calcolo numerico.

Osservazione per la Nota II:

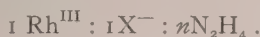
A p. 315, riga 8, leggere: «... continua *su* più campate *per* coperture...».

A p. 319, riga 15, leggere: «... rispetto al colmo *con riguardo a* $\psi > 0$, *soltanto in un quadrante*». Ad evitare ambiguità, sia $\psi > 0$ nei due quadranti. In conformità anche con le formule (4) di p. 135 va cambiato il segno alla s (a p. 319) e nelle corrispondenti colonne della Tabella I, a p. 321.

Chimica inorganica. — *Complessi Rh^{III} idrazinici: cloruri; cloruri acetati; acetati* ^(*). Nota VI di LIVIO CAMBI e di ERNESTINA DUBINI PAGLIA, presentata ^(**) dal Socio L. CAMBI.

1. *Premesse.* — Nelle Note precedenti ⁽¹⁾ abbiamo comunicato le nostre successive ricerche sugli alogenuri, e gli alogenosali di Rh^{III}, ottenuti per azione di eccesso di idrazina. In grande maggioranza i complessi stessi sono diamagnetici e quindi riferibili a Rh^{III} ⁽²⁾.

Abbiamo osservato il successivo spostamento degli alogeno ioni operato dall'idrazina, fino ai monoalogenuri e monocianuri:



Soprattutto su questo processo si è basata la nostra ipotesi dell'intervento di radicali alogenoidi ⁽³⁾:



Tale interpretazione porta a riconoscere la sostituzione successiva degli alogeno ioni, secondo lo schema generale:



Cioè, dai prodotti primari di semplice associazione della idrazina, risulterebbero le idrazidi, per l'eliminazione di HX operata dall'eccesso della base libera presente.

Questo scambio offre notevole analogia con la formazione delle ammidi di Pt^{IV} ⁽⁴⁾ e Rh^{III} ⁽⁵⁾:



La presente ricerca riguarda appunto il meccanismo probabile del passaggio da complessi con idrazina associata alle idrazidi da noi supposte. Si

(*) Ricerca eseguita presso il Consorzio per la Laurea in Chimica Industriale dell'Università di Milano con la sovvenzione del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'8 aprile 1961.

(1) Questi « Rendiconti », Nota I, (8), XXVIII, 770 (1960); Nota II, idem, XXIX, 8; Nota III, idem, 15; Nota IV, idem, 283.

(2) In condizioni particolari abbiamo ottenuto sali paramagnetici, in cui, in via di ipotesi, abbiamo supposto la presenza di Rh^{IV}.

(3) Il radicale H₂N—NH— era stato riconosciuto da TSCHUGAEFF nelle Pt^{II}-carbilamine: « Z. anorg. u. allegm. Chem. », 148, 371 (1925).

(4) TSCHUGAEFF, « Z. anorg. u. allegm. Chem. », 137, 1 (1924).

(5) I. P. MATHIEU, « C.R. », 204, 682 (1937); FRETYMAN e MATHIEU, « Bull. Soc. Chim. » (5), 4, 1297 (1937).

basa soprattutto sull'azione dei sali di idrazina sugli esacloruri-Rh^{III}-alcalini, anche in ambiente acido.

Dobbiamo richiamare alcune premesse generali. I sali delle serie che abbiamo descritto e di quelle che descriviamo corrispondono alle composizioni più frequenti, verificate nelle diverse condizioni di esperienza. La stessa natura di polimeri non consente di isolare complessi definiti. I coefficienti frazionari che risultano nelle formule brute minime, possono attestare appunto le polimerizzazioni cui accenniamo. Ricordiamo in proposito i cloro-bromosali di Poulenc ⁽⁶⁾:



Evidentemente queste formule a indici frazionari debbono corrispondere a multipli interi nell'edificio cristallino dei cloro-bromo-sali, come nelle molecole polimere dei nostri sali. Non possono, come ovvio, escludersi anche miscele di sali polimeri diversi, che rechino in media agli indici frazionari.

Infine, per più agevoli confronti fra i diversi termini che riportiamo, abbiamo assunto convenzionalmente le formule, o meglio le composizioni corrispondenti, a 4 Rh^{III}, anche per il fatto che gli acetati più oltre descritti hanno presentato in soluzione acquosa il P. M. minimo dei sali tetraiodici.

2. *I sali* che descriviamo sono riportati nella tabella seguente:

Serie I: Cloruri (***)

- n. 1) Rh₄:Cl₁₈: (N₂H₄)₁₀
 » 2) Rh₄:Cl₁₅: (N₂H₄)₉
 » 3) Rh₄:Cl₁₂: (N₂H₄)₆: 7 H₂O

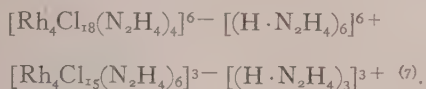
Serie II: Cloruri acetati; acetati (***)

- n. 4) Rh₄:Cl_{7,5}: (Acet.)₅ : (N₂H₄)₁₂
 » 5) Rh₄:Cl₇ : (Acet.)_{5,5} : (N₂H₄)₁₀
 » 6) Rh₄:Cl₇ : (Acet.)_{4,5} : (N₂H₄)₁₀
 » 7) Rh₄:Cl₇ : (Acet.)_{3,5} : (N₂H₄)₁₁
 » 8) Rh₄:Cl₇ : (Acet.)_{2,5} : (N₂H₄)₈
 » 9) Rh₄:Cl_{6,5}: (Acet.)_{4,5}: (N₂H₄)_{10,5}
 » 10) Rh₄:Cl₆ : (Acet.)_{3,5}: (N₂H₄)₉
 » 11) Rh₄:Cl_{5,5}: (Acet.)₄ : (N₂H₄)_{10,5}
 » 12 a) Rh₄(Acet.)₉: (N₂H₄)₆: 2 H₂O
 » 12 b) Rh₄(Acet.)₉: (N₂H₄)₅
 » 13) Rh₄(Acet.)₇: (N₂H₄)₅: 2 H₂O
 » 14 a) Rh₄(Acet.)₇: (N₂H₄)_{4,5}: 4,5 H₂O
 » 14 b) Rh₄(Acet.)₇: (N₂H₄)₃: 2 H₂O

(***) Si indicano semplicemente i rapporti bruti dei componenti.

(6) « Ann. Chim. » (11) 4, 567 (1935).

I cloruri che riportiamo, in generale, si possono ottenere anidri per essiccamento nel vuoto. I cloruri n. 1); 2) e i cloruri acetati n. 4); 5), presentano il rapporto (alogeno + acetato ione) : Rh, superiore alle 12 valenze di 4 Rh³⁺ e pertanto in essi si può non ammettere, se anche non si può escludere, la presenza dei radicali idrazidici N₂H₃[·]. Possono cioè considerarsi anche come sali primari del tipo, ad esempio



La successiva eliminazione dei Cl⁻ porta ad ammettere la presenza dei radicali N₂H₃[·] per la saturazione dei 4 Rh³⁺.

I sali acetici, ottenuti facendo agire il monoacetato di idrazina in eccesso sul Rh^{III}-esacloruro potassico, vennero preparati per la loro solubilità in acqua. È significativo il graduale spostamento del Cl⁻ operato dall'anione acetico e dall'idrazina. Gli acetati sono risultati dall'azione di un forte eccesso di acetato potassico sui sali acetati e clorurati, con purificazione finale mediante dialisi. Il P. M. dei complessi per crioscopia in acqua è risultato da 850 a 1018, cioè corrispondente alla formula tetra-rodica riportata. Il peso molecolare dei cloruri acetati acidi, è risultato inferiore per la dissociazione acida che presentano, e per probabili scissioni in complessi inferiori.

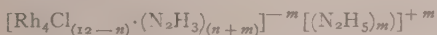
Gli acetati di cui sopra presentano particolare interesse.

Sono molto igroscopici. Si disidratano più o meno parzialmente a circa 56°, nel vuoto spinto, su an. fosforica. Si decompongono già a 80°, sempre nel vuoto, perdendo N₂H₄ e H₂O. I sali n. 12 b) e 14 b) della tabella provengono rispettivamente da 12 a) e da 14 a) per semplice riscaldamento nel vuoto come sopra indicato. A temperature superiori, circa a 100°, subiscono decomposizioni che li alterano notevolmente.

Non abbiamo finora nessun criterio per definire i singoli composti e la struttura degli acetati stessi. Con probabilità in soluzione subiscono disproporzionamenti, rispetto ai radicali anionici, dissociazioni e processi di idrolisi, più o meno lenti, che inducono la variabilità delle composizioni da noi riscontrata.

In questi sali, come per altri complessi Rh^{III}-idrazinici da noi studiati, appare come se, su uno scheletro determinato di polimero, si sostituissero statisticamente anioni alogeni, idrazidici, la stessa idrazina.

(7) È ovvio che l'idrazina nei sali che discutiamo potrebbe essere presente in tre forme diverse (non considerando il radicale N₂H₂ =) cioè: di addizione, di idrazonio, di idrazide. I complessi dechlorurati potrebbero presentare strutture ioniche per l'intervento dei radicali idrazidici:

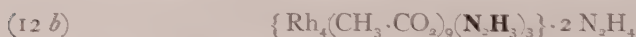


Queste strutture non escludono la presenza di idrazina di associazione.

Si presenta per gli acetati idratati la quistione degli idrossosali già da noi considerata ⁽⁸⁾, cioè dell'intervento di scambi interni del tipo:

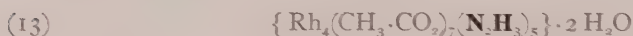


Nel caso dell'acetato 12 δ' , che abbiamo ottenuto anidro, la discussione è ovviamente superata: il sale può interpretarsi come



saturando le valenze del catione Rh_4^{+12-} con tre radicali anionici idrazidici, oltre i nove anioni acetici.

Per l'acetato 13', escludendo in via provvisoria la presenza di $\text{N}_2\text{H}_2^{2-}$, la struttura risulta:



oppure in schema

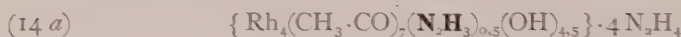


cioè anche in questo complesso deve ammettersi l'intervento degli anioni idrazidici.

L'interpretazione dei sali 14 α' e 14 δ' è meno semplice. In essi la somma dei radicali idrazidici con gli anioni acetici è inferiore alle valenze Rh_4^{+12-} , e debbono considerarsi le formule:



oppure all'estremo



Infine, per l'acetato 14 δ' abbiamo quale unica interpretazione



sempre se si escludono i radicali $\text{N}_2\text{H}_2^{2-}$.

Dobbiamo aggiungere chiudendo che in diversi complessi $-\text{Rh}^{\text{III}}$ -idrazinici, di altri acidi carbossilici, che descriveremo prossimamente, non sono infrequenti prodotti anidri che tolgono ogni dubbio sulla nostra interpretazione di sali idrazidici.

Abbiamo in corso alcune determinazioni chimico-fisiche in merito ai prodotti illustrati. Fra queste particolare interesse presentano quelle degli spettri U.R. Finora abbiamo notato la netta diversità, per le bande riferibili alla idrazina, degli spettrogrammi dei cianuri e degli acetati idrazidici da noi illustrati, rispetto a quelli dei complessi idrazinici semplici, come $\text{NiCl}_2 \cdot 2 \text{N}_2\text{H}_4$; $\text{ZnCl}_2 \cdot 2 \text{N}_2\text{H}_4$.

(8) Questi « Rendiconti », 38, 770 (1960).

PARTE SPERIMENTALE.

Per i metodi analitici rimandiamo alle Note precedenti.

Serie I: Cloruri. — Per i sali 1; 2; 4; 5 della tabella già riportata si sono assunte le formule presumibili, per la distribuzione delle molecole di idrazina, ad anione cloro-idrazido complesso e a cationi idrazonici.

1) $[\text{Rh}_4\text{Cl}_{18} \cdot 4 \text{N}_2\text{H}_4][\text{N}_2\text{H}_5]_6$. — Alla soluzione acquosa concentrata di $\text{N}_2\text{H}_4 \cdot 2 \text{HCl}$ si aggiunge K_3RhCl_6 , pure in soluzione concentrata, nel rapporto 1 Rh : 10 N_2H_4 . Si riscalda per 5 ore a 70° circa. Si filtra, eliminando tracce di sali insolubili; dalla soluzione l'etanolo precipita il sale gelatinoso aranciato. La massa viene solidificata con ripetuti lavaggi con alcool assoluto: si ottiene infine il complesso giallo arancio microcristallino. Di fresco preparato è solubile in acqua con $\text{pH} = 2,8$. Essiccato per 12 ore su P_2O_5 è risultato:

	trov. %:	Rh 29,20	Cl 46,76	N 19,76	H 3,40
per $\{\text{Rh}_4\text{Cl}_{18}\text{N}_{20}\text{H}_{46}\}$	calc.	29,96	46,60	20,38	3,34

$$\chi_{\text{mol}} \cdot 10^6 = -672.$$

2) $[\text{Rh}_4\text{Cl}_{15} \cdot 6 \text{N}_2\text{H}_4][\text{N}_2\text{H}_5]_3$. — Alla soluzione contenente $\text{N}_2\text{H}_4 \cdot \text{HCl}$ è stata aggiunta nel rapporto 10 moli : 1 Rh, quella al 15 % di K_3RhCl_6 , operando a 60° circa. Si osserva immediata variazione del colore della soluzione da rosso vino a giallo chiaro. Si lascia riposare 12 ore. Si filtra dal residuo insolubile: per aggiunta di alcool metilico precipita un sale giallo che viene lavato più volte prima con metanolo al 70 % e poi assoluto. Essiccato a 56° su P_2O_5 è risultato:

	trov. %:	Rh 33,40	Cl 43,20	N 20,35	H 3,89
per $\{\text{Rh}_4\text{Cl}_{15}\text{N}_{18}\text{H}_{39}\}$	calc.	33,40	43,16	20,45	3,16

$$\chi_{\text{mol}} \cdot 10^6 = -680.$$

Il sale è quello che risulta più frequente: lo ottenemmo da cinque diverse preparazioni: con rapporti $\text{Rh}^{\text{III}} : \text{N}_2\text{H}_4$ da 1 : 9 a 1 : 7.

Il pH delle soluzioni in acqua è risultato circa 3.

3) $\{\text{Rh}_4\text{Cl}_{12} \cdot 6 \text{N}_2\text{H}_4\} \cdot 7 \text{H}_2\text{O}$. — Alla soluzione acquosa quasi satura di K_3RhCl_6 si aggiunge bicloridrato di idrazina nel rapporto 10 mol : 1 Rh. Si separa il sale rosa che precipita, e lo si sospende in 30 cc di acqua, mantenendolo a circa 90° su bagno maria per due ore. Si filtra e si lava con acqua il sale di colore giallo intenso. Essiccato su H_2SO_4 , ha dato alle analisi i risultati sotto riportati. Con l'invecchiamento diventa insolubile in acqua. La sospensione acquosa ha $\text{pH} = 4$.

	trov. %:	Rh 36,10	Cl 36,40	N 14,00	H 3,63
per $\{\text{Rh}_4\text{Cl}_{12}\text{N}_{12}\text{H}_{24}\} \cdot 7 \text{H}_2\text{O}$	calc.	35,65	36,80	14,52	3,30

$$\chi_{\text{mol}} \cdot 10^6 = -360.$$

Serie II: Cloruri acetati; acetati.

4) $[\text{Rh}_4\text{Cl}_{7,5}(\text{CH}_3\text{CO}_2)_5 \cdot (\text{N}_2\text{H}_4)_{11,5}] [\text{N}_2\text{H}_5]_{10,5}$ - Alla soluzione acquosa concentrata di monoacetato di idrazina si aggiunge K_3RhCl_6 pure in soluzione concentrata, a freddo, nel rapporto 1 Rh/20 N_2H_4 , con tempo di reazione di 30'. Si filtrano tracce di sali insolubili; dalla soluzione di colore giallo-oro l'etanolo precipita dopo 12 ore di riposo un sale giallo. In soluzione acquosa ha $\text{pH} \approx 5$. Dopo essiccamento su P_2O_5 a 56° è risultato:

trov. %:	Rh 30,80	Cl 19,90	N 25,65	C 9,06	H 5,21
per $\{\text{Rh}_4\text{Cl}_{7,5}\text{C}_{10}\text{O}_{10}\text{N}_{24}\text{H}_{63,5}\}$					
calc.	30,35	19,63	24,80	8,84	4,61
$\chi_{\text{mol}} \cdot 10^6 = -320.$					

5) $[\text{Rh}_4\text{Cl}_7(\text{CH}_3\text{CO}_2)_{5,5}(\text{N}_2\text{H}_4)_{9,5}] [\text{N}_2\text{H}_5]_{10,5}$ - Alla soluzione acquosa concentrata contenente $\text{N}_2\text{H}_4 \cdot 2\text{CH}_3\text{COOH}$ viene aggiunto K_3RhCl_6 in soluzione pure concentrata nel rapporto 10 N_2H_4 /1 Rh. pH finale 4. Si filtrano tracce di insolubile, si precipita con etanolo un sale giallo. Essiccato su P_2O_5 a 56° ha dato alle analisi:

trov. %:	Rh 31,90	Cl 19,35	N 21,21	C 10,50	H 4,53
per $\{\text{Rh}_4\text{Cl}_7\text{C}_{11}\text{O}_{11}\text{N}_{20}\text{H}_{57}\}$					
calc.	31,47	18,98	21,39	10,08	4,35
$\chi_{\text{mol}} \cdot 10^6 = -450.$					

I sali che seguono presentano la somma delle valenze anioniche inferiore a quelle di 4 Rh^{3+} , e pertanto, in base alla nostra ipotesi, distinguiamo i radicali $\text{N}_2\text{H}_3^{-1}$ dalla idrazina presumibilmente associata nel complesso.

6) $\{\text{Rh}_4\text{Cl}_7(\text{CH}_3\text{CO}_2)_{4,5}(\text{N}_2\text{H}_3)_{0,5}(\text{N}_2\text{H}_4)_{9,5}\}^-$ - Si agisce come nella preparazione sopra descritta operando a 40° , lasciando a sé la sospensione per 12 ore. Si filtrano tracce di sali insolubili, si precipita con metanolo il sale giallo. Essiccato su H_2SO_4 per 12 ore, poi su P_2O_5 a 56° ha dato alle analisi:

trov. %:	Rh 32,35	Cl 20,25	C 8,92	N 23,14	
per $\{\text{Rh}_4\text{Cl}_7\text{C}_9\text{O}_9\text{N}_{20}\text{H}_{53}\}$ calc.	33,10	19,95	8,68	22,50	
$\chi_{\text{mol}} \cdot 10^6 = -560.$					

7) $\{\text{Rh}_4\text{Cl}_7(\text{CH}_3\text{CO}_2)_{3,5}(\text{N}_2\text{H}_3)_{1,5}(\text{N}_2\text{H}_4)_{9,5}\}^-$ - Si opera come nelle preparazioni sopra descritte con rapporto 20 $\text{N}_2\text{H}_4 \cdot \text{CH}_3\text{COOH}$ /Rh a temperatura ambiente con tempo di reazione 10' e successiva precipitazione con metanolo del sale giallo. Essiccamento su P_2O_5 a 56° per due ore. Le analisi hanno dato:

trov. %:	Rh 34,60	Cl 20,73	N 25,65	C 6,84	H 4,17
per $\{\text{Rh}_4\text{Cl}_7\text{C}_7\text{O}_7\text{N}_{22}\text{H}_{53}\}$					
calc.	33,86	20,35	25,32	6,91	4,35
$\chi_{\text{mol}} \cdot 10^6 = -390.$					

8) $\{\text{Rh}_4\text{Cl}_7(\text{CH}_3\text{CO}_2)_{2,5}(\text{N}_2\text{H}_3)_{2,5}(\text{N}_2\text{H}_4)_{5,5}\}$. - Si opera come nella preparazione precedente variando il tempo di reazione che è in questo caso 20'. Il sale giallo essiccato su P_2O_5 a 56° ha dato alle analisi:

trov. %:	Rh 38,20	Cl 23,40	C 6,00	N 20,68	H 4,12
per $\{\text{Rh}_4\text{Cl}_7\text{C}_5\text{O}_5\text{N}_{16}\text{H}_{37}\}$					
calc.	38,80	23,35	5,86	21,10	3,50
$\chi_{\text{mol}} \cdot 10^6 = -410.$					

9) $\{\text{Rh}_4\text{Cl}_{6,5}(\text{CH}_3\text{CO}_2)_{4,5}(\text{N}_2\text{H}_3)(\text{N}_2\text{H}_4)_{9,5}\}$. - Si seguono le stesse modalità delle preparazioni precedenti lasciando riposare 12 ore la sospensione acquosa. Si filtra e si precipita con metanolo. Dopo essiccamento, il sale giallo arancio risulta:

trov. %:	Rh 33,50	Cl 18,39	N 24,00	C 9,12	H 4,90
per $\{\text{Rh}_4\text{Cl}_{6,5}\text{C}_9\text{O}_9\text{N}_{21}\text{H}_{54,5}\}$					
calc.	33,10	18,55	23,64	8,65	4,34
$\chi_{\text{mol}} \cdot 10^6 = -410.$					

10) $\{\text{Rh}_4\text{Cl}_6(\text{CH}_3\text{CO}_2)_{3,5}(\text{N}_2\text{H}_3)_{2,5}(\text{N}_2\text{H}_4)_{6,5}\}$. - Si seguono le stesse modalità delle preparazioni precedenti usando monoacetato di idrazina e K_3RhCl_6 nel rapporto 10 $\text{N}_2\text{H}_4/\text{Rh}$. Si filtra e si precipita con metanolo il sale giallo. Essiccato su P_2O_5 a 56° risulta:

trov. %:	Rh 37,50	Cl 20,15	N 22,64	C 7,00	H 4,31
per $\{\text{Rh}_4\text{Cl}_6\text{C}_7\text{O}_7\text{N}_{18}\text{H}_{44}\}$					
calc.	37,80	19,60	23,10	6,62	3,96
$\chi_{\text{mol}} \cdot 10^6 = -360.$					

11) $\{\text{Rh}_4\text{Cl}_{5,5}(\text{CH}_3\text{CO}_2)_4(\text{N}_2\text{H}_3)_{2,5}(\text{N}_2\text{H}_4)_8\}$. - Si ottiene per ulteriore aggiunta di metanolo alle acque madri del sale 10. Ha colore giallo chiaro. Essiccato su P_2O_5 per 12 ore a 56° ha dato alle analisi:

trov. %:	Rh 36,20	Cl 17,05	N 25,80	C 8,16	H 4,14
per $\{\text{Rh}_4\text{Cl}_{5,5}\text{C}_8\text{O}_8\text{N}_{21}\text{H}_{51,5}\}$					
calc.	35,44	16,78	25,30	8,26	4,46
$\chi_{\text{mol}} \cdot 10^6 = -280.$					

12 a) $\{\text{Rh}_4(\text{CH}_3\text{CO}_2)_9(\text{N}_2\text{H}_3)_3(\text{N}_2\text{H}_4)_3\} \cdot 2\text{H}_2\text{O}$. - Alla soluzione di monoacetato di idrazina si aggiunge la soluzione concentrata di K_3RhCl_6 nel rapporto 15 $\text{CH}_3\text{COOH} \cdot \text{N}_2\text{H}_4/\text{Rh}$, operando a temperatura ambiente e con tempo di reazione 10'. Si precipita con metanolo il cloro-acetato che, sciolto in acqua, viene trattato con CH_3COOK (15 mol/Rh). La soluzione acquosa, dopo eliminazione del KCl con alcool, viene essiccata su H_2SO_4 e KOH; si riprende con acqua e si dializza con membrana cellulosica fino ad eliminazione completa

dell'acetato e del cloruro di potassio. La soluzione dializzata viene portata a secco su H_2SO_4 e KOH . Il sale si essicca su P_2O_5 a 56° per 6 ore. È rosso bruno, vetroso. Alle analisi e alle misure magnetiche è risultato:

	trov. %	Rh 35,10	N 14,54	C 18,30	H 4,95
per $\{\text{Rh}_4\text{C}_{18}\text{O}_{18}\text{N}_{12}\text{H}_{48}\} \cdot 2\text{H}_2\text{O}$					
	calc.	35,28	14,39	18,49	4,49
	$\chi_{\text{mol}} \cdot 10^6 = -260.$				

12 b) $\{\text{Rh}_4(\text{CH}_3\text{CO}_2)_9(\text{N}_2\text{H}_3)_3(\text{N}_2\text{H}_4)_2\}$. - È il sale 12 a) essiccato su P_2O_5 per 15 h a 80° . Il sale assume colore ocra-scuro. Alle analisi è risultato:

	trov. %	Rh 37,00	N 12,82	C 19,80	H 4,65
per $\{\text{Rh}_4\text{C}_{18}\text{O}_{18}\text{N}_{10}\text{H}_{44}\}$					
	calc.	37,45	12,73	19,64	4,03
	$\chi_{\text{mol}} \cdot 10^6 = -195.$				

13) $\{\text{Rh}_4(\text{CH}_3\text{CO}_2)_7(\text{N}_2\text{H}_3)_5\} \cdot 2\text{H}_2\text{O}$. - Si opera come per la preparazione del sale 12 a) con rapporto $\text{CH}_3\text{COOH} \cdot \text{N}_2\text{H}_4/\text{Rh} = 10/1$ e trattamento del cloro-acetato con eccesso di acetato di potassio. Dalla soluzione dializzata l'alcool e l'etere precipitano il sale giallo-ocra, che essiccato su P_2O_5 a 56° per 12 ore ha dato alle analisi:

	trov. %	Rh 40,35	N 14,24	C 16,30	H 4,71
per $\{\text{Rh}_4\text{C}_{14}\text{O}_{14}\text{N}_{10}\text{H}_{36}\} \cdot 2\text{H}_2\text{O}$					
	calc.	40,51	13,78	16,54	3,94
	$\chi_{\text{mol}} \cdot 10^6 = -180.$				

14 a) $\{\text{Rh}_4(\text{CH}_3\text{CO}_2)_7(\text{N}_2\text{H}_3)_{4,5}(\text{OH})_{0,5}\} \cdot 4\text{H}_2\text{O}$. - Si seguono le stesse modalità delle preparazioni 12 a) e 13) con rapporto $\text{CH}_3\text{COOH} \cdot \text{N}_2\text{H}_4/\text{K}_3\text{RhCl}_6 = 15/1$. Dalla soluzione acquosa dializzata l'alcool e l'etere precipitano il sale giallo bruno che essiccato su P_2O_5 a 56° per 6 ore ha dato alle analisi e alle misure magnetiche:

	trov. %	Rh 39,90	N 11,84	C 15,35	H 4,50
per $\{\text{Rh}_4\text{C}_{14}\text{O}_{14}\text{N}_9\text{H}_{35}\} \cdot 4,5\text{H}_2\text{O}$					
	calc.	39,45	12,06	16,07	4,12
	$\chi_{\text{mol}} \cdot 10^6 = -160.$				

14 b) $\{\text{Rh}_4(\text{CH}_3\text{CO}_2)_7(\text{N}_2\text{H}_3)_3(\text{OH})_2\}$. - È il sale 14 a) essiccato su P_2O_5 a 80° per 15 ore. Il sale assume colore ocra scuro. Alle analisi è risultato:

	trov. %	Rh 43,62	N 8,34	C 17,80	H 3,74
per $\{\text{Rh}_4\text{C}_{14}\text{O}_{16}\text{N}_6\text{H}_{32}\}$					
	calc.	43,28	8,82	17,65	3,39
	$\chi_{\text{mol}} \cdot 10^6 = -210.$				

Ringraziamo il laureando Gianangelo Bargigia per la valida collaborazione nello sviluppo della parte sperimentale.

Geologia. — *Sull'età dei graniti del Baltoro (Karakorum-Himalaya)*. Nota di ARDITO DESIO e ANTONIO LONGINELLI, presentata (*) dal Corrisp. A. DESIO.

INTRODUZIONE.

L'età dei graniti che affiorano nella catena del Karakorum e che compongono una serie di plutoni molto allungati da est ad ovest descrivendo un grande arco intorno al vertice della così detta « sintassi himalayana occidentale » [6], è stata più volte discussa e non si può dire che ci sia accordo fra i vari Autori. Limitandoci ai più recenti, troviamo che, secondo Dainelli [2], nel territorio del Karakorum e zone contermini vi sarebbero tre tipi di graniti e cioè: 1° graniti di tipo indefinito, precarbonici; 2° granititi e graniti a due miche, i più diffusi, di età precretacea; 3° graniti micaceo-anfibolici con annesse dioriti e rocce basiche d'età senoniana.

Wadia [16] distingue nel Kashmir, inteso in senso ampio, tre tipi di graniti e cioè: 1° granito biotitico, diffuso dal Kashmir all'Assam (precetaceo); 2° un granito a orneblenda, meno comune, ma simile come struttura e composizione al precedente di età postcretacea (eocenico-oligocenica); 3° un granito a tormalina, più recente dei precedenti, nei quali invia numerosi filoni.

Secondo Norin [14], nel Karakorum e regioni contermini, esistono tre principali tipi di graniti: a) granito a biotite postpaleozoico e forse posttriassico, ma presenoniano; b) granito plagioclasico, riferibile al tardo Cretaceo o al Terziario inferiore; c) granito biotitico a orneblenda, Terziario.

Per Mish [13], i tre tipi di graniti suddetti hanno grandi affinità fra loro, tanto che « si può appena parlare di tipi di età appena diversa »; vengono infatti considerati come differenziazioni singenetiche prodotte da uno stesso processo magmatico.

Schneider [15], riferendosi particolarmente alla parte nord-occidentale del Karakorum, parla per la porzione assiale della catena, di masse di granodiorite (Karakorum-Transhimalaya-Granit) che rappresentano un plutone eterogeneo variante, come composizione, da vere e proprie dioriti a orneblenda a granito biotitico privo o povero di orneblenda. Tali intrusioni sono considerate sinorogeniche: il corrugamento è attribuito al tardo Sopracretaceo ed al Terziario antico. Di età più recente, e cioè posttettonico e postoligocenico, sarebbe il granito aplitico che accompagna la scomposizione tettonica della regione.

(*) Nella seduta dell'8 aprile 1961.

Le determinazioni cronologiche sopra riportate, sono appoggiate ai rapporti tra le rocce intrusive e le rocce sedimentarie più o meno precisamente datate paleontologicamente. Non è questa la sede per un riesame critico di tali datazioni, che in generale hanno un solo limite cronologico. Qui vorremmo esporre brevemente ed in via del tutto preliminare, i risultati delle indagini effettuate sul terreno in occasione della Spedizione Italiana al Karakorum 1953-1955, e degli studi compiuti nel laboratorio di Geologia Nucleare del C.N.E.N., su due campioni di granito e uno di diorite del plutone del Baltoro. In una relazione di A. Desio e A. Marussi [7], presentata nell'estate del 1960 al Congresso Geologico Internazionale di Copenhagen, sono state esposte alcune considerazioni d'indole geologica e geofisica, che



Fig. 1. - Posizione geografica dell'area di prelevamento dei campioni (+), nell'Asia Centrale.

forniscono elementi di un certo interesse anche relativamente al problema dell'età dei graniti del Karakorum.

Ci limiteremo qui a considerare soltanto il plutone assiale del Karakorum (fig. 1), quel plutone che per una lunghezza di almeno 550 km ed una larghezza massima di 25 km, emerge da una coltre di rocce metamorfiche e sedimentarie in corrispondenza della parte assiale della catena fra il medio Shayok, nel Ladak, e la zona di Mastuj nel Chitral, descrivendo un grande arco intorno al vertice della « sintassi himalayana occidentale » e che pare continui verso ponente con il plutone assiale dell'Hindu Kush, forse per qualche centinaio di chilometri ancora [4]. Abbiamo detto plutone assiale, poiché il granito emerge in corrispondenza dell'asse orografico delle due catene, per cui le aree di maggior elevazione - anche se non sono proprio le cime culminanti - sono composte da granito. Lo stesso fatto si ripete del resto anche nelle catene vicine del Ladak, di Zaskar ed in altre ancora.

Nella regione del Baltoro, come nelle aree contermini, il plutone granitico è poco profondamente inciso, ossia la sua testa è, si può dire, appena intaccata, tanto che larghe parti della sua copertura sono ancora conservate.

Ciò significa che l'intrusione granitica ed il sollevamento assiale della catena non risalgono ad epoca molto antica. Ben più scoperti sono infatti i plutoni ercinici della regione del Kun-Lun e del Tien Shan.

Ma vi è pure un altro argomento d'un certo interesse che dobbiamo segnalare a questo proposito ed è di ordine geofisico.

Secondo le ricerche gravimetriche effettuate nel 1954 e 1955 da A. Marussi nel Karakorum durante la spedizione italiana sopra menzionata, lungo la porzione assiale del Karakorum si stende un'area di anomalia gravimetrica negativa, la quale, per paragone con i risultati ottenuti con ricerche gravimetriche e sismiche associate, nel vicino territorio del Pamir dai geofisici russi [3], va interpretata come conseguenza dell'elevato spessore del plutone granitico. Nel caso della catena terziaria di Roshan (Pamir) su 70 km di spessore locale della crosta terrestre, ben 40 km apparterrebbero allo strato di granito, 30 km allo strato di basalto.

Ma un'altra conclusione è stata ricavata dagli studi geofisici sui plutoni dell'Asia Centrale e cioè, che lo spessore attuale dello strato granitico sta in relazione con la sua età geologica. I plutoni granitici d'età ercinica, a seguito del lungo periodo di erosione al quale sono andati soggetti, sono assai meno potenti di quelli di età alpina. V'è una certa relazione, cioè, fra spessore ed età del plutone. Pur senza essere riuscito a stabilire lo spessore del plutone assiale del Karakorum in mancanza di misure sismiche, Marussi ha potuto tuttavia accertare uno spessore molto elevato e quindi indirettamente una età molto recente.

A questo punto, tenuto anche conto del disaccordo sulle determinazioni cronologiche precedenti e sull'età apparentemente molto recente del plutone granitico del Baltoro, si è pensato di affrontare il problema in via preliminare, studiando alcuni campioni con il metodo degli aloni pleocroici. A tale ricerca ne faranno seguito altre con l'impiego di metodi di datazione assoluta.

Di tali ricerche si è assunto il compito il laboratorio di Geologia Nucleare del Comitato Nazionale per l'Energia Nucleare, diretto dal prof. E. Tongiorgi. Fra i numerosi campioni di rocce granitoidi raccolti durante le Spedizioni Italiane del 1929 e del 1953-1955, sono stati esaminati tutti quelli che sembravano più adatti per composizione mineralogica a ricerche del genere e l'attenzione infine si è rivolta a due campioni di granito e ad uno di diorite. I primi due sono contrassegnati con le sigle 54-DUz e 54-D501 e provengono rispettivamente da Urdukas, sulla sinistra del ghiacciaio Baltoro, e dal fianco orientale della valle del Muztagh, confluyente di destra di quello del Baltoro, a breve distanza dallo sbocco (fig. 2). Le due località, che distano circa 5 km in linea d'aria una dall'altra, sono situate, la prima a meno di 3 km di distanza, sempre in linea d'aria, dal tetto del plutone granitico, la seconda circa



Fig. 2. - Località di raccolta dei tre campioni esaminati.

a = campione 54-D 501 (granito);

b = campione 54-DU z (granito);

c = 54-Z 154 (diorite).

2 km. Il terzo, che porta la sigla 54-Z154, proviene da una morena del ghiacciaio meridionale del Falchan Kangri (Broad Peak) che scende da un affioramento bene identificato fra il Falchan Kangri ed il Gasherbrum IV ⁽¹⁾.

CARATTERI PETROGRAFICI DEI CAMPIONI ESAMINATI.

I tre campioni in questione sono stati oggetto di indagine anche dai punti di vista del chimismo, della composizione mineralogica e delle particolarità strutturali da parte di B. Zanettin al quale dobbiamo i dati petrografici che seguono.

Nella Tabella I sono riportati i dati analitici delle tre rocce e le rispettive formule di Niggli ⁽²⁾. Qui sarà sufficiente mettere in rilievo le strette analogie di composizione esistenti fra i due campioni granitici del plutone del Baltoro: entrambi risultano appartenere al gruppo dei *magmi leucogranitici* di Niggli. Il campione 54-DUz corrisponde al *tipo aplitgranitico*, mentre il campione 54-D 501 va a collocarsi fra il *tipo aplitgranitico* ed il *tipo engadinitgranitico*. Composizione di roccia dioritica mostra invece il campione rappresentativo della massa affiorante fra il Falchan Kangri ed il Gasherbrum IV; corrisponde infatti abbastanza bene al *tipo normaldioritico*, pur

(1) Le coordinate geografiche delle località di prelevamento dei campioni sono:

54-DUz : 35° 43' 30'' Lat. N; 76° 15' 20'' Long. E da Greenwich,

54-D501 : 35° 45' 30'' Lat. N; 76° 19' 30'' Long. E da Greenwich,

54-Z154 : 35° 46' 00'' Lat. N; 76° 46' 00'' Long. E da Greenwich.

(2) Per notizie più dettagliate sul chimismo di queste rocce si veda E. CALLEGARI e B. ZANETTIN, *Chimismo di rocce vulcaniche e plutoniche del Karakorum centro-meridionale* [17]

mostrando di accostarsi per il valore di alcuni coefficienti, al *tipo normal-quarzodioritico*.

All'analogia di composizione chimica offerta dalle due rocce granitiche del Baltoro non fa riscontro una altrettanto stretta somiglianza di caratteri strutturali, pur essendo i due campioni sostanzialmente simili anche dal punto di vista della composizione mineralogica.

Il campione raccolto a Urdukas (54-DUz) ha struttura porfiroblastica per le dimensioni relativamente notevoli assunte da pochi feldspati sviluppatisi entro ad una matrice granoblastica a grana medio-piccola.

Questa matrice è costituita, in ordine di abbondanza, da *quarzo*, da *oligoclasio* al 20%. An circa e da *feldispato potassico*, nessuno dei quali mostra tendenza alcuna all'idiomorfismo.

Caratteristica dei granoblasti plagioclasici è di presentare porzioni letteralmente piene di granuli neri, attribuibili ad ossidi di ferro e titanio. In queste stesse porzioni sono inclusi anche minuti granuli di carbonati, lamelle di sericite, di muscovite o phengite; derivate queste ultime, almeno in parte, dalla trasformazione di biotite, come è possibile dedurre dal fatto che in qualche caso la biotite stessa è presente con lamine ancora leggermente pleocroiche che sfumano in un minerale micaceo totalmente incolore o verdolino. Altre lamine di biotite ben conservate e piccoli granuli di quarzo sono pure inclusi in questi plagioclasii, ma la loro presenza non è in relazione con le minute granulazioni sopradette.

I *granoblasti di feldspato potassico*, invece, sono di regola, liberi o quasi da inclusioni. Anche i *porfiroblasti plagioclasici* sono in qualche punto intorbidati da granuli di ferro e titanio, ma in larghe porzioni ne sono quasi del tutto sgombri. Inoltre, a differenza dei granoblasti, questi includono numerosi e grossi granuli di quarzo e grandi lamine muscovitiche disposte in genere in direzioni cristallografiche ben definite del plagioclasio che le ospita.

I *porfiroblasti di feldispato potassico* sono più rari di quelli plagioclasici. Essi inglobano talvolta piccoli plagioclasii e li sostituiscono ereditandone gli inclusi: quarzo, muscovite e ossidi di ferro; questi ultimi in granuletti, sono talora disposti in modo da simulare una zonatura nel feldispato potassico.

Poco numerosi sono i cristalli indipendenti di *biotite* e *muscovite*.

Il campione granitico della Valle Muztagh (54-D501) si differenzia da quello sopra descritto per una maggior uniformità di struttura, determinata dalle dimensioni all'incirca equivalenti dei vari componenti fondamentali e dalla scarsità di reciproche inclusioni; solo i plagioclasii, però, tendono ad assumere contorni cristallini definiti.

Basterà ricordare che i plagioclasii includono di solito grandi lamine peciloblastiche di muscovite, spesso disposte parallelamente ai piani di contatto dei geminati ed ai piani di sfaldatura dell'ospite; qualche altra lamina può attraversare indisturbata cristalli contigui di plagioclasio di diversa orientazione.

La roccia (54-Z154) raccolta nelle morene del Ghiacciaio meridionale del Falchan Kangri possiede una associazione mineralogica che non è certo comune alle rocce di composizione dioritica: basti ricordare la contemporanea presenza di pirosseno e di feldispato potassico fra i componenti mineralogici fondamentali, e la ricchezza di quarzo.

In ordine di abbondanza i componenti sono i seguenti: plagioclasio, quarzo, feldispato potassico, pirosseno, biotite, anfibolo.

I *plagioclas*i sono gli unici minerali che presentino un distinto idiomorfismo, nonostante che di frequente i bordi risultino più o meno profondamente riassorbiti. Di regola sono ben geminati, per lo più secondo le leggi albite-Carlsbad ed albite, e corrispondono a miscele di composizione variabile fra il 40-55 % An. Al nucleo di un cristallo zonato è stato determinato un contenuto in An pari al 65 %. Le zonature sono comuni; e fra di esse se ne può distinguere una regolare, dovuta a successiva cristallizzazione tardiva di miscele via via più ricche di Al, ed un'altra dovuta a sostituzione del plagioclasio originario ad opera di miscele più ricche in Ab. Quest'ultima dà luogo a più bruschi scarti di composizione, è più irregolare ed è spesso limitata ai bordi. La sostituzione può avere interessato irregolarmente tutto un individuo, preservando solo alcuni lembi dell'antico plagioclasio. È stato notato anche che in qualche caso sono state preservate soltanto alcune « zone » di antichi cristalli zonati, o soltanto una porzione di una « zona », mentre tutta la parte restante ha assunto composizione omogenea o presenta una leggera zonatura sfumata. Le alterazioni sono rare e, quando ci sono, sono limitate al nucleo del plagioclasio, che può essere allora totalmente occupato da un aggregato di lamine muscovitiche ben sviluppate.

Sia il *quarzo* che il *feldispato potassico* formano vaste plaghe allotriomorfe nelle quali sono isolati ed inclusi numerosi cristalli plagioclasici ed anche minerali femici in individui di piccole dimensioni. Tutti questi inclusi sono evidentemente riassorbiti (i minerali femici sono anche trasformati), ma il riassorbimento è molto più progredito nelle plaghe di feldispato potassico; qui i plagioclasii possono essere addirittura smembrati in piccole porzioni di forma irregolare, fino ad apparire evanescenti. Nelle plaghe feldispatiche sono presenti, benché molto raramente, degli aggregati di minutissimi individui di plagioclasio e di quarzo evidentemente in via di scomparsa e separati fra loro dalla scarsa matrice, formata appunto da feldispato potassico.

I minerali femici, pirosseni, biotite ed anfiboli, non presentano limiti cristallini definiti, con eccezione di alcune lamine di biotite. Pirosseni-anfiboli e pirosseni-anfiboli-biotite sono spesso intimamente associati; gli ultimi due devono derivare in parte da trasformazione di pirosseno, il quale di solito occupa la parte centrale di questi irregolari aggregati femici.

Il *pirosseno* è rappresentato da termini *diopsidico-augitici* e spesso è trasformato ai bordi in anfibolo del tipo attinoto.

L'*anfibolo* può anche formare individui indipendenti dal pirosseno ed allora è rappresentato quasi sempre da una *orneblenda* dal pleocroismo appena avvertibile, parzialmente trasformata in biotite.

La *biotite* ha per lo più un colore rossastro; in pochi casi include piccoli individui di pirosseno perfettamente conservati. Quando è in lamine idiomorfe rappresenta certamente un minerale primario.

I minerali femici in via di alterazione o di trasformazione sono chiazzati da abbondanti granuli di ossidi di ferro e titanio.

Fra gli accessori è molto comune l'apatite; più scarsi lo zirconio, l'epidoto, l'ortite.

In base ai caratteri petrografici ora esposti si può affermare che questa roccia di composizione dioritica si è costituita in due fasi successive: dapprima sono cristallizzati i pirosseni (forse anche parte dell'anfibolo) ed i plagioclasti calcici costituendo così una roccia gabbbrica. In una fase successiva questa roccia fu permeata da sostanze siliceo-alcaline, spiccatamente potassiche, che determinarono i citati fenomeni di assimilazione, sostituzione e trasformazione, e, in definitiva, la modificazione in senso sialico della composizione originaria.

TABELLA I.

Composizione chimica.

	(Anal. E. Callegari)	(Anal. E. Callegari)	(Anal. B. Zanettin)
	1	2	3
	(54-DUz)	(54-D501)	(54-Z154)
SiO ₂	72,62 %	73,36 %	59,27 %
TiO ₂	0,17	0,12	0,80
P ₂ O ₅	0,12	0,09	0,28
Al ₂ O ₃	14,90	14,82	15,37
Fe ₂ O ₃	0,06	0,02	0,27
FeO	1,10	0,93	5,81
MnO	0,03	0,06	0,11
MgO	0,47	0,33	4,07
CaO	1,30	1,59	5,91
Na ₂ O	3,91	4,37	2,60
K ₂ O	4,19	3,85	2,82
H ₂ O ⁺	0,84	0,77	2,14
H ₂ O ⁻	0,02	0,04	0,20
	99,73	100,35	99,65

Formule Niggli.

	si	al	fm	c	alk	k	mg
1 - Laucogranito di Urdukas . .	396	47,9	9,2	7,6	35,3	0,41	0,83
Tipo aplitgranitico	460	47	8	5	40	0,45	0,25
2 - Leucogranito di Valle Muztagh	397	47,3	7,3	9,2	36,2	0,37	1,26
Tipo engadinitgranitico	380	43	13	11	36	0,5	0,25
3 - Diorite del Falchan K.-Gasherbrum IV	129	29,3	36,3	20,5	13,9	0,42	0,54
Tipo normaldioritico	155	30	35	21	14	0,3	0,5
Tipo normalquarzodioritico . .	225	32	31	19	18	0,25	0,45

ETÀ DEGLI ALONI PLEOCROICI.

I tre campioni sopra ricordati sono stati studiati con il metodo degli aloni pleocroici. Tale metodo è ormai ben noto e noti sono pure i suoi limiti nella determinazione dell'età di rocce magmatiche. Ciò non esclude che talvolta lo studio degli aloni pleocroici risulti vantaggioso. Questo è il caso di rocce molto recenti per le quali può essere difficile ottenere indicazioni cronologiche utilizzando altri metodi. In condizioni favorevoli, e cioè quando siano presenti inclusi con concentrazioni piuttosto elevate di elementi radioattivi, si può giungere a stimare età dell'ordine di pochissimi milioni di anni [11].

Per i tre campioni esaminati è stata innanzi tutto determinata la sensibilità delle biotiti all'irradiazione α artificiale, misurando l'incremento della densità ottica per dosi crescenti di α . Per l'irradiazione è stata usata una sorgente di Po^{210} . Le sensibilità delle biotiti dei campioni 54-DUz e 54-D501 sono risultate quasi uguali tra di loro ed entrambe più elevate di quella della biotite del Monte Capanne (Isola d'Elba), alla quale sono riferite tutte le misure di questo tipo. Per quanto riguarda il campione 54-Z154, la sua biotite mostra invece una sensibilità minore, prossima a quella della biotite dell'Elba. In pratica un'elevata sensibilità della biotite si traduce in un'accelerazione del processo di formazione degli aloni e quindi in un più rapido incremento della loro densità ottica. Il contrario in caso di bassa sensibilità.

Per la determinazione delle attività specifiche dei minerali accessori che hanno dato origine agli aloni misurati, sono state usate lastre nucleari Ilford c2 di $50\ \mu$ di spessore, esposte alle sezioni sottili di roccia per periodi di venti-trenta giorni. I valori trovati per tale parametro, pur essendo il numero delle osservazioni limitato, mostrano che l'attività specifica degli zirconi di Urdukas è notevolmente elevata. Il valore medio delle misure effettuate è di $5,00\ \alpha/\text{cm}^2\text{s}$. Per il campione 54-D501 tale valore risulta sensibilmente inferiore, $1,86\ \alpha/\text{cm}^2\text{s}$, e con valori apparentemente più dispersi. La maggior parte degli zirconi inclusi in biotite del campione 54-Z154, con attività variabili da $0,18$ a $0,40\ \alpha/\text{cm}^2\text{s}$, non hanno dato origine ad aloni visibili.

Per stabilire una relazione fra attività specifica ed intensità degli aloni è stata misurata la densità ottica di questi ultimi a mezzo di un microfotometro. I valori sperimentali ottenuti sono riuniti nel grafico (fig. 3): in ascissa sono riportate le attività specifiche degli inclusi ed in ordinata le densità ottiche dei relativi aloni.

Nel caso del campione 54-DUz i punti sperimentali relativi agli aloni misurati sono notevolmente ravvicinati ed in base ad essi è stata calcolata la migliore retta rappresentativa. Queste rette hanno il significato di isocrone e per biotiti della stessa sensibilità permettono di calcolare il rapporto fra le età degli aloni di due rocce, supposta cronologicamente nota una di esse.

Per tale calcolo è stata assunta come riferimento la retta relativa agli aloni della granodiorite del Monte Capanne, come in tutti gli altri lavori eseguiti con lo stesso metodo presso la Università Libera di Bruxelles ed il Laboratorio di Geologia Nucleare di Pisa. Per questa isocrona è stato finora assunto il valore indicativo di 30 MA (milioni di anni). Ricerche attualmente in corso presso il Laboratorio di Geologia Nucleare di Pisa permetteranno di stabilire più esattamente tale età con metodi assoluti di datazione.

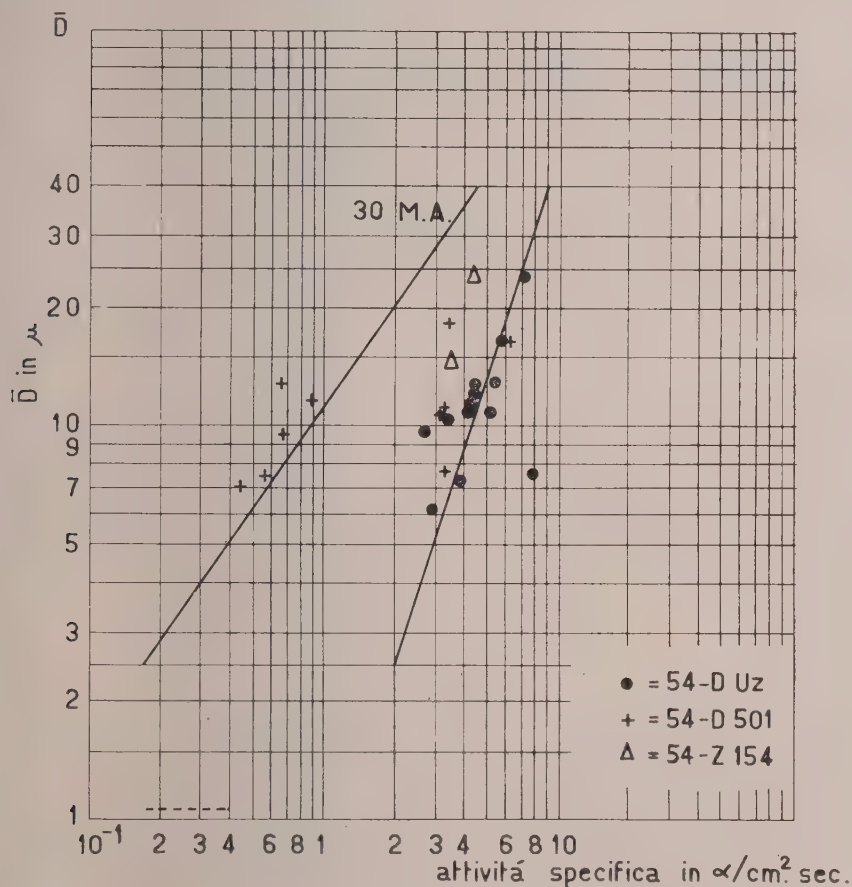


Fig. 3.

Tenuto conto degli errori nella determinazione, in base ai punti sperimentali, della retta relativa all'Elba e di quella relativa al campione 54-DUz, l'età di quest'ultimo risulta di 6 ± 2 MA. L'errore indicato è quello relativo alle misure e non tiene conto dell'indeterminazione dell'età reale dell'Elba.

Considerando la maggior sensibilità all'irradiazione artificiale della biotite di Urdukas (54-DUz) rispetto a quella del Monte Capanne, il valore

indicato di 6 ± 2 MA dovrebbe ritenersi maggiore dell'età reale. Non è tuttavia possibile una stima quantitativa dell'effetto dovuto alla maggiore sensibilità in quanto le condizioni di irradiazione artificiale non riproducono esattamente quelle naturali, pur avendo un andamento simile.

Per quanto riguarda il campione 54-D501, i punti sperimentali sono divisi in due gruppi separati: uno molto vicino all'isocrona di 30 MA e l'altro assai prossimo ai punti di Urdukas. Da tale situazione si può dedurre quanto segue: i punti prossimi a quelli di Urdukas fanno presumere che la roccia abbia subito una azione metamorfica coeva di quest'ultima manifestazione plutonica. In seguito a tale azione gli aloni già formati nella biotite sono stati in gran parte cancellati. I punti sperimentali prossimi all'isocrona di 30 MA dimostrano che questa azione non è stata completa ed indicano per i relativi aloni un'età che può essere maggiore o uguale a 30 MA rispettivamente nel caso che gli aloni in questione siano stati almeno parzialmente interessati o no dall'azione metamorfica.

In tali condizioni non è possibile tracciare un'isocrona rappresentativa ed è lecito solamente datare l'azione metamorfica subita dal granito la cui vera età si può indicare, come ordine di grandezza, in maggiore o uguale a 30 MA.

Per il campione 54-Z154, in considerazione del fatto che è stato possibile misurare la densità ottica di due soli aloni, non si possono avanzare conclusioni fondate. Il fatto però che i numerosi inclusi con attività specifiche comprese tra 0,18 e 0,40 $\alpha/\text{cm}^2\text{s}$ non hanno dato luogo ad aloni misurabili, consente di avanzare l'ipotesi di un'età minore di 30 MA o di un'azione metamorfica subita in un corrispondente periodo.

CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE.

In complesso si tratta di risultati senza dubbio molto interessanti anche se ulteriori ricerche su altri materiali e con metodi diversi dovranno essere eseguite al fine di chiarire vari problemi rimasti ancora un po' oscuri relativamente all'età delle rocce in questione.

Comunque, il fatto che gli aloni del granito di Urdukas (54-DUz) risultano di età recentissima, età che rientrerebbe entro i limiti del Pliocene, che va da 1 a 12 MA (Holmes 1960), consente verosimilmente di localizzare l'età della manifestazione granitica nel Pliocene medio.

Va pure detto che il granito di Urdukas, a giudicare dal suo aspetto macroscopico, sembra il tipo più comune e, possiamo dire, predominante nel plutone del Baltoro, mentre il granito che affiora nella bassa valle Muztagh, da cui proviene appunto l'altro campione, è nel complesso un granito piuttosto eterogeneo per la presenza di facies diverse, malgrado il campione risulti petrograficamente assai omogeneo.

I risultati dello studio degli aloni pleocroici di quest'ultimo granito provano che la sua età è oligocenica o pre-oligocenica e che in ogni modo esso

ha subito un'azione metamorfica recente e comunque della stessa età che si può attribuire alla manifestazione di Urdukas.

Oltre alle manifestazioni suddette dobbiamo pure ricordare i filoni di pegmatite che intersecano la massa granitica della bassa valle Muztagh (come del resto anche quella di Urdukas) e che attestano l'esistenza di una ulteriore attività endogena.

Nella regione del Baltoro vi sarebbero state, dunque, almeno tre fasi databili dall'Oligocene (o pre-Oligocene), dal Pliocene medio e dal Pliocene superiore se non dal Quaternario, nella complicata serie di processi attraverso i quali si è venuto a formare il grande plutone granitico, com'è quello di cui ci stiamo occupando. Il quale sebbene appaia relativamente omogeneo ed unitario ad un esame superficiale, risulta invece, per vari indizi, abbastanza eterogeneo e, potremo anche dire, polimorfo.

Quanto alla diorite del Falchan Kangri (54-Z154), che forma una massa ben definita rispetto alle rocce incassanti, gli elementi di cui disponiamo sono ancora troppo scarsi per pronunziarci. In ogni caso la sua impostazione, datarebbe da un'epoca posteriore a quella dell'azione endogena più antica indicata per il granito del Muztagh, e cioè dell'Oligocene.

È ovvio che le conclusioni preliminari sopra esposte relativamente ai graniti del Baltoro non possono essere limitate soltanto al territorio relativamente ristretto che abbiamo considerato. Senza volerle estendere a tutta la catena, dobbiamo tuttavia ritenerle significative per buona parte di essa.

Un'altra conclusione preliminare che potremmo trarre, non soltanto però da quanto abbiamo esposto in questa Nota, ma anche dagli studi in corso, è che non hanno un vero significato cronologico le distinzioni di carattere puramente mineralogico istituite precedentemente per i vari tipi di graniti e di rocce affini del Karakorum.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] BERTHELSEN A., *On the Geology of the Rupshu district NW Himalaya*, «Meddel. Dansk. Geol. Forening», vol. 12, pp. 350-414 (1953) Copenhagen.
- [2] DAINELLI G., *Serie dei terreni*, in: *Spedizione De Filippi nell'Himalaya, Caracorum e Turchestan Cinese (1913-1914)*, ser. 2^a, vol. 2 (1934) Zanichelli, Bologna.
- [3] DEMENISKAYA R. M., *Possible correlation between thickness of the earth's crust and age of mountain fold*, «Assoc. Geology», n. 6 (1957), Moskow (in russo).
- [4] DESIO A., *The Italian Expedition to the Karakoram in 1929. Geological Work of the Expedition*, «Geogr. Journal», vol. LXXV, n. 5, pp. 402-411 (1930). R. Geographical Society, London.
- [5] IDEM, *La Spedizione Geografica Italiana al Karakoram (1929)*. Arti Grafiche Bertarelli (1936), Milano.
- [6] IDEM, *Sull'estensione dei plutoni granitici nel Karakorum e nell'Hindu Kush (Asia Centrale)*, «Rend. Accad. Naz. Lincei», ser. 8^a, vol. XXVIII, fasc. 5, pp. 783-786 (1960), Roma.
- [7] IDEM e MARUSSI A., *On the Geotectonics of the Granites in the Karakorum and Hindu Kush (Central Asia)*. International Geological Congress. Report of the XXV Session, Norden. Part. II, Proceed. Section 2, pp. 156-167 (1960), Copenhagen.

- [8] IDEM e ZANETTIN B., *Spedizione Scientifico-Alpinistica Italiana al Karakorum (Himalaya) 1953-1955. Notizie geologico-petrografiche preliminari sul bacino del ghiacciaio Baltoro*, «La Ricerca Scientifica», anno 27°, n. 3, pp. 657-673 (1957); Con. Naz. Ricerche, Roma.
- [9] DE TERRA H., *Geologische Forschungen im Westliche K'un-Lun und Karakorum-Himalaya*, «Wiss. Ergebnisse Trinkler'schen Zentralasien Expedition», Bd. II (1932), D. Reimer, Berlin.
- [10] DEUTSCH S., HIRSCHBERG D., PICCIOTTO E., *Mesure des âges géologiques par les halos pléochroïques*, «Experientia», vol. XI, p. 172 (1955), Basel.
- [11] DEUTSCH S., LONGINELLI A., *Age des halos pléochroïques de quelques granites tertiaires de la Toscane*, «Experientia», vol. XV, p. 8 (1959), Basel.
- [12] DYHRENFURTH G. O., *Baltoro*. B. Schwabe (1939), Basel.
- [13] MISH P., *Metasomatic Granitization of Batholithic Dimensions*, «Amer. Journal of Science», vol. 247, n. 4, pp. 209-245; n. 10, pp. 673-705 (1949), New York.
- [14] NORIN E., *Reports from Scientific Expedition to the N. W. prov. of China u. leadership of Sven Hedin*. Publ. 29, III, Geology, 7, Geological Explorations in Western Tibert (1946) Stockholms.
- [15] SCHNEIDER H. J., *Tektonik und Magmatismus in NW-Karakorum*, «Geol. Rundschau», Bd. 46, H. 2, pp. 426-476 (1957), Stuttgart.
- [16] WADIA D. M., *The Cretaceous Volcanic Series of Astor-Deosai, Kashmir, and its Instrusions*, «Rec. Geol. Survey of India», vol. 72, parte 2^a (1937), Calcutta.
- [17] ZANETTIN B., CALLEGARI E., *Chimismo di rocce vulcaniche e plutoniche del Karakorum Centro-Meridionale*, «Mem. Ist. Geol. Min. Univ. Padova», vol. XXI, pp. 3-38 (1960), Padova.

Biochimica. — *Ricerche sul meccanismo dell'equilibrio con l'ossigeno dell'emoglobina. Effetto della concentrazione di emoglobina sulle caratteristiche dell'equilibrio con l'ossigeno* (*). Nota di ALESSANDRO ROSSI-FANELLI, JEFFRIES WYMAN, ERALDO ANTONINI e ANTONIO CAPUTO, presentata (**) dal Corrisp. A. ROSSI-FANELLI.

Nostre recenti ricerche, eseguite con il metodo della diffusione della luce e con l'ultracentrifugazione, hanno indicato che l'emoglobina umana si dissocia reversibilmente in diverse condizioni sperimentali, ad esempio soluzioni saline concentrate e soluzioni a pH basso ed alto ($\text{pH} > 10$ e $\text{pH} < 6$), in subunità a peso molecolare metà del peso molecolare delle molecole intere [1].

In tali condizioni sperimentali è stato messo in evidenza un paradosso: l'esponente n dell'equazione empirica di Hill, che serve a caratterizzare lo equilibrio Hb-ossigeno, mantiene il suo valore molto vicino a 3 ed anzi, in soluzioni saline molto concentrate, mostra tendenza ad innalzarsi [2, 3]. Infatti questa costante (n), che è un indice delle interazioni tra i centri che legano l'ossigeno [4] (gli emi), non dovrebbe, secondo le correnti vedute, superare il numero degli emi presenti in una stessa molecola e questo numero deve essere considerato uguale a 2 per le molecole dissociate.

La spiegazione più ovvia di questo paradosso, benché appaia alquanto improbabile, è quella di assumere interazioni tra gli emi appartenenti a diverse subunità in addizione alle interazioni tra le paia di emi presenti in ciascuna subunità. È intuibile che una tale interazione intermolecolare dovrebbe dipendere dalla concentrazione della proteina e di conseguenza il valore di n dovrebbe calare più o meno fortemente con la diminuzione della concentrazione.

Per esaminare questa possibilità sono state determinate le curve di dissociazione con l'ossigeno di soluzioni di emoglobina umana, ad alta forza ionica e con concentrazioni di pigmento da circa 50 a 0,5 mg/ml ed i risultati sono riportati nella Tabella I.

Nella Tabella II sono riportati simili risultati su soluzioni di emoglobina a forza ionica estremamente bassa. Anche in queste condizioni vi sono indicazioni, benché meno sicure, che l'emoglobina si dissocia in subunità, ma qui non esiste il problema di interpretare i risultati perché n è sempre minore di 2.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Biologica della Università di Roma e nell'Istituto « Regina Elena » per lo Studio e la Cura dei Tumori, Roma.

(**) Nella seduta dell'11 marzo 1961.

I dati riportati nelle tabelle mostrano che, soprattutto negli esperimenti ad alta forza ionica, il valore di n tende a diminuire con il diminuire della concentrazione della proteina, come ci si dovrebbe aspettare qualora esistessero interazioni intermolecolari; ciò non di meno l'effetto è molto piccolo considerando che le misure sono state eseguite variando la concentrazione di emoglobina circa cento volte.

TABELLA I.

Effetto della concentrazione di emoglobina sul valore di n e di $P_{1/2}$ in soluzioni ad alta forza ionica.

Tampone di fosfati ($\text{KH}_2\text{PO}_4 + \text{K}_2\text{HPO}_4$) 0,5 M, pH 7.2°C

Concentrazione Hb mg/ml	n	log $P_{1/2}$
62,5	3,60	1,12
62,5	3,20	1,11
62,5	3,35	1,06
12,5	3,05	0,98
2,5	2,90	0,95
0,5	2,70	0,99

TABELLA II.

Effetto della concentrazione di emoglobina sul valore di n e di $P_{1/2}$ in soluzioni a bassa forza ionica.

Tampone di fosfati 2×10^{-4} M pH 7.0 20°C

Concentrazione Hb mg/ml	n (*)	log $P_{1/2}$
69,0	1,50	0,54
13,8	1,60	0,71
2,75	1,50	0,50
0,55	1,40	0,30

(*) Le curve di dissociazione in queste condizioni mostrano un alto grado di asimmetria; il valore di n tende ad aumentare con il grado di saturazione dell'emoglobina con l' O_2 . Il valore di n riportato nella Tabella è stato calcolato intorno al 50 % di saturazione.

È interessante notare a questo proposito che anche la dissociazione dell'emoglobina in subunità (in soluzioni saline concentrate ed a pH acido) è relativamente poco sensibile a variazioni di concentrazioni della proteina entro ampi limiti [1].

Il problema di dare una spiegazione adeguata e completa a tutti questi fenomeni è chiaramente molto complesso e tentativi in tale senso sembrano prematuri finché non siano disponibili nuovi fatti sperimentali.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] A. ROSSI FANELLI, E. ANTONINI, A. CAPUTO, « J. Biol. Chem. », 236, 391, 196.
- [2] A. ROSSI FANELLI, E. ANTONINI, A. CAPUTO, « J. Biol. Chem. », 236, 397, (1961).
- [3] A. ROSSI FANELLI, J. WYMAN, E. ANTONINI, A. CAPUTO, Comunicazione al V Congresso Internazionale di Biochimica, Mosca, agosto 1961.
- [4] J. WYMAN, *Advances in Protein Chemistry*, Vol. 4. Academic Press Inc., New York 1948, p. 407.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Sul calcolo approssimato degli autovalori delle trasformazioni compatte e delle relative molteplicità.* Nota II di LUCIANO DE VITO, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

Vogliamo ora dimostrare il seguente teorema: ⁽²⁾

VI. — Sia $s \geq 2$. Se per ogni intero k , compreso tra 1 e $s-1$, si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_k^{2n} - b_{k,n^2})^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{k,n^2}^n - p_k^{1/n} \lambda_k^{2n})^{1/n} = 0,$$

riesce:

$$(13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_s^2 - b_{s,n^2})^{1/n} = 0.$$

Esiste un indice n_s tale che, per $n \geq n_s$, riesce: $b_{s,n} > 0$. Per questo, basta dimostrare che esiste un indice n_s tale che, per $n \geq n_s$ si ha:

$$\sum_{h=1}^s p_h \lambda_h^{2n+2} - \sum_{k=1}^{s-1} p_k^{n/n+1} a_{k,(n+1)^2}^{n+1} > 0.$$

Sia η un numero positivo minore di $\frac{\lambda_s^2}{(s-1) \max_{k=1, \dots, s-1} p_k}$. Poiché si ha:

$$p_k \lambda_k^{2n+2} - p_k^{n/n+1} a_{k,(n+1)^2}^{n+1} = p_k^{n/n+1} (p_k^{1/n+1} \lambda_k^{2n+2} - a_{k,(n+1)^2}^{n+1}),$$

dall'ipotesi $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{k,n^2}^n - p_k^{1/n} \lambda_k^{2n})^{1/n} = 0$ segue l'esistenza di un indice n_s tale che, per $n \geq n_s$ riesce:

$$\begin{aligned} & \left| p_k \lambda_k^{2n+2} - p_k^{n/n+1} a_{k,(n+1)^2}^{n+1} \right| \leq p_k^{n/n+1} \eta^{n+1} \leq p_k \eta^{n+1} \\ & < \frac{p_k}{(s-1)^{n+1}} \frac{\lambda_s^{2n+2}}{(\max_{h=1, \dots, s-1} p_h)^{n+1}} \leq \frac{p_k \lambda_s^{2n+2}}{(s-1) \max_{h=1, \dots, s-1} p_h} \leq \frac{\lambda_s^{2n+2}}{s-1} \leq p_s \frac{\lambda_s^{2n+2}}{s-1} \\ & k = 1, \dots, s-1 \end{aligned}$$

donde, per $n \geq n_s$:

$$\begin{aligned} & \sum_{h=1}^s p_h \lambda_h^{2n+2} - \sum_{k=1}^{s-1} p_k^{n/n+1} a_{k,(n+1)^2}^{n+1} = \sum_{h \geq s} p_h \lambda_h^{2n+2} \\ & \quad + \sum_{k=1}^{s-1} (p_k \lambda_k^{2n+2} - p_k^{n/n+1} a_{k,(n+1)^2}^{n+1}) \\ & \geq \sum_{h \geq s} p_h \lambda_h^{2n+2} - \sum_{k=1}^{s-1} \left| p_k \lambda_k^{2n+2} - p_k^{n/n+1} a_{k,(n+1)^2}^{n+1} \right| > \sum_{h \geq s} p_h \lambda_h^{2n+2} - p_s \frac{\lambda_s^{2n+2}}{s-1} \geq 0. \end{aligned}$$

(*) Nella seduta dell'11 marzo 1961.

(2) La numerazione delle formule e dei teoremi della presente Nota prosegue quella della Nota I.

Si ha quindi, per $n \geq n_s$:

$$\delta_{s,n} = \left(t_{n+1} - \sum_k^{s-1} p_k^{n/n+1} a_{k,(n+1)^2}^{n+1} \right) \left(t_n - \sum_k^{s-1} p_k \delta_{k,n^2}^n \right)^{-1}.$$

Per $n \geq n_s$ riesce allora:

$$\begin{aligned} (14) \quad (\lambda_s^2 - \delta_{s,n^2})^{1/n} &= \left\{ \lambda_s^2 - \lambda_s^2 \left[p_s + \sum_{h \geq s+1} p_h \left(\frac{\lambda_h}{\lambda_s} \right)^{2n^2+2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_k^{s-1} \lambda_k^{-2n^2-2} (p_k \lambda_k^{2n^2+2} - p_k^{n^2/n+1} a_{k,(n^2+1)^2}^{n^2+1}) \right] \right. \\ &\quad \left. \cdot \left[p_s + \sum_{h \geq s+1} p_h \left(\frac{\lambda_h}{\lambda_s} \right)^{2n^2} + \sum_k^{s-1} p_k \frac{\lambda_k^{2n^2} - \delta_{k,n^4}^{n^2}}{\lambda_s^{2n^2}} \right]^{-1} \right\}^{1/n} = \\ &= \lambda_s^{2/n} \left[\sum_{h \geq s+1} p_h \left(\frac{\lambda_h}{\lambda_s} \right)^{2n^2} - \sum_{h \geq s+1} p_h \left(\frac{\lambda_h}{\lambda_s} \right)^{2n^2+2} + \sum_k^{s-1} p_k \frac{\lambda_k^{2n^2} - \delta_{k,n^4}^{n^2}}{\lambda_s^{2n^2}} \right. \\ &\quad \left. - \sum_k^{s-1} \lambda_k^{-2n^2-2} (p_k \lambda_k^{2n^2+2} - p_k^{n^2/n+1} a_{k,(n^2+1)^2}^{n^2+1}) \right]^{1/n} \cdot \left[p_s + \sum_{h \geq s+1} p_h \left(\frac{\lambda_h}{\lambda_s} \right)^{2n^2} \right. \\ &\quad \left. + \sum_k^{s-1} p_k \frac{\lambda_k^{2n^2} - \delta_{k,n^4}^{n^2}}{\lambda_s^{2n^2}} \right]^{-1/n}. \end{aligned}$$

Si ha:

$$\begin{aligned} (15) \quad &\left[\sum_{h \geq s+1} p_h \left(\frac{\lambda_h}{\lambda_s} \right)^{2n^2} - \sum_{h \geq s+1} p_h \left(\frac{\lambda_h}{\lambda_s} \right)^{2n^2+2} + \sum_k^{s-1} p_k \frac{\lambda_k^{2n^2} - \delta_{k,n^4}^{n^2}}{\lambda_s^{2n^2}} \right. \\ &\quad \left. - \sum_k^{s-1} \lambda_k^{-2n^2-2} (p_k \lambda_k^{2n^2+2} - p_k^{n^2/n+1} a_{k,(n^2+1)^2}^{n^2+1}) \right]^{1/n} \leq \left[\sum_{h \geq s+1} p_h \left(\frac{\lambda_h}{\lambda_s} \right)^{2n^2} \right]^{1/n} \\ &\quad + \left[\sum_{h \geq s+1} p_h \left(\frac{\lambda_h}{\lambda_s} \right)^{2n^2+2} \right]^{1/n} + \sum_k^{s-1} p_k^{1/n} \left(\frac{\lambda_k^{2n^2} - \delta_{k,n^4}^{n^2}}{\lambda_s^{2n^2}} \right)^{1/n} \\ &\quad + \sum_k^{s-1} p_k^{n/n+1} \lambda_s^{-\frac{2n^2+2}{n}} (a_{k,(n^2+1)^2}^{n^2+1} - p_k^{1/n+1} \lambda_k^{2n^2+2})^{1/n}. \end{aligned}$$

Usando un ragionamento impiegato nella dimostrazione del teorema II, si vede che:

$$(16) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{h \geq s+1} p_h \left(\frac{\lambda_h}{\lambda_s} \right)^{2n^2} \right)^{1/n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{h \geq s+1} p_h \left(\frac{\lambda_h}{\lambda_s} \right)^{2n^2+2} \right)^{1/n} = 0.$$

Inoltre, dall'ipotesi fatta, deriva che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_k^{2n^2} - \delta_{k,n^4}^{n^2})^{1/n^2} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{k,(n^2+1)^2}^{n^2+1} - p_k^{1/n+1} \lambda_k^{2n^2+2})^{1/n^2+1} = 0,$$

$$k = 1, \dots, s-1.$$

Ne viene che, fissato un numero positivo ε minore di λ_s^2 , riesce definitivamente per $n \rightarrow \infty$:

$$(17) \quad \left(\frac{\lambda_k^{2n^2} - b_{k,n^4}^{n^2}}{\lambda_s^{2n^2}} \right)^{1/n} \leq \left(\frac{\varepsilon}{\lambda_s^2} \right)^n, \quad \lambda_s^{-\frac{2n^2+2}{n}} (a_{k,(n^2+1)^2}^{n^2+1} - p_k^{1/n^2+1} \lambda_k^{2n^2+2})^{1/n} \leq \left(\frac{\varepsilon}{\lambda_s^2} \right)^{\frac{n^2+1}{n}}.$$

Poiché

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\varepsilon}{\lambda_s^2} \right)^n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\varepsilon}{\lambda_s^2} \right)^{\frac{n^2+1}{n}} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_k^{n/(n^2+1)} = 1,$$

dalle (15) (16) (17) si trae:

$$(18) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{h \geq s+1} p_h \left(\frac{\lambda_h}{\lambda_s} \right)^{2n^2} - \sum_{h \geq s+1} p_h \left(\frac{\lambda_h}{\lambda_s} \right)^{2n^2+2} + \sum_{i=1}^{s-1} p_k \frac{\lambda_k^{2n^2} - b_{k,n^4}^{n^2}}{\lambda_s^{2n^2}} - \sum_{i=1}^{s-1} \lambda_k^{-2n^2-2} (p_k \lambda_k^{2n^2+2} - p_k^{n^2/(n^2+1)} a_{k,(n^2+1)^2}^{n^2+1}) \right]^{1/n} = 0.$$

Tenuto conto di (17) si ha, definitivamente per $n \rightarrow \infty$:

$$(19) \quad p_s^{1/n} \leq \left[p_s + \sum_{h \geq s+1} p_h \left(\frac{\lambda_h}{\lambda_s} \right)^{2n^2} + \sum_{i=1}^{s-1} p_k \frac{\lambda_k^{2n^2} - b_{k,n^4}^{n^2}}{\lambda_s^{2n^2}} \right]^{1/n} \\ \leq \left[p_s + \sum_{h \geq s+1} p_h \left(\frac{\lambda_h}{\lambda_s} \right)^{2n^2} + \sum_{i=1}^{s-1} p_k \left(\frac{\varepsilon}{\lambda_s^2} \right)^{n^2} \right]^{1/n}.$$

Poiché:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_s^{1/n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[p_s + \sum_{h \geq s+1} p_h \left(\frac{\lambda_h}{\lambda_s} \right)^{2n^2} + \sum_{i=1}^{s-1} p_k \left(\frac{\varepsilon}{\lambda_s^2} \right)^{n^2} \right]^{1/n} = 1$$

da (19) segue:

$$(20) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[p_s + \sum_{h \geq s+1} p_h \left(\frac{\lambda_h}{\lambda_s} \right)^{2n^2} + \sum_{i=1}^{s-1} p_k \frac{\lambda_k^{2n^2} - b_{k,n^4}^{n^2}}{\lambda_s^{2n^2}} \right]^{-1/n} = 1.$$

Avendosi $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_s^{2/n} = 1$, da (14) (18) (20) si trae la (13).

Dalla (13), ripetendo un ragionamento fatto nella dimostrazione del teorema III, si trae che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_s^{2n} - b_{s,n^2}^n) = 0.$$

Pertanto:

VII. - *Nelle ipotesi del teorema precedente si ha:*

$$(21) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_s^{2n} - b_{s,n^2}^n) = 0. \quad s \geq 2.$$

Dimostriamo che:

VIII. - *Nelle ipotesi del teorema VI, riesce:*

$$(22) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{s,n^2}^n - p_s^{1/n} \lambda_s^{2n}) = 0.$$

Si ha:

$$\begin{aligned} (a_{s,n^2}^{n^2} - p_s \lambda_s^{2n^2})^{1/n} &= \left(\sum_{h \geq s} p_h \lambda_h^{2n^2} - \sum_{k=1}^{s-1} p_k b_{k,n^4}^{n^2} - p_s \lambda_s^{2n^2} \right)^{1/n} = \\ &= \left[\sum_{h \geq s+1} p_h \lambda_h^{2n^2} + \sum_{k=1}^{s-1} p_k (\lambda_k^{2n^2} - b_{k,n^4}^{n^2}) \right]^{1/n} \leq \left(\sum_{h \geq s+1} p_h \lambda_h^{2n^2} \right)^{1/n} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{s-1} p_k^{1/n} (\lambda_k^{2n^2} - b_{k,n^4}^{n^2})^{1/n}. \end{aligned}$$

D'altra parte, esiste un numero $c_{s,n}$ tale che:

$$p_s^{1/n} \lambda_s^{2n} \leq c_{s,n} \leq a_{s,n^2}^n, \quad a_{s,n^2}^{n^2} - p_s \lambda_s^{2n^2} = n c_{s,n}^{n-1} (a_{s,n^2}^n - p_s^{1/n} \lambda_s^{2n}).$$

Ne viene:

$$a_{s,n^2}^n - p_s^{1/n} \lambda_s^{2n} \leq [n p_s^{(n-1)/n} \lambda_s^{2n(n-1)}]^{-1} (a_{s,n^2}^{n^2} - p_s \lambda_s^{2n^2})$$

e quindi:

$$\begin{aligned} (a_{s,n^2}^n - p_s^{1/n} \lambda_s^{2n})^{1/n} &\leq n^{-1/n} \lambda_s^{2(1-n)} p_s^{(1-n)/n^2} (a_{s,n^2}^{n^2} - p_s \lambda_s^{2n^2})^{1/n} \\ &\leq n^{-1/n} \lambda_s^{2(1-n)} p_s^{(1-n)/n^2} \left\{ \left[\sum_{h \geq s+1} p_h \left(\frac{\lambda_h}{\lambda_s} \right)^{2n^2} \right]^{1/n} + \sum_{k=1}^{s-1} p_k^{1/n} \left(\frac{\lambda_k^{2n^2} - b_{k,n^4}^{n^2}}{\lambda_s^{2n^2}} \right)^{1/n} \right\}. \end{aligned}$$

Da questa relazione, tenendo conto di (16) (17), si trae la (22).

IX. — Per ogni intero $s \geq 2$ si ha:

$$(23) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{s,n} = \lambda_s^2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_{s,n} = \lambda_s^2.$$

Dai teoremi II, III, VI, VII, VIII, si trae:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{s,n^2}^n - p_s^{1/n} \lambda_s^{2n})^{1/n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_s^{2n^2} - b_{s,n^4}^{n^2})^{1/n} = 0,$$

per ogni intero positivo s . Dalla prima di tali relazioni si deduce:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{s,n} = \lambda_s^2.$$

Infatti, esiste un numero $l_{s,n}$ tale che:

$$p_s^{1/n^2} \lambda_s^2 \leq l_{s,n} \leq a_{s,n^2}^n, \quad a_{s,n^2}^n - p_s^{1/n} \lambda_s^{2n} = n l_{s,n}^{n-1} (a_{s,n^2}^n - p_s^{1/n^2} \lambda_s^2).$$

Riesce quindi:

$$a_{s,n^2}^n - p_s^{1/n} \lambda_s^{2n} \geq n p_s^{(n-1)/n^2} \lambda_s^{2(n-1)} (a_{s,n^2}^n - p_s^{1/n^2} \lambda_s^2),$$

donde:

$$(a_{s,n^2}^n - p_s^{1/n^2} \lambda_s^2)^{1/n} \leq n^{-1/n} p_s^{(1-n)/n^3} \lambda_s^{2(1-n)/n} (a_{s,n^2}^n - p_s^{1/n^2} \lambda_s^2)^{1/n}.$$

Poiché:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{s,n^2}^n - p_s^{1/n^2} \lambda_s^2)^{1/n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1/n} p_s^{(1-n)/n^3} \lambda_s^{2(1-n)/n} = \lambda_s^{-2},$$

si ha: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{s,n^2}^n - p_s^{1/n^2} \lambda_s^2)^{1/n} = 0$ e pertanto: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{s,n} = \lambda_s^2$.

La dimostrazione della seconda delle (23) è immediata.

2. Esponiamo ora il procedimento di calcolo dei numeri p_k . Cominciamo con l'osservare che:

X. - Per ogni intero $s \geq 1$, esiste un indice n_s tale che $b_{s,n} > 0$, $n \geq n_s$.

Per $s = 1$, si può assumere: $n_1 = 1$. Per $s > 1$, l'esistenza dell'indice n_s è stata provata nel corso della dimostrazione del teorema VI.

XI. - Per ogni intero $s \geq 1$ riesce:

$$(24) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{s,n}^n}{b_{s,n}^n} = 1.$$

Supporremo sempre, in quel che segue: $n \geq n_s$. Si ha:

$$(25) \quad 0 \leq \frac{a_{s,n}^n}{b_{s,n}^n} - 1 = b_{s,n}^{-\frac{1}{n}} (a_{s,n}^n - p_s^{\frac{1}{n}} \lambda_s^{2n}) \\ + p_s^{\frac{1}{n}} b_{s,n}^{-\frac{n}{n^2}} (\lambda_s^{2n} - b_{s,n}^n) + p_s^{\frac{1}{n}} - 1.$$

Inoltre, per i teoremi II, III, VII, VIII abbiamo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [b_{s,n}^{-\frac{n}{n^2}} (a_{s,n}^n - p_s^{\frac{1}{n}} \lambda_s^{2n})]^{\frac{1}{n}} = \lambda_s^{-2} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{s,n}^n - p_s^{\frac{1}{n}} \lambda_s^{2n})^{\frac{1}{n}} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [b_{s,n}^{-\frac{n}{n^2}} (\lambda_s^{2n} - b_{s,n}^n)]^{\frac{1}{n}} = \lambda_s^{-2} \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_s^{2n} - b_{s,n}^n)^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Ne viene:

$$(26) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_{s,n}^{-\frac{n}{n^2}} (a_{s,n}^n - p_s^{\frac{1}{n}} \lambda_s^{2n}) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_{s,n}^{-\frac{n}{n^2}} (\lambda_s^{2n} - b_{s,n}^n) = 0.$$

Da (25) e da (26) segue (24).

Con dimostrazione analoga a quella ora esposta si prova che:

XII. - Per ogni intero $s \geq 1$, riesce:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_{s,n}^{-\frac{n}{n^2}} (a_{k,n}^n - b_{k,n}^n) = 0$$

donde anche:

$$(27) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_s^{-2n} (a_{k,n}^n - b_{k,n}^n) = 0.$$

Si ponga ora, per ogni n tale che: $b_{s,n} > 0$:

$$r_{s,n} = b_{s,n}^{-\frac{n}{n^2}} \left(t_n - \sum_{k=1}^{s-1} p_k b_{k,n}^n \right).$$

Qui e nel seguito convverremo che, per $s = 1$, il sommatorio $\sum_{k=1}^{s-1}$ vada soppresso. Faremo inoltre la seguente convenzione: scrivendo $r_{s,n}$ sottinten-

deremo sempre che n sia tale che: $b_{s,n^2} > 0$, per il teorema XI sappiamo che esiste un intero n_s tale che, per $n \geq n_s$, si ha sempre $b_{s,n} > 0$.

XIII. — Per ogni intero $s \geq 1$ si ha:

$$r_{s,n} \geq p_s, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r_{s,n} = p_s.$$

Riesce:

$$r_{s,n} = b_{s,n^2}^{-n} \left(t_n - \sum_{k=1}^{s-1} p_k b_{k,n^2}^n \right) \geq \lambda_s^{-2n} \left(t_n - \sum_{k=1}^{s-1} p_k b_{k,n^2}^n \right) =$$

$$p_s + \lambda_s^{-2n} \sum_{h \geq s+1} p_h \lambda_h^{2n} \geq p_s$$

donde $r_{s,n} \geq p_s$.

Si ha inoltre:

$$(28) \quad r_{s,n} = b_{s,n^2}^{-n} \left(t_n - \sum_{k=1}^{s-1} p_k b_{k,n^2}^n \right) = \frac{\lambda_s^{2n}}{b_{s,n^2}^n} - \lambda_s^{-2n} \left(t_n - \sum_{k=1}^{s-1} p_k b_{k,n^2}^n \right) =$$

$$\frac{\lambda_s^{2n}}{b_{s,n^2}^n} - \left[p_s + \sum_{k=1}^{s-1} p_k \lambda_s^{-2n} (\lambda_k^{2n} - b_{k,n^2}^n) + \sum_{h \geq s+1} p_h \left(\frac{\lambda_h}{\lambda_s} \right)^{2n} \right].$$

Poiché riesce $\frac{\lambda_h}{\lambda_s} < 1$, si ha:

$$(29) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{h \geq s+1} p_h \left(\frac{\lambda_h}{\lambda_s} \right)^{2n} = 0.$$

Dalle (24) (27) (28) (29) si trae:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_{s,n} = p_s.$$

XIV. — La conoscenza delle successioni $\{a_{k,n}\}$, $\{b_{k,n}\}$ $k = 1, 2, \dots, s$, e di un numero positivo λ tale che $\lambda_{s+1} \leq \lambda < \lambda_s$ consente la determinazione del numero p_s , se p_s è intero positivo.

Indichiamo con \bar{n} un indice tale che $b_{s,\bar{n}} > \lambda^2$ e denotiamo con ε un numero positivo tale che

$$(30) \quad \varepsilon < 1, \quad \varepsilon \leq \frac{1}{2} (b_{s,\bar{n}} - \lambda^2).$$

Tenendo conto dei teoremi IX, X, XI, XII si vede che è possibile determinare un indice n_0 tale che:

$$b_{k,n_0^2} > 0 \quad k = 1, \dots, s$$

$$(31) \quad \frac{a_{s,n_0^2}^{n_0}}{b_{s,n_0^2}^{n_0}} - 1 \leq \frac{\varepsilon}{3r_{s,n_0}}$$

$$(32) \quad b_{s,n_0^2}^{-n_0} (a_{k,n_0^2}^{n_0} - b_{k,n_0^2}^{n_0}) \leq \frac{\varepsilon}{3(s-1)r_{k,n_0}} \quad k = 1, \dots, s-1$$

$$(33) \quad a_{s,n_0} - b_{s,n_0} \leq \min \left[\frac{\varepsilon}{2} \frac{b_{s,\bar{n}} - \lambda^2}{3r_{s,n_0} + 1}, \varepsilon \right].$$

Mostriamo che

$$p_s = r_{s, n_0}.$$

Posto $\omega = \min \left[\frac{\varepsilon}{2} \frac{b_{s, n_0} - \lambda^2}{r_{s, n_0} + 1}, \varepsilon \right]$, dalla (33) si trae:

$$\begin{aligned} \lambda_s^2 - \left[p_s \lambda_s^2 + \sum_{h \geq s+1} p_h \lambda_h^2 \left(\frac{\lambda_h}{\lambda_s} \right)^{2n_0} \right] \left[p_s + \sum_{h \geq s+1} p_h \left(\frac{\lambda_h}{\lambda_s} \right)^{2n_0} \right]^{-1} = \\ \lambda_s^2 - \left[\sum_{h \geq s} p_h \lambda_h^{2n_0+1} \right] \left[\sum_{h \geq s} p_h \lambda_h^{2n_0} \right]^{-1} \\ \leq \lambda_s^2 - b_{s, n_0} \leq a_{s, n_0} - b_{s, n_0} \leq \omega, \end{aligned}$$

donde:

$$\lambda_s^2 - \left[p_s \lambda_s^2 + \sum_{h \geq s+1} p_h \lambda_h^2 \left(\frac{\lambda_h}{\lambda_s} \right)^{2n_0} \right] \left[p_s + \sum_{h \geq s+1} p_h \left(\frac{\lambda_h}{\lambda_s} \right)^{2n_0} \right]^{-1} \leq \omega.$$

Ne viene

$$\lambda_s^2 \left[\sum_{h \geq s+1} p_h \left(\frac{\lambda_h}{\lambda_s} \right)^{2n_0} \right] - \sum_{h \geq s+1} p_h \lambda_h^2 \left(\frac{\lambda_h}{\lambda_s} \right)^{2n_0} \leq \omega p_s + \omega \left[\sum_{h \geq s+1} p_h \left(\frac{\lambda_h}{\lambda_s} \right)^{2n_0} \right]$$

e quindi

$$(\lambda_s^2 - \lambda_{s+1}^2 - \omega) \left[\sum_{h \geq s+1} p_h \left(\frac{\lambda_h}{\lambda_s} \right)^{2n_0} \right] \leq \omega p_s.$$

Da questa relazione, tenendo conto del fatto che, per il teorema XIII, si ha $p_s \leq r_{s, n_0}$ e che, per la seconda delle (30) si ha: $\lambda_s^2 - \lambda_{s+1}^2 - \omega \geq b_{s, \bar{n}} - \lambda^2 - \omega \geq \frac{1}{2} (b_{s, \bar{n}} - \lambda^2)$, si trae:

$$(34) \quad \sum_{h \geq s+1} p_h \left(\frac{\lambda_h}{\lambda} \right)^{2n_0} \leq \frac{2 \omega r_{s, n_0}}{b_{s, \bar{n}} - \lambda^2} \leq \varepsilon \frac{r_{s, n_0}}{3 r_{s, n_0} + 1}.$$

D'altra parte si ha (cfr. (28)):

$$\begin{aligned} r_{s, n_0} - p_s &= \frac{\lambda_{s, n_0}^{2n_0}}{b_{s, n_0}^{n_0}} \left[p_s + \sum_{k=1}^{s-1} p_k \lambda_s^{-2n_0} (\lambda_k^{2n_0} - b_{k, n_0}^{n_0}) + \sum_{h \geq s+1} p_h \left(\frac{\lambda_h}{\lambda_s} \right)^{2n_0} \right] - p_s \\ &\leq \left(\frac{\lambda_{s, n_0}^{2n_0}}{b_{s, n_0}^{n_0}} - 1 \right) r_{s, n_0} + \sum_{k=1}^{s-1} r_{k, n_0} b_{s, n_0}^{-n_0} (\lambda_k^{2n_0} - b_{k, n_0}^{n_0}) + \left[\sum_{h \geq s+1} p_h \left(\frac{\lambda_h}{\lambda_s} \right)^{2n_0} \right] \frac{\lambda_s^{2n_0}}{b_{s, n_0}^{n_0}} \\ &\leq \left(\frac{a_{s, n_0}^{n_0}}{b_{s, n_0}^{n_0}} - 1 \right) r_{s, n_0} + \sum_{k=1}^{s-1} r_{k, n_0} b_{s, n_0}^{-n_0} (a_{k, n_0}^{n_0} - b_{k, n_0}^{n_0}) \\ &\quad + \left[\sum_{h \geq s+1} p_h \left(\frac{\lambda_h}{\lambda_s} \right)^{2n_0} \right] \frac{a_{s, n_0}^{n_0}}{b_{s, n_0}^{n_0}} \end{aligned}$$

donde, per le (31) (32) (34):

$$r_{s, n_0} - p_s \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \varepsilon \frac{r_{s, n_0}}{3r_{s, n_0} + 1} \frac{a_{s, n_0}^{n_0}}{b_{s, n_1}^{n_0}} \leq \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{3} \frac{3r_{s, n_0}}{3r_{s, n_0} + 1} \left(1 + \frac{\varepsilon}{3r_{s, n_0}}\right) \leq \varepsilon.$$

Poiché $\varepsilon < 1$, riesce:

$$r_{s, n_0} - p_s < 1.$$

E così provato il teorema.

Osservazione. — È facile constatare che tutti i risultati sopra esposti continuano a sussistere inalterati e con dimostrazione inalterata se, in luogo di $m_n = n^2$, si assume per $\{m_n\}$ una qualsiasi successione crescente di interi positivi tale che: $\lim_{n \rightarrow \infty} \{m_n/n\} = \infty$.

Analisi matematica. — *Sul problema di Darboux*^(*). Nota di CARLO CILIBERTO, presentata^(**) dal Corrisp. C. MIRANDA.

Il problema di Darboux consiste, come è noto, nel cercare una soluzione del sistema differenziale:

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y, z, z_x, z_y) \\ \sigma(x, y) = \tau(x), \quad \sigma(0, y) = \tau(y), \quad \sigma(x, 0) = \tau(0), \end{array} \right.$$

per $(x, y) \in R \equiv [0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1]$.

Notevole è il contributo che negli ultimi anni è stato recato sia alla questione della risoluzione di tale problema che a quella di stabilire dei criteri di unicità. Per estese notizie bibliografiche su entrambe le questioni rinvio ad una Nota di R. Conti⁽¹⁾, ad una di F. Guglielmino⁽²⁾ e ad una di W. Walter⁽³⁾. Una più aggiornata bibliografia sarà riportata in due miei lavori di prossima pubblicazione.

Molti teoremi di esistenza conseguiti di recente sono abbastanza generali e fra questi uno stabilito da A. Zitarosa⁽⁴⁾ mediante l'uso dei metodi di analisi funzionale, e poi ritrovato da F. Guglielmino⁽⁵⁾ con un metodo introdotto da Tonelli e fondato sul teorema di Ascoli-Arzelà.

Le ipotesi del teorema stabilito da Zitarosa sono le seguenti⁽⁶⁾:

a) $\sigma(x) = \tau(y)$ siano funzioni continue con le loro derivate prime nei rispettivi intervalli $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ e tali che sia $\sigma(0) = \tau(0)$;

b) la $f(x, y, z, v, w)$ sia definita e continua nello strato

$$S: (x, y) \in R, \quad |z|, |v|, |w| < +\infty,$$

e verifichi la limitazione:

$$|f(x, y, z, v, w)| \leq N,$$

con N costante;

^(*) Il presente lavoro fa parte della realizzazione del programma del Gruppo di ricerca n. 19 del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

^(**) Nella seduta dell'8 aprile 1961.

(1) R. CONTI, *Sull'equazione integro-differenziale di Darboux-Picard*, «Le Matematiche», XIII (1958), 30-39 (38-39).

(2) F. GUGLIELMINO, *Sull'esistenza delle soluzioni dei problemi relativi alle equazioni non lineari di tipo iperbolico in due variabili*, «Le Matematiche», XIV (1959), 67-80 (70-80).

(3) W. WALTER, *Existenzsätze für gewöhnliche parabolische und hyperbolische Differentialgleichungen*, «Mathematische Zeitschrift», 74 (1960), 191-208 (200-208).

(4) A. ZITAROSA, *Alcune osservazioni sui nuovi teoremi di esistenza e sul problema di Darboux*, «Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli», (4), 27 (1960), 25-35.

(5) Cfr. lavoro cit. in nota⁽²⁾.

(6) Cfr. lavoro citato in nota⁽²⁾, teorema III, 54-55; cfr. anche lavoro cit. in nota⁽²⁾, 70-71.

c) il problema differenziale ordinario a cui si riduce il problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial x} = f[x, y, z(x, y), z_x(x, y), w] \\ w(0, y) = \tau'(y) \end{cases} \quad \text{in } R,$$

ha (una ed) una sola soluzione definita in tutto $(0, 1)$ comunque si assegni la funzione $z(x, y)$ nella famiglia delle funzioni continue in R con $z_x(x, y)$ e tali che si abbia:

$$\begin{aligned} z(0, y) &= \tau(y) \quad , \quad z(x, 0) = \sigma(x), \\ |z_x(x, y_1) - z_x(x, y_2)| &\leq N |y_1 - y_2| \quad , \quad [(x, y_1), (x, y_2) \in R]; \end{aligned}$$

d) il problema

$$v' = f(0, y, \tau(y), v, \tau'(y)) \quad , \quad v(0) = \sigma'(0),$$

nella funzione incognita $v(y)$ ha (una ed) una sola soluzione definita in tutto R ;

e) il problema

$$v(y) = \sigma'(x^0) + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^y f(x^0, \eta, z(\eta), v(\eta), w_n(\eta)) d\eta,$$

nella funzione incognita $v(y)$ ammette in $(0, 1)$ una soluzione al più, comunque si assegnino x^0 , con $0 < x^0 \leq 1$, la funzione $z(y)$ continua in $(0, 1)$ e ivi non superiore in modulo a $N + \max_R |\sigma(x) + \tau(y) - \sigma(0)|$, e la successione $\{w_n(y)\}$ di funzioni continue in $(0, 1)$ tali che $|w_n(y)| \leq N + \max_{(0,1)} |\tau'(y)|$.

In tali ipotesi viene assicurata l'esistenza di una soluzione del problema (I), ma non è detto, in generale, che essa sia unica, come dimostrano semplici esempi ⁽⁷⁾, già nel caso in cui f sia indipendente da v e w . Allora, anche ai fini dello studio del problema di unicità per il sistema (I), sorge spontaneo il chiedersi se, in analogia a quanto avviene per il problema differenziale ⁽⁸⁾

$$(II) \quad y' = f(x, y) \quad , \quad y(x_0) = y_0,$$

(7) In proposito cfr. PH. HARTMANN-A. WINTNER, *On hyperbolic partial equations*, «Am. Jour. Math.», 74 (1952), 834-874 (841); P. MONTEL, *Sur les suites infinies de fonctions*, «Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure», XXIV (1907), 233-334 (282-283).

(8) È noto che è possibile approssimare ogni integrale del sistema (II) mediante poligoni e pervenire all'esistenza dell'integrale superiore e dell'integrale inferiore; in proposito cfr. Memoria di MONTEL citata in (7), pagg. 264-268, e anche: M. HUKUHARA, *Sur le théorème d'existence des intégrales des équations différentielles du premier ordre*, «Japanes journal of Mathematics», V (1928), 239-251; *Sur les systèmes des équations différentielles ordinaires*, idem, 345-350; F. CAFIERO, *Sull'approssimazione mediante poligoni degli integrali del sistema differenziale $y' = F(x, y)$, $y(x_0) = y_0$* , «Giornale di Matematiche di Battaglini», LXXVII (1947-48), 28-35. Agli stessi risultati si perviene anche modificando opportunamente un procedimento dato da Tonelli, in proposito cfr. E. BAIADA, *Le approssimazioni nella risoluzione delle equazioni differenziali ordinarie. - I. Teoremi di esistenza*, «Rendiconti dell'Accademia dei Lincei» (VIII), II (1947), 261-268.

è possibile dare un metodo di calcolo per approssimare ogni integrale del sistema differenziale (I) e nello stesso tempo stabilire l'esistenza dell'integrale superiore e dell'integrale inferiore, cioè di due funzioni $g(x, y)$ e $G(x, y)$ soluzioni del sistema (I) e tali che per ogni soluzione $z(x, y)$ di tale sistema in tutto R si abbia:

$$(III) \quad g(x, y) \leq z(x, y) \leq G(x, y).$$

Alla questione dell'esistenza dell'integrale superiore e dell'integrale inferiore del sistema (I) ha risposto affermativamente T. Satō⁽⁹⁾ in ipotesi meno generali di quelle indicate in $c)$, $d)$, $e)$, ferma restando la $a)$ e facendo in luogo della $b)$ una ipotesi analoga, e supponendo, inoltre, che la funzione $f(x, y, z, v, w)$ sia non decrescente rispetto a z, v, w . Il lavoro di Satō è in lingua giapponese e non è stato possibile approfondire il procedimento dimostrativo usato per stabilire il risultato cui egli perviene.

Scopo della presente Nota è anzitutto quello di indicare come un risultato del tipo indicato effettivamente può ottenersi sotto le ipotesi $a)$, $b)$, $c)$, $d)$, $e)$ e supponendo f non decrescente rispetto a z, v, w , e conseguentemente stabilire teoremi di confronto per il sistema (I) nel caso in cui è $\sigma(x) = px$ e $\tau(y) = py$ con p numero reale, e infine dare un nuovo teorema di unicità per il sistema (I), che risulta indipendente da quelli finora stabiliti.

Avverto che in questa Nota mi limiterò a riassumere i risultati ottenuti, la cui dimostrazione completa sarà pubblicata nei lavori di prossima pubblicazione dei quali ho fatto cenno all'inizio.

1. Diremo che la funzione $f(x, y, z, v, w)$ definita e continua in S verifica la condizione (α) rispetto a $\sigma(x)$ e $\tau(y)$, per le quali vale l'ipotesi $a)$, se sono soddisfatte le ipotesi $b)$, $c)$, $d)$, $e)$. Una funzione $z(x, y)$ continua in R con le proprie derivate prime e la derivata seconda mista la diremo di classe C^* .

Vale il seguente teorema:

I. - *Se la funzione $f(x, y, z, v, w)$ verifica la condizione (α) rispetto a $\sigma(x)$ e $\tau(y)$ e se inoltre risulta non decrescente rispetto a ciascuna delle variabili z, v, w per*

$$|z| \leq N + \max_R |\sigma(x) + \tau(y) - \sigma(0)|,$$

$$|v| \leq N + \max_{(0,1)} |\sigma'(x)|, \quad |w| \leq N + \max_{(0,1)} |\tau'(y)|,$$

allora per il sistema differenziale (I) esistono due particolari integrali $g(x, y)$ e $G(x, y)$, di classe C^ , tali che se $z(x, y)$ è una qualsiasi soluzione, di classe*

(9) T. SATŌ, *Sulle equazioni alle derivate parziali di tipo iperbolico*, (in giapponese); « Rep. Fac. Sci. Kyūsyū Imp. Univ. », 1 (1945), 203-249. Il Satō mostra che esistono due funzioni $g(x, y)$ e $G(x, y)$, tali che per ogni soluzione $z(x, y)$ del sistema (I) è verificata in tutto R non solo la (III) ma è anche:

$$g_x(x, y) \leq z_x(x, y) \leq G_x(x, y) \quad , \quad g_y(x, y) \leq z_y(x, y) \leq G_y(x, y).$$

C^* , del sistema, risulta in tutto R :

$$g(x, y) \leq z(x, y) \leq G(x, y);$$

$$g_x(x, y) \leq z_x(x, y) \leq G_x(x, y) \quad ; \quad g_y(x, y) \leq z_y(x, y) \leq G_y(x, y).$$

Le funzioni $g(x, y)$ e $G(x, y)$ si diranno rispettivamente integrale superiore e integrale inferiore del sistema differenziale (I).

Il procedimento dimostrativo è quello proposto da Montel⁽¹⁰⁾ per il caso in cui la funzione f non dipenda da v e w .

2. Considerata una funzione $\varphi(x, y, z, v, w)$ definita nello strato $S_{abc}: (x, y) \in R$, $a \leq z < +\infty$, $b \leq v < +\infty$, $c \leq w < +\infty$,

definiamo la funzione $\varphi_1(x, y, z, v, w)$ in S al seguente modo: nell'ottante di spazio per il quale è

$$(1) \quad z \geq a \quad , \quad v \geq b \quad , \quad w \geq c ,$$

la porremo uguale a $\varphi(x, y, z, v, w)$, negli ottanti per i quali sono verificate soltanto le (1_1) e (1_2) , o le (1_1) e (1_3) , o le (1_2) e (1_3) la porremo uguale al valore che $\varphi(x, y, z, v, w)$ assume rispettivamente per $w = c$, $v = b$, $z = a$, negli ottanti per i quali è verificata la (1_1) , o la (1_2) , o la (1_3) la porremo uguale rispettivamente a $\varphi(x, y, z, b, c)$, $\varphi(x, y, a, v, c)$, $\varphi(x, y, a, b, w)$ e infine nell'ottante in cui non è verificata alcuna delle (1) , la porremo uguale a $\varphi(x, y, a, b, c)$. Ovviamente $\varphi_1(x, y, z, v, w)$ risulta continua in S .

Ciò posto diremo che la funzione $\varphi(x, y, z, v, w)$ definita e continua in S_{abc} verifica ivi la condizione (α') rispetto a px e py , con p numero reale, se la funzione $\varphi_1(x, y, z, v, w)$ verifica in S la condizione (α) rispetto a px e py .

Vale il seguente teorema di confronto:

II. — Sia $\varphi(x, y, z, v, w)$ una funzione definita e continua nello strato S_{abc} e verificante la condizione (α') rispetto a px e py , con p numero reale qualunque non maggiore di un fissato numero reale $q^* \geq \max \left[0, \frac{a-N}{2}, b-N, c-N \right]$; inoltre essa sia non decrescente rispetto a ciascuna variabile z, v, w per

$$a \leq z \leq N + 2q^* \quad , \quad b \leq v \leq N + q^* \quad , \quad c \leq w \leq N + q^*.$$

(10) Cfr. lavoro cit. in (7). Nel suo lavoro il Montel afferma l'esistenza dell'integrale inferiore e dell'integrale superiore per il caso in cui f non dipende da v e w , e ciò senza alcuna ipotesi di monotonia per la $f(x, y, z)$; manca però la dimostrazione di questo risultato, perché egli si limita a dare qualche indicazione sul procedimento da seguire.

Il problema dell'esistenza dell'integrale superiore e dell'integrale inferiore è stato considerato nello stesso ordine di idee del Montel da G. ZWIRNER, *Sull'approssimazione degli integrali del sistema differenziale* $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y, z), z(x_0, y_0) = \psi(y), z(x, y_0) = \varphi(x)$, «Atti Ist. Veneto Sc. Lett. Arti», CIX (1950-51) 219-231; e da P. SANTORO, *Sul problema di Darboux per l'equazione $s = f(x, y, z, p, q)$ e il fenomeno di Peano*, «Rend. Acc. Naz. dei XL» (IV), X (1959), 3-17.

Siano, poi, p un numero reale $< q^*$ e $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$, $\gamma(x, y)$ tre funzioni continue in R , tali che in tutto R sia:

$$(2) \quad a \leq \alpha(x, y) \leq px + py + \int_0^x \int_0^y \varphi[t, \tau, \alpha(t, \tau), \beta(t, \tau), \gamma(t, \tau)] dt d\tau,$$

$$(3) \quad b \leq \beta(x, y) \leq p + \int_0^y \varphi[x, \tau, \alpha(x, \tau), \beta(x, \tau), \gamma(x, \tau)] d\tau,$$

$$(4) \quad c \leq \gamma(x, y) \leq p + \int_0^x \varphi[t, y, \alpha(t, y), \beta(t, y), \gamma(t, y)] dt.$$

In tali ipotesi, in tutto R risulta definito l'integrale superiore $U^{(p)}(x, y)$ del sistema differenziale:

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \varphi(x, y, z, z_x, z_y), \\ z(x, 0) = px, \quad z(0, y) = py, \end{cases} \quad (x, y) \in R,$$

secondo il significato indicato nel teorema I, e in tutto R si ha:

$$U^{(p)}(x, y) \geq \alpha(x, y), \quad U_x^{(p)}(x, y) \geq \beta(x, y), \quad U_y^{(p)}(x, y) \geq \gamma(x, y).$$

Ciò si consegue mostrando, anzitutto, che in R è:

$$U^{(q)}(x, y) > \alpha(x, y), \quad U_x^{(q)}(x, y) > \beta(x, y), \quad U_y^{(q)}(x, y) > \gamma(x, y),$$

dove $U^{(q)}(x, y)$ è l'integrale superiore del sistema differenziale:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \varphi_1(x, y, z, z_x, z_y),$$

$$z(x, 0) = qx, \quad z(0, y) = qy,$$

essendo $p < q \leq q^*$, e quindi passando al limite per $q \rightarrow p + 0$.

Non diversamente si stabilisce il seguente altro teorema di confronto:

III. - Sia $\varphi^{(1)}(x, y, z, v, w)$ una funzione definita e continua nello strato S_{000} , ivi non negativa e tale che, per due numeri reali positivi h e r , la funzione:

$$(6) \quad \varphi(x, y, z, v, w) = \varphi^{(1)}[x, y, (hz)^r, (hw)^r, (hw)^r],$$

verifichi in S_{000} la condizione (α') rispetto a px e py , con p numero reale qualunque non negativo e non maggiore di un fissato numero reale $q^* > 0$; inoltre $\varphi^{(1)}(x, y, z, v, w)$ sia non decrescente rispetto a ciascuna variabile z, v, w per

$$(7) \quad 0 \leq z \leq [h(N + 2q^*)]^r, \quad 0 \leq v \leq [h(N + q^*)]^r, \quad 0 \leq w \leq [h(N + q^*)]^r.$$

Siano, poi, p un reale ≥ 0 e $e \leq q^*$ e $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$, $\gamma(x, y)$ tre funzioni continue in R , tali che in tutto R siano verificate le (2), (3), (4), con $a = b = c = 0$.

Allora vale la tesi del teorema II, dove ora s'intende che la funzione $\varphi(x, y, z, v, w)$ è quella definita in (6).

Come interessante conseguenza del teorema II si può stabilire il seguente teorema, che estende alle funzioni di due variabili una generalizzazione del lemma di Peano-Gronwall ⁽¹¹⁾:

IV. - Sia $\psi(x, y)$ una funzione continua e non negativa in R , $\omega(u)$ una funzione continua non decrescente per $|u| < +\infty$ ed esse siano tali che la funzione $F(x, y, z, v, w) = \psi(x, y) [\omega(z) + \omega(v) + \omega(w)]$ verifichi la condizione (1), rispetto a qx e qy , con q numero reale qualsiasi. Supponiamo che esistano due numeri p e H con $0 \leq p < 2H$, per cui si abbia:

$$\int_p^{2H} \frac{du}{\omega(u)} \geq 6 \int_0^2 g(t) dt,$$

dove è:

$$g(t) = \max_{\substack{(x,y) \in R \\ x+y \leq t}} \psi_1(x, y), \psi_1(x, y) = \max_{(u,v) \in R_{xy}} |\psi(u, v)|, R_{xy} \equiv [0 \leq u \leq x, 0 \leq v \leq y].$$

Allora se $z(x, y)$ è una funzione continua con le derivate prime in R e sono verificate ivi le disuguaglianze:

$$z'(x, y) \leq px + py + \int_0^x \int_0^y F[t, \tau, z(t, \tau), z_x(t, \tau), z_y(t, \tau)] dt d\tau,$$

$$z_x'(x, y) \leq p + \int_0^y F[x, \tau, z(x, \tau), z_x(x, \tau), z_y(x, \tau)] d\tau,$$

$$z_y'(x, y) \leq p + \int_0^x F[t, y, z(t, y), z_x(t, y), z_y(t, y)] dt,$$

riesce in tutto R :

$$z(x, y) \leq 4H, \quad z_x(x, y) \leq 4H, \quad z_y(x, y) \leq 4H.$$

3. Data una funzione $f(x, y, z, v, w)$ definita e continua in S , diremo che verifica nel dominio rettangolare

$$D_{ZVW}: (x, y) \in R, \quad |z| \leq Z, \quad |v| \leq V, \quad |w| \leq W,$$

la condizione (β) se esiste una funzione $\varphi^{(1)}(x, y, z, v, w)$ definita in $S_{\infty\infty}$, e

(11) Cfr. S. FAEDO, *Su un teorema di esistenza di calcolo delle variazioni e una proposizione generale di calcolo funzionale*, « Annali della Scuola Normale di Pisa » II^a, XII (1943), 119-133 (124-126); una estensione al caso di due variabili era stata già data da G. ZWIRNER, ma per il caso in cui $F(x, y, z, v, w) = \psi(x) \omega(z)$; in proposito cfr. G. ZWIRNER, *Teoremi di unicità e di confronto per gli integrali di una particolare classe di equazioni differenziali a derivate parziali del secondo ordine*, « Rend. Sem. Mat. Padova », XX (1951), 329-345 (342).

ivi non negativa, tale che siano soddisfatte le seguenti ipotesi:

a') la funzione

$$(8) \quad \varphi(x, y, z, v, w) = \varphi^{(1)}(x, y, \sqrt[3]{2z}, \sqrt[3]{2v}, \sqrt[3]{2w}),$$

verifichi in S_{∞} la condizione (x') rispetto a p_x e p_y , qualunque sia p numero reale non negativo e non maggiore di un fissato numero reale $q^* > 0$;

b') $\varphi^{(1)}(x, y, z, v, w)$ è non decrescente rispetto a z, v, w nel dominio definito dalle (7) con $h = 2$ e $r = 1/2$;

c') si abbia:

$$\left. \begin{aligned} & [f(x, y, z_1, v_1, w_1) - f(x, y, z_2, v_2, w_2)](v_1 - v_2) \\ & [f(x, y, z_1, v_1, w_1) - f(x, y, z_2, v_2, w_2)](w_1 - w_2) \end{aligned} \right\} \leq \\ & \leq \varphi^{(1)}(x, y, |z_1 - z_2|, |v_1 - v_2|, |w_1 - w_2|),$$

per tutti gli $(x, y) \in R$ e per $|z_i| \leq Z, |v_i| \leq V, |w_i| \leq W, i = 1, 2$;

d') il sistema differenziale costituito dalla (5), con $\varphi(x, y, z, v, w)$ data dalla (8), e dalle condizioni $z(x, 0) = 0, z(0, y) = 0$ ammette in R l'unica soluzione $z(x, y) \equiv 0$.

Ciò posto vale il seguente teorema di unicità:

V. - Se comunque si fissino tre numeri positivi Z, V, W la funzione $f(x, y, z, v, w)$ verifica in D_{ZVW} la condizione β , allora il sistema differenziale (I) non può avere in R più di una soluzione di classe C^* .

Per la dimostrazione, dette $z^{(1)}(x, y)$ e $z^{(2)}(x, y)$ due soluzioni del sistema (I), di classe C^* , e posto:

$$\alpha(x, y) = \frac{1}{2} [z^{(1)}(x, y) - z^{(2)}(x, y)]^2,$$

$$\beta(x, y) = \frac{1}{2} [z_x^{(1)}(x, y) - z_x^{(2)}(x, y)]^2, \quad \gamma(x, y) = \frac{1}{2} [z_y^{(1)}(x, y) - z_y^{(2)}(x, y)]^2,$$

in base alla c') si perviene a stabilire delle disuguaglianze del tipo delle (2'), (3'), (4') con $a = b = c = 0$ e $\varphi(x, y, z, v, w)$ data dalla (8), indi, applicando il teorema III, per l'ipotesi d') si giunge a provare che in tutto R è $z(x, y) \equiv 0$.

Analisi matematica. — *Un problema al contorno per una equazione lineare alle derivate parziali.* Nota di MAURO PAGNI, presentata (*) dal Socio G. SANSONE.

Di recente B. Pini (1) ha studiato un problema al contorno su un dominio limitato per l'equazione

$$(I) \quad \frac{\partial^n u}{\partial y^n} = \mathfrak{L}(u),$$

ove $\mathfrak{L}u$ è un polinomio differenziale di ordine m con coefficienti funzioni di $x = (x_1, \dots, x_r)$ positivamente ellittico. Nella presente Nota si considera un analogo problema per una equazione che è una naturale estensione della (I), nel caso di n pari, ottenuta da questa sostituendo a $\partial^n/\partial y^n$ un gruppo ellittico. Il problema viene studiato coi procedimenti introdotti da L. Gårding (2) nella sua trattazione del problema di Dirichlet per le equazioni di tipo ellittico. La considerazione di opportuni spazi hilbertiani permette infatti, come vedremo, di valerci sistematicamente dei procedimenti citati. Ci proponiamo in un successivo lavoro di conseguire una ulteriore estensione del problema qui considerato.

1. Siano A un insieme aperto e limitato dello S_r euclideo (reale), B un insieme aperto e limitato dello S_s euclideo e sia $C = A \times B$. Indichiamo con $x = (x_1, \dots, x_r)$ i punti di S_r e con $y = (y_1, \dots, y_s)$ i punti di S_s , con D_x^α la derivata $(\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \dots (\partial/\partial x_r)^{\alpha_r}$ di ordine $|\alpha| \equiv \alpha_1 + \dots + \alpha_r$ e con D_y^β la derivata $(\partial/\partial y_1)^{\beta_1} \dots (\partial/\partial y_s)^{\beta_s}$ di ordine $|\beta|$. Sia $H(C)$, o più brevemente H , l'insieme delle funzioni a valore complesso $f(x, y)$ infinitamente differenziabili in C e nulle al di fuori di un compatto contenuto in C . Poniamo

$$(f, f')_j^x = \int_C \sum_{|\alpha|=j} D_x^\alpha f(x, y) \overline{D_x^\alpha f'(x, y)} dx dy, \quad |f|_j^x = [(f, f')_j^x]^{1/2},$$

$$(f, f')_k^y = \int_C \sum_{|\beta|=k} D_y^\beta f(x, y) \overline{D_y^\beta f'(x, y)} dx dy, \quad |f|_k^y = [(f, f')_k^y]^{1/2},$$

$$(f, f')_{j,k} = (f, f')_j^x + (f, f')_k^y, \quad |f|_{j,k} = [(f, f')_{j,k}]^{1/2}.$$

(*) Nella seduta dell'8 aprile 1961.

(1) B. PINI, *Sulle equazioni lineari pseudoparaboliche*, II, « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova », 30, 1960.

(2) L. GÄRDING, *Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations*, « Math. Scand. », 1, 1953.

Indichiamo poi con H_j^x , H_h^y e $H_{j,h}$ gli spazi di Hilbert che si ottengono chiudendo H rispetto alle norme $|f|_j^x$, $|f|_h^y$ e $|f|_{j,h}$. Poniamo

$$p_{10}f = (-1)^m \sum_{|\alpha| = |\beta| = m} D_x^\alpha (p_{1,\alpha\beta}(x, y) D_x^\beta f(x, y)) \quad , \quad (p_{1,\alpha\beta}(x, y) = p_{1,\beta\alpha}(x, y))$$

$$p_{20}f = (-1)^n \sum_{|\alpha| = |\beta| = n} D_y^\alpha (p_{2,\alpha\beta}(x, y) D_y^\beta f(x, y)) \quad , \quad (p_{2,\alpha\beta}(x, y) = p_{2,\beta\alpha}(x, y))$$

$$p_0f = p_{10}f + p_{20}f,$$

$$r_1f = \sum_{|\gamma| \leq 2m} r_{1\gamma}(x, y) D_x^\gamma f(x, y) \quad , \quad r_2f = \sum_{|\gamma| \leq 2n} r_{2\gamma}(x, y) D_y^\gamma f(x, y) \quad , \quad rf = r_1f + r_2f,$$

e consideriamo i polinomi $p_1(x, y; \xi) = \sum_{|\alpha| = |\beta| = m} p_{1,\alpha\beta}(x, y) \xi_\alpha \xi_\beta$ nelle r variabili reali ξ_1, \dots, ξ_r e $p_2(x, y; \eta) = \sum_{|\alpha| = |\beta| = n} p_{2,\alpha\beta}(x, y) \eta_\alpha \eta_\beta$ nelle s variabili reali η_1, \dots, η_s con $\xi_\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_r^{\alpha_r}$, $\eta_\alpha = \eta_1^{\alpha_1} \dots \eta_s^{\alpha_s}$.

Faremo le seguenti ipotesi:

a) i coefficienti di $p_1(x, y; \xi)$ e di $p_2(x, y; \eta)$ siano infinitamente differenziabili e uniformemente continui in C ;

b) $\inf_{|\xi|=1} p_1(x, y; \xi)$, $\inf_{|\eta|=1} p_2(x, y; \eta)$ ($|\xi| = (\xi_1^2 + \dots + \xi_r^2)^{1/2}$, $|\eta| = (\eta_1^2 + \dots + \eta_s^2)^{1/2}$) abbiano in C estremo inferiore positivo;

c) i coefficienti $r_{1\gamma}(x, y)$, $r_{2\gamma}(x, y)$ siano infinitamente differenziabili in C e le derivate rispetto a x di $r_{1\gamma}(x, y)$ e quelle rispetto a y di $r_{2\gamma}(x, y)$ di ordine $\leq \delta$ (δ massimo intero contenuto in $1/2 |\gamma|$) siano limitate in C .

Posto

$$qu = p_0u + ru$$

e detto \bar{q} l'aggiunto (formale) di q , considerata l'equazione

$$(1) \quad qu = h \quad \text{in } C$$

dove $h(x, y)$ è una funzione infinitamente differenziabile di quadrato sommabile in C , diremo che la funzione $u(x, y)$ è una soluzione debole della (1) se u è integrabile in ogni compatto di C e soddisfa all'equazione

$$\int_C u(x, y) \bar{q}f(x, y) dx dy = \int_C h(x, y) \bar{f}(x, y) dx dy$$

per ogni $f \in H$.

Studieremo il seguente problema. *Data una funzione g in C tale che $\left(\sum_{i=0}^m |g|_i^x + \sum_{h=0}^n |g|_h^y \right) < \infty$, trovare le soluzioni (deboli) u della (1) tali che $g - u \in H_{m,n}$.*

2. In questo numero fisseremo alcune proposizioni su cui poggia lo studio del problema.

LEMMA 1. — *Se $f \in H$ si ha*

$$(2_a) \quad |f|_k^x \leq c_{kj} |f|_j^x \quad \text{per } k \leq j \text{ } (c_{kj} \text{ costante}),$$

$$(2_b) \quad |f|_h^y \leq c_{hi} |f|_i^y \quad \text{per } h \leq i \text{ } (c_{hi} \text{ costante}),$$

$$(2) \quad |f|_{k,h} \leq c |f|_{j,i} \quad \text{per } k \leq j, h \leq i \text{ } (c \text{ costante}).$$

Le (2_a) e (2_b) si conseguono in modo analogo a quello usato da L. Gårding per provare il Lemma 1.1 del citato Lavoro. La (2) è una ovvia conseguenza delle (2_a) e (2_b) e delle posizioni fatte nel precedente numero.

Come conseguenza immediata del lemma 1 segue che, se $\{f^k\}$ è una successione di Cauchy in $H_{m,n}$, è anche tale in ognuno degli spazi $H_{j,h}$ con $j \leq m, h \leq n$. Pertanto, detta h una funzione infinitamente differenziabile, se si passa al limite nell'uguaglianza

$$\int f^k(x, y) D_x^\alpha h(x, y) dx dy = (-1)^{|\alpha|} \int D_x^\alpha f^k(x, y) h(x, y) dx dy \quad (|\alpha| \leq m)$$

si ottiene

$$(3) \quad \int f(x, y) D_x^\alpha h(x, y) dx dy = (-1)^{|\alpha|} \int f_x^\alpha(x, y) h(x, y) dx dy$$

con f e f_x^α funzioni di quadrato sommabile nulle fuori di C . Dalla (3) segue che f_x^α è determinata quasi dappertutto da f , dove f è l'elemento di $H_{m,n}$ individuato dalla successione $\{f^k\}$. La (3) permette quindi di chiamare f_x^α derivata (debole o generalizzata) di f rispetto a x , derivata che seguiranno a indicare col simbolo $D_x^\alpha f(x, y)$. Analogamente si procede per definire le derivate rispetto a y delle funzioni appartenenti a $H_{m,n}^{(3)}$.

In modo analogo a quello usato da L. Gårding per provare il Lemma 1.3, si perviene al seguente

LEMMA 2. — *Siano $D_x^\alpha f, D_x^\beta f$ due derivate di ordine $\leq m$, ma non entrambe di ordine m , e sia $a(x, y)$ una funzione limitata in C . Allora l'equazione*

$$(4) \quad \int a(x, y) D_x^\alpha f(x, y) \overline{D_x^\beta f'(x, y)} dx dy = (Af, f')_{m,n}$$

dove f, f' e $Af \in H_{m,n}$, definisce una trasformazione A completamente continua in $H_{m,n}$.

Una analoga proposizione vale per le derivate rispetto a y di ordine $\leq n$.

(3) Ogni funzione $f \in H_{m,n}$ ha così derivate di quadrato sommabile di ordine $\leq m$, rispetto a x e di ordine $\leq n$ rispetto a y definite in tutto lo spazio $S = S_r \times S_s$, che sono nulle al di fuori di C . Questo comporta che le f hanno derivate rispetto a x di ordine $< m$ con « traccia » quasi ovunque nulla su ogni porzione sufficientemente regolare di $\hat{A} \times B$ ($\hat{A} = \bar{A} - A$, \bar{A} chiusura di A) e derivate rispetto a y di ordine $< n$ con « traccia » quasi ovunque nulla su ogni porzione sufficientemente regolare di $\hat{B} \times A$.

Poniamo

$$p_1(f, f') = \int_C \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} p_{1,\alpha\beta}(x, y) D_x^\alpha f(x, y) \overline{D_y^\beta f'(x, y)} dx dy,$$

$$p_2(f, f') = \int_C \sum_{|\alpha|=|\beta|=n} p_{2,\alpha\beta}(x, y) D_y^\alpha f(x, y) \overline{D_x^\beta f'(x, y)} dx dy,$$

$$(f, f') = \int_C f(x, y) \overline{f'(x, y)} dx dy,$$

$$p_{1t}(f, f') = p_1(f, f') + t(f, f') \quad , \quad p_{2t}(f, f') = p_2(f, f') + t(f, f'),$$

$$p_t(f, f') = p_{1t}(f, f') + p_{2t}(f, f').$$

TEOREMA I. - *Esiste un numero t_0 tale che per $t > t_0$ $[p_t(f, f)]^{1/2}$ è una norma in $H_{m,n}$, equivalente alla norma $[(f, f)_{m,n} + t(f, f)]^{1/2}$. L'equivalenza è uniforme per t sufficientemente grandi.*

Coi procedimenti di L. Gårding si prova un'analoga proposizione concernente l'equivalenza delle norme $[p_{1t}(f, f)]^{1/2}$, $[(f, f)_m + t(f, f)]^{1/2}$ in H_m^x . Nello stesso modo si ha l'equivalenza delle norme $[p_{2t}(f, f)]^{1/2}$, $[(f, f)_n + t(f, f)]^{1/2}$ in H_n^y . Ciò stabilito si ottiene facilmente il teorema I.

3. Integrando per parti in $p_{1t}(f, f')$, con f, f' appartenenti ad H , riesce $p_{1t}(f, f') = (f, p_{1t}f') = (p_{1t}f, f')$ dove ora $p_{1t}f$ è l'operatore differenziale $p_{10}f(x, y) + tf(x, y)$. Analogamente si ha $p_{2t}(f, f') = (f, p_{2t}f') = (p_{2t}f, f')$ ove $p_{2t}f = p_{20}f(x, y) + tf(x, y)$. Pertanto, posto $p_tf = p_{1t}f + p_{2t}f$ riesce $p_t(f, f') = (f, p_tf') = (p_tf, f')$.

Riprendiamo in esame il problema formulato alla fine del numero 1. Esamineremo dapprima il caso particolare in cui $g = p_t$ con t maggiore del t_0 che figura nel teorema I. Quando $f \in H$, segue dal lemma 1 con ovvie valutazioni che l'espressione $p_t(g, f) - (h, f)$ si può maggiorare col prodotto di $|f|_{m,n}$ per una costante: tale espressione è quindi un funzionale pseudolineare e continuo di f in $H_{m,n}$. Per il teorema I esiste allora un unico elemento g' di $H_{m,n}$ tale che $p_t(g, f) - (h, f) = p_t(g', f)$ per tutte le $f \in H$. D'altra parte $p_t(g, f) = (g, p_tf)$ e la relazione $p_t(k, f) = (k, p_tf)$, vera quando k e f appartengono ad H , seguita a valere quando si effettua un passaggio al limite e quindi quando $k = g'$. La funzione $u = g - g'$ (di quadrato sommabile in C) che verifica la $p_t(u, f) = (h, f)$, verifica allora la

$$(5) \quad (u, p_tf) = (h, f)$$

per ogni $f \in H$ ed è quindi una soluzione debole della (1) tale che $g - u$ appartiene a $H_{m,n}$. È anche l'unica soluzione del problema. Infatti se u' è soluzione del problema riesce $u' - u \in H_{m,n}$ e $(u' - u, p_tf) = 0$, si ha così $p_t(u' - u, f) = 0$ qualunque sia $f \in H$, e quindi con un passaggio al limite $(f \rightarrow u' - u)$ $p_t(u' - u, u' - u) = 0$: è perciò $u' = u$ quasi ovunque in C .

Nel caso che p_0 sia a coefficienti costanti la norma $[p_0(f, f)]^{1/2}$ è equivalente alla norma $|f|_{m,n}$ in $H_{m,n}$. Per le cose dette si ha anche in questo caso un teorema di esistenza e di unicità per il problema considerato.

Facciamo alcune considerazioni che serviranno per trattare il caso generale. All'operatore differenziale r_1 precedentemente introdotto associamo la forma bilineare $r_1(f, f') = (r_1 f, f') = (f, \bar{r}_1 f')$ dove f, f' appartengono ad H e \bar{r}_1 , è l'aggiunto di r_1 . Mediante opportune integrazioni per parti si può scrivere $r_1(f, f')$ come somma di espressioni della forma (4) e con le funzioni $a(x, y)$ limitate in virtù dell'ipotesi c). Quindi $r_1(f, f')$ è una funzione continua in $H_{m,n} \times H_{m,n}$. Della stessa proprietà gode $r_2(f, f') = (r_2 f, f') = (f, \bar{r}_2 f')$. Infine, posto $r(f, f') = r_1(f, f') + r_2(f, f')$, riesce $r(f, f')$ funzione continua in $H_{m,n} \times H_{m,n}$.

Sia ora $q = p_0 + r$. Se u è una soluzione del nostro problema e $g' = g - u$ si ha, detto $\bar{q} = p_0 + \bar{r}$ l'aggiunto di q , $(u, \bar{q}f) = q(u, f) = q(g - g', f) = (h, f)$, dove $q(u, f) = p_0(u, f) + r(u, f)$, e quindi

$$(6) \quad q(g, f) = q(g', f) + (h, f).$$

Viceversa se g' è un elemento di $H_{m,n}$ soddisfacente alla (6), posto $u = g - g'$, la u verificando la $(u, \bar{q}f) = (h, f)$ per ogni $f \in H$ è una soluzione del problema. La (6) è quindi equivalente (per $g' \in H_{m,n}$) al nostro problema.

Prendiamo un $t > t_0$ e poniamo $r_{-t} = r - 2t$ cosicchè $q = p_t + r_{-t}$. È evidente che $q(g, f) - (h, f)$ è un funzionale pseudolineare continuo di f in $H_{m,n}$ e quindi per il teorema 1 esiste un elemento \tilde{g} di $H_{m,n}$ tale che $q(g, f) - (h, f) = p_t(\tilde{g}, f)$ per tutti gli $f \in H$. D'altra parte per il lemma 2 e il teorema 1 l'equazione $r_{-t}(f, f') = p_t(Rf, f')$, dove f, f' e Rf sono in $H_{m,n}$, definisce un operatore lineare e completamente continuo R su $H_{m,n}$: la (6) è perciò equivalente all'equazione

$$(7) \quad g = g' + Rg'.$$

La (7) è una equazione a cui è applicabile la teoria di Fredholm.

Osservazione. — Una immediata estensione formale di quanto si è fatto permette di studiare l'analogo problema per l'equazione $pu + ru = h$ in C , dove $C = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_v$, A_i ($i = 1, \dots, v$) è un insieme aperto e limitato dello S_{r_i} euclideo (i cui punti indichiamo con $(x)_i$) e

$$pu = \sum_{i=1}^v (-1)^{m_i} \sum_{|\alpha| = |\beta| = m_i} D_{(x)_i}^{\alpha} (p_{i,\alpha\beta}((x)_1, \dots, (x)_v)) D_{(x)_i}^{\beta} u((x)_1, \dots, (x)_v),$$

$$ru = \sum_{i=1}^v \sum_{|\gamma| \leq 2m_i} r_{i\gamma}((x)_1, \dots, (x)_v) D_{(x)_i}^{\gamma} u((x)_1, \dots, (x)_v).$$

Geometria differenziale. — *Deviazione caratteristica e proprietà globali sulle varietà quasi hermitiane*^(*). Nota di GIOVANNI BATISTA RIZZA, presentata^(**) dal Socio B. SEGRE.

1. È noto che nella geometria delle varietà quasi complesse V_{2n} ($n \geq 2$), è elemento essenziale la considerazione, in ogni punto, del sistema ∞^{2n-2} delle faccette caratteristiche⁽¹⁾.

Se poi la varietà V_{2n} è dotata di metrica hermitiana, la nozione di deviazione caratteristica, introdotta nel mio lavoro [8], consente di precisare di quanto una faccetta qualunque di discosti dal sistema delle faccette caratteristiche.

Nei lavori [8], [9] questa nozione geometrica interviene in diverse questioni di tipo locale. Nel presente lavoro, invece, la considerazione della deviazione caratteristica delle faccette piane permette di ottenere, per le varietà quasi hermitiane, alcuni risultati di natura globale.

La prima parte della ricerca (nn. 5, 6) inizia con lo studio della variazione della deviazione caratteristica per un trasporto della faccetta mediante la connessione di Levi-Civita.

Una formula esplicita al n. 5 mostra che tale variazione dipende, da un lato, dal tensore di torsione della struttura quasi complessa di V_{2n} , dall'altro da un tensore emisimmetrico, denotato con K_{pgrr} , che esprime lo scarto di V_{2n} dalla kählerianità.

Si riconosce infine che, se la connessione di Levi-Civita della varietà quasi hermitiana V_{2n} conserva la deviazione caratteristica delle faccette piane, V_{2n} è necessariamente una varietà kähleriana; e viceversa (teor. T_1 , n. 5). Il risultato ottenuto, opportunamente formulato (teor. T_1^* , n. 6), estende al caso quasi hermitiano un teorema di E. Martinelli, relativo alle V_{2n} hermitiane⁽²⁾.

La seconda parte del lavoro (nn. 7, 8) è dedicata invece al problema del significato geometrico della condizione di Kähler (n. 3 sulle varietà quasi hermitiane).

Se V_{2n} è addirittura hermitiana, il citato teorema di Martinelli già fornisce una soluzione al problema: la condizione di Kähler equivale alla conservazione delle faccette caratteristiche per trasporto mediante la connessione di Levi-Civita. Questo risultato, però, non è più vero nell'ipotesi che V_{2n} sia soltanto quasi hermitiana⁽³⁾.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di Ricerca n. 37 del C.N.R. per l'anno 1960-1961.

(**) Nella seduta dell'8 aprile 1961.

1) Ved. E. MARTINELLI, n. [5], [6] della bibliografia.

(2) E. MARTINELLI [4], p. 7; [5], p. 324; [6], p. 11.

(3) E. MARTINELLI [6], p. 11.

Ebbene, la nozione di deviazione caratteristica consente di dare risposta al problema indicato, anche nel caso generale delle varietà quasi hermitiane.

Infatti, in ogni punto di una superficie Σ_z regolarmente immersa in V_{2n} , sia δ_a la deviazione caratteristica della faccetta tangente z . Possiamo allora considerare una conveniente media integrale dei valori di δ_a , che denomino *deviazione caratteristica δ_{Σ_z} della superficie orientata Σ_z (n. 7)*.

Introdotta poi la deviazione caratteristica assoluta δ_{Σ_z} , indipendente cioè dalla orientazione di Σ_z , risulta subito che, se Σ_z è caratteristica, è $\delta_{\Sigma_z} = 0$; e viceversa.

Ciò premesso, si riconosce che la condizione di Kähler equivale all'esser massima ($\pi/2$), la deviazione caratteristica assoluta δ_{Σ_z} di una qualunque superficie Σ_z , omologa a zero su V_{2n} (nell'omologia compatta), teor. **T**₂, n. 7.

Dal risultato enunciato si riottiene ovviamente che, su una V_{2n} quasi kähleriana, non esistono superficie caratteristiche, omologhe a zero ⁽⁴⁾.

2. PREMESSE. — Sia V_{2n} una *varietà quasi complessa* di dimensione $2n$ e di classe C^∞ ⁽⁵⁾, O un suo punto ed U un intorno di O su V_{2n} .

Introdotta, per l'intorno U , un co-riferimento isotropo \mathfrak{J}^j ($j \in I^*$) ^{(6) (7)}, il tensore della struttura quasi complessa, di componenti:

$$(1) \quad h_r^s = \varepsilon_i \delta_r^i,$$

con $\varepsilon = \pm 1$ per $r, s \in I$; $r, s \in \bar{I}$ risp., definisce nello spazio dei vettori contravarianti l'applicazione:

$$(2) \quad \xi^s \rightarrow \tilde{\xi}^s = h_r^s \xi^r,$$

che si estende in modo naturale in un automorfismo J dell'anelloide dei tensori, non appena si assuma che J operi identicamente sugli scalari.

Interviene nel seguito il tensore di torsione della struttura quasi complessa (tensore di Nijenhuis), che — introdotta arbitrariamente su V_{2n} una connessione affine simmetrica — può esprimersi così:

$$(3) \quad N_{pq}^{rs} = (\nabla_p h_r^s - \nabla_r h_p^s) h_q^{rs} - (\nabla_q h_r^s - \nabla_r h_q^s) h_p^{rs},$$

ove ∇_k indica la derivazione covariante nella connessione.

Risulta:

$$(4) \quad N_{pq}^{rs} h_t^q = - N_{pt}^{rq} h_q^{rs} \quad (8).$$

(4) Ved. per esempio B. ECKMANN [2], pp. 40-41.

(5) Per le nozioni fondamentali ved. B. ECKMANN [2], I, II, III, VI; A. LICHNEROWICZ [3], V; E. MARTINELLI [5]; B. SEGRE [11], 8; K. YANO [13], X.

(6) Si denotano risp. con I, \bar{I} gli insiemi di indici $1, \dots, n; \bar{1}, \dots, \bar{n}$ e con I^* la loro unione. Salvo contrario avviso gli indici variano in I^* .

(7) Ved. per esempio E. MARTINELLI [5], p. 7; A. WEIL [12], p. 32.

(8) Ved. per esempio B. ECKMANN [2], p. 22; K. YANO [13], p. 228. La (4) si ottiene subito derivando covariantemente la uguaglianza $h_r h_r^s = \delta_r^s$ immediata conseguenza della (1).

Infine, l'annullarsi di $N_{pq}^{\dots s}$ è condizione necessaria e sufficiente perché V_{2n} sia una varietà a struttura complessa ⁽⁹⁾.

3. Nel seguito la varietà V_{2n} è supposta *quasi hermitiana*. Alla forma hermitiana definita positiva:

$$(5) \quad ds^2 = g_{pq} \vartheta^p \vartheta^q,$$

($g_{pq} = 0$ per $p, q \in I; p, q \in \bar{I}$), che determina la metrica nell'intorno U , è associata la forma esterna (forma di Kahler):

$$(6) \quad \omega = \frac{1}{2} h_{pq} \vartheta^p \wedge \vartheta^q,$$

corrispondente al tensore emisimmetrico $h_{pq} = g_{qr} \dot{h}_p^{\bar{r}}$, legato alla struttura quasi complessa di V_{2n} .

La varietà quasi hermitiana V_{2n} è *hermitiana* se $N_{pq}^{\dots s} = 0$; e viceversa. La varietà quasi hermitiana V_{2n} è *quasi kähleriana* se la forma ω è chiusa; e viceversa.

Posto:

$$(7) \quad K_{pqr} = D_p h_{qr} + D_q h_{rp} + D_r h_{pq},$$

D_j indicando la derivazione covariante nella connessione definita dalla metrica (connessione di Levi-Civita), la condizione di Kähler $d\omega = 0$ equivale a $K_{pqr} = 0$ ⁽¹⁰⁾.

Dunque una varietà quasi hermitiana V_{2n} è *kähleriana* se $N_{pq}^{\dots s} = 0$ e $K_{pqr} = 0$; e viceversa.

Dalla (3) nella quale, come è lecito, l'operatore ∇_j venga sostituito con l'operatore D_j , tenuto conto della (7), deriva senza difficoltà la relazione:

$$(8) \quad N_{pqr} = h_r^s K_{qrs} - h_q^s K_{prs} + 2 h_q^s D_r h_{sp},$$

utile nel seguito ⁽¹¹⁾.

Dalle (3), (7), (8) discende poi immediatamente che, se $D_j h_{pq} = 0$, la V_{2n} è *kähleriana*; e viceversa.

4. DEVIAZIONE CARATTERISTICA DELLE FACCETTE. - Sia α faccetta 2-dimensionale uscente dal punto O della varietà quasi hermitiana V_{2n} ⁽¹²⁾ ed α^{pq} un bivettore semplice associato alla faccetta ⁽¹³⁾.

La *deviazione caratteristica* di α , denotata con δ_α , è l'angolo (compreso tra 0 e π) che α forma con una qualunque faccetta caratteristica di origine O , avente con α una direzione orientata in comune ⁽¹⁴⁾.

(9) Ved. A. WEIL [12], p. 35; A. NEWLANDER-L. NIRENBERG [7], p. 393.

(10) Ved. per esempio B. ECKMANN [2], p. 19; K. YANO [13], p. 231.

(11) Ved. per esempio K. YANO [13], (3,4), p. 231.

(12) Il termine « faccetta » è qui usato per « elemento 2-dimensionale orientato ».

(13) Ved. E. CARTAN [1], pp. 5-8.

(14) Questa nozione, introdotta per la prima volta nel mio lavoro [8], si estende in modo naturale al caso di faccette di dimensione pari qualunque (ved. [10]). Nei lavori [8],

Dalla relazione:

$$(9) \quad \cos \delta_\alpha = \frac{1}{2} \frac{h_{pq} \alpha^{pq}}{\text{mis} \cdot \alpha^{rs}} \quad (15)$$

appare che la deviazione caratteristica è una nozione di natura quasi hermitiana, che dipende soltanto dalla faccetta e non dalla sua rappresentazione analitica.

In particolare, per una faccetta caratteristica α positivamente, negativamente orientata risulta risp. $\delta_\alpha = 0$, $\delta_\alpha = \pi$; e viceversa ⁽¹⁶⁾.

Si noti ora che, per una qualunque faccetta α , un cambiamento dell'orientazione muta l'angolo δ_α nel supplementare. Il più piccolo di questi due angoli si dirà deviazione caratteristica *assoluta* e si indicherà con $\tilde{\delta}_\alpha$.

In sostanza, l'angolo $\tilde{\delta}_\alpha$ esprime in termini quantitativi il divario della faccetta α dall'esser caratteristica.

5. Si consideri ora il trasporto della faccetta α nella connessione di Levi-Civita, relativo ad uno spostamento infinitesimo λ^r di origine O. Denotato con D il differenziale assoluto, è quindi $D\alpha^{pq} = 0$.

La corrispondente variazione del coseno della deviazione caratteristica risulta allora:

$$(10) \quad d \cos \delta_\alpha = \frac{1}{2} \frac{\alpha^{pq}}{\text{mis} \cdot \alpha^{rs}} D h_{pq}.$$

Indicati poi con $\tilde{\lambda}^s$, $\tilde{\alpha}^{pq}$ i tensori corrispondenti a λ^s , α^{pq} nell'automorfismo J del n. 2 e tenuto conto della emisimmetria di α^{pq} , $\tilde{\alpha}^{pq}$, h_{pq} , K_{pqr} e della uguaglianza:

$$N_{pqr} h_i^q = N_{p/q} h_r^q,$$

immediata conseguenza della (4) del n. 2, dalla (8), moltiplicata per $h_i^q \alpha^{ip} \lambda^r$, e dalla (10) si perviene alla *relazione*:

$$(11) \quad 4 \text{mis} \cdot \alpha^{sr} \cdot d \cos \delta_\alpha = N_{pqr} \alpha^{pq} \tilde{\lambda}^r + K_{pqr} (\alpha^{pq} - \tilde{\alpha}^{pq}) \lambda^r.$$

In conclusione, per un trasporto della faccetta α mediante la connessione di Levi-Civita, relativo ad uno spostamento λ^s , la *variazione della deviazione caratteristica* δ_α dipende essenzialmente dai tensori N_{pqr} e K_{pqr} , esprimenti lo scarto della varietà V_{2n} dall'essere risp. hermitiana e quasi kahleriana.

Considerata nuovamente l'uguaglianza (10), si noti ora che, se $d \cos \delta_\alpha = 0$ per ogni faccetta α e per un arbitrario spostamento λ^s , risulta $D h_{pq} = 0$ per un qualunque spostamento, cioè $D_j h_{pq} = 0$; e viceversa.

[10], per semplicità, V_{2n} è supposta addirittura hermitiana; ved. però a questo proposito la nota ⁽³⁾ in entrambi.

(15) Un calcolo diretto riconduce la (9) alla (21) del lavoro [8].

(16) G. B. RIZZA [8], p. 669.

Tenuto conto dell'osservazione al termine del n. 3, si perviene quindi al teorema:

T₁. - *Condizione necessaria e sufficiente perché una varietà quasi hermitiana sia kähleriana è che la connessione di Levi-Civita conservi la deviazione caratteristica delle faccette 2-dimensionali.*

6. Al teorema **T₁** del numero precedente si può dare anche un'altra formulazione. Precisamente:

T₁^{*}. - *Condizione necessaria e sufficiente perché una varietà quasi hermitiana sia kähleriana, è che la connessione di Levi-Civita conservi le faccette caratteristiche.*

Nell'ipotesi di V_{2n} hermitiana, il risultato è stato ottenuto, per altra via, in un recente lavoro di E. Martinelli ⁽¹⁷⁾.

Si perviene a **T₁^{*}** notando che, se la connessione conserva la deviazione caratteristica, essa muta faccette caratteristiche in faccette ancora caratteristiche, essendo queste le sole faccette con deviazione 0 o π (n. 4). Viceversa, se la connessione di Levi-Civita conserva le faccette caratteristiche, resta invariata la deviazione caratteristica di ogni faccetta, dipendendo essa soltanto dalle faccette caratteristiche e da determinazioni angolari (n. 4).

7. DEVIAZIONE CARATTERISTICA DELLE SUPERFICI. - Nell'intento di pervenire ad un significato geometrico per la condizione di Kähler sulle V_{2n} quasi hermitiane (n. 1), conviene anzitutto estendere alle superfici la nozione di deviazione caratteristica (n. 4).

Sia dunque Σ_2 una superficie quasi regolare, cioè immersa di classe C^1 in V_{2n} (salvo al più un insieme N di punti di misura 2-dimensionale nulla), orientata e di area finita \mathfrak{A} .

Indicato con O un punto di $\Sigma_2 - N$ e con α la faccetta tangente in O , la deviazione caratteristica δ_α si dirà deviazione caratteristica della superficie Σ_2 nel punto O .

Si chiamerà poi *deviazione caratteristica della superficie orientata Σ_2* l'angolo δ_{Σ_2} (compreso tra 0 e π), definito dalla relazione:

$$(12) \quad \cos \delta_{\Sigma_2} = \frac{1}{\mathfrak{A}} \int_{\Sigma_2} \cos \delta_\alpha \cdot d\mathfrak{A},$$

essendo $d\mathfrak{A}$ l'elemento d'area su Σ_2 . In altri termini, l'angolo δ_{Σ_2} è una conveniente media (che potrebbe dirsi cosinusoidale) dei valori delle deviazioni caratteristiche nei singoli punti di Σ_2 .

In particolare, da una osservazione del n. 4 segue subito che per una superficie caratteristica Σ_2 positivamente, negativamente orientata, risulta risp. $\delta_{\Sigma_2} = 0$, $\delta_{\Sigma_2} = \pi$; e viceversa.

(17) E. MARTINELLI, [6], p. 11.

Dalla (12) discende poi, immediatamente, che un cambiamento dell'orientazione della superficie Σ_2 muta l'angolo δ_{Σ_2} nel supplementare. In analogia col n. 4, il minore di questi due angoli si dirà deviazione caratteristica assoluta di Σ_2 e si denoterà con $\delta_{\Sigma_2}^*$. Si riconosce allora che l'angolo $\delta_{\Sigma_2}^*$ esprime il divario della superficie Σ_2 dall'essere una superficie caratteristica.

Ciò premesso, sussiste il teorema:

T₂. — *Condizione necessaria e sufficiente perché una varietà quasi hermitiana V_{2n} sia quasi kähleriana è che risulti massima ($\pi/2$) la deviazione caratteristica assoluta $\delta_{\Sigma_2}^*$ di ogni superficie Σ_2 quasi regolare, orientata, omologa a zero su V_{2n} (nell'omologia compatta).*

Il risultato fornisce un significato geometrico per la condizione di Kähler (n. 3) nel caso quasi hermitiano.

Conseguenza immediata del teorema **T₂** è che, su di una varietà V_{2n} quasi kähleriana, non esistono superfici Σ_2 caratteristiche, omologhe a zero su V_{2n} .

Si ritrova così un noto risultato ⁽¹⁸⁾.

8. La dimostrazione del teorema **T₂** si fonda in modo essenziale su di una proprietà locale delle varietà quasi hermitiane.

Precisamente, sia σ_2 un'areola infinitesima su Σ_2 , di misura $d\mathcal{A}$, definita da un bivettore α^{pq} uscente da un punto O di Σ_2 — N , ed α la faccetta tangente a Σ_2 in O (n. 7). Per la forma di Kähler ω (n. 3), valutata sull'areola σ_2 , sussiste la relazione:

$$(13) \quad [\omega]_{\sigma_2} = \cos \delta_\alpha \cdot d\mathcal{A} \quad (19).$$

Si consideri ora l'intera superficie Σ_2 , la quale, nelle ipotesi di **T₂**, è contorno orientato di un compatto 3-dimensionale C_3 di V_{2n} .

Integrata la (13) su Σ_2 e tenuta presente la (12), in virtù del teorema di Green-Stokes, si perviene infine all'uguaglianza:

$$(14) \quad \cos \delta_{\Sigma_2} = \frac{1}{\mathcal{A}} \int_{C_3} d\omega.$$

In conclusione, se sulla varietà V_{2n} vale la condizione di Kähler $d\omega = 0$ (n. 3), risulta immediatamente $\delta_{\Sigma_2}^* = \frac{\pi}{2}$ per ogni Σ_2 soddisfacente alle ipotesi del teorema **T₂**. Viceversa, se si presenta quest'ultima circostanza, l'integrale a secondo membro della (14) è nullo per ogni C_3 di V_{2n} avente per contorno una superficie quasi regolare. Tenuto conto allora della continuità di $d\omega$, si conclude in modo ben noto che $d\omega = 0$ in ogni punto di V_{2n} ; pertanto V_{2n} è una varietà quasi kähleriana.

Il teorema **T₂** è dunque dimostrato.

(18) Ved. per esempio B. ECKMANN [2], pp. 40-41.

(19) La (13) è già, sostanzialmente, nel mio lavoro [8], p. 668. D'altronde essa scende subito dall'uguaglianza $\omega(\alpha^{pq}) = \cos \delta_\alpha \cdot \text{mis } \alpha^{pq}$, immediata conseguenza delle (6), (9).

BIBLIOGRAFIA.

- [1] E. CARTAN, *Leçons sur la Géométrie des espaces de Riemann*, 2^{me} ed., Gauthier-Villars, Paris (1951).
- [2] B. ECKMANN, *Cours sur les variétés complexes*. Centro Internazionale Matematico Estivo C.I.M.E. (Cremonese, Roma 1956).
- [3] A. LICHNEROWICZ, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie* (Consiglio Nazionale Ricerche, Cremonese, Roma 1955).
- [4] E. MARTINELLI, *Qualche proprietà geometrica nelle varietà a struttura complessa*, «Atti Acc. Ligure», 9 (1953).
- [5] E. MARTINELLI, *Sulle varietà a struttura complessa*, «Ann. di Mat.», 43 (1957).
- [6] E. MARTINELLI *Sulle varietà a struttura complessa o quasi complessa*, «Sem. Mat. Bari», 52-53 (1960).
- [7] A. NEWLANDER-L. NIRENBERG, *Complex analytics coordinates in almost complex manifolds*, «Ann. of Math.», 65 (1957).
- [8] G. B. RIZZA, *Deviazione caratteristica delle faccette piane di una varietà a struttura complessa*, «Rend. Lincei», ser. 8^a, XXIV (1958).
- [9] G. B. RIZZA, *Sulla curvatura delle faccette di una varietà kähleriana*, «Ann. di Mat.», 47 (1959).
- [10] G. B. RIZZA, *Deviazione caratteristica e proprietà locali delle $2q$ -faccette di una V_{2n} a struttura complessa*, «Rend. Acc. dei XL», 10 (1959).
- [11] B. SEGRE, *Forme differenziali e loro integrali*, II (Docet, Roma 1956).
- [12] A. WEIL, *Introduction à l'étude des variétés kählériennes* (Hermann, Paris 1958).
- [13] K. YANO, *The Theory of Lie derivatives, and its applications* (North-Holland, Amsterdam 1955).

Geometria. — *Superficie anolonome e corrispondenze dualistiche*^(*).
Nota di FRANCESCO SPERANZA, presentata^(**) dal Socio B. SEGRE.

1. Le superficie anolonome si presentano in numerose questioni di geometria differenziale; in questo lavoro, dopo aver richiamato alcune nozioni (n. 2), si svolgono alcune osservazioni complementari (n. 3); si considerano poi quelle superficie anolonome (che si diranno *sferi anolonome*) le cui linee di curvatura di 1^a specie sono indeterminate (n. 4); si dimostra poi come esse intervengano nello studio di quelle corrispondenze dualistiche, recentemente segnalate da B. Segre⁽¹⁾, le cui curve principali sono indeterminate (n. 5). Più precisamente, si prova che, per ogni corrispondenza siffatta, associando ad ogni punto dello spazio punteggiato il piano delle direzioni principali ad esso relative, si ottiene una sfera anolonoma. Il risultato viene poi esteso alle corrispondenze dualistiche fra spazi di dimensione qualsiasi (n. 6).

È notevole il fatto che, relativamente ad una corrispondenza del tipo suddetto, associando ad ogni piano (dello spazio di piani) il punto comune alle rette principali, non si ha necessariamente una sfera anolonoma (n. 7); né tale risulta generalmente la superficie anolonoma che, in relazione ad una trasformazione puntuale che in una coppia generica possiede un piano di direzioni principali, si ottiene associando ad ogni punto tale piano (n. 9).

2. Sia S una superficie anolonoma d'unò spazio euclideo E^3 ; com'è noto, essa si ottiene associando ad ogni punto di E^3 un piano che gli appartenga⁽²⁾; tale piano, per brevità, si dirà *tangente* alla S in quel punto. Ad ogni punto

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di Ricerca n. 35 del C.N.R. per l'anno 1960-61.

(**) Nella seduta dell'8 aprile 1961.

(1) Cfr. B. SEGRE, *Some properties of differentiable varieties and transformations*, p. II (Springer-Verlag, Berlin 1957).

(2) Sulle superficie anolonome, ed in particolare sulle loro proprietà metriche, cfr.: A. VOSS, *Geometrische Interpretation der Differentialgleichungen $Pdx + Qdy + Rdz = 0$* , «Math. Ann.», 16, 556-559 (1885) e *Zur Theorie der allgemeinen Punktebenensysteme*, ibid., 23, 45-81 (1884); ISSALY, *Étude géométrique sur la courbure des pseudo-surfaces*, «Bull. Soc. Math. France», 17, 84-101 (1888-9); D. SINZOW, *Zur Krümmungstheorie der Integralkurven der Pfaffschen Gleichung*, «Math. Ann.», 101, 261-272 (1929); *Studien über das System der Integralkurven der Pfaffschen Gleichung*, «Comm. de la Soc. Math. de Charkow et de l'Inst. des Sci. de l'Ukraine», (4), 5, 97-121 (1932); R. INZINGER, *Zur Differentialgeometrie Pfaffschen Mannigfaltigkeiten*, «Monat. fur Math.», 45, 214-236 (1937); E. BOMPIANI, *Sulle varietà anolonome*, Note I, II «Rend. Acc. Naz. Lincei» (6) 27, 37-45 e 45-52 (1938).

A di E^3 associamo tre vettori \mathbf{I}_k a due a due ortogonali e di lunghezza unitaria. Si hanno le formule:

$$(1) \quad dA = \sum_k \omega^k \mathbf{I}_k, \quad d\mathbf{I}_k = \sum_j \omega_j^k \mathbf{I}_j \quad (\omega_j^k = -\omega_k^j)$$

dove le ω^k , ω_i^k sono forme di Pfaff nei differenziali dei parametri da cui dipende il triedro; in virtù dell'arbitrarietà della scelta di A , le ω^k sono lineamente indipendenti. Posto poi

$$a^0 = -[\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3], \quad a^1 = [\mathbf{A}\mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3], \quad a^2 = -[\mathbf{A}\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_3], \quad a^3 = [\mathbf{A}\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2],$$

si ha

$$(1') \quad da^i = -\sum_{\alpha} \omega_{\alpha}^i a^{\alpha} \quad (i = 1, 2, 3; \omega_0^i \equiv \omega^i).$$

Si hanno poi le *formule di struttura*:

$$(2) \quad d\omega^k = \sum_i \omega^i \wedge \omega_i^k, \quad d\omega_i^k = \sum_j \omega_j^i \wedge \omega_j^k$$

dove, come di consueto, $d\omega$ denota il differenziale esterno di ω ed $\omega \wedge \bar{\omega}$ il prodotto esterno di ω ed $\bar{\omega}$.

Assumiamo i vettori $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2$ nel piano a tangente in A ad S ; l'equazione differenziale di S è allora

$$(3) \quad \omega^3 = 0.$$

Si dice che la S è *olonomica* quando, in una conveniente regione dello spazio, esiste una famiglia Φ di superficie, tale che, per ogni punto A , ne passi una sola (F_A), in modo che il piano tangente in A ad F_A sia a . Diremo allora, per brevità, che *la S consiste della famiglia Φ* . Si presenta tale eventualità quando, e soltanto quando, la (3) è completamente integrabile, ossia, in virtù del teorema di Frobenius (3), quando

$$\omega^3 \wedge d\omega^3 \equiv \omega^3 \wedge \omega^1 \wedge \omega_1^3 + \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge \omega_2^3 = 0.$$

Si osservi che $\omega^1, \omega^2, \omega^3$ sono coordinate (omogenee) di retta nella stella A , mentre $\omega_1^3, \omega_2^3, \omega_3^3$ sono coordinate (omogenee) di retta nel piano a ; esse risultano forme differenziali nei differenziali dei parametri da cui dipende il punto A , e quindi, per l'indipendenza delle prime tre, soddisfano a relazioni del tipo

$$(4) \quad \omega_1^3 = a\omega^1 + b\omega^2 + c\omega^3, \quad \omega_2^3 = \alpha\omega^1 + \beta\omega^2 + \gamma\omega^3,$$

dove $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ denotano funzioni di tali parametri.

Le (4) rappresentano analiticamente la proiettività K che si ottiene nel seguente modo: sia B un punto di E^3 , e b il piano ivi tangente ad S ; quando B tende ad A , alla posizione

(3) Cfr. B. SEGRE, *Forme differenziali e loro integrali*, p. 229 (Docet, Roma).

limite di AB si associi (quando esiste) quella di $a b$. Nel piano a , K subordina la proiettività K' ⁽⁴⁾:

$$\omega_1^3 = a\omega^1 + b\omega^2, \quad \omega_2^3 = \alpha\omega^1 + \beta\omega^2.$$

Ricordiamo inoltre che diconsi *curve di S* quelle curve di E^3 la cui tangente, in ogni loro punto, giace nel piano ivi tangente ad S ; e che le *curve asintotiche* sono quelle curve di S che in ogni loro punto hanno per tangente una tangente asintotica, cioè una retta unita in K' ; la loro equazione differenziale, su S , è

$$(5) \quad \omega^1 \omega_1^3 + \omega^2 \omega_2^3 = a(\omega^1)^2 + (b + \alpha)\omega^1 \omega^2 + \beta(\omega^2)^2 = 0.$$

Diconsi poi *linee di curvatura di 1ª specie* quelle curve di S che in ogni loro punto hanno per tangente una tangente di curvatura di 1ª specie, cioè una retta per cui il raggio normale di curvatura ha valore massimo o minimo (esse sono le bisettrici delle tangenti asintotiche) ⁽⁵⁾; sulla S , tali curve hanno come equazione differenziale

$$(6) \quad (\alpha + b)\{(\omega^1)^2 - (\omega^2)^2\} + 2(\beta - a)\omega^1 \omega^2 = 0.$$

Diconsi infine *linee di curvatura di 2ª specie* quelle che in ogni loro punto hanno per tangente una retta la cui corrispondente in K' è ad essa ortogonale (tangenti di curvatura di 2ª specie); su S , sono individuate dall'equazione differenziale

$$(7) \quad \omega^1 \omega_2^3 - \omega^2 \omega_1^3 = \alpha(\omega^1)^2 + (\beta - a)\omega^1 \omega^2 - b(\omega^2)^2 = 0.$$

Le normali ad S in A , $A + dA$ sono complanari se, e soltanto se, $A + dA$ sta su una tangente di curvatura di 2ª specie, relativa ad A .

3. Come si vede facilmente, le linee di curvatura di 1ª e 2ª specie coincidono se, e soltanto se, S è olonoma.

Considerando una superficie anolonoma come una corrispondenza fra punti e i rispettivi piani tangenti, si può definire (cfr. n. 5) la *direttrice* relativa ad un punto A . Per una superficie anolonoma che possieda effettivamente ∞^3 piani tangenti ed ∞^3 normali $[(|c| + |\gamma|) \cdot (a\beta - b\alpha) = 0]$, detta C_A la curva avente in ogni suo punto per tangente la normale ivi ad S e passante per A , si ha che:

Se è verificata una delle tre proprietà:

I. Nel fascio dei piani normali ad a in A , il piano associato ad A ⁽⁶⁾ è normale al piano asintotico;

II. La binormale in A a C_A è una tangente asintotica;

III. La direttrice di S giace nel piano della normale e di una tangente asintotica, allora sono verificate anche le altre due. Infatti, assunto il vettore \mathbf{I}_1 nella direzione della normale principale a C_A , si ha $\gamma = \alpha$; si constata allora che:

I'. Al punto $P = A + k\mathbf{I}_3$ della normale in A resta associato il piano di giacitura

$$(1 - k\beta)[\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_3] + k\alpha[\mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3];$$

(4) Per queste proiettività, cfr. E. BOMPIANI, op. cit., Nota I.

(5) Cfr. D. SINTZOW, il primo lav. cit., p. 264.

(6) Cfr. J. FAVARD, *Cours de Géométrie différentielle locale*, p. 365 (Gauthier-Villars, Paris 1957).

i piani associati ad A , I_3 (corrispondenti ai valori $k = 0$, $k = \infty$ rispettivamente) sono ortogonali se e soltanto se $\beta = 0$ (si osservi che in ogni caso il piano associato ad A è osculatore a C_A in A);

II. la direzione $\omega^1 = \omega^2 = 0$ della binormale è asintotica se e soltanto se $\beta = 0$;

III. la giacitura del piano della normale e della direttrice è $\alpha\omega^1 + \beta\omega^2 = 0$, e contiene una tangente asintotica se e soltanto se $\beta(\alpha\beta - b\alpha) = 0$ (c.v.d.).

4. Se tutte le curve di S sono linee di curvatura di 2^a specie (cioè se, in ogni punto, le tangenti di curvatura di 2^a specie sono indeterminate), K' , in ogni punto, è l'involuzione ortogonale, e quindi S è olonoma e consiste di un'arbitraria famiglia di sfere.

Se invece tutte le curve di S sono linee di curvatura di 1^a specie, K' è, in ogni punto, un'uguaglianza diretta, e quindi

$$(8) \quad a = \beta, \quad b = -\alpha$$

il che non comporta necessariamente l'olonomia di S . Le superficie presentanti tale particolarità si diranno *sfere anolonome*: fra di esse si hanno, in particolare, i *piani anolonomi*⁽⁷⁾ ($a = \beta = 0$), per i quali le linee asintotiche sono indeterminate, e le *famiglie di sfere* ($\alpha = b = 0$), che costituiscono l'unico caso d'olonomia fra le sfere anolonome, e le cui linee di curvatura di 2^a specie sono indeterminate.

Esclusi questi due casi, le linee asintotiche e le linee di curvatura di 2^a specie di una sfera anolonoma S coincidono nelle linee minime di S ($\omega^3 = 0$, $(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 = 0$).

Le sfere anolonome sono individuate dal sistema chiuso:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_1^3 = a\omega^1 + b\omega^2 + c\omega^3 \\ \omega_2^3 = -b\omega^1 + a\omega^2 + \gamma\omega^3 \\ da \wedge \omega^1 + db \wedge \omega^2 + (dc - \gamma\omega_1^2) \wedge \omega^3 + 2bc\omega^1 \wedge \omega^2 + \\ \quad + \{(a^2 - b^2 + c^2)\omega^1 + (2ab + c\gamma)\omega^2\} \wedge \omega^3 = 0 \\ -db \wedge \omega^1 + da \wedge \omega^2 + (d\gamma + c\omega_1^2) \wedge \omega^3 + 2b\gamma\omega^1 \wedge \omega^2 + \\ \quad + \{(-2ab + c\gamma)\omega^1 + (a^2 - b^2 + \gamma^2)\omega^2\} \wedge \omega^3 = 0, \end{array} \right.$$

che si verifica essere in involuzione; la generalità dei suoi integrali, cioè delle sfere anolonome, è di due funzioni arbitrarie di due variabili.

Dalle due ultime equazioni (8) segue che, al variare dei vettori I_1, I_2 nel piano a , si ha

$$\delta c = \gamma e_1^2, \quad \delta \gamma = -c e_1^2,$$

dove e_1^2 è l'espressione di ω_1^2 quando A ed a restano fissi. Il gruppo degli spostamenti suddetti opera quindi su c, γ come il gruppo delle rotazioni intorno all'origine nel piano (c, γ) . Sono quindi possibili due casi:

(7) Cfr. E. BOMPIANI, op. cit., p. 40; E. CARTAN, *Sur un problème de géométrie différentielle projective*, « Ann. Ec. Norm. Sup. » 62, 205-231 (1945).

1° almeno uno dei due coefficienti c, γ è $\neq 0$; conseguentemente, $A\mathbf{I}_3$ non è fissa al variare di A in direzione di \mathbf{I}_3 , sicché le normali formano un complesso. Si può in tal caso far sì che risulti $\gamma = 0$ (cfr. n. 3).

2° $c = \gamma = 0$; attualmente, le normali formano una congruenza: e poiché le tangenti di curvatura di 2^a specie sono rette isotrope, o sono indeterminate, la congruenza risulta isotropa, o riducesi ad una stella. Viceversa, sia data una congruenza isotropa; associando ad ogni punto A il piano normale alla retta della congruenza per A , si ha una superficie anolonoma S le cui linee di curvatura di 2^a specie sono le linee minime di S : essa risulta quindi una sfera anolonoma del 2° tipo. Come pure, data una stella di rette, i piani normali sono i piani tangenti ad un fascio di sfere concentriche, e si ottiene, quindi, ancora una sfera anolonoma del 2° tipo (anzi, si tratta dell'unico caso d'olonoma fra queste ultime).

Un'altro notevole tipo di curve di una superficie anolonoma è dato dalle curve tali che, in ogni loro punto, la tangente e la normale siano trasformate, da K' , in due rette ancora perpendicolari fra loro. L'equazione differenziale di tali curve è

$$(\alpha^2 + a^2 - \beta^2 - b^2) \omega^2 + (\alpha\beta + ab) \{(\omega^2)^2 - (\omega^1)^2\} = 0.$$

Dal punto di vista reale, esse risultano indeterminate allorché la superficie è una sfera anolonoma, oppure allorché consiste di una famiglia di superficie minime.

5. Sia \mathcal{T} una corrispondenza dualistica fra uno spazio euclideo di punti (E^3) ed uno di piani (\bar{E}^3), e siano (A, a) , (B, b) due coppie di elementi corrispondenti. Se B tende ad A , la corrispondenza che associa alla posizione limite della retta AB la posizione limite della retta ab (supposta esistente) è una proiettività Ω . La corrispondente in Ω alla retta impropria di a dicesi *direttrice*; se questa non è isotropa, una coppia di rette perpendicolari fra loro e alla direttrice, le cui corrispondenti in Ω siano pure perpendicolari, si dicono *principali*. Tale denominazione si userà pure per le rette ad esse corrispondenti in Ω .

Diconsi poi curve direttrici e curve principali quelle che in ogni loro punto hanno per tangente rispettivamente la direttrice o una delle rette principali relative a quel punto ⁽⁸⁾.

Chiameremo *superficie Σ dei piani principali* di \mathcal{T} la superficie anolonoma di E^3 che si ottiene associando ad ogni punto il piano normale alla direttrice (piano principale). Orbene, dimostreremo che:

Se una trasformazione dualistica è a curve principali indeterminate, la relativa superficie dei piani principali risulta una sfera anolonoma.

Fissiamo all'uopo in ciascuno dei due spazi un triedro trirettangolo, in modo che quello in E^3 abbia il vertice in A , e per quello in \bar{E}^3 $a = a^3$; per essi si hanno formule del tipo (1), (1'), (2): si indicherà con $\bar{\omega}_\alpha^i$ l'analoga di ω_α^i in \bar{E}^3 . In virtù della scelta dei riferimenti, si hanno le relazioni:

$$(10) \quad \bar{\omega}_i^3 = \sum_k^3 p_{ik} \omega_k^i \quad (i = 0, 1, 2),$$

che costituiscono le equazioni di Ω .

(8) In generale, le rette principali relative ad A sono due; ma può anche accadere che tutte le normali alla direttrice per A siano rette principali. Per le suddette definizioni, cfr. B. SEGRE, *Invarianti differenziali relativi alle trasformazioni puntuali e dualistiche fra spazi euclidei*, « Rend. Circ. Mat. Palermo », 60, 224-232 (1936).

Assumendo come retta \mathbf{AI}_3 la direttrice ($\bar{\omega}_1^3 = \bar{\omega}_2^3 = 0$), e come rette $\mathbf{AI}_1, \mathbf{AI}_2$ in entrambi gli spazi due rette principali, risulta $p_{ik} = 0$ all'infuori di p_{03}, p_{11}, p_{22} . Affinché poi tutte le direzioni normali alla direttrice (e quindi tutte le curve di Σ) siano principali per \mathcal{T} , occorre e basta che, con scelta opportuna delle orientazioni, si abbia $p_{11} = p_{22}$. Il sistema (9) può così suppersi della forma:

$$(10') \quad \bar{\omega}_0^3 = q\omega^3, \quad \bar{\omega}_1^3 = p\omega^1, \quad \bar{\omega}_2^3 = p\omega^2.$$

Da qui, per differenziazione esterna, si ha

$$(11) \quad \begin{cases} (-q\omega_1^3 - p\bar{\omega}_0^1) \wedge \omega^1 + (-q\omega_2^3 - p\bar{\omega}_0^2) \wedge \omega^2 + dq \wedge \omega^3 = 0 \\ dp \wedge \omega^1 + p(\omega_1^2 - \bar{\omega}_1^2) \wedge \omega^2 + p\omega_1^3 \wedge \omega^3 = 0 \\ p(\bar{\omega}_1^2 - \omega_1^2) \wedge \omega^1 + dp \wedge \omega^2 + p\omega_2^3 \wedge \omega^3 = 0, \end{cases}$$

sicché, in virtù del lemma di Cartan, risulta:

$$(12) \quad \begin{cases} -q\omega_1^3 - p\bar{\omega}_0^1 = \lambda_{11}\omega^1 + \lambda_{12}\omega^2 + \lambda_{13}\omega^3 & dp = \mu_{11}\omega^1 + \mu_{12}\omega^2 + \mu_{13}\omega^3 \\ -q\omega_2^3 - p\bar{\omega}_0^2 = \lambda_{12}\omega^1 + \lambda_{22}\omega^2 + \lambda_{23}\omega^3 & p\omega_1^3 = \mu_{13}\omega^1 + \mu_{23}\omega^2 + \mu_{33}\omega^3 \\ dq = \lambda_{13}\omega^1 + \lambda_{23}\omega^2 + \lambda_{33}\omega^3 & p\omega_2^3 = -\mu_{23}\omega^1 + \mu_{13}\omega^2 + \nu\omega^3 \\ p(\omega_1^2 - \bar{\omega}_1^2) = \mu_{12}\omega^1 - \mu_{11}\omega^2 + \mu_{23}\omega^3. \end{cases}$$

L'equazione di Σ è $\omega^3 = 0$, e quindi le equazioni di K sono

$$p\omega_1^3 = \mu_{13}\omega^1 + \mu_{23}\omega^2 + \mu_{33}\omega^3, \quad p\omega_2^3 = -\mu_{23}\omega^1 + \mu_{13}\omega^2 + \nu\omega^3.$$

Queste soddisfano a relazioni del tipo (8), e quindi Σ è una sfera anolonomica (c.v.d.).

Si osservi che il sistema (10')-(11) permette di concludere che la generalità delle \mathcal{T} a curve principali indeterminate è di una *funzione arbitraria di tre variabili* (il che era del resto anche prevedibile direttamente). Infatti, si constata che il predetto sistema è in involuzione, e che la generalità dei suoi integrali è appunto di una funzione di tre variabili.

6. In uno spazio euclideo ad n dimensioni E^n , si dicono direzioni di curvatura di 1^a specie di una ipersuperficie anolonomica S le direzioni a due a due ortogonali e coniugate rispetto al cono asintotico ⁽⁹⁾; quando esse sono, in ogni punto, indeterminate, S si dirà *ipersfera anolonomica*. Con procedimento analogo a quello del n. 5, si dimostra che *la ipersuperficie anolonomica degli iperpiani principali di una trasformazione dualistica a curve principali indeterminate è un'ipersfera anolonomica*.

7. Consideriamo ancora una trasformazione dualistica \mathcal{T} fra due spazi euclidei. Nella relativa proiettività Ω , al piano principale corrisponde un punto di a , che diremo *punto principale*. Chiameremo poi *superficie anolonomica* $\bar{\Sigma}$ dei punti principali quella che si ottiene associando ad ogni piano a il relativo punto principale: è chiaro che $\bar{\Sigma}$ risulta la trasformata di Σ me-

(9) Cfr. E. BOMPIANI, op. cit., Nota I.

dianete la \mathcal{T} ; essendo la nozione d'olonomia invariante per trasformazioni di contatto, se è olonoma Σ lo è pure $\bar{\Sigma}$, e viceversa.

Tuttavia, contrariamente a quanto accade per Σ , la Σ relativa ad una trasformazione dualistica a curve principali indeterminate non è necessariamente una sfera anolonoma.

Invero, $\bar{\Sigma}$ associa al piano $a = a^3$ il punto $[a^1, a^2, a^3]$; le equazioni della proiettività K relativa a $\bar{\Sigma}$ si ottengono quindi (cfr. n. 2) esprimendo $\bar{\omega}_1^3, \bar{\omega}_2^3$ mediante $\bar{\omega}_0^1, \bar{\omega}_0^2, \bar{\omega}_0^3$. Dalle (12) si trae (si suppone, ovviamente, che i punti principali siano ∞^3):

$$\begin{cases} \bar{\omega}_1^3 = H \{ -(\rho\lambda_{22} + q\mu_{13})\bar{\omega}_0^1 + (q\mu_{23} + \rho\lambda_{12})\bar{\omega}_0^2 \} + G\bar{\omega}_0^3 \\ \bar{\omega}_2^3 = H \{ (\rho\lambda_{12} - q\mu_{23})\bar{\omega}_0^1 - (\rho\lambda_{11} + q\mu_{13})\bar{\omega}_0^2 \} + J\bar{\omega}_0^3, \end{cases}$$

dove H, G, J denotano funzioni che qui non interessa esplicitare.

Si verifica così subito che Σ non è, in generale, una sfera anolonoma ⁽¹⁰⁾; anzi, si constata che le \mathcal{T} a curve principali indeterminate, per le quali Σ sia una sfera anolonoma, dipendono al più da funzioni arbitrarie di due variabili.

8. È interessante rilevare che la proprietà che forma l'oggetto dei nn. 5, 6 non è caso limite di una qualche relazione esistente fra le curve principali di una trasformazione dualistica \mathcal{T} generica e le linee di curvatura di 1^a specie della Σ ad essa relativa. Più precisamente, *le linee di curvatura di 1^a specie di Σ non sono* (in generale) *le curve principali di \mathcal{T} , né* (in generale) *sono indeterminate*.

Infatti, riferendoci ancora, per semplicità, al caso $r = 3$, consideriamo una corrispondenza dualistica generica. Fissiamo il riferimento come nel n. 5; si hanno le

$$\bar{\omega}_0^3 = q\omega^3, \quad \bar{\omega}_1^3 = m\omega^1, \quad \bar{\omega}_2^3 = p\omega^2.$$

Per differenziazione esterna, da qui si ricavano le

$$\begin{cases} (-m\bar{\omega}_0^1 - q\omega_1^3) \wedge \omega^1 + (-p\bar{\omega}_0^2 - q\omega_2^3) \wedge \omega^2 + dq \wedge \omega^3 = 0 \\ dm \wedge \omega^1 + (m\omega_1^2 - p\bar{\omega}_1^2) \wedge \omega^2 + m\omega_1^3 \wedge \omega^3 = 0 \\ (m\bar{\omega}_1^2 - p\omega_1^2) \wedge \omega^1 + dp \wedge \omega^2 + p\omega_2^3 \wedge \omega^3 = 0 \end{cases}$$

onde si traggono le

$$m\omega_1^3 = \lambda_{13}\omega^1 + \lambda_{23}\omega^2 + \lambda_{33}\omega^3, \quad p\omega_2^3 = \mu_{13}\omega^1 + \mu_{23}\omega^2 + \mu_{33}\omega^3,$$

che danno le equazioni della proiettività K relativa al punto A di Σ . Come si vede, le direzioni di curvatura non coincidono con le direzioni principali di \mathcal{T} , né sono indeterminate (in generale). Più precisamente, si verifica che:

le \mathcal{T} , le cui curve principali coincidono con le linee di curvatura di 1^a specie della relativa Σ (si hanno per $\rho\lambda_{23} + m\mu_{13} = 0$ e) dipendono da due funzioni arbitrarie di tre variabili;

(10) Analoga osservazione vale per le corrispondenze dualistiche fra due E^n ($n > 3$).

le \mathcal{C} , per le quali Σ è una sfera anolonoma, (si hanno per $p\lambda_{23} + m\mu_{13} = p\lambda_{13} - m\mu_{23} = 0$) e) dipendono da una funzione arbitraria di tre variabili.

9. Sia ora T una trasformazione puntuale fra due spazi euclidei E^3, \bar{E}^3 ; anche in relazione a T si definiscono le direzioni e le curve principali ⁽¹¹⁾. Può accadere che, in ogni punto dei due spazi, vi sia un piano di direzioni principali: le T cosiffatte dipendono da una funzione arbitraria di tre variabili ⁽¹²⁾. A differenza di quanto accade per le trasformazioni dualistiche, si ha che:

La superficie anolonoma che associa ad ogni punto d'uno dei due spazi il piano delle direzioni principali relative a T non è necessariamente una sfera anolonoma.

Siano infatti A, \bar{A} due punti corrispondenti; assumiamo per ognuno di essi un triedro, tale che le direzioni degli spigoli siano principali. Si hanno formule del tipo (1), e le relazioni

$$\bar{\omega}^1 = k\omega^1, \quad \bar{\omega}^2 = h\omega^2, \quad \bar{\omega}^3 = l\omega^3,$$

dove, al solito, le $\bar{\omega}$ sono le analoghe delle ω , nello spazio \bar{E}^3 . Con i soliti procedimenti, si ricavano le relazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} dk = a_{11}\omega^1 + a_{12}\omega^2 + a_{13}\omega^3 \quad (k\bar{\omega}_1^2 - h\omega_1^2) = b_{11}\omega^1 + b_{12}\omega^2 + b_{13}\omega^3 \\ k\omega_1^2 - h\bar{\omega}_1^2 = a_{12}\omega^1 + a_{22}\omega^2 + a_{23}\omega^3 \quad d\bar{h} = b_{12}\omega^1 + b_{22}\omega^2 + b_{23}\omega^3 \\ k\omega_1^3 - l\bar{\omega}_1^3 = a_{13}\omega^1 + a_{23}\omega^2 + a_{33}\omega^3 \quad (h\omega_2^3 - l\bar{\omega}_2^3) = b_{13}\omega^1 + b_{23}\omega^2 + b_{33}\omega^3 \\ k\bar{\omega}_1^3 - l\omega_1^3 = c_{11}\omega^1 + c_{12}\omega^2 + c_{13}\omega^3 \\ h\bar{\omega}_2^3 - l\omega_2^3 = c_{12}\omega^1 + c_{22}\omega^2 + c_{23}\omega^3 \\ d\bar{l} = c_{13}\omega^1 + c_{23}\omega^2 + c_{33}\omega^3 \end{array} \right.$$

e, da queste, le equazioni della proiettività K relativa alla superficie anolonoma $\omega^3 = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} (k^2 - l^2)\omega_1^3 = (ka_{13} + lc_{11})\omega^1 + (ka_{23} + lc_{12})\omega^2 + (ka_{33} + lc_{13})\omega^3 \\ (h^2 - l^2)\omega_2^3 = (hb_{13} + lc_{12})\omega^1 + (hb_{23} + lc_{22})\omega^2 + (hb_{33} + lc_{23})\omega^3; \end{array} \right.$$

si vede come le linee di curvatura di 1ª specie di S non coincidano necessariamente con le curve principali di T . Quando poi tutte le direzioni del piano $A\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2$ sono principali per T , occorre che sia $k = h$, e quindi:

$$b_{12} = a_{11} = -a_{22}, \quad b_{22} = a_{12}, \quad b_{23} = a_{13}, \quad b_{11} = -a_{12}, \quad b_{13} = -a_{23}.$$

Le linee di curvatura di 1ª specie della $\omega^3 = 0$ e della $\bar{\omega}^3 = 0$ si corrispondono in T , e non sono indeterminate (in generale); anzi, le trasformazioni puntuali per le quali in ogni punto A di uno dei due spazi esiste un piano α di direzioni principali, e tali inoltre che la superficie anolonoma ottenuta associando, ad A , α sia una sfera anolonoma, dipendono al più da funzioni arbitrarie di due variabili. In tal caso, inoltre, è una sfera anolonoma anche l'analogha superficie dell'altro spazio.

(11) Cfr. B. SEGRE, op. cit. in ⁽⁸⁾.

(12) Per questa, ed altre proprietà di tali trasformazioni, cfr. G. MELZI, *Su alcune trasformazioni puntuali fra spazi ordinari estendenti le trasformazioni conformi*, «Rend. di Mat.» (5), 16, 96-117 (1957). Svariate relazioni fra le superficie anolonome e le trasformazioni puntuali vengono studiate nei lavori di J. CREANGĂ, *Asupra corespunzelor punctuale între varietățile neholonome din spatiul cu trei dimensiuni*, «An. şt. Univ. "Al. I. Cuza"» (serie nouă), sect. I, t. II, f. 1-2, 145-150 (1956); *Sur les réseaux de Peterson dans les correspondances ponctuelles entre les variétés non holonomes*, ibid., t. III, f. 1-2, 165-170 (1957); *Sur la transformation des variétés non holonomes par les correspondances ponctuelles entre deux espaces*, ibid., t. V, f. I, 41-50 (1959).

Astronomia (Astrofisica). — *Lo spettro di una protuberanza quiescente osservata nell'eclisse solare del 15 febbraio 1961.* Nota di MARIO RIGUTTI e DORA RUSSO, presentata (*) dal Corrisp. G. RIGHINI.

Come viene detto in altra Nota di questi « Rendiconti » [1], durante l'eclisse totale di Sole del 15 febbraio 1961, fu allestito uno spettrografo per la registrazione dello spettro della corona solare. Furono presi due spettri, il primo dei quali con un tempo di posa di 15 secondi e il secondo con una posa di 60 secondi. Fu utilizzato per le misure il secondo spettro.

Poiché la fenditura dello spettrografo fu posta nell'angolo di posizione 45° e poiché nell'angolo di posizione 39° era presente una protuberanza piuttosto alta, sullo spettro della corona interna si sovrappose anche lo spettro della protuberanza che rimase visibile per tutta la durata dell'eclisse. Questo spettro servì di base per le misure delle lunghezze d'onda delle righe della corona. Inoltre esso fu misurato a parte perché presentava molte righe e perché, come è noto, il numero delle osservazioni spettroscopiche di protuberanze è piuttosto basso e quindi un contributo sperimentale di questa natura è ancora piuttosto importante.

Noi abbiamo tenuto presenti, per il confronto, le tabelle di lunghezze d'onda di righe osservate in protuberanza date da Grotrian [2], Unsöld [3], Waldmeier [4] e Righini [5] che sono quelle più estese e più importanti che possediamo.

La Tabella I contiene le 71 righe misurate nella protuberanza. Vengono dati: nella colonna 1 un numero d'ordine, nella 2 la lunghezza d'onda, nella 3 l'elemento emittente, nella 4 una stima dell'intensità, nella 5 la designazione spettroscopica [6], nella 6 il potenziale di eccitazione del livello superiore, nella 7 il potenziale di ionizzazione per gli elementi che nella colonna 3 appaiono ionizzati, nella 8 la somma dei due potenziali precedenti, cioè il potenziale di eccitazione totale contato dal livello fondamentale dell'atomo neutro.

Nella Tabella I sono segnate con un asterisco, posto come apice accanto al numero indicante la lunghezza d'onda, 33 righe da noi osservate nella protuberanza e non osservate dagli Autori testé citati. Vi è quindi una buona probabilità che le righe segnate da asterisco siano righe osservate effettivamente per la prima volta in uno spettro di protuberanza. Tutte queste righe sono comunque presenti nello spettro della cromosfera, come si deduce dal confronto con le tabelle di righe cromosferiche date da Mitchell [7], Mitchell e Williams [8] e da Fracastoro [9].

(*) Nella seduta dell'11 marzo 1961.

TABELLA I.
Righe di protuberanza.

1	2	3	4	5	6	7	8
1	3815,82	Fe I	3	$a^3 F - y^3 D^o$	1,48		
2	3820,43	Fe I	3	$a^5 F - y^5 D^o$	4,09		
3	3821,79*	Fe I	3	$b^3 F - x^3 F^o$	5,83		
4	3825,86	Fe I	3	$a^5 F - y^5 D^o$	4,09		
5	3838,30	Mg I	5	$3^3 P^o - 3^3 D$	5,92		
6	3858,36*	Ni I	3	$a^1 D - z^3 F^o$	3,62		
7	3859,87	Fe I	10	$a^5 D - z^5 D^o$	3,20		
8	3862,49*	Si II	4	$S p^2 \text{ } ^2D - 4^2 P^o$	10,02	8,12	18,14
9	3889,20	H ₈	30	$2^2 P^o - 8^2 D$	13,33		
		He I		$2^3 S - 3^3 P^o$	22,91		
10	3913,55	Ti II	0	$a^3 P - w^5 D^o$	5,42	6,81	11,07
		Fe I		$a^2 G - z^2 G^o$	4,26		
11	3933,82	Ca II	200	$4^2 S - 4^2 P^o$	3,14	6,09	9,23
12	3944,03*	Al I	2	$3^2 P^o - 4^2 S$	3,13		
13	3961,51*	Al I	4	$3^2 P^o - 4^2 F$	3,13		
14	3964,72*	He I	3	$2^1 S - 4^1 P^o$	23,64		
15	3968,63	Ca II	200	$4^2 S - 4^2 P^o$	3,11	6,09	9,20
16	3970,08	He	20	$2^2 P^o - 7^2 D$	13,26		
17	4028,36*	Ti II	10	$b^2 G - y^2 F^o$	4,95	6,81	11,76
18	4063,62*	Fe I	0	$a^3 F - y^3 F^o$	4,59		
19	4071,75*	Fe I	2	$a^3 F - y^3 F^o$	4,63		
20	4077,83	Sc II	10	$5^2 S - 5^2 P^o$	3,03	5,65	8,68
21	4101,85	H ₈	100	$2^2 P^o - 6^2 D$	13,16		
22	4120,78*	He I	3	$2^3 P^o - 5^3 S$	23,87		
23	4143,90*	He I	3	$2^1 P^o - 6^1 D$	24,10		
		Fe I		$a^3 F - y^3 F^o$	4,53		
24	4215,70	Sr II	30	$5^2 S - 5^2 P^o$	2,93	5,65	8,58
25	4226,74	Ca I	15	$4^1 S - 4^1 P^o$	2,92		

Segue: TABELLA I.

1	2	3	4	5	6	7	8
26	4233,22*	Fe II	0	$b^4 P - z^4 D^0$	5,49	7,83	13,32
27	4235,92*	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fe I} \\ \text{Y II ?} \end{array} \right.$	0	$z^7 D^0 - e^7 D$	5,33		
				$a^3 D - z^3 P^0$	3,04	6,50	9,54
28	4246,90	Sc II	10	$a^1 D - z^1 D^0$	3,22	6,57	9,79
29	4274,77*	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Cr I} \\ \text{Ti I} \end{array} \right.$	3	$a^7 S - z^7 P^0$	2,89		
				$a^3 G - t^3 F^0$	4,76		
				$a^5 F - x^5 D^0$	3,70		
30	4287,96*	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ti II} \\ \text{Ni I} \end{array} \right.$	0	$a^2 D - z^2 D^0$	3,95	6,81	10,76
				$z^3 G^0 - g^3 F$	6,70		
31	4289,60	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ca I} \\ \text{Cr I} \end{array} \right.$	4	$4^3 P^0 - p^2 3P$	4,75		
				$a^7 S - z^7 P^0$	2,88		
32	4294,07	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ti II} \\ \text{Fe I} \end{array} \right.$	3	$a^2 D - z^2 D^0$	3,95	6,81	10,76
				$a^3 F - z^5 G^0$	4,35		
33	4302,59*	Ca I	2	$4^3 P^0 - p^2 3P$	4,76		
34	4307,86	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ti II} \\ \text{Ca I} \end{array} \right.$	3	$a^4 T - z^4 D^0$	4,03	6,81	10,84
				$4^3 P^0 - p^2 3P$	4,74		
35	4312,82	Ti II	1	$a^4 P - z^4 D^0$	4,04	6,81	12,85
36	4320,77*	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Sc II} \\ \text{Ti II} \end{array} \right.$	3	$a^3 F - z^3 D^0$	3,46	6,57	10,03
				$a^4 P - z^4 D^0$	4,02	6,81	10,83
37	4325,02*	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fe I} \\ \text{Sc II} \end{array} \right.$	4	$a^5 P - x^5 F^0$	5,04		
				$a^3 F - z^3 D^0$	3,45	6,57	10,02
38	4340,63	H γ	100	$2^2 P^0 - 5^2 D$	13,00		
39	4343,85*	Ti II ?	0	$a^2 D - z^2 D^0$	3,92	6,81	10,73
40	4344,55*	Cr I	1	$a^5 D - z^5 F^0$	3,84		
41	4351,84*	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fe II} \\ \text{Cr I} \end{array} \right.$	1	$b^4 P - z^4 D^0$	5,53	7,83	13,36
				$a^5 D - z^5 F^0$	3,86		
42	4374,49*	Sc II	1	$a^3 F - z^3 F^0$	3,44	6,57	10,01
43	4376,00*	Fe I	4	$a^5 D - z^7 F^0$	2,82		
44	4383,54	Fe I	5	$a^3 F - z^5 G^0$	4,29		
45	4387,86	He I	5	$2^1 P^0 - 5^1 D$	23,94		

Segue: TABELLA I.

1	2	3	4	5	6	7	8
46	4395,13	{ Ti II V I	2	$a^2 D - z^2 F^0$ $a^6 D - y^6 F^0$	3,89 3,07	6,81	10,70
47	4399,79	Ti II	2	$a^2 P - z^4 D^0$	4,04	6,81	12,85
48	4427,34*	Fe I	—1	$a^5 D - z^7 F^0$	2,84		
49	4434,98*	{ Fe I Ca I	5	$a^5 D - z^7 F^0$ $4^3 P^0 - 4^3 D$	2,87 4,66		
50	4437,20*	V I	0	$a^6 D - z^6 P^0$	3,07		
51	4443,85	Ti II	0	$a^2 D - z^2 F^0$	3,85	6,81	10,66
52	4468,48	Ti II	5	$a^2 G - z^2 F^0$	3,89	6,81	10,70
53	4471,54	He I	50	$2^3 P - 4^3 D$	23,49		
54	4484,30*	Fe I	5	$2^5 P^0 - f^5 D$	6,34		
55	4522,67*	{ Fe II Ti I	5	$b^4 F - z^4 D^0$ $a^5 F - y^5 F^0$	5,56 3,54	7,83	13,39
56	4534,03	{ Fe II Ti II	5	$b^4 F - z^4 F^0$ $a^2 P - z^2 D^0$	5,57 3,95	7,83 6,81	13,40 10,76
57	4541,50*	Fe II	4	$b^4 F - z^4 D^0$	5,56	7,83	13,39
58	4549,63	{ Fe II Ti II	2	$b^4 F - z^4 D^0$ $a^2 H - z^2 D^0$	5,53 4,29	7,83 6,81	13,36 11,10
59	4558,57*	{ Cr II La II	5	$b^4 F - z^4 D^0$ $a^3 D - y^1 F^0$	6,76 3,03	6,74 5,59	13,50 8,62
60	4563,76	Ti II	5	$a^2 P - z^2 D^0$	3,92	6,81	10,73
61	4572,00	Ti II	2	$a^2 H - z^2 G^0$	4,26	6,81	11,07
62	4577,37*	V I	2	$a^4 F - z^4 G^0$	2,70		
63	4677,03*	Ti ?	5	$z^1 G^0 - e^1 G$	5,69		
64	4706,69*	V I	10	$a^4 G - y^4 H^0$	4,75		
65	4861,50	H β	200	$2^2 P^0 - 4^2 D$	12,69		
66	4922,01	He I	10	$2^1 P^0 - 4^1 D$	23,64		
67	5015,68	He I	10	$2^1 S - 3^1 P^0$	22,99		
68	5172,65	Mg b_2	15	$3^3 P^0 - 4^3 S$	5,09		
69	5183,58	Mg b_1	300	$2^3 P^0 - 3^3 D$	22,98		
70	5893,00	Na (D $_1$ D $_2$)?	15	$3^2 S - 3^2 P^0$	2,10		
71	6562,80	H α	100	$2^2 P^0 - 3^2 D$	12,04		

L'errore medio delle misure, eseguite al macromicrometro Mioni dell'Osservatorio astrofisico di Arcetri, era di ± 3 micron e per questa ragione le identificazioni devono ritenersi piuttosto sicure. Nella colonna 3, tuttavia, per alcune righe la cui identificazione è rimasta dubbia è stato messo un punto interrogativo.

Le righe H e K del Ca II si estendono molto al di là dello spettro della protuberanza nel continuo della corona. In questo presentano distorsioni fino ad un massimo di 12 angstrom che, se interpretate come spostamenti Doppler, porterebbero a velocità radiali dell'ordine di 900 km/sec. Tali velocità sembrano veramente eccezionali e pertanto non è possibile dire se l'interpretazione possa essere accettata esigendo il caso un esame più approfondito.

Dall'esame della Tabella I si vede che accanto al gruppo di elementi come Mg I, Fe I, Ni I, Al I, Ca II, ecc. con bassi potenziali di eccitazione (3-9 volt) sono presenti elementi come Sc II e Ti II con potenziali di eccitazione già abbastanza elevati (10-13 volt) ed elementi come H, Si II ed He I con potenziali di eccitazione molto alti (13-24 volt). Questo fatto mostra ancora che l'eccitazione di questi livelli deve essere attribuita a qualche meccanismo diverso da quello termico e che, quindi, nelle protuberanze le condizioni fisiche sono lontane da quelle dell'equilibrio termodinamico.

È da notare che nello spettro studiato si sono trovate diverse righe del Fe I, del Ca I, dell'Al I e del V I mancanti in quello ottenuto da Righini [5] nel 1952 e, ad eccezione di quelle del Fe I e del Ca I, anche in quelli ottenuti dagli Autori citati. Manca per contro nel nostro spettro la riga a λ 4685,83 dell'He II con potenziale di eccitazione totale di 75,64 volt. Si comprende come queste differenze possano essere spiegate con la diversità delle condizioni fisiche delle protuberanze studiate.

Qualche altro risultato potrà essere dato in seguito, dopo che sarà stato eseguito lo studio fotometrico dello spettro della protuberanza.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] M. RIGUTTI e D. RUSSO, « Rend. Sc. fis., mat. e nat. » (1961).
- [2] W. GROTRIAN, « Zs. f. Aphys. », 2, 106 (1931).
- [3] A. UNSÖLD, « Zs. f. Aphys. » 24, 22 (1947).
- [4] M. WALDMEIER, « Zs. f. Aphys. », 26, 305 (1949).
- [5] G. RIGHINI, « Rend. Sc. fis., mat. e nat. », 12, 670 (1952).
- [6] C. MOORE, *Multiplet Table*, Princeton 1945.
- [7] S. A. MITCHELL, « The Ap. J. », 38, 407 (1913).
- [8] S. A. MITCHELL e E. R. T. WILLIAMS, « The Ap. J. », 77, 1 (1933).
- [9] M. G. FRACASTORO, « Rend. Sc. fis., mat. e nat. della Reale Accademia d'Italia », serie VII, 1, 134 (1940).

Astronomia. — *On the existence of a new polarization-effect in stellar spectral-lines.* Nota di TERESITA TAMBURINI e GEORG THIESSEN, presentata (*) dal Socio F. ZAGAR.

1. By one of us (Thiessen) ⁽¹⁾ has been maintained that possibly a hitherto yet unknown polarization-effect in the spectral-lines of stars having a partially polarized continuum could exist. The profiles viz. the equivalent widths of the lines could be dependent on the plane of vibration of the respective light-components under examination.

2. The following deals with the test of the empirical proof for said presumed effect. For this purpose the 1 m reflector of the Osservatorio Astronomico Merate/Como has been made available. (Cassae grain-system.) Testing the mirrors in respect of their instrumental polarization (courteously assisted by P. Broglia) ⁽²⁾ it has been found that for the one half of the mirror only the polarization amounted but to a few per cent which is quite negligible for the problem under consideration; nevertheless part of the spectra has been obtained using the polarizing half of the mirror covered. In order not to prolong the exposure-times unduly the prism-spectrograph has been used at the medium dispersion of 34 Å/mm at H_γ. As this dispersion as well as partially the resolving power for the exact determination of the line-profiles were generally insufficient (Kodak 103 a-O plates were used), for the present we have limited our examination to the total absorption only.

Right in front of the spectrograph's slit has been arranged a Glan-Thompson prism capable of rotating round the optical axis of the entire equipment, the position angle of the plane of vibration of the transmitted light component could be read on a scale. Directly following each other were exposed upon the same plate two spectra of the same star, one for the direction of vibration parallel (||), the other vertical (⊥) in respect of the vibration-direction of the maximum electric vector in the continuum of

(*) Nella seduta dell'8 aprile 1961.

(1) G. THIESSEN, *Über die Polarisation des Sternlichtes, die Strahlung der Sterne, sowie Bemerkungen zur galaktischen Struktur*, «Astronomische Abhandlungen der Hamburger Sternwarte», Bd. V. S. 273 (1961).

(2) G. THIESSEN und P. BROGLIA, *Über einen Polarisierungseffekt an aufgedampften Aluminiumschichten bei senkrechter Lichtinzidenz*, «Zeitschrift für Astrophysik», 48, 81 (1959).

the same star. To control whether the whole equipment is sufficient free of flexibility during exposure-time iron spectra have been added in a suitable manner. Calibration spectra according to the Hirsch-Schön method have been exposed upon the same plate in the laboratory. For the same intensity coming in and the same exposure-time two spectra with different slit-widths have been taken, so as to allow checking the linear function of the intensity-drop vertically in respect of the direction of dispersion.

The simultaneous exposure of two spectra of the same star having directions of vibration at an angle of 90° in respect of each other, using a birefringent crystal-plate instead of the Glan-Thompson prism, demands:

a) generally a revolution of the spectrograph around its optical axis, so that both stellar images lie contemporaneously upon the spectrograph's slit;

b) a widening mechanism for the stellar spectra acting contemporaneously in right ascension and declination, whereby the ratio of the velocities of the motion for these two directions from star to star varies in conformity with the different directions of vibration in the continuum. A suitable equipment is now in course of preparation.

3. The measurement of the obtained spectra has been made using a microphotometer of the Hamburg Observatory. For the respective well measurable Balmer lines obtained from the densities by the aid of the calibration curves (individual curves for H_β , H_γ , $H_{\delta,e}$ and $H_{\delta,g}$) the course of intensity has been determined, and by the help of a planimeter the respective equivalent widths W_{\parallel} and W_{\perp} for both spectra. As the two spectra taken on a single plate show only very slight differences, nor do they have very distinct densities for equal wavelengths, the question of determining the ratio W_{\perp}/W_{\parallel} becomes nearly a sort of differential examination which, using proper care, can be achieved with relatively great precision. It has been ascertained, as could be expected, that the ratio W_{\perp}/W_{\parallel} is quite unaffected even by considerable inexactness of the calibration curves so that as far as the calibrations are concerned, no serious difficulties can arise. The main problem lies in the determination of the continuum in the neighbourhood of the lines. However, since the two spectra are very similar to each other, it is relatively easy to proceed in the same way with the determination of the continuum, the ratio W_{\perp}/W_{\parallel} again can be ascertained with considerable greater certainty than, for example, the single absolute value of W_{\perp} , or of W_{\parallel} , which here does not matter so much. (Anyway, a comparison of our absolute values $(W_{\perp} + W_{\parallel})/2$ with those of Williams⁽³⁾ is conform to the average, although individually single considerable divergencies have occurred.)

(3) E. G. WILLIAMS, *Absorption-line intensities in B-type stars*, «Astrophysical Journal», 83, 279. (1936).

For the selection of the stars to be examined the Catalogues of stars having polarized light by Hiltner ⁽⁴⁾ and Hall ⁽⁵⁾ have been at our disposal. Bright stars possibly having a relatively high polarization in the continuum have been chosen.

4. The results so far obtained for the ratio W_{\perp}/W_{\parallel} are contained in the table given here below.

The single lines of Table I contain in succession, starting from top to bottom: the HD number of the stars examined, their amount of polarization p in the continuum in magnitudes, the position angle θ of the maximum electric vector (vibration-direction) in the continuum, the spectral-type Sp, and in the lines 5 to 10 for H_{β} to H_9 the values of W_{\perp}/W_{\parallel} , viz. the ratios of total absorption in the spectra for the two vibration-directions respectively vertical or parallel to the vibration-direction of the respective continuum. A dash signifies that because of too slight a definition of the line the equivalent width could not be determined with sufficient accuracy. The last two columns for the 5th to the 10th line contain for the stars examined the average values of the ratio W_{\perp}/W_{\parallel} for the single Balmer-lines together with their respective mean errors, whereby the values for H_8 and H_9 have been added-up, because the number of the observed values has been too small.

TABLE I.

HD	37202	109387	21291	21389	11415	149757	32630		
p	0,029	0,019	0,072	0,083	0,014	0,021	0,008		
θ	23°	20°	116°	122°	132°	131°	177°		
Sp	B3 e	B5 e	B9 Ia	A0 Ia	B3 III	O 9,5 V	B3 V	Mean	m.e.
H_{β}	—	—	1,32	1,08	0,95	1,11	1,04	1,10	$\pm 0,04$
H_{γ}	1,07	1,03	0,98	1,12	1,06	1,08	1,03	1,06	$\pm 0,02$
H_{δ}	1,14	1,15	1,22	1,07	1,10	—	0,94	1,10	$\pm 0,04$
H_{ϵ}	0,87	1,04	—	0,91	1,12	—	0,84	0,96	$\pm 0,05$
H_8	1,00	1,11	—	—	1,13	—	0,83	1,02	$\pm 0,05$
H_9	—	0,96	—	—	1,10	—	—		

(4) W. A. HILTNER, *Photometric, Polarization, and Spectrographic Observations of O and B stars*, « The Astrophysical Journal », Suppl. series, II, 389 (1956).

(5) J. S. HALL, *Polarization of starlight in the galaxy*, « Publ. U. S. Naval Observ. », Second series, vol. XVII - Part VI (1958).

In Fig. 1 the crosses indicate the mean values of W_{\perp}/W_{\parallel} for the single Balmer lines, the vertical lines indicate the mean errors. The full drawn line represents the average graph through the crosses. The thin horizontal straight line shows the value $W_{\perp}/W_{\parallel} = 1$ for all lines. Forming the total average of all observed values W_{\perp}/W_{\parallel} (for all lines and all stars) the result is: $W_{\perp}/W_{\parallel} = 1,05 \pm 0,02$. The curve $W_{\perp}/W_{\parallel} = 1,05$ has been entered into Fig. 1 as a dotted line, the mean error is shown at the beginning and at the end, by the short vertical dotted lines.

Fig. 1 shows that for H_{β} , H_{γ} , and H_{δ} the ratio is $W_{\perp}/W_{\parallel} > 1$, the deviation from 1 lies considerable outside the mean error. For the lines H_{ϵ} and $H_{8,9}$ the ratio seems to approach the value 1, however observation

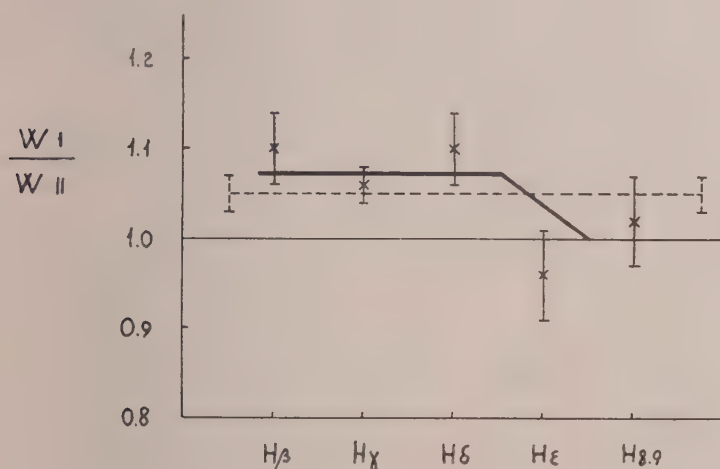


Fig. 1.

data being yet scarce, it is also compatible with the dotted line: a ratio of $W_{\perp}/W_{\parallel} = 1,05 \pm 0,02$ for all lines.

That no systematic errors could have been responsible for the observed effect $W_{\perp}/W_{\parallel} > 1$ for H_{β} , H_{γ} and H_{δ} results from the following consideration: for the first two stars of Table I with $\bar{\theta} = 21,5^{\circ}$ we obtain as an average for H_{γ} , H_{δ} and H_{ϵ} the following W_{\perp}/W_{\parallel} values: 1,05; 1,14 and 0,95. For the two following stars of Table I with $\bar{\theta} = 119^{\circ}$ the direction of vibration is practically vertical in respect of that of the first two stars. As average values of W_{\perp}/W_{\parallel} for H_{γ} , H_{δ} and H_{ϵ} we get now: 1,05; 1,14 and 0,91, viz. nearly the same as that here above. If there were an instrumental effect then in the second case there should result reciprocal values for W_{\perp}/W_{\parallel} because having employed the identical equipment for the stars of the second group only the sign \perp has been exchanged for the sign \parallel in respect of the two stars of the first group. Therefore the ratio $W_{\perp}/W_{\parallel} > 1$ turns, so to speak, with the position angle of the direction of vibration θ of the examined

star, the equipment itself remaining absolutely fixed. (Also for the last three stars together with $\bar{\theta} = 146^\circ$, for which θ is turned yet by another 30° in respect of group 2 for H_γ , H_δ and H_ϵ the average W_\perp/W_\parallel values are resulting in : 1,06 ; 1,02 and 0,98).

By the data of observation herewith submitted the existence of the presumed polarization-effect in the stellar spectral lines with partially polarized continuum becomes quite probable. Naturally any final confirmation of the effect can only take place when considerably more data of observation will be available. In a successive communication we shall submit further results of observation. About the interpretation and importance of this effect see reference ⁽¹⁾.

We are greatly indebted to Prof. Dr. Heckmann and Prof. Dr. Zagar for their kind hospitality at the Hamburg-resp. Merate-Observatory and to the Deutsche Forschungsgemeinschaft and the Joachim Jungius-Gesellschaft for financial supports.

Astrofisica. — *Studio della polarizzazione della corona: Risultati preliminari ottenuti durante l'eclisse del 15 febbraio 1961 dalla spedizione dell'Osservatorio Astronomico di Merate a Monte Conero (Ancona).*
Nota di MARGHERITA HACK e MASSIMO FRACASSINI, presentata (*) dal Socio F. ZAGAR.

SCOPO DELLE OSSERVAZIONI.

Il programma d'osservazione proposto da M. Hack per l'eclisse del 15 febbraio 1961 consisteva nello studio della polarizzazione della corona a mezzo di una camera tripla. L'importanza di questo genere d'osservazione consiste nel fatto che fino a tutt'oggi non è ben conosciuto il modo di variare della polarizzazione coronale con la distanza dal bordo solare, e la sua dipendenza dal ciclo solare. È perciò necessario approfittare di ogni eclisse totale per lo studio della polarizzazione della corona. I principali risultati che si possono ricavare da questo studio concernono il campo magnetico e la densità elettronica della corona. Infatti:

1° i dettagli della struttura coronale danno informazioni sul campo magnetico degli strati esterni del sole. Questi dettagli differiscono completamente da un'eclisse ad un'altra, ed è perciò necessario avere fotografie coronali prese durante molte eclissi per potere stabilire una relazione fra le variazioni dei dettagli coronali e le altre variabili che caratterizzano il ciclo solare;

2° per l'interpretazione fisica della corona è necessario conoscere la densità elettronica in funzione dell'altezza. Poiché lo spettro continuo della corona è luce solare diffusa dagli elettroni, e poiché il coefficiente di diffusione è noto, la fotometria assoluta della brillantezza coronale permette una misura della densità elettronica. Per questo occorre: *a)* misurare il flusso totale di radiazione della corona, *b)* misurare la distribuzione della radiazione coronale con la distanza dal bordo solare.

La misura del flusso totale può essere fatta paragonando la radiazione coronale con quella della luna piena.

Per la determinazione della densità elettronica, si devono separare le componenti della radiazione ricevuta. Esse sono: *a)* luce coronale diffusa dagli elettroni, o corona K, polarizzata; *b)* le linee coronali in emissione, corona K; *c)* luce coronale diffusa dalle particelle solide, o corona F, non polarizzata; *d)* luce diffusa dal cielo; *e)* luce strumentale diffusa.

(*) Nella seduta dell'8 aprile 1961.

La luce diffusa dal cielo può essere determinata perché è costante sopra un'area estesa, e quella strumentale può essere misurata facendo fotografie della luna piena con la stessa camera impiegata per la fotografia della corona. Il contributo dovuto alle righe coronali può essere considerato trascurabile. Infine, le componenti F e K si possono separare grazie alle misure di polarizzazione.

DISPOSITIVO STRUMENTALE.

Per l'eclisse del 15 febbraio 1961 è stata costruita appositamente una camera tripla, costituita da tre obbiettivi gemelli di 9 cm di diametro e 62 cm di focale, montati con gli assi paralleli, ed in modo tale che i centri dei tre obbiettivi sono i vertici di un triangolo equilatero di 11 cm di lato. A ciascun obbiettivo è anteposto un filtro verde Kodak Wratten 58 avente la massima trasparenza a circa 5300 Å e un polaroide. I tre polaroidi sono orientati a 60° l'uno dall'altro, a partire da una direzione parallela all'asse polare solare. In questo modo dal confronto delle tre fotografie eseguite simultaneamente con le tre camere è possibile ricavare il grado di polarizzazione e la direzione del piano di polarizzazione. Lo strumento è stato progettato secondo i criteri già seguiti da Öhman ⁽¹⁾ secondo il metodo di Fessenkoff ⁽²⁾. La camera tripla è montata su una montatura equatoriale, dotata di moto orario e di un piccolo cercatore. Tutto lo strumento è stato interamente costruito nell'officina dell'Osservatorio di Merate, dal tecnico sig. Luigi Cantù.

LE OSSERVAZIONI.

Per avere fotografie utilizzabili per fotometria della corona interna, media ed esterna si sono date le seguenti esposizioni:

1) 1 ^s	con lastre Ferrania Normali Orto	11/10 DIN
2) 2 ^s	» » Fine Orto	15/10 DIN
3) 4 ^s	» » » »	»
4) 8 ^s	» » » »	»
5) 16 ^s	» » Super Orto	22/10 DIN
6) 32 ^s	» » » »	»

Ogni tripletta di lastre è stata sviluppata simultaneamente assieme ad una lastra dello stesso pacchetto utilizzata per la calibrazione. Più precisamente si sono prese due lastre 9 × 12 con la gelatina affacciata, che tagliate a metà hanno dato le quattro lastre necessarie formato 6 × 9. La

(1) «Stockholms Observatorium Annaler», Bd. 15, n. 2, p. 24 (1947).

(2) «Russian Astronomical Journal», vol. XII, n. 4, p. 310 (1935).

calibrazione è stata eseguita a mezzo di un cuneo a gradini, impiegando tempi di posa dello stesso ordine di quelli usati per fotografare la corona. Le tre lastre per le tre fotografie simultanee della corona erano montate su un unico chassis formato 27×27 portante tre riduttori formato 6×9 .

Favoriti da un tempo bellissimo le fotografie della corona sono risultate tutte ottimamente, e le esposizioni hanno dato densità misurabili dal bordo fino a circa 4 raggi solari (Tavola I, II e III).

La forma della corona è di tipo intermedio. Caratteristica la dissimmetria fra polo nord e sud. Si potrebbe dire che mentre l'emisfero sud presenta una corona più simile a quella di massimo, l'emisfero nord la presenta più simile a quella di minimo, con sviluppati pennacchi e piume. Questa dissimmetria spiccatissima nella corona interna e media (triplette relative alle esposizioni da 1) a 4)), si attenua nell'esterna (triplette relative alle esposizioni 5) e 6)) perché la corona F non polarizzata che predomina nella corona esterna, con la sua forma circolare maschera un poco l'effetto. Restano poi sempre visibilissimi i due pennacchi a est e a ovest del polo nord, di cui manca completamente ogni corrispondenza al polo sud.

Sulle lastre del gruppo 1) la corona ha un raggio medio pari a circa $1,26 R_{\odot}$; su quelle del gruppo 2) e 3) rispettivamente di $1,74 R_{\odot}$ e $1,95 R_{\odot}$. Qui è possibile lo studio sia della corona interna che della corona media. Sulle lastre del gruppo 4), 5) e 6) la corona si estende rispettivamente fino a $2,29 R_{\odot}$, $2,6 R_{\odot}$ e $3 R_{\odot}$, rendendo possibile lo studio della corona esterna. Nelle ultime due serie sono visibili pennacchi estesi fino a $60'$ dal bordo (quasi $5 R_{\odot}$).

STUDIO PRELIMINARE DELLA POLARIZZAZIONE.

Uno studio preliminare delle nostre fotografie è stato fatto determinando visualmente le isofote coronali con i seguenti procedimenti:

1° si sono eseguite delle stampe con ingrandimento $\times 5$, mantenendo la stessa esposizione per ciascuna tripletta. Si sono poi tracciati i contorni della corona su ciascuna stampa, ricalcandoli attraverso un foglio di carta millimetrata trasparente (impiegando sempre la stessa carta al fine di mantenere costante la trasparenza dei fogli) segnando la linea in cui il bianco della corona sfumava nel fondo scuro del cielo. Si ottiene così un tracciato delle zone di eguale intensità. Il tracciamento è stato eseguito indipendentemente per ogni fotografia da ciascuno di noi. Per ogni fotografia è stato preso il tracciato medio risultante dai tracciati dei due osservatori. L'ottimo accordo fra i due tracciati indica che il procedimento è abbastanza indipendente da fattori soggettivi;

2° si sono proiettate direttamente le negative su un foglio bianco con ingrandimento $\times 10$ e si sono tracciati direttamente i contorni delle regioni stimate di eguale densità fotografica. Anche in questo caso l'accordo fra i due osservatori è soddisfacente, come pure buono è l'accordo fra le isofote ottenute con i due metodi.

Sono poi state combinate in uno stesso disegno tutte le isofote relative ad una polarizzazione (fig. 1, *a, b, c*). Con questo procedimento preliminare vanno persi i dettagli fini, piume e pennacchi coronali, che saranno oggetto di uno studio più approfondito quando sarà terminata la determinazione,

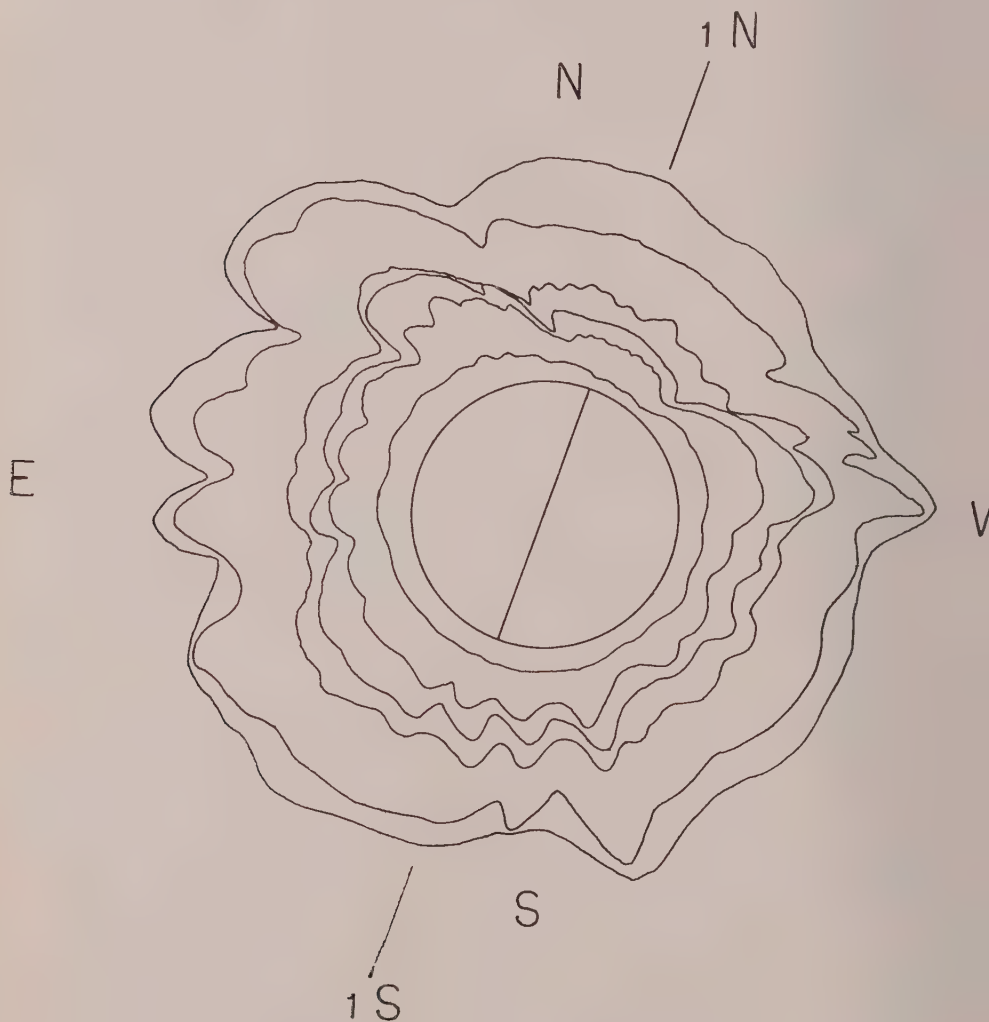


Fig. 1 *a*. -- Isofote della corona. Asse del polaroide parallelo all'asse polare.

attualmente in corso, delle isofote attraverso accurate misure microfotometriche. Comunque, anche da queste prime isofote risultano alcuni dati interessanti. Le figure 1, *a, b, c*, mostrano chiaramente che la corona è allungata nella direzione dei rispettivi assi dei polaroidi, indicando che la radiazione è prevalentemente polarizzata in direzione radiale.

Una stima quantitativa del grado di polarizzazione può essere fatta confrontando l'estensione della corona lungo uno stesso raggio, nelle tre fotografie prese simultaneamente con le tre orientazioni dell'asse del poloide. Chiameremo 1, 2, 3, rispettivamente le foto prese con asse parallelo

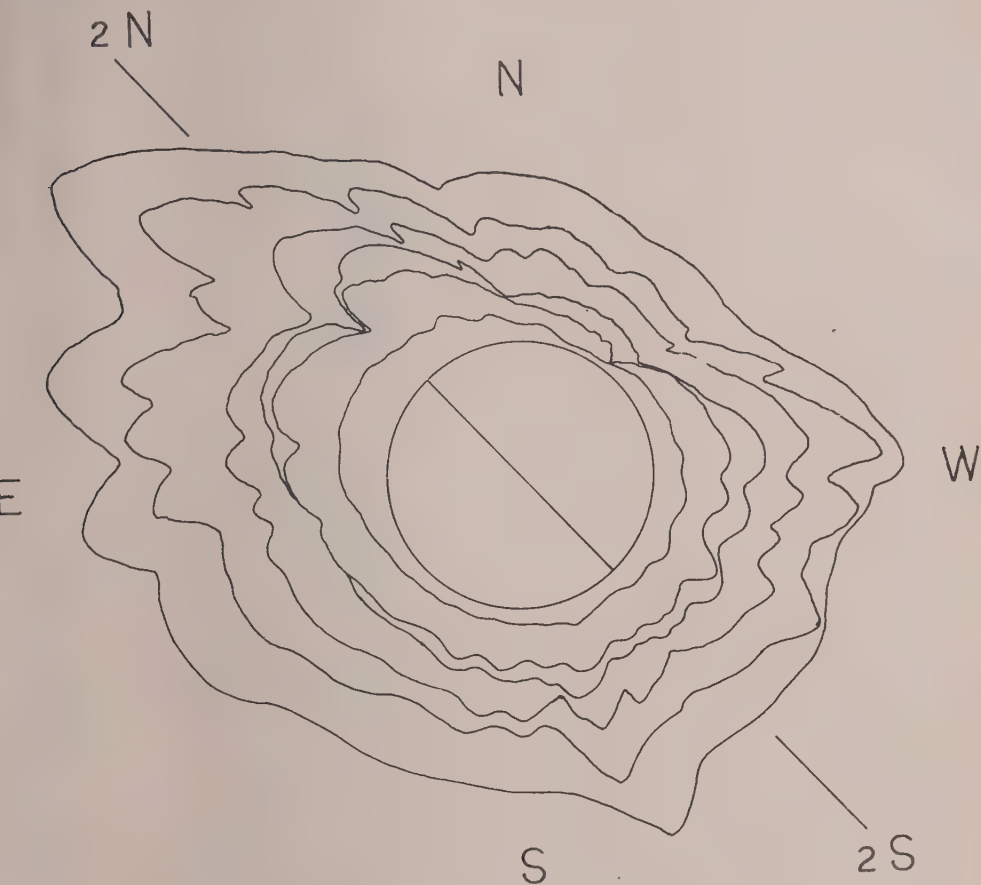


Fig. 1b. — Isofote della corona. Asse a 60° E.

all'asse polare, con asse orientato a 60° est e con asse a 60° ovest dall'asse polare. L'estensione della corona è stata misurata lungo i 6 semiasse così indicati: 1 N e 1 S, 2 N e 2 S, e 3 N e 3 S. Una misura della polarizzazione è stata ottenuta facendo i seguenti rapporti

$$\frac{1}{2} \left(\frac{r_{\max} - r'}{r_{\max}} + \frac{r_{\max} - r''}{r_{\max}} \right)$$

dove r_{\max} è l'estensione della corona in direzione dell'asse corrispondente a quello con cui è stata presa la fotografia, r' e r'' l'estensione della corona nella stessa direzione misurata sulle fotografie relative alle orientazioni degli

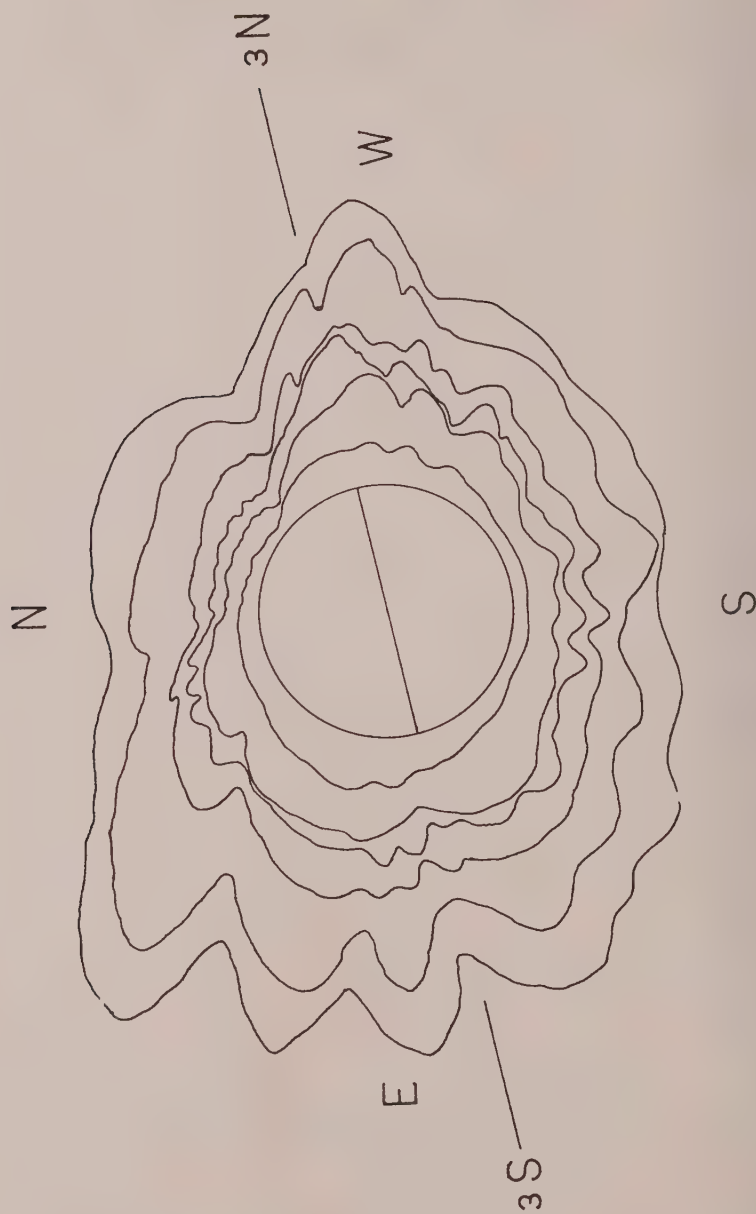


Fig. 1 c. - Isofote della corona. Asse a 60° W.

altri due assi. Si sono confrontati i semiassi nord fra loro e i semiassi sud fra loro. Si ottiene così una misura della polarizzazione nel punto 1 N o polo nord solare, 1 S o polo sud solare, 2 N e 3 S includenti l'equatore ad est, 3 N e 2 S includenti l'equatore ad ovest.

Le misure sono state eseguite sia sulle isofote ottenute coi due metodi descritti sopra, sia sulle stampe fotografiche direttamente, e si sono riportati in Tabella I i valori medi, e lo scarto medio. Le ultime due isofote della corona esterna non sono state utilizzate, poiché data la presenza di luce diffusa del cielo la stima del punto di confine fra luce coronale e luce diffusa è molto incerta e rende poco attendibili le misure visuali.

TABELLA I.

R_{\odot}	1 N	Scarti	1 S	Scarti	2 N	Scarti	3 S	Scarti	3 N	Scarti	2 S	Scarti
1,26	0,038	0,017	0,077	0,020	0,061	0,013	0,068	0,014	0,097	0,008	0,028	0,018
1,74	,074	,017	,074	,016	,150	,038	,120	,020	,080	,014	,050	,008
1,95	,076	,018	,062	,026	,143	,052	,106	,017	,116	,016	,059	,013
2,29	,070	,022	,055	,044	,119	,021	,106	,010	,108	,025	,047	,011

Dai grafici di figura 2 e 3 risulta che la polarizzazione ai poli è minore che nelle direzioni presso l'equatore; e che un massimo di polarizzazione è

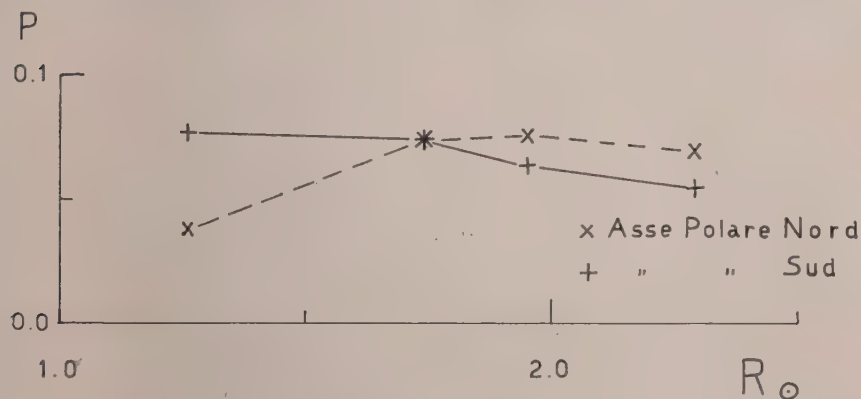


Fig. 2. - Polarizzazione dei poli.

raggiunto fra circa 1,7 e 2 raggi solari, tanto ai poli che nelle direzioni prossime all'equatore. Questi risultati concordano qualitativamente con quelli trovati da Fessenkoff per l'eclisse del 1914 cioè un anno dopo il minimo di

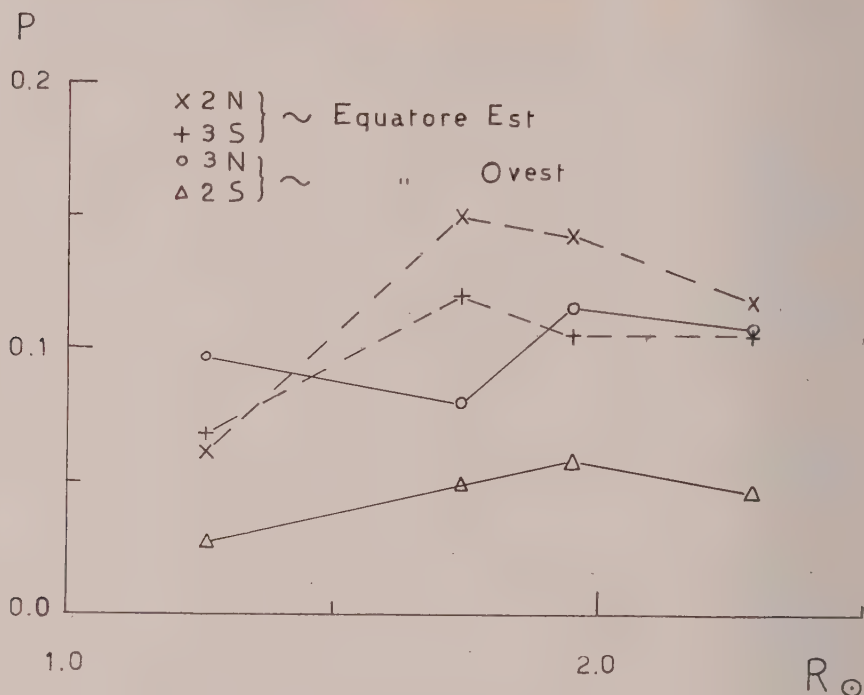


Fig. 3. - Polarizzazione equatoriale.

attività (loc. cit.). Anche i risultati di Öhman indicano una polarizzazione maggiore all'equatore che non ai poli, ed un massimo posto circa fra 1,7 e 2 raggi solari all'equatore, mentre ai poli il massimo cadrebbe più vicino al lembo solare.

STIMA DELLE INTENSITÀ RELATIVE DELLE ISOFOTE.

Una stima grossolana delle intensità relative delle isofote è data in figura 4 ed è stata ottenuta in base alle seguenti considerazioni. Le isofote sono state tracciate seguendo un contorno di egual densità e questa densità era circa la stessa in tutte e sei le serie di triplette, essendo stata fissata come quella che delimita il contorno della corona dallo sfondo del cielo. Si può allora stimare, tenendo conto dei tempi di posa e della sensibilità delle lastre, quale debba essere l'intensità della corona in grado di compensare la variazione del fattore tempo di posa e sensibilità della lastra. Chiamando con I_n la intensità della corona alla distanza media dal bordo a cui essa è ancora visibile nella tripletta n , con t_n il tempo di posa e con S_n la sensibilità della lastra, avremo che l'esposizione E corrispondente alla densità a cui sono state tracciate le isofote è grosso modo data da

$$E = \text{costante} = I_1 t_1 S_1 = \dots = I_n t_n S_n.$$

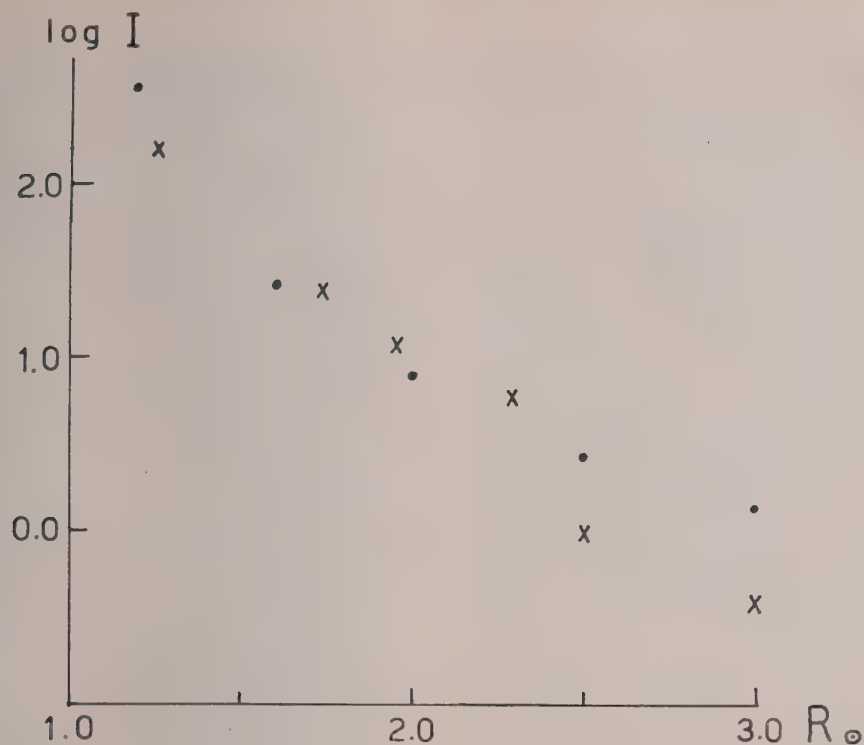


Fig. 4. — Intensità relative medie delle isofote di fig. 1. Le croci si riferiscono alle nostre osservazioni; i punti sono i valori dati da van de Hulst.

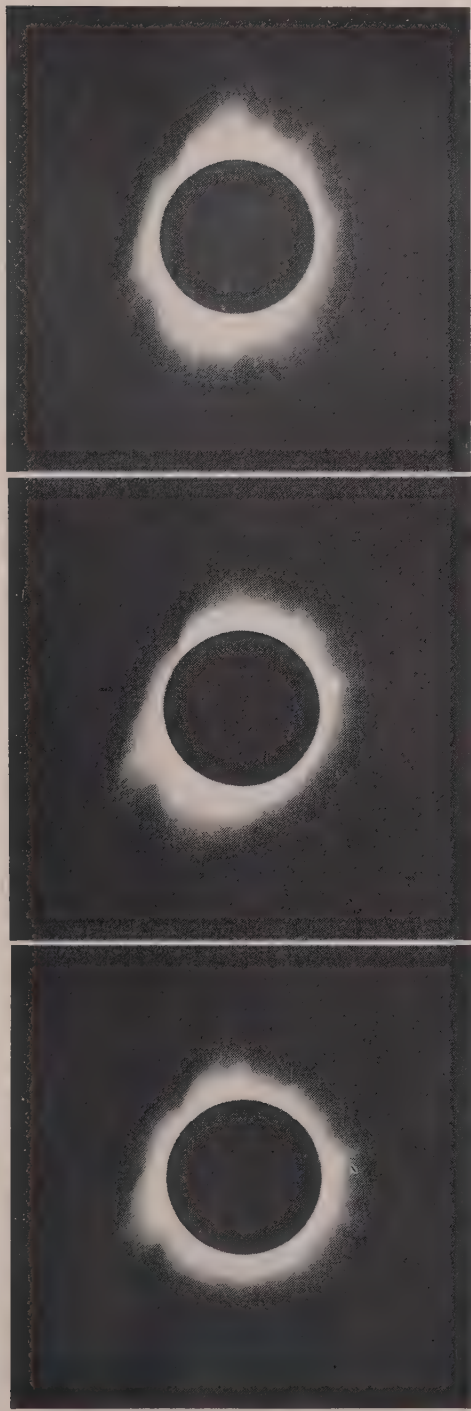
TABELLA II.

Isofota n°	R_{\odot}	Intensità corona
1	1,26	100
2	1,74	25
3	1,95	12
4	2,29	6
5	2,5	1
6	3,0	0,4

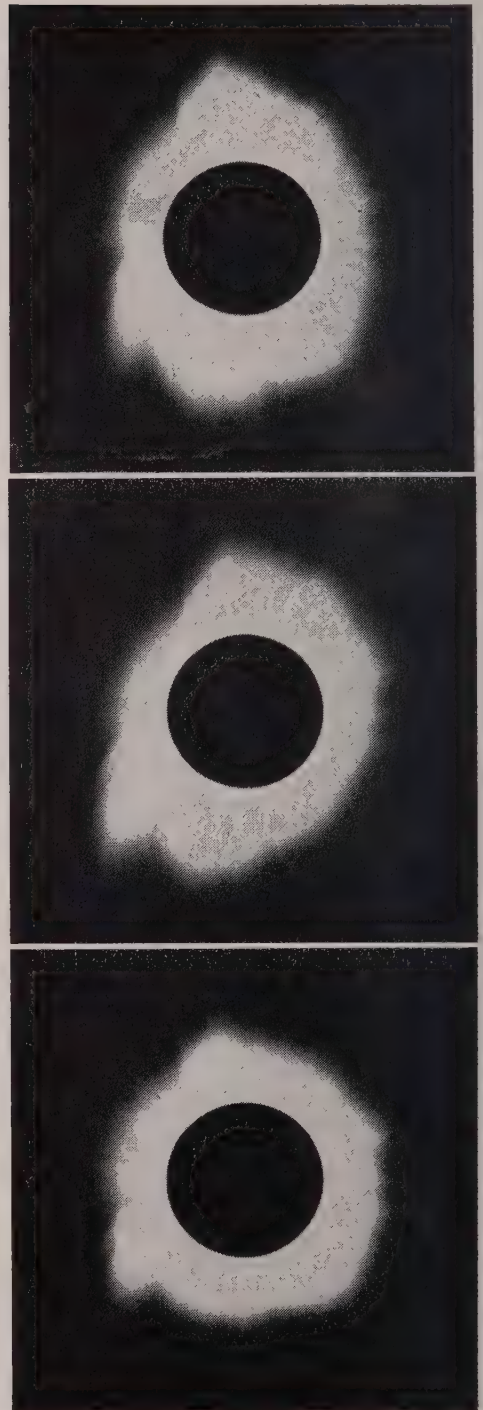
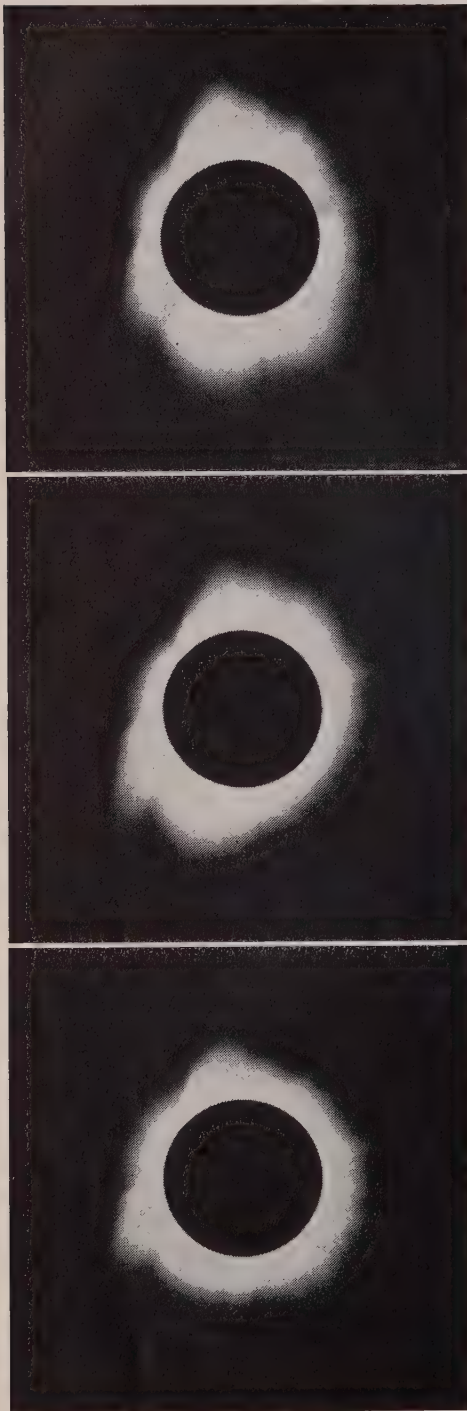
I valori delle intensità così stimate in funzione del raggio medio di ciascuna isofota sono dati nella Tabella II. Si è posto eguale a 100 l'intensità

della prima isofota. Questi risultati sono confrontati con quelli dati da van de Hulst⁽³⁾. Da questi ultimi valori che sono riferiti alla brillantezza media del disco si è sottratta la costante 1,5 per portare a coincidere nella figura 4 i suoi dati con i nostri relativi alle tre isofote 2), 3), e 4), i cui valori relativi, l'una rispetto all'altra, hanno maggior peso, essendo stati presi tutti con lo stesso tipo di lastra. Le stime di intensità delle due ultime isofote 5), 6), sono molto più incerte al solito per la difficoltà di stimare la densità limite fra corona e sfondo, dato il notevole splendore del cielo durante l'eclisse.

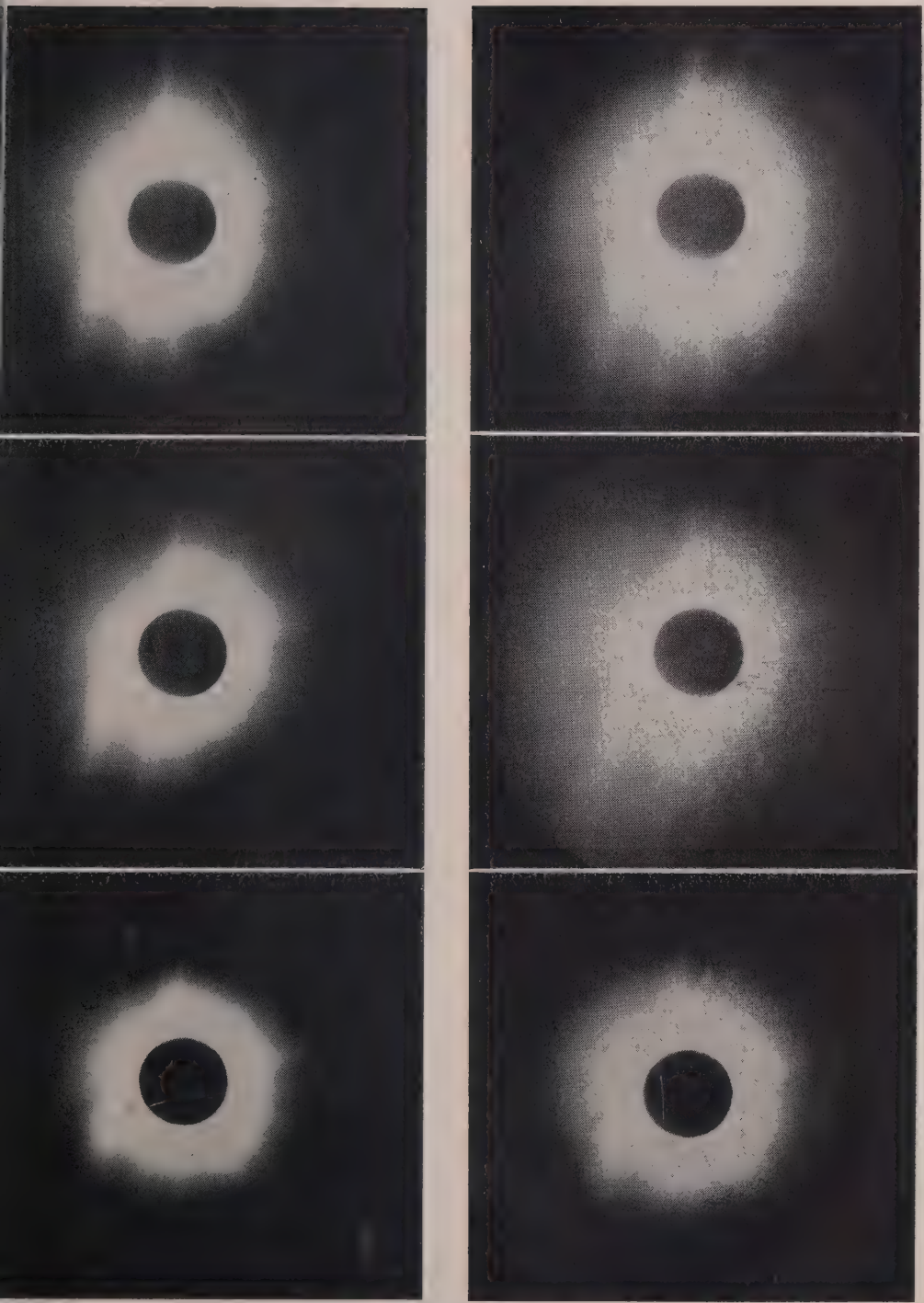
(3) KUIPER, *The Sun*, University of Chicago Press, 1953, p. 263.



Fotografie della corona: il nord è in alto, l'est a sinistra. Sopra: posa di 1° . Sotto: posa di 2° . Da sinistra a destra: asse del polaroide parallelo all'asse polare; asse a 60° E; asse a 60° W.



Fotografie della corona: il nord è in alto, l'est a sinistra. Sopra: posa di 4° . Sotto: posa di 8° . Da sini: tra a destra: asse del polaroide parallelo



Fotografie della corona: il nord è in alto, l'est a sinistra. Sopra: posa di 16°. Sotto: posa di 32°. Da sinistra a destra: asse del polaroide parallelo all'asse polare; asse a 60° E; asse a 60° W.

Astrofisica. — *Sulla possibilità di impiego di microfotogrammi nello studio della corona solare.* Nota di LAURA ENRICA PASINETTI, presentata (*) dal Socio F. ZAGAR.

Durante la recente eclisse del 15 febbraio 1961, è stata effettuata una ripresa cinematografica di tutte le fasi del fenomeno dal primo all'ultimo contatto, onde esaminare la possibilità di utilizzare dei microfotogrammi in un lavoro a carattere scientifico.

Venne impiegata a tale scopo una cinecamera Zeiss da 8 mm, modello Pentaka 8, munito di teleobiettivo Zeiss dalle seguenti caratteristiche: apertura relativa 1 : 2,8; distanza focale 40 mm; aperture diaframma 2,8-4-5,6-8-11-16.

Per centrare l'immagine è stato applicato al mirino un micrometro a scala graduata microscopica.

Le diverse velocità di ripresa di detto apparecchio, sono indicate nella seguente tabella:

N° fotogrammi/sec	Esposizione
48	1/100 sec
24	1/50
16	1/30
8	1/15

Si impiegarono pellicole pancromatiche Agfa 2 × 8, a sensibilità 15/10 din (Isopan F); le aperture del diaframma venivano stabilite per mezzo di un esposimetro munito, di volta in volta, di un filtro identico a quello applicato all'obiettivo.

Fin dal mese di gennaio, si erano fatte delle prove sul sole e sulla luna, onde determinare i migliori tempi di esposizione, i diaframmi adeguati, nonché il più opportuno impiego dei filtri a disposizione.

La ripresa a 16 fotogrammi/sec, si è rivelata la più idonea.

Per le prove sono stati impiegati i seguenti filtri *Kodak Wratten* di gelatina altamente selettivi:

Filtro Kodak Wratten B n. 58 verde con massimo di trasmissione a circa 5300 Å; *Filtro Kodak Wratten F* n. 29 rosso scuro; *Filtro Kodak Wratten*, grigio denso, neutro.

Le prove vennero eseguite per più giorni con cielo non sempre perfettamente limpido a causa della forte umidità e con un'altezza del sole sull'orizzonte pari a quella calcolata per le diverse fasi dell'eclisse.

I dati ottenuti vennero utilizzati per la ripresa del fenomeno prima e dopo la fase massima.

(*) Nella seduta dell'8 aprile 1961.

I risultati sono i seguenti:

a) *Riprese con filtro grigio.* Aperture variabili da 4 a 8 a seconda delle condizioni atmosferiche; un'apertura in più o in meno del valore indicato dall'esposimetro, non portava apprezzabili modificazioni nelle caratteristiche dell'immagine sulla pellicola.

Questo filtro si è rivelato inidoneo ai fini di una ripresa del fenomeno fuori totalità poiché anche con le minime aperture disponibili, non si è mai riusciti ad ottenere il disco solare a contorni ben netti.

b) *Riprese con filtro rosso o verde.* Indice esposimetrico corrispondente ad aperture di 11-16, uguali per ambedue i filtri.

L'uso di questi si rivelò possibile solo nel caso di foschia molto accentuata, sole notevolmente velato e con apertura 5,6.

Nelle condizioni di perfetta visibilità, i risultati ottenuti, presentavano i medesimi inconvenienti della ripresa con filtro grigio (fenomeni di diffusione luminosa).

c) *Riprese con filtro rosso verde.* Ottimi risultati si ottennero con l'impiego combinato dei filtri verde e rosso e con aperture varianti da 5,6 a 11-16.

In questo caso è stato possibile ottenere sempre immagini a contorni ben definiti anche quando il cielo era velato.

Per la ripresa in fase di totalità, desiderando filmare la corona interna a due differenti bande spettrali, nel verde e nel rosso, le prove vennero eseguite su luna piena con condizioni atmosferiche ottime per la limpidezza del cielo.

Con filtro rosso o verde i risultati migliori si ebbero con apertura 8, e senza filtro con apertura 16 (immagini luminose, ben contrastate, particolari nitidi).

In questo caso le aperture ottimali del diaframma vennero stabilite in seguito a prove successive, non essendo possibile ottenere dati significativi dall'esposimetro. Come velocità si mantenne quella di 16 fotogrammi/sec.

I dati ottenuti durante le prove sono stati quindi utilizzati per la ripresa dell'eclisse ed i risultati sono da considerarsi assai soddisfacenti.

Scopo del lavoro è stato anche quello di poter eventualmente eseguire uno studio fotometrico della corona solare interna mediante l'impiego dei due filtri rosso e verde.

La totalità, in particolare, è stata filmata quasi in continuazione valendosi delle seguenti aperture che hanno permesso di riprendere diverse zone della corona stessa:

Filtro	Apertura
Rosso	2,8
	8
Verde	8
Senza filtro	11
	8
	5,6
	4
	2,8

L'entrata in totalità e l'uscita, sono state riprese, rispettivamente, con filtro rosso ed apertura 2,8 e senza filtro con apertura 8.

Dai fotogrammi è stata ricavata una serie di lastre con un apparecchio per microfotografia della Casa Reichert che permette ingrandimenti da 2,5 ad oltre 1000 volte.

Nel nostro caso non sono possibili ingrandimenti superiori a 30-40 \times perché, dato il potere risolutivo dello strumento, viene troppo evidenziata la grana della pellicola originaria.

Si è proceduto quindi a tracciare le isofote della corona solare mediante il rilievo dei limiti della corona stessa; la stima visuale veniva effettuata

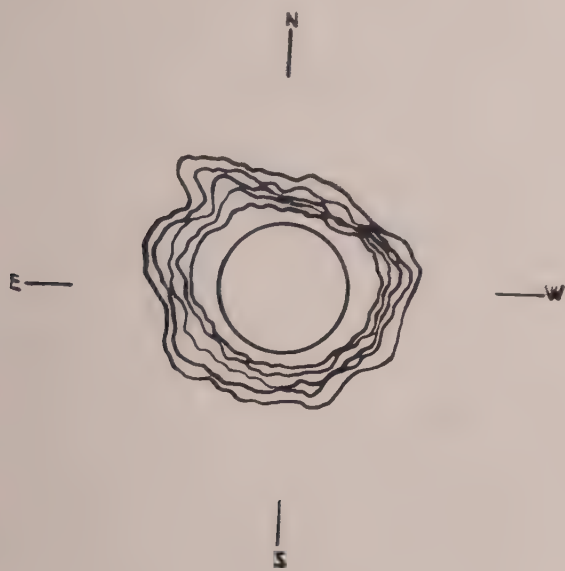


Fig. 1.

con la sovrapposizione di carta millimetrata trasparente alle lastre (ingrandimenti dei microfotogrammi) ottenute a parità di esposizione, con le diverse aperture del diaframma.

Nella fig. 1 viene riprodotta la serie di isofote della corona ripresa in luce bianca e corrispondenti, in ordine di distanza dal centro, ai seguenti diaframmi: 11 - 8 - 5,6 - 4 - 2,8.

Nella fig. 2 invece, le isofote ottenute rispettivamente con filtro rosso, filtro verde, apertura 8, nonché senza filtro, con apertura 11.

Come si può notare la isofota in luce verde (curva punteggiata) è quasi totalmente sovrapposta a quella in luce rossa (prima curva a partire dal centro).

In fig. 3 le curve delle riprese con filtro rosso e senza filtro, con l'apertura 2,8.

Un confronto orientativo con isofote ottenute mediante camere fotografiche montate su apparecchiature astronomiche, mostra che l'andamento generale delle curve è paragonabile alle prime.

Si è proceduto infine al calcolo delle intensità relative in funzione del raggio della corona.

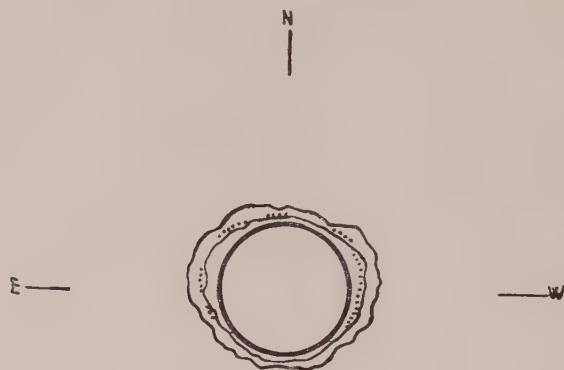


Fig. 2.

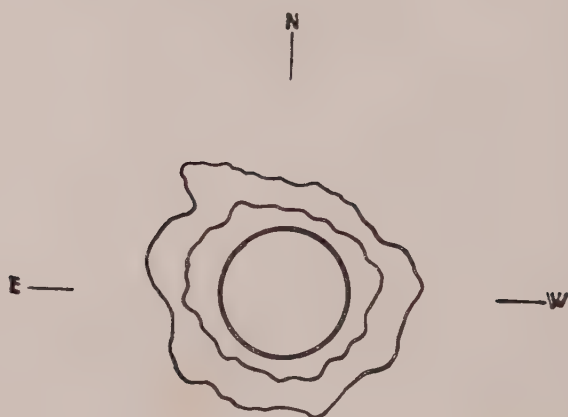


Fig. 3.

Le misure sono state eseguite in corrispondenza dei due raggi polari (R_{PN} , R_{PS}) e dei raggi equatoriali in direzione est ed ovest (R_{EE} , R_{EW}).

In base alla legge $\log E = \log I \times A = \text{costante}$ (I = intensità della corona in corrispondenza della densità cui è stata misurata la isofota; E =

esposizione; A = area utilizzata dell'obiettivo), si sono calcolati i $\log I$ considerandoli come inversamente proporzionali alle aree dell'obiettivo sfruttate con i diversi diaframmi di apertura.

Nella fig. 4 vengono riportati i $\log I$ per le cinque isofote in luce bianca in funzione dei raggi espressi in unità del raggio solare.

Tali risultati sono stati confrontati con i dati forniti da van de Hulst [1] e l'accordo trovato è buono.

In particolare si può notare che le differenze di intensità in direzione dei raggi polari ed equatoriali diminuiscono all'aumentare dei raggi stessi per il contributo della corona F dominante alle grandi distanze dal bordo.

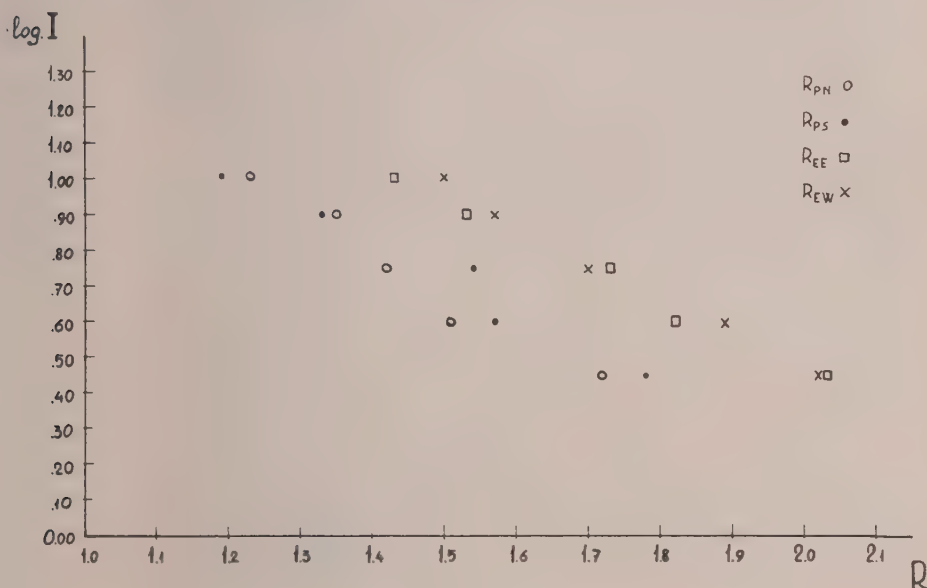


Fig. 4.

In base a tali risultati, è allo studio la possibilità di utilizzare i microfotogrammi della fase massima per misure più approfondite al microfotometro. Allo scopo, la pellicola era stata preventivamente calibrata con gli stessi filtri impiegati nella ripresa.

Date le piccole dimensioni delle immagini (diametro del disco solare $\approx 0,4$ mm) il problema presenta notevoli difficoltà, sia che si voglia procedere a delle misure dirette che indirette per mezzo di ingrandimenti su lastra.

È nostra intenzione determinare i limiti di validità del sistema adottato e la precisione raggiungibile nelle misure quantitative.

BIBLIOGRAFIA.

[1] VAN DE HULST H. C., *The sun*, p. 262 by G. P. Kuiper, Chicago, 1953.

Geodesia. — *Un metodo di compensazione di un blocco di strisciate.* — II. *Compensazione altimetrica ed uso dei dati degli strumenti ausiliari.* Nota di MARIANO CUNIETTI e GIUSEPPE INGHILLERI ^(*), presentata ^(**) dal Socio L. SOLAINI.

In una precedente Nota ⁽¹⁾ era stato esposto il principio su cui è basato il metodo di compensazione illustrato ed era stata scritta l'equazione alle osservazioni da impiegarsi nella compensazione planimetrica di un blocco di strisciate.

Sempre procedendo secondo lo stesso principio si espone qui il procedimento per la compensazione altimetrica e l'uso dei dati degli strumenti ausiliari.

Il tipo di equazione da usarsi per questo secondo problema è assai diverso dal precedente. Esso è derivato dalla formula che in geometria analitica permette di calcolare l'angolo fra una direzione ed un piano.

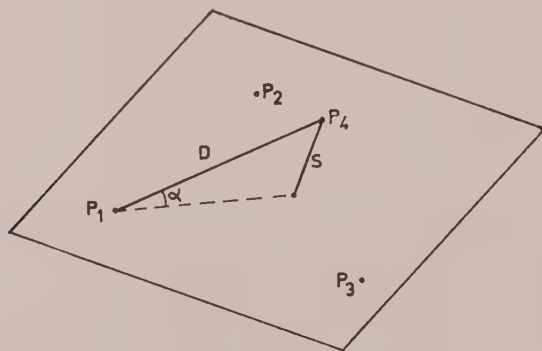


Fig. 1.

Siano P_1, P_2, P_3 (vedi fig. 1) tre punti definiti dalle loro coordinate. Sia P_4 un punto esterno al piano determinato dai tre punti precedenti. Il seno dell'angolo α è dato dalla equazione

$$(1) \quad \sin \alpha = \frac{S}{D} = \frac{aX_4 + bY_4 + cZ_4 + d}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2) [(X_4 - X_1)^2 + (Y_4 - Y_1)^2 + (Z_4 - Z_1)^2]}}$$

(*) Dell'Istituto di Geodesia, Topografia e Fotogrammetria e del Centro di Addestramento e Studi Fotogrammetrici del Politecnico di Milano.

(**) Nella seduta dell'11 marzo 1961.

(1) *Un metodo di compensazione di un blocco di strisciate - I. Principio generale e compensazione planimetrica*, « Rend. Lincei », serie 8^a, vol. XXX, fasc. 3 (1961).

ove

$$a = \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 & 1 \\ Y_2 & Z_2 & 1 \\ Y_3 & Z_3 & 1 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 & 1 \\ Z_2 & X_2 & 1 \\ Z_3 & X_3 & 1 \end{vmatrix} \quad c = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad d = \begin{vmatrix} Y_1 & X_1 & Z_1 \\ Y_2 & X_2 & Z_2 \\ Y_3 & X_3 & Z_3 \end{vmatrix}.$$

È importante notare che essendo il piano orientato, la distanza S fra il punto e il piano cambia di segno, quando il punto P_4 passa da un semispazio all'altro. La (1) perciò serve ad individuare perfettamente ed univocamente l'angolo α .

L'equazione generata corrispondente sarà del tipo:

$$(2) \quad \left[\frac{aX_4 + bY_4 + cZ_4 + d}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)[(X_4 - X_1)^2 + (Y_4 - Y_1)^2 + (Z_4 - Z_1)^2]}_*} \right] - \left[\frac{aX_4 + bY_4 + cZ_4 + d}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)[(X_4 - X_1)^2 + (Y_4 - Y_1)^2 + (Z_4 - Z_1)^2]} \right] = v_i.$$

Nella (2) per considerazioni analoghe a quelle fatte per le equazioni (3) della Nota I, conviene prendere come uniche incognite le coordinate Z dei punti; le altre coordinate vengono introdotte con valore risultante dalla precedente compensazione.

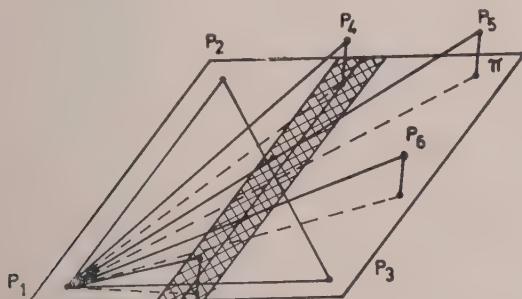


Fig. 2.

Poiché il legame longitudinale fra singoli modelli successivi non consente di stabilire un vincolo, essendo troppo limitata la striscia di sovrapposizione, nello stabilire le equazioni altimetriche occorre considerare coppie di modelli successive: 1 e 2, 2 e 3, 3 e 4 e così via. Due coppie successive si ricoprono perciò per un modello intero.

I due modelli che compongono ogni coppia si considerano intrinsecamente collegati l'uno all'altro nel migliore dei modi attraverso il punto di presa del fotogramma centrale.

Sia π il piano determinato dai tre punti P_1, P_2, P_3 (vedi fig. 2) appartenenti a due modelli successivi; per ognuno degli altri punti P_4, P_5, P_6, P_7 si potranno scrivere altrettante equazioni del tipo (2). Nella coppia di modelli successiva, compariranno alcuni di questi punti, per esempio i punti P_7, P_5, P_6, P_3 , in modo da assicurare il legame altimetrico fra i modelli.

Un certo numero di questi punti dovrà essere scelto nelle zone di sovrapposizione laterale fra strisciate adiacenti, in modo da assicurare anche il legame interno fra le strisciate stesse.

Poiché l'uso diretto della (2) è impossibile, occorre svilupparla in serie nell'intorno dei valori approssimati delle incognite. Queste si potranno ricavare, con uno schema analogo a quello già visto per la planimetria, risolvendo un numero strettamente limitato di equazioni (2), secondo il criterio della cucitura dei modelli o coppie di modelli in maniera da completare il blocco.

Le equazioni generate (3) della Nota I e (2) di questa Nota che risolvono il problema e soddisfano le condizioni interne, permettono inoltre di introdurre le condizioni esterne, quando queste sono costituite da un certo gruppo di punti di coordinate note a priori. Per questi punti infatti le coordinate assolute che compaiono nel 2° termine sia della (3) della Nota I che della (2) di questa Nota, non sono più incognite, ma esse possono essere già introdotte nelle equazioni generate con il loro giusto valore. Nelle equazioni generate ridotte lineari compariranno perciò come note le correzioni definitive da apportare ai valori approssimati determinati per mezzo del calcolo iniziale.

Il numero e la posizione di questi punti di coordinate note possono essere qualsiasi senza nessuna limitazione.

Le condizioni esterne derivanti dai dati ottenuti dagli strumenti ausiliari debbono invece essere introdotte per mezzo di equazioni diverse. Qualora gli strumenti ausiliari forniscano informazioni sugli elementi angolari di orientamento, le equazioni sono basate sullo stesso principio usato prima. Qualora invece i dati ausiliari dessero direttamente notizia sulla posizione dei fotogrammi, sarebbe necessario introdurre nuovi tipi di relazioni.

Come è noto lo statoscopio dà le quote relative dei successivi punti di presa rispetto al punto di presa del 1° fotogramma; esso in tal modo fornisce un elemento posizionale. Tuttavia, volendo usare i dati statoscopici senza introdurre equazioni di nuovo tipo e altri gruppi di incognite, si può procedere nel modo seguente. Dalle quote successive dei punti di presa dei singoli modelli si determina il valore della inclinazione longitudinale Φ di ogni modello. Imponendo questo valore dell'orientamento ai singoli modelli, la loro giacitura longitudinale assoluta risulta ottenuta per mezzo di misure indipendenti. Si può allora assumere come elemento angolare invariante nel modello, il coseno dell'angolo formato da un piano determinato da tre punti del modello stesso e il piano verticale normale all'asse del volo. Poiché l'asse del volo viene fatto coincidere con l'asse X del sistema esterno, il piano verticale di riferimento è il piano (YZ) e l'espressione del coseno è la seguente:

$$(3) \quad \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

ove a , b , c hanno i già visti significati; dalla (3), si ricavano l'equazione generatrice e l'equazione generata

$$(4) \quad \left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right]_* - \left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right] = v.$$

Con tale procedimento il pregio dello statoscopio, che fornisce come si è detto una preziosa informazione sulla posizione assoluta del punto di presa, va in parte perduto. Per sfruttare meglio i valori dati da questo strumento ausiliario, conviene prendere in considerazione più di un modello. I tre punti che determinano il piano che forma l'angolo α con il piano XYZ , vanno scelti su modelli differenti formanti una catena. È necessario però che questa catena sia breve allo scopo di limitare le influenze degli errori di scala e di collegamento dei modelli che verrebbero a compromettere la validità del dato statoscopico. Infatti, mentre il dato statoscopico si riferisce ai punti di presa, la condizione da noi imposta si riferisce ai modelli, i cui errori di trasporto, di scala e di collegamento alterano i valori delle coordinate Z dei punti.

Il periscopio solare, collegato alla camera da presa, permette di determinare la direzione assoluta di una retta dello spazio del modello.

Noti la posizione e la giacitura di un fotogramma rispetto al sistema intrinseco (angoli φ , ω e α e coordinate $X Y Z$ del punto di presa e le coordinate lastra del punto immagine del Sole [1], si possono ricavare i valori dei coseni direttori della direzione solare interna al modello.

Questa direzione forma con la direzione definita da due punti del modello un angolo il cui coseno è calcolabile per mezzo di formule analoghe a quelle che entrano nella equazione (3), della Nota I. L'equazione generata sarà perciò

$$(5) \quad \left[\frac{ll' + mm' + nn'}{\sqrt{(l^2 + m^2 + n^2)(l'^2 + m'^2 + n'^2)}} \right]_* - \left[\frac{lL + mM + nN}{\sqrt{(l^2 + m^2 + n^2)(L^2 + M^2 + N^2)}} \right] = v.$$

Nella (5) i coseni direttori $L M N$ sono quelli della direzione vera del Sole rispetto al sistema assoluto esterno, ricavabili, noti che siano l'ora di presa del fotogramma e le coordinate geografiche approssimate del punto di presa [2].

La conoscenza della direzione solare genera un doppio legame; le equazioni del tipo (5), dovranno perciò essere due calcolate per due coppie di punti del modello, che possibilmente diano origine a direzioni presso a poco normali fra loro.

Generalmente sia le condizioni vincolanti derivate dallo statoscopio sia quelle dedotte dai dati solari, vengono introdotte nella compensazione altimetrica del blocco.

Tuttavia, se il Sole si trova in particolari direzioni, le (5) possono essere aggiunte anche come condizioni planimetriche.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] INGHILLERI G., *Triangolazione aerea analitica con dati ausiliari*. • Rend. dell'Accademia Nazionale dei Lincei *, ser. 8°, vol. XXVI, fasc. 2 (1959).
- [2] INGHILLERI G., *Solar periscope and statoscope in analytical aerial triangulation. Theory and practice* - Technical Paper, n. 3, Milano 1960.

Chimica-fisica. — *Studio conformazionale di una catena di polimero isotattico in soluzione e calcolo della sua lunghezza quadratica media imperturbata* ^(*) Nota di PAOLO CORRADINI e GIUSEPPE ALLEGRA, presentata ^(**) dal Socio G. NATTA.

Molti lavori sono apparsi di recente sulle dimensioni medie di macromolecole poliolefiniche in soluzione [1].

È stato notato che la conformazione di una catena isotattica in soluzione può essere approssimata abbastanza bene come una successione di legami *trans* e *gauche* ^(*).

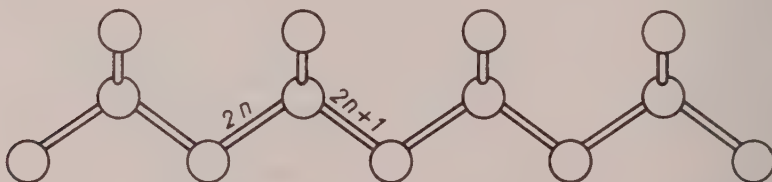


Fig. 1. — Configurazione di un tratto di macromolecola di polipropilene isotattico, vista disponendo in un piano tutti gli atomi di carbonio della catena. Sono indicati due legami successivi pari-dispari comprendenti fra loro un atomo di carbonio terziario.

Se i legami lungo la catena, secondo la trattazione di Lifson [2], vengono suddivisi in legami pari e dispari (fig. 1), i più probabili valori degli angoli di rotazione interna di un paio di legami pari-dispari, comprendenti tra loro un atomo di carbonio terziario, sono 60° – 180° oppure 180° – 300° . In seguito, ci riferiremo a queste coppie, in analogia con K. Nagai [3], come (GT) o (TG). Lunghie successioni del tipo (TG) (TG) (TG) ... o del tipo (GT) (GT) (GT) ... sono prive di *strain*. Esse sono quindi favorite allo stato cristallino, perché corrispondono ad un minimo di energia interna. In soluzione, invece, il raggiungimento di un minimo di energia libera richiede una mescolanza di brevi successioni spiralizzate del tipo ... (TG) ... o ... (GT) ...

MODO DI PASSAGGIO TRA SPIRALI ENANTIOMORFE.

Nel caso del polipropilene, è possibile calcolare in modo semplice ⁽²⁾ la differenza di energia interna ΔE tra le conformazioni (I) (TG) (X' X'')

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano.

(**) Nella seduta dell'11 marzo 1961.

(1) In realtà saranno consentite librizzazioni attorno ad ogni legame, anche abbastanza ampie (*loose helix*), tali tuttavia che mediamente gli angoli di rotazione interna corrispondano a conformazioni locali *trans* o *gauche*.

(2) Sono stati seguiti i criteri sviluppati da G. NATTA, P. CORRADINI, P. GANIS, in

$\langle X''' \dots \rangle \dots$ e la conformazione corrispondente, regolarmente spiralizzata, $\langle TG \rangle \langle TG \rangle \langle T \dots \rangle \dots$; e tra le conformazioni (II) $\langle GT \rangle \langle Y' Y'' \rangle \langle Y''' \dots \rangle$ e la corrispondente spiralizzata $\langle GT \rangle \langle GT \rangle \langle G \dots \rangle \dots$, associando ad X' , X'' e X''' , Y' , Y'' e Y''' ogni valore dell'angolo di rotazione interna compreso tra 0° e 360° . Risulta che tra le conformazioni (I) si ha, oltre al minimo assoluto (e banale) $\langle TG \rangle \langle TG \rangle \langle T \dots \rangle \dots$, un altro minimo equivalente, quindi con $\Delta E = 0$, corrispondente a $\langle TG \rangle \langle TT \rangle \langle G \dots \rangle \dots$, che può continuare senza ulteriore « strain », con una nuova successione ordinata spiralizzata invertita rispetto alla precedente, dando luogo alla conformazione complessiva: $\dots \langle TG \rangle \langle TT \rangle \langle GT \rangle \langle GT \rangle \dots$ (fig. 2). Tra le conformazioni (I) non esistono altri minimi che non siano caratterizzati da un valore di $\Delta E \geq 4$ Kcal/mole di inversioni. Abbiamo per semplicità assunto che la inversione tra la spirale $\langle TG \rangle \langle TG \rangle \dots$ e la $\dots \langle GT \rangle \langle GT \rangle \dots$ avvenga nel solo modo: $\dots \langle TG \rangle \langle TT \rangle \langle GT \rangle \dots$

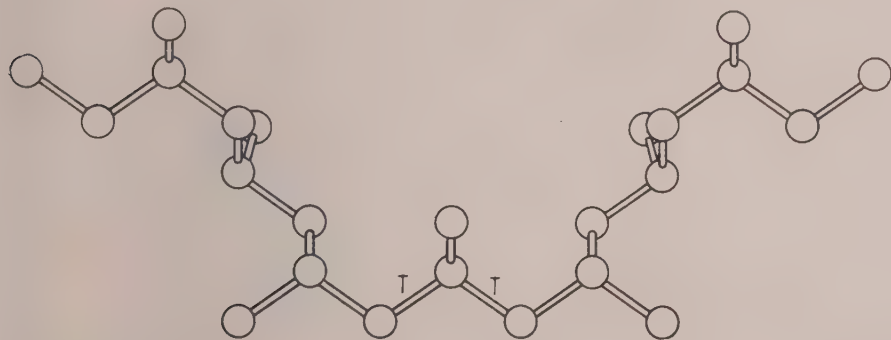


Fig. 2. - Conformazione di un tratto di catena di polipropilene isotattico che inverte il senso di spiralizzazione mediante una coppia di inversione di angoli di rotazione interna (180° - 180°) (O(TT)). Per chiarezza di disegno alcuni gruppi metilici non sono stati rappresentati esattamente sovrapposti ad atomi di carbonio della catena.

Per quanto riguarda le possibili conformazioni (II), la nostra analisi ha dimostrato per il polipropilene che, oltre al minimo banale con $\Delta E = 0$, corrispondente a $\langle GT \rangle \langle GT \rangle \langle G \dots \rangle$, esistono altri minimi, di cui 2 equivalenti, con $\Delta E \cong 2,7$ Kcal, corrispondenti a:

- a) $\langle GT \rangle \langle G' G \rangle \langle T \dots \rangle \dots$ con $G' = 120^\circ$ e
 b) $\langle GT \rangle \langle GG'' \rangle \langle T \dots \rangle \dots$ con $G'' = 240^\circ$.

Entrambe queste conformazioni possono continuare senza ulteriore « strain », con la successione spiralizzata, invertita rispetto alla precedente,

« Makromol. Chemie » (1960). I dettagli del calcolo, che consiste in un calcolo dell'energia interna di un tronco di catena caratterizzata da successioni di angoli di rotazione interna del tipo (60° 180°) ($\sigma_1 \sigma_2$) ($\sigma_3 \dots$) al variare di σ_1 , σ_2 , σ_3 , saranno sviluppati in altra sede.

(TG) (TG) ... (fig. 3). Poiché le altre conformazioni corrispondenti a minimi di energia, separati da *a*) e *b*), nel caso (II), hanno almeno $\Delta E \geq 4$ Kcal, e sono quindi assai più improbabili delle precedentemente descritte, abbiamo assunto che la *a*) e la *b*) sole siano, con eguali probabilità, le successioni che danno luogo ad una inversione tra la spirale ... (GT) ... e la spirale ... (TG)

Ovviamente, inversioni del tipo ... (TG) (TT) (GT) ... e del tipo ... (GT) (GG) (TG) ... (dove la coppia (GG) può leggersi indifferentemente (G' G) oppure (GG')) devono essere presenti in modo tale da alternarsi le une alle altre, e quindi in egual numero lungo la catena.

CONCENTRAZIONE DI INVERSIONI DEL SENSO DI SPIRALIZZAZIONE LUNGO LA CATENA.

Il numero di modi di introdurre *n* coppie di inversione dei due tipi - così denomineremo ora le coppie (TT) e (GG) - in una catena contenente *N* unità monomeriche ($N \rightarrow \infty$) è $\frac{N!}{(N-n)! n!}$. Se $Z_{(TG)} = Z_{(GT)}$, $Z_{(TT)}$ e $Z_{(GG)}$ sono il numero di stati possibili dipendenti da librazioni attorno agli angoli di rotazione interna associati ad ogni coppia precedentemente definita di tali angoli, allora il numero totale di possibili conformazioni è dato da:

$$(1) \quad \Theta \chi = Z_{(TG)}^{N-n} (Z_{(TT)} Z_{(GG)})^{n/2} \frac{N! 2^{n/2}}{(N-n)! n!};$$

il fattore $2^{n/2}$ deriva dai due modi isoenergetici di realizzare una coppia di inversione (GG).

Se ragionevolmente attribuiamo lo stesso grado di rigidità ad ogni coppia di legami successivi, allora $Z_{(TG)} = Z_{(TT)} = Z_{(GG)} = Z$, e la formula precedente diviene semplicemente:

$$(1') \quad \Theta \chi = Z^N \frac{N! 2^{n/2}}{(N-n)! n!}.$$

La minimizzazione dell'energia libera rispetto ad *n* conduce ora alla seguente relazione per la concentrazione delle coppie di inversione per unità monomeriche:

$$(2) \quad p = \frac{n}{N} = \frac{e^{-\frac{\Delta E}{2RT}}}{\sqrt{\frac{1}{2} + e^{-\frac{\Delta E}{2RT}}}}; \quad \Delta E \cong 2,7 \text{ Kcal.}$$

Il valore di ΔE (calcolato teoricamente per il polipropilene) può avere in pratica valori leggermente diversi e può essere anche notevolmente diverso per altri polimeri isotattici.

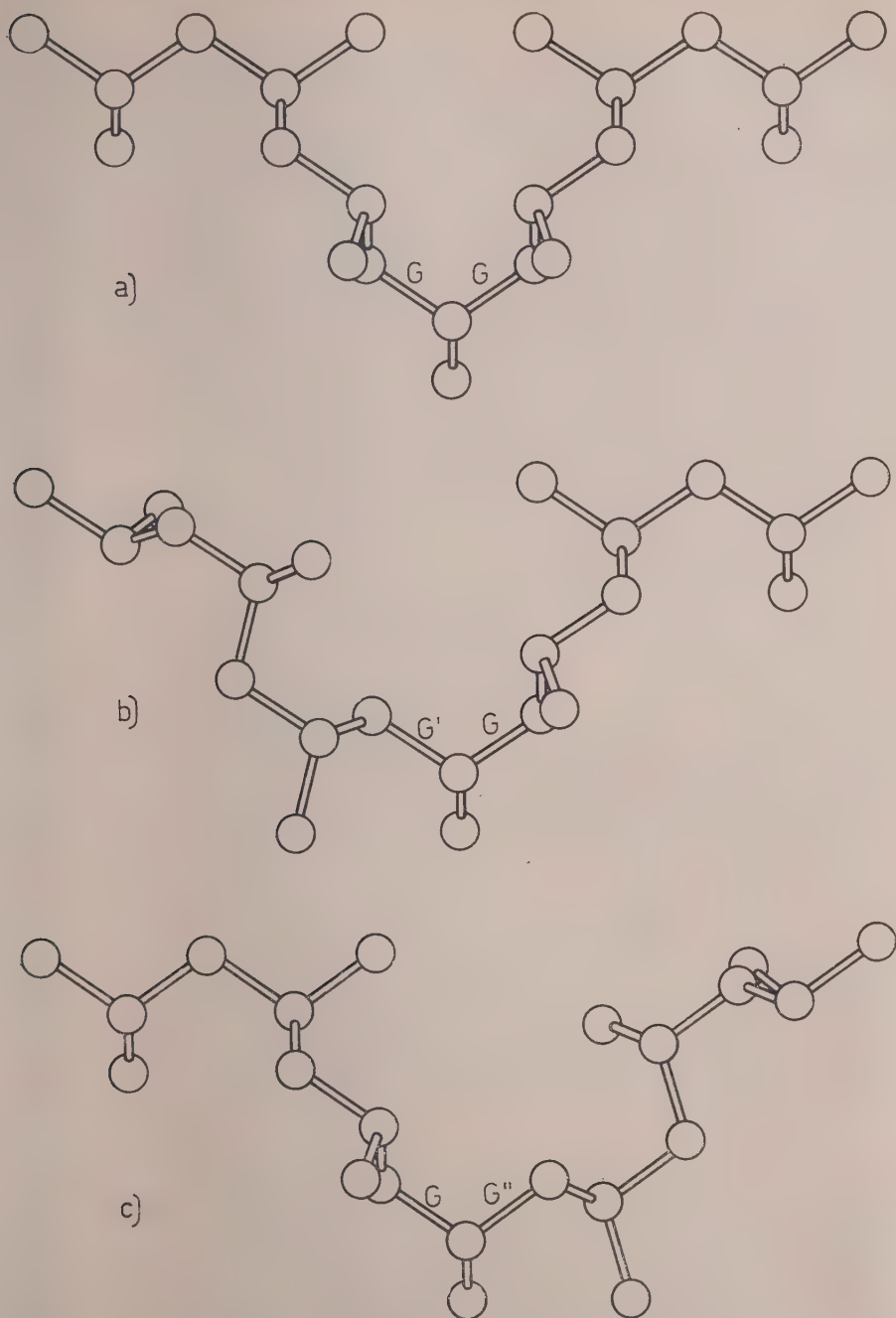


Fig. 3. — Conformazioni di un tratto di catena di polipropilene isotattico nelle ipotesi:
a) che si abbia una coppia di inversione di angoli di rotazione ($60^\circ-300^\circ$). La presenza di alcuni contatti inferiori a 3 Å fra atomi di carbonio separati da più di 3 legami fa considerare irrealizzabile tale modello;

b) che si abbia una coppia di inversione ($120^\circ-300^\circ$), ($O(G'G)$);

c) che si abbia la coppia di inversione simmetrica ($60^\circ-240^\circ$) ($O(GG')$).

CALCOLO DELLA LUNGHEZZA QUADRATICA MEDIA IMPERTURBATA.

Introducendo ora le assunzioni, assai ragionevoli e correnti, che gli angoli tra i legami di valenza lungo la catena siano esattamente tetraedrici e che tutte le lunghezze di legame siano uguali, è stato da noi trovato un semplice trattamento matematico per il calcolo della distanza quadratica media testa-coda per la macromolecola libera del polipropilene isotattico. Non si è tenuto conto delle librizzazioni attorno agli angoli di rotazione interna dai valori di minima energia interna, perché la correzione è scarsa anche per valori di ϕ relativamente piccoli.

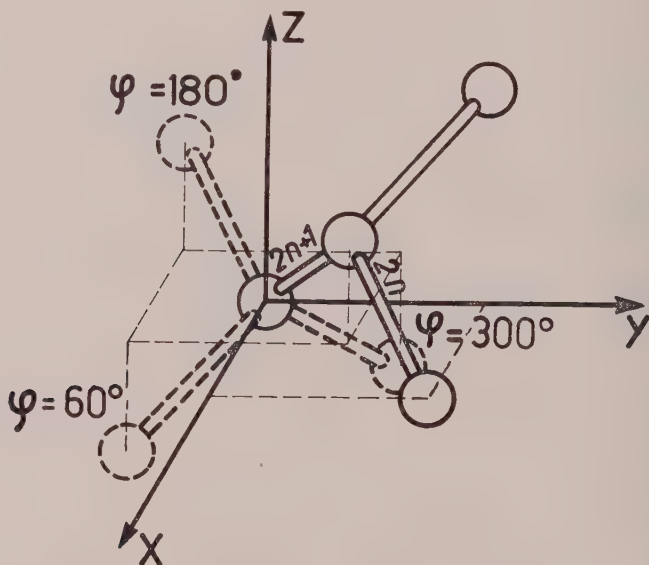


Fig. 4. - Rappresentazione della terna cartesiana intrinseca solidale con 2 legami consecutivi $(2n)$ e $(2n+1)$ della catena del polipropilene isotattico. Sono indicate con tratteggio le eventuali posizioni di un atomo di carbonio che succeda in catena con tre diversi valori dell'angolo di rotazione interna sul legame $(2n+1)$.

Siano definiti tre assi ortogonali di riferimento solidali con due legami consecutivi entro la catena, diciamo i legami $(2n)$ e $(2n+1)$ comprendenti un atomo di carbonio avente un gruppo laterale (fig. 4). I tre punti estremi che caratterizzano i due legami successivi abbiano le coordinate: $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}a, \frac{2}{\sqrt{3}}a, 0\right)$; $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}a, \frac{1}{\sqrt{3}}a, \frac{1}{\sqrt{3}}a\right)$; $(0, 0, 0)$ (a = lunghezza di un legame.) Il sistema intrinseco di riferimento così definito offre il grande vantaggio che, nella

nostra assunzione che tutti gli angoli di rotazione interna assumano solo valori multipli di 60° , esso può essere trasformato nel sistema corrispondente di qualunque successiva coppia di legami attraverso l'introduzione di una matrice del terzo ordine i cui elementi sono in ogni caso numeri razionali semplici. Se in particolare consideriamo solo gli angoli di rotazione interna di 60° , 180° e 300° — attraverso i quali gli atomi di carbonio della catena polimerica occuperebbero soltanto posizioni proprie del reticolo del diamante — le matrici di trasformazione sono costituite da elementi tutti nulli salvo uno per ogni riga e ogni colonna, che eguaglia ± 1 .

In seguito, noi applicheremo il ben noto metodo matriciale, già descritto da Lifson [2], Nagai [3] ed altri [4] per il calcolo della *end-to-end distance* in una catena polimerica. Faremo le seguenti assunzioni:

1°) i vettori che definiscono legami pari e dispari saranno sempre considerati a due a due; ogni paio sarà definito, nel relativo sistema intrinseco di riferimento, da un vettore \mathbf{V} di componenti $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}a, -\frac{2}{\sqrt{3}}a, 0\right)$;

2°) il prodotto scalare $\mathbf{V}^{(i)} \mathbf{V}^{(j)}$ sarà espresso dalla notazione:

$$\mathbf{V}^{(i)} \mathbf{V}^{(j)} = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}a, -\frac{2}{\sqrt{3}}a, 0\right) \cdot \mathbf{T}^{(ij)} \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{3}}a \\ \frac{2}{\sqrt{3}}a \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove $\mathbf{T}^{(ij)}$ è la matrice che trasforma il sistema intrinseco relativo a $\mathbf{V}^{(i)}$ in quello di $\mathbf{V}^{(j)}$. Questa matrice può essere espressa mediante il prodotto di un numero appropriato di matrici fondamentali \mathbf{T}_k che rappresentano le possibili coppie di angoli di rotazione interna:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 = \mathbf{T}(60^\circ-180^\circ) &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} ; \quad \mathbf{T}_2 = \mathbf{T}(180^\circ-300^\circ) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \bar{1} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{1} & 0 \end{vmatrix} ; \\ \mathbf{T}_3 = \mathbf{T}(60^\circ-240^\circ) &= \begin{vmatrix} 1/3 & \bar{2}/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & \bar{2}/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{vmatrix} ; \quad \mathbf{T}_3' = \mathbf{T}(120^\circ-300^\circ) = \begin{vmatrix} \bar{1}/3 & \bar{2}/3 & \bar{2}/3 \\ 2/3 & 1/3 & \bar{2}/3 \\ 2/3 & \bar{2}/3 & 1/3 \end{vmatrix} ; \\ \mathbf{T}_4 = \mathbf{T}(180^\circ-180^\circ) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{E} . \end{aligned}$$

Considerazioni semplici di probabilità e considerazioni svolte sui valori delle energie di *strain*, per le diverse sequenze di angoli di rotazione interna, hanno portato a concludere secondo quanto segue.

La probabilità che a una coppia (GT) succeda una coppia (GT) è $(1-p)$, con p precedentemente definito; $(1-p)$ è anche la probabilità che ad una

coppia (TG) succeda un'altra coppia eguale a se stessa. La probabilità che ad una coppia (GT) segua una coppia (G'G) oppure la coppia (GG'') è p ; pure p è la probabilità che alla coppia (TG) segua la coppia (TT). Alla coppia (G'G) (o (GG'')) possono seguire, con le stesse probabilità, le stesse coppie che seguono alla matrice (TG). Alla coppia (TT) possono infine seguire con pari probabilità le stesse coppie che seguono alla coppia (GT). Tutte le altre probabilità di successione, praticamente assai inferiori a quelle considerate, sono state poste eguali a zero.

La distanza tra gli estremi di una qualsiasi catena si può scrivere, indicando con \vec{r} il vettore che congiunge due gruppi metilenici $-\text{CH}_2-$ successivi lungo la catena ed N il numero di unità monomeriche:

$$(3) \quad d^2 = \sum_i^N \vec{r}_i \times \sum_i^N \vec{r}_i = Nr^2 + 2 \sum_i^{N-1} \vec{r}_i \times \vec{r}_{i+1} + 2 \sum_i^{N-2} \vec{r}_i \times \vec{r}_{i+2} + \dots$$

La lunghezza quadratica media, per N tendente all'infinito, è fornita, in prima approssimazione, dalla relazione:

$$(3') \quad \bar{d}^2 = N \left\{ r^2 + 2 \left[\vec{r}_i \times \vec{r}_{i+1} + \vec{r}_i \times \vec{r}_{i+2} + \dots + \vec{r}_i \times \vec{r}_{i+N} \right] \right\};$$

questo perché il prodotto $\vec{r}_i \times \vec{r}_{i+j}$ tende rapidamente a 0 al tendere di $j \rightarrow \infty$ per $p \neq 0$.

Consideriamo ora i valori medi rilevanti $\overrightarrow{\vec{r}_i \times \vec{r}_{i+j}}$ della precedente espressione.

Evidentemente, poiché $a = 2 \sqrt{\frac{2}{3}} r$:

$$a) \quad \overrightarrow{\vec{r}_i \times \vec{r}_{i+1}} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} r, -\frac{1}{\sqrt{2}} r, 0 \right).$$

$$\cdot \left\{ (1-p) (\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2) + p \left(\frac{1}{2} \mathbf{T}'_3 + \frac{1}{2} \mathbf{T}_3 + \mathbf{T}_4 \right) \right\} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} r \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} r \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad \overrightarrow{\vec{r}_i \times \vec{r}_{i+1}} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} r, -\frac{1}{\sqrt{2}} r, 0 \right) \left\{ (1-p)^2 (\mathbf{T}_1^2 + \mathbf{T}_2^2) + p^2 \left[\frac{1}{2} (\mathbf{T}'_3 + \mathbf{T}_3) \mathbf{T}_4 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \mathbf{T}_4 (\mathbf{T}'_3 - \mathbf{T}_3) \right] + p(1-p) \left[\frac{1}{2} \mathbf{T}_1 (\mathbf{T}'_3 + \mathbf{T}_3) + \frac{1}{2} \mathbf{T}_2 (\mathbf{T}'_3 + \mathbf{T}_3) + \right. \right. \\ \left. \left. + \mathbf{T}_4 \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_4 \right] \right\} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} r \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} r \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Costruendo ora una matrice \mathbf{M} nel modo seguente:

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} (1-p)\mathbf{T}_1 & p\mathbf{T}_3 \\ p\mathbf{T}_4 & (1-p)\mathbf{T}_2 \end{vmatrix} ; \quad \mathbf{T}_3 = \frac{1}{2}(\mathbf{T}_3 + \mathbf{T}_3')$$

vediamo che la *a*) e la *b*) possono essere così sinteticamente rappresentate:

$$a') \quad \overrightarrow{r_i \times r_{i+1}} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}r, -\frac{1}{\sqrt{2}}r, 0 \right) \left[(\mathbf{E}\mathbf{E})\mathbf{M} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}r \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}r \\ 0 \end{pmatrix} ;$$

$$\mathbf{E} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$b') \quad \overrightarrow{r_i \times r_{i+2}} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}r, -\frac{1}{\sqrt{2}}r, 0 \right) \left[(\mathbf{E}\mathbf{E})\mathbf{M}^2 \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}r \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}r \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per induzione totale, potremo pertanto scrivere:

$$c') \quad \overrightarrow{r_i \times r_{i+j}} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}r, -\frac{1}{\sqrt{2}}r, 0 \right) \left[(\mathbf{E}\mathbf{E})\mathbf{M}^j \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}r \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}r \\ 0 \end{pmatrix}$$

e l'espressione (3') della distanza quadratica media diviene:

$$(4) \quad \overline{d^2} = Nr^2 \left[-1 + \sum_{j=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \cdot \left\{ (\mathbf{E}\mathbf{E}) \begin{vmatrix} (1-p)\mathbf{T}_1 & p\mathbf{T}_3 \\ p\mathbf{T}_4 & (1-p)\mathbf{T}_2 \end{vmatrix}^j \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

il fatto che $\lim_{\substack{j \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0}} \left(\overrightarrow{r_i \times r_{i+j}} \right) = 0$, ci assicura della convergenza

della serie ora scritta.

La (4) può essere scritta nella forma:

$$(4') \quad \bar{d}^2 = N r^2 \left[-1 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \cdot \left((\mathbf{E} \mathbf{E}) \left\{ \sum_0^\infty j \begin{vmatrix} (1-p) \mathbf{T}_1 & p \mathbf{T}_3 \\ p \mathbf{T}_4 & (1-p) \mathbf{T}_2 \end{vmatrix}^j \right\} (\mathbf{E}) \right) \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$

La sommatoria in (4') può essere calcolata come una qualunque analoga serie convergente:

$$\sum_0^\infty j \mathbf{M}^j = (\mathbf{E} - \mathbf{M})^{-1}.$$

Posto:

$$(\mathbf{E} - \mathbf{M}) = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} \quad (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \text{ e } \mathbf{D} \text{ sono matrici di } 3^\circ \text{ ordine})$$

$$(\mathbf{E} - \mathbf{M})^{-1} = \begin{vmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C})^{-1} & (\mathbf{C} - \mathbf{D} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \\ (\mathbf{B} - \mathbf{A} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{D})^{-1} & (\mathbf{D} - \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} & \mathbf{T} \end{vmatrix}$$

(X, Y, Z, T sono matrici di 3° ordine).

La (4') diventa:

$$(4'') \quad \bar{d}^2 = N r^2 \left[-1 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \{ \mathbf{X} + \mathbf{Y} + \mathbf{Z} + \mathbf{T} \} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= N r^2 \left[-1 + \sum_{i,j=1,2} (X_{ij} + Y_{ij} + Z_{ij} + T_{ij}) \right].$$

Sviluppando quindi i calcoli risulta che, semplicemente:

$$(5) \quad \bar{d}^2 = \frac{N r^2}{p} \frac{288 - 576 p + 397 p^2 - 120 p^3 + 21 p^4 - 2 p^5}{144 - 216 p + 106 p^2 - 24 p^3 + 2 p^4} =$$

(sviluppando in serie)

$$= \frac{2 N r^2}{p} \left(1 - \frac{1}{2} p - \frac{35}{288} p^2 - \frac{25}{576} p^3 + \dots \right);$$

formula che, almeno per piccoli valori di p , può essere bene approssimata dall'espressione:

$$(5') \quad \frac{d^2}{N} \cong \frac{2 r^2}{p} \quad \text{dove } r = 2,52 \text{ \AA.}$$

Svilupperemo in un lavoro successivo le implicazioni di questa semplicissima formula.

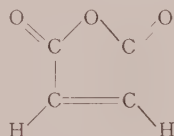
BIBLIOGRAFIA.

- [1] Vedi ad esempio M. V. VOLKENSTEIN, « J. Polymer Sci. », 29, 441 (1958); T. M. BIRSTEIN e O. B. PITTSYN, « Zhur. Fiz. Khim. », 28, 213 (1954); A. V. TOBOLSKY, « J. Chem. Phys. », 31, 387 (1959); R. S. SACK, « J. Chem. Phys. », 25, 1087 (1956).
- [2] S. LIFSON, « J. Chem. Phys. », 29, 80 (1958); « J. Chem. Phys. », 30, 965 (1959); S. LIFSON e I. OPPERHEIM, « J. Chem. Phys. », 33, 109 (1960).
- [3] K. NAGAI, « J. Chem. Phys. », 30, 660 (1959); « J. Chem. Phys. », 31, 1169 (1959).
- [4] A. BORSELLINO, « La Ricerca Sci. », 29, 496 (1959); V. MAGNASCO, G. ROSSI, « J. Chem. Phys. », 32, 1881 (1960).

Spettrografia molecolare. — *Spettri Raman e ultrarossi e assegnazione vibrazionale dell'anidride maleica* (*). Nota di PAOLO MIRONE e PAOLO CHIORBOLI, presentata (**) dal Socio G. B. BONINO.

In un precedente lavoro sulle interazioni fra la vibrazione carbonilica e le altre vibrazioni molecolari di diversi composti [1], è stata messa in evidenza la difficoltà di interpretare sulla base di una semplice interazione meccanica la presenza negli spettri delle anidridi organiche di due bande carboniliche separate da un intervallo di $60\text{--}70\text{ cm}^{-1}$. Poiché mancano studi approfonditi sullo spettro di vibrazione delle anidridi, si è pensato che potesse essere utile al chiarimento di questo problema un'analisi vibrazionale completa di una anidride a struttura particolarmente semplice e simmetrica. Abbiamo perciò studiato gli spettri Raman e ultrarossi dell'anidride maleica.

La molecola di questo composto



possiede una struttura piana a simmetria C_{2v} . Le ventuno vibrazioni fondamentali si suddividono fra le diverse specie di simmetria secondo lo schema:

$$8 A_1 + 7 B_1 + 3 A_2 + B_2 .$$

Esse sono tutte attive in Raman, dove quelle di specie A_1 danno luogo a righe polarizzate, mentre sono inattive in ultrarosso quelle di specie A_2 . Per l'interpretazione dello spettro ultrarosso del vapore è necessaria la conoscenza dei tre momenti di inerzia principali della molecola; essi sono stati calcolati assumendo i seguenti parametri molecolari $r_{C-O} = 1,22\text{ \AA}$; $r_{C=O} = 1,37\text{ \AA}$; $r_{C=C} = 1,35\text{ \AA}$; $r_{C-C} = 1,46\text{ \AA}$; $r_{C-H} = 1,08\text{ \AA}$; $\alpha_{C-O-C} = 100^\circ$; $\alpha_{O-C-C} = 115^\circ$; $\alpha_{C-C=C} = 105^\circ$. Si è trovato per l'asse d'inerzia coincidente con l'asse di simmetria $I_B = 329 \cdot 10^{-40}\text{ g}\cdot\text{cm}^2$; per l'altro asse d'inerzia giacente nel piano della molecola $I_A = 122 \cdot 10^{-40}\text{ g}\cdot\text{cm}^2$; per l'asse d'inerzia perpendicolare al piano

(*) Lavoro eseguito dal nucleo di lavoro di «Strutturistica e spettroscopia molecolare», organizzato dal Centro di Studi di Chimica applicata del C.N.R. diretto dal prof. G. B. Bonino.

(**) Nella seduta dell'8 aprile 1961.

$I_C = 451 \cdot 10^{-40} \text{ g} \cdot \text{cm}^2$. Con questi valori i parametri di asimmetria definiti da Badger e Zumwalt [2] risultano: $\rho = 1,95$; $S = -0,71$. In base ai profili calcolati da questi Autori, si può prevedere che in fase vapore le vibrazioni di specie A_1 daranno luogo a bande di tipo B, costituite da due rami P e R separati, a una temperatura di 400°K , da un intervallo di circa 12 cm^{-1} ; le vibrazioni di specie B_1 daranno luogo a bande di tipo A, costituite da tre rami PQR circa della stessa intensità, con una separazione PR di circa 15 cm^{-1} ; e le vibrazioni di specie B_2 daranno luogo a bande di tipo C, costituite da tre rami PQR con una separazione PR di circa 12 cm^{-1} e il ramo Q molto più intenso degli altri due.

L'anidride maleica impiegata era un prodotto Erba RP, ed è stata cristallizzata da cloroformio anidro. P. f. 54°C . Lo spettro Raman del liquido è stato ripreso sia fotograficamente che fotoelettricamente con uno spettrografo ARL, usando per l'eccitazione la riga a 4358 \AA emessa da una lampada a vapore di mercurio tipo Toronto. Lo stato di polarizzazione delle righe è stato determinato mediante l'uso di due filtri Polaroid cilindrici avvolti successivamente attorno al tubo Raman. Lo spettro ultrarosso del liquido e del vapore è stato registrato con uno spettrofotometro Leitz dotato di ottiche in LiF, NaCl e CsBr. Per lo studio del vapore ci siamo serviti di una cella riscaldabile della lunghezza di 10 cm ; la temperatura di funzionamento era mantenuta a circa 130°C ; a cui corrisponde una tensione di vapore dell'anidride maleica di 60 mm Hg [3]. I risultati e le assegnazioni sono raccolti nella Tabella I.

DISCUSSIONE.

Vibrazioni di specie A_1 . — Queste vibrazioni sono le più sicuramente identificabili, in quanto esse danno luogo in u. r. a bande di tipo B e in Raman a righe polarizzate. Le tre frequenze a 3119 , 1849 e 1590 cm^{-1} si assegnano immediatamente alle vibrazioni di valenza C—H, C=O e C=C rispettivamente. Al di sotto di 1300 cm^{-1} si osservano sei frequenze corrispondenti a intense bande di tipo B o a righe polarizzate, mentre in questa zona le frequenze fondamentali di specie A_1 possono essere soltanto cinque. Pertanto una delle sei frequenze osservate deve essere interpretata come armonica o combinazione, di intensità esaltata per effetto Fermi. Questa interpretazione si applica nel modo migliore alla frequenza a 1281 cm^{-1} , che si può spiegare come prima armonica della 633 , spostata verso le alte frequenze e resa più intensa in seguito all'interazione con la fondamentale della stessa simmetria a 1235 cm^{-1} . Quest'ultima è assegnabile alla vibrazione di deformazione C—H, in accordo con l'attribuzione di Sheppard e Simpson per gli etileni bisostituiti in *cis* [4]. Delle altre frequenze, quelle a 1065 , 864 e 633 cm^{-1} corrispondono a vibrazioni del nucleo pentaatomico, la prima interessante principalmente i legami C—O, la seconda i legami C—C e la terza essenzialmente di deformazione. Infine la frequenza a 407 cm^{-1} è assegnabile alla vibrazione di deformazione dei due gruppi C=O.

TABELLA I.

Spettri Raman e ultrarossi dell'anidride maleica.

Liquido		Vapore		Assegnazioni
Raman	Ultrarosso	Ultrarosso		
3179 <i>dd</i>	3175 <i>d</i>			B ₁ fondam. (ν CH)
3116 <i>m</i> (<i>p</i>)	3122 <i>m</i>			A ₁ fondam. (ν CH)
	2290 <i>dd</i>			1235 + 1057 (B ₁)
				1590 + 695 (B ₁)
	2170 <i>d</i>			1775 + 407 (B ₁)
	2125 <i>dd</i>			2 × 1065 (A ₁)
				1262 + 864 (B ₁)
	1982 <i>d</i>			1590 + 407 (A ₁)
	1930 <i>m</i>	1931	<i>d</i> (?)	1065 + 864 (A ₁)
				1235 + 695 (B ₁)
1873 <i>dd</i>	1876 <i>dd</i>			1235 + 633 (A ₁)
1846 <i>fff</i> (<i>p</i>)	1852 <i>f</i>	1887-1873	<i>m</i> (B)	A ₁ fondam. (ν C=O)
		1852	<i>d</i> (?)	?
	~1800 <i>m</i>			1235 + 560 (B ₁)
				1262 + 537 (B ₂)
1775 <i>f</i> dif (<i>dp</i>)	1774 <i>fff</i>	1816-1809-1801	<i>ff</i> (A)	B ₁ fondam. (ν C=O)
1747 <i>d</i>				889 + 864 (B ₁)
				1057 + 695 (A ₁)
	1691 <i>d</i>			1057 + 633 (B ₁)
1617 <i>d</i> (<i>p</i>)	1620 <i>d</i>			1057 + 560 (A ₁)
	1611 <i>dd</i>			840 + 762 (B ₁)
1590 <i>ff</i> (<i>p</i>)	1590 <i>m</i>	1602	<i>d</i> (?)	A ₁ fondam. (ν C=C)
1563 <i>dd</i>				?
1530 <i>dd</i>				2 × 762 (A ₁)
	1400 <i>d</i>	1401-1394-1387	<i>d</i> (C?)	1065 + 340 (B ₂)
1304 <i>d</i> (<i>dp</i>)				762 + 537 (A ₁)
1278 <i>d</i> (<i>p</i> ?)	1284 <i>f</i>	1285-1270	<i>f</i> (B)	2 × 633 (A ₁)
1261 <i>dd</i>	1264 <i>m</i>			B ₁ fondam. (ν C—O)
1234 <i>m</i> (<i>p</i>)	1237 <i>f</i>	1243-1231	<i>f</i> (B)	A ₁ fondam. (δ CH)
	1155 <i>dd</i>			889 + 268 (B ₂)
	1104 <i>d</i>	1111-1103-1095	<i>dd</i> (A)	695 + 407 (B ₁)

Segue: TABELLA I.

Liquido		Vapore		Assegnazioni
Raman	Ultrasosso	Ultrasosso		
				762 + 340 (B ₁)
				840 + 268 (B ₁)
1065 <i>ff</i> (<i>p</i>)	~1065 <i>d</i>			A ₁ fondam. (ν C—O)
1057 <i>d</i>	1057 <i>ff</i>	1064-1057-1049	<i>f</i> (A)	B ₁ fondam. (δ CH)
	~1030 <i>dd</i>			762 + 268 (A ₁)
950 <i>d</i> (<i>dp</i>)				537 + 407 (A ₂)
	889 <i>ff</i>	906-900-833	<i>f</i> (A)	B ₁ fondam. (ν C—C)
863 <i>f</i> (<i>p</i>)	866 <i>m</i>	888-875	<i>m</i> (B)	A ₁ fondam. (ν C—C)
	840 <i>ff</i>	847-840-831	<i>f</i> (C)	B ₂ fondam. (γ CH)
762 <i>d</i> (<i>dp</i>)				A ₂ fondam. (γ CH)
	695 <i>f</i>	708-699-691	<i>f</i> (A)	B ₁ fondam. (δ nucleo)
631 <i>ff</i> (<i>p</i>)	636 <i>m</i>			A ₁ fondam. (δ nucleo)
556 <i>dd</i>	564 <i>m</i>	567-558-548	<i>d</i> (A)	B ₁ fondam. (δ C=O)
537 <i>dd</i>				A ₂ fondam. (γ C=O)
	~ 457 <i>dd</i>			864-407 (A ₁)
406 <i>d</i> (<i>dp</i>)	408 <i>f</i>	411-395	<i>m</i> (B)	A ₁ fondam. (δ C=O)
~340 <i>dd</i>	"			B ₂ fondam. (γ nucleo)
268 <i>m</i> (<i>dp</i>)				A ₂ fondam. (γ nucleo)

p = riga polarizzata; *dp* = riga depolarizzata; A, B, C = banda con profilo di tipo A, B, C rispettivamente,
 ν = vibrazione di valenza; δ = vibrazione di deformazione nel piano; γ = vibrazione di deformazione fuori dal piano.

Vibrazioni di specie B₁. — Le due frequenze a 3177 e 1775 cm⁻¹ si attribuiscono immediatamente alle vibrazioni di valenza C—H e C=O. Al di sotto di 1300 cm⁻¹ si osservano quattro bande intense di tipo A, a 1057, 889, 695 e 560 cm⁻¹. Di queste, noi assegnamo la prima alla vibrazione di deformazione C—H, la seconda a una vibrazione del nucleo essenzialmente di tipo C—C, la terza a una vibrazione essenzialmente di deformazione del nucleo e l'ultima alla vibrazione di deformazione dei due gruppi C=O. Rimane da assegnare una frequenza alla vibrazione di valenza C—O. Questa frequenza dev'essere cercata nell'intervallo fra 1200 e 1300 cm⁻¹, per analogia con la corrispondente vibrazione degli esteri [5] [6] e in accordo con i calcoli di Tschamler sulle vibrazioni del gruppo C—O—C [7]. Noi attribuiamo dunque a questa vibrazione la frequenza a 1262 cm⁻¹, che non si osserva nello spettro u. r. del vapore probabilmente perché coperta dai rami R e P delle due intense bande a 1235 e 1281 cm⁻¹.

Vibrazioni di specie A_2 . - Le vibrazioni di questa specie sono attive soltanto in Raman. Noi le identifichiamo perciò con le frequenze a 762, 537 e 268 cm^{-1} , che attribuiamo rispettivamente alle vibrazioni di deformazione dei gruppi C—H, dei gruppi C—O e del nucleo. L'assegnazione della frequenza a 537 cm^{-1} alla vibrazione fuori del piano dei gruppi C=O si giustifica tenendo presente che la corrispondente vibrazione cade nell'acetone a 493 cm^{-1} [8] e nell'acetato di metile a 610 cm^{-1} [6].

Vibrazioni di specie B_2 . - Nello spettro u. r. del vapore si osserva una sola banda di tipo C a 840 cm^{-1} , che viene attribuita alla vibrazione di deformazione CH, in accordo con l'assegnazione di Bellamy per il gruppo —CH=CH—COOR (*cis*) [9]. Le vibrazioni di questa specie danno luogo ordinariamente a righe Raman estremamente deboli, quindi l'assegnazione delle rimanenti frequenze risulta piuttosto problematica. Noi attribuiamo alla vibrazione di deformazione del nucleo la frequenza a circa 340 cm^{-1} , soprattutto perché questa assegnazione permette di interpretare diverse frequenze di combinazione. Rimane così non assegnata soltanto la frequenza della vibrazione dei gruppi C=O. A prima vista può sembrare strano che questa vibrazione sia praticamente inattiva in ultrarosso, dato il forte momento elettrico del gruppo carbonilico. È possibile però che l'oscillazione comporti un cambiamento di ibridizzazione degli atomi di carbonio carbonilici, da cui derivi un momento elettrico oscillante diretto in senso contrario a quello dei gruppi C=O. Ricordiamo a questo proposito che nello spettro u. r. del vapore di acetone la banda a 484 cm^{-1} , attribuita alla vibrazione fuori del piano dello scheletro C_2CO , è molto debole rispetto alla vicina banda a 527 cm^{-1} [10].

Dalle nostre assegnazioni risulta chiaramente, che, delle due bande carboniliche, quella ad alta frequenza corrisponde alla vibrazione in fase e quella a bassa frequenza alla vibrazione fuori fase. Questo risultato è in accordo con le conclusioni di Dauben ed Epstein [11] e di Bellamy e coll. [12], fondate sul rapporto di intensità fra le due bande nello spettro u. r. Come si è accennato all'inizio, è difficile interpretare la grande separazione fra le due bande (75 cm^{-1}) come effetto di un accoppiamento puramente meccanico fra i due oscillatori carbonilici. Calcolando le frequenze carboniliche con un metodo di perturbazione che tiene conto appunto di tali accoppiamenti [1], abbiamo trovato per l'anidride succinica una separazione di solo 10 cm^{-1} , mentre per gli ortochinoni la separazione calcolata è in buon accordo con quella sperimentale. Inoltre nei composti contenenti il gruppo $\text{O}=\text{C}-\text{X}-\text{C}=\text{O}$, si osserva una separazione fra le due bande carboniliche vicina a quella presentata dalle anidridi soltanto se X è un atomo d'azoto (40–60 cm^{-1} nei derivati della ftalimmide [13]), mentre se X è un atomo di carbonio la separazione è molto minore (20–25 cm^{-1} nei β -dichetoni [14]). Nei composti contenenti due gruppi carbonilici direttamente legati la separazione è spesso anche più piccola: negli ortochinoni 20–30 cm^{-1} [15], nel dimetilossalato (forma *cis*) 6 cm^{-1} [16], nel diacetile (forma *trans*) 1 cm^{-1} [17].

Tenendo conto di questo insieme di fatti, noi pensiamo che la separazione fra le due frequenze carboniliche delle anidridi sia dovuta per la maggior parte a un'interazione di natura elettronica. Infatti nel gruppo $\text{O}=\text{C}-\text{O}-\text{C}=\text{O}$ la vibrazione antisimmetrica stabilizza alternativamente le due forme in risonanza:



che hanno un considerevole peso nel determinare la effettiva struttura delle anidridi, come è mostrato dall'alto valore dell'energia di risonanza (circa 30 kcal/mole) [18]; ciò non avviene invece per la vibrazione simmetrica. Questo fatto si traduce, almeno formalmente, nell'esistenza nella funzione potenziale di una costante di accoppiamento positiva fra le due coordinate di valenza carboniliche, il cui effetto è di innalzare la frequenza simmetrica e di deprimere quella antisimmetrica. Una tale interazione è ancora possibile quando l'atomo d'ossigeno centrale è sostituito da un atomo di azoto, che possiede una coppia elettronica non divisa, ma non è più possibile quando l'atomo centrale è un atomo di carbonio. Pensiamo che un meccanismo analogo possa valere anche per i perossidi, che contengono il gruppo $\text{O}=\text{C}-\text{O}-\text{O}-\text{C}=\text{O}$ e che presentano due bande carboniliche con una separazione di circa 20 cm^{-1} [12].

BIBLIOGRAFIA.

- [1] P. MIRONE e P. CHIORBOLI, « Rend. Accad. Lincei », in corso di stampa.
- [2] R. M. BADGER e L. R. ZUMWALT, « J. Chem. Phys. », **6**, 711 (1938).
- [3] J. M. WEISS e C. R. DOWNS, « J. Am. Chem. Soc. », **45**, 1003 (1923).
- [4] N. SHEPPARD e D. M. SIMPSON, « Quart. Rev. », **6**, 1 (1952).
- [5] L. J. BELLAMY, *The infrared spectra of complex molecules*, London 1958, p. 188.
- [6] J. K. WILMSHURST, « J. Mol. Spectroscopy », **1**, 201 (1957).
- [7] H. TSCHAMLER, « Spectrochim. Acta », **6**, 95 (1954).
- [8] P. MIRONE e P. CHIORBOLI, « Annali Chimica », **50**, 1095 (1960).
- [9] L. J. BELLAMY, op. cit., p. 48.
- [10] A. HADNI, « Ann. Phys. », **10**, 874 (1955).
- [11] W. G. DAUBEN e W. W. EPSTEIN, « J. Org. Chem. », **24**, 1595 (1959).
- [12] L. J. BELLAMY, B. R. CONNELLY, A. R. PHILPOTTS e R. L. WILLIAMS, « Z. Elektrochem. », **64**, 563 (1960).
- [13] A. E. KELLIE, D. G. O. SULLIVAN, P. W. SADLER, « J. Chem. Soc. », 1956, 3809.
- [14] R. MECKE e E. FUNCK, « Z. Elektrochem. », **60**, 1124 (1956).
- [15] W. OTTING e G. STAIGER, « Ber. », **88**, 828 (1955).
- [16] M. J. SCHMELZ, T. MIYAZAWA, S. MIZUSHIMA, T. J. LANE e J. V. QUAGLIANO, « Spectrochim. Acta », **9**, 51 (1957).
- [17] K. NOACK e R. N. JONES, « Z. Elektrochem. », **64**, 707 (1960).
- [18] G. W. WHELAND, *Resonance in organic chemistry*, New York, 1935, p. 100.

Biochimica. — *Sulla composizione chimica della glutamico-aspartico transaminasi del cuore di Porco. Digestione chimotriptica dell'enzima ed isolamento del peptide contenente il coenzima*^(*). Nota di CARLO TURANO, PAOLO FASELLA, PAOLA VECCHINI, ANNA GIARTOSIO, presentata^(**) dal Corrisp. A. ROSSI-FANELLI.

Precedenti ricerche di altri Autori [1, 2] e nostre [3, 4] hanno dimostrato che il derivato della vitamina B₆ costituente il gruppo prostetico della glutamico-aspartico transaminasi può essere o il piridossale fosfato o la piridosamina fosfato e che l'attività dell'enzima è connessa a continue transaminazioni tra il gruppo prostetico dell'enzima ed i substrati [5].

Studi sui requisiti strutturali per l'attività coenzimatica [6] e sulle proprietà spettrofotometriche [1, 3, 4, 7] e spettrofluorimetriche [8] hanno dimostrato che il piridossale fosfato è legato alla proteina attraverso tre dei suoi gruppi: fosforico, piridinico ed aldeidico. Quest'ultimo interviene formando una aldimina con un gruppo aminico della proteina.

In questa Nota si descrivono i risultati delle ricerche intese ad identificare il gruppo aminico della proteina cui è legato il coenzima.

PARTE SPERIMENTALE.

Riduzione dell'enzima. — 8 ml di una soluzione contenenti 40 mg della forma aldeidica della glutamico-aspartico transaminasi preparata secondo Lis [9, 10], venivano portati a pH 8,6 con aggiunta di Tris 0,2 M, posti in un tubo da dialisi, ed immersi sotto agitazione in una soluzione 0,02 M di sodio boridruro tenuta alla temperatura di 4°C. Dopo 15 minuti il tubo da dialisi contenente l'enzima veniva tolto dalla soluzione di boridruro ed immerso in acqua distillata corrente per 12 ore.

Digestione chimotriptica. — La soluzione di enzima veniva recuperata dal tubo di dialisi, posta in una provetta e denaturata al calore (bagno maria bollente per 1 min) oppure in alcali (per aggiunta di NaOH fino ad una concentrazione finale di 0,2 N seguita da neutralizzazione con ac. acetico e dialisi contro acqua distillata per allontanare l'acetato sodico).

La sospensione dell'enzima denaturato veniva portata a pH 7,8 con tampone fosfato (concentrazione finale 0,05 M); si aggiungeva quindi in sostanza della α -chimotripsina (campione commerciale della Ditta Fluka) in

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Biologica della Università di Roma e nel Centro di Enzimologia del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'11 marzo 1961.

quantità corrispondenti ad 1/80 del peso della glutamico-aspartico transaminasi presente nella sospensione. La sospensione veniva incubata sotto agitazione per 18 ore a 37°C. La completezza della reazione si accertava secondo la tecnica di Stein e Moore [11]. La reazione veniva arrestata per riscaldamento a 80°C per un minuto.

Frazionamento dell'idrolizzato chimotriptico. — Il pH della sospensione era poi portato a 4,5 con acido acetico e la chimotripsina denaturata si allontanava per centrifugazione. Il sopranatante veniva liofilizzato, il residuo secco era risolto in 2 ml di acqua e deposto su colonna (35 × 2,5 cm) di carbossimetil-cellulosa preparata secondo Peterson e Sober [12], ed equilibrata con tampone acetato pH 4,6 di forza ionica 0,004 μ . L'eluizione era compiuta con lo stesso tampone raccogliendo ogni ora quattro frazioni di 5 ml cadauna. Le frazioni venivano analizzate in uno spettrofluorimetro Farrand usando le seguenti lunghezze d'onda: luce di eccitazione 280 m μ — luce emessa 350 m μ per evidenziare i peptidi contenenti aminoacidi aromatici; luce di eccitazione 330 m μ , luce emessa 390 m μ per i peptidi contenenti il piridossil derivato. La eluizione veniva successivamente compiuta con tampone acetato pH 5,4, forza ionica 0,1 μ . Le frazioni che presentavano la fluorescenza eccitata a 330 ed emessa a 390 m μ venivano riunite, liofilizzate, ridissolte in piccolo volume e sottoposte ad elettroforesi su carta Whatman 3 MM in tampone piridina-ac. formico, pH 4,0, forza ionica 0,05 μ , applicando un gradiente di potenziale di 40 volt/cm per un'ora. Un sistema di raffreddamento garantiva la stabilità dell'intensità di corrente (circa 2 mA/cm di larghezza della carta).

L'elettrogramma veniva asciugato a temperatura ambiente e diviso longitudinalmente in due parti, una delle quali 3 volte più larga dell'altra. La striscia più sottile veniva spruzzata con ninidrina (1 per mille in butanolo) e l'altra striscia veniva esaminata a luce ultravioletta con massimo di emissione a 360 m μ , per localizzare la fluorescenza. La banda a fluorescenza violetta veniva eluita e sottoposta ad idrolisi acida (per riscaldamento a 110° con HCl 6 N in fiala chiusa sotto vuoto) per 14 ore. L'idrolizzato veniva essiccato e deacidificato mantenendolo per diversi giorni sotto vuoto in essiccatore contenente NaOH solido e P₂O₅. Il residuo secco veniva sciolto in un minimo di acqua e sottoposto a cromatografia bidimensionale discendente su carta Whatman 4. Per la prima corsa si usava collidina-lutidina (1 : 1) sature di acqua; per la seconda *n*-butanolo, ac. acetico glaciale, acqua (4 : 1 : 5). I cromatogrammi venivano ispezionati a luce ultravioletta di lunghezza d'onda prossima ai 360 m μ e spruzzati con i seguenti reattivi: ninidrina 2,5 per mille in acetone; reattivi di Olesen Larsen e Kjaer [13] per distinguere i gruppi α -aminocarbossilici da altri gruppi aminici primari; 2-6-diclorochinon-clorimide (soluzione satura) [14] seguita da esposizione a vapori di ammoniaca per identificare il gruppo fenolico legato all'anello eterociclico della vitamina B₆.

Sintesi dei piridossil aminoacidi. — L' α -piridossil lisina, la ϵ -piridossil lisina, la α - ϵ -dipiridossilisina ed altri piridossil derivati di aminoacidi venivano sintetizzati secondo un procedimento originale descritto altrove [15].

RISULTATI E DISCUSSIONE.

La forma aldeidica della glutamico-aspartico transaminasi è stata trattata con boridruro sodico allo scopo di ridurre il doppio legame aldiminico, e di rendere così stabile uno dei legami tra il coenzima e la proteina.

Questo trattamento determina una modificazione delle proprietà spettrofluorimetriche dell'enzima: scomparsa del massimo di assorbimento a 360 m μ , comparsa di un massimo di assorbimento a 330 m μ , cui corrisponde un massimo di emissione di luce fluorescente a 300 m μ che divengono quelle caratteristiche dei piridossil derivati [15]. Il trattamento con boridruro determina anche la perdita della attività enzimatica. Ciò è facilmente comprensibile se si considera che il substrato si lega all'enzima proprio attraverso il gruppo aldeidico del coenzima: quando questo gruppo è legato irreversibilmente alla proteina per riduzione con boridruro il substrato non può più combinarsi con l'enzima. Analoghi trattamenti chimici sono stati usati da altri Autori su altri enzimi contenenti il piridossale fosfato [16, 17, 18].

Per idrolisi chimotriptica dell'enzima ridotto e denaturato si ottengono numerosi peptidi. Una tipica separazione dei « peptidi acidi », ottenuta mediante cromatografia su carbossimetil-cellulosa, è riportata nella figura 1. Come si vede nella figura, per eluzione in tampone acetato a pH 4,6 si ottengono 5 frazioni costituite da peptidi, una delle quali presenta una fluorescenza eccitata a 330 m μ ed emessa a 300 m μ , caratteristica dei piridossil derivati. È importante osservare che più del 75 % della fluorescenza violetta presente nell'idrolizzato chimotriptico prima del passaggio su colonna si ritrova in questa frazione. La successiva eluzione della colonna con tampone a pH 5,4 ed a maggiore forza ionica determina la comparsa di altre frazioni, alcune delle quali presentano solo una debolissima fluorescenza violetta.

L'analisi elettroforetica della principale frazione fluorescente ottenuta dalla cromatografia su carbossimetil-cellulosa rivela due frazioni con reazione positiva alla ninidrina, una delle quali mostra una fluorescenza violetta. Nelle condizioni da noi usate la frazione non fluorescente migra di 6 cm verso l'anodo, l'altra, fluorescente, migra di 4,4 cm verso il catodo. Quest'ultima frazione, sottoposta ad idrolisi acida, dà origine ad alcuni aminoacidi [19] e ad una sostanza fluorescente le cui caratteristiche sono riportate nella Tabella I. La fluorescenza della sostanza corrisponde alla fluorescenza caratteristica dei piridossil derivati, della piridossina e della piridossamina. Si può escludere che la sostanza in questione si identifichi con uno di questi due ultimi composti, in quanto essi hanno delle mobilità cromatografiche diverse (vedere Tabella I). La piridossina inoltre non dà reazioni colorate con la ninidrina mentre la piridossamina dà con la ninidrina un colorito arancione anziché porpureo come la macchia in questione. Ci si è pertanto orientati verso un piridossil derivato di un aminoacido contenente un gruppo aminico libero.

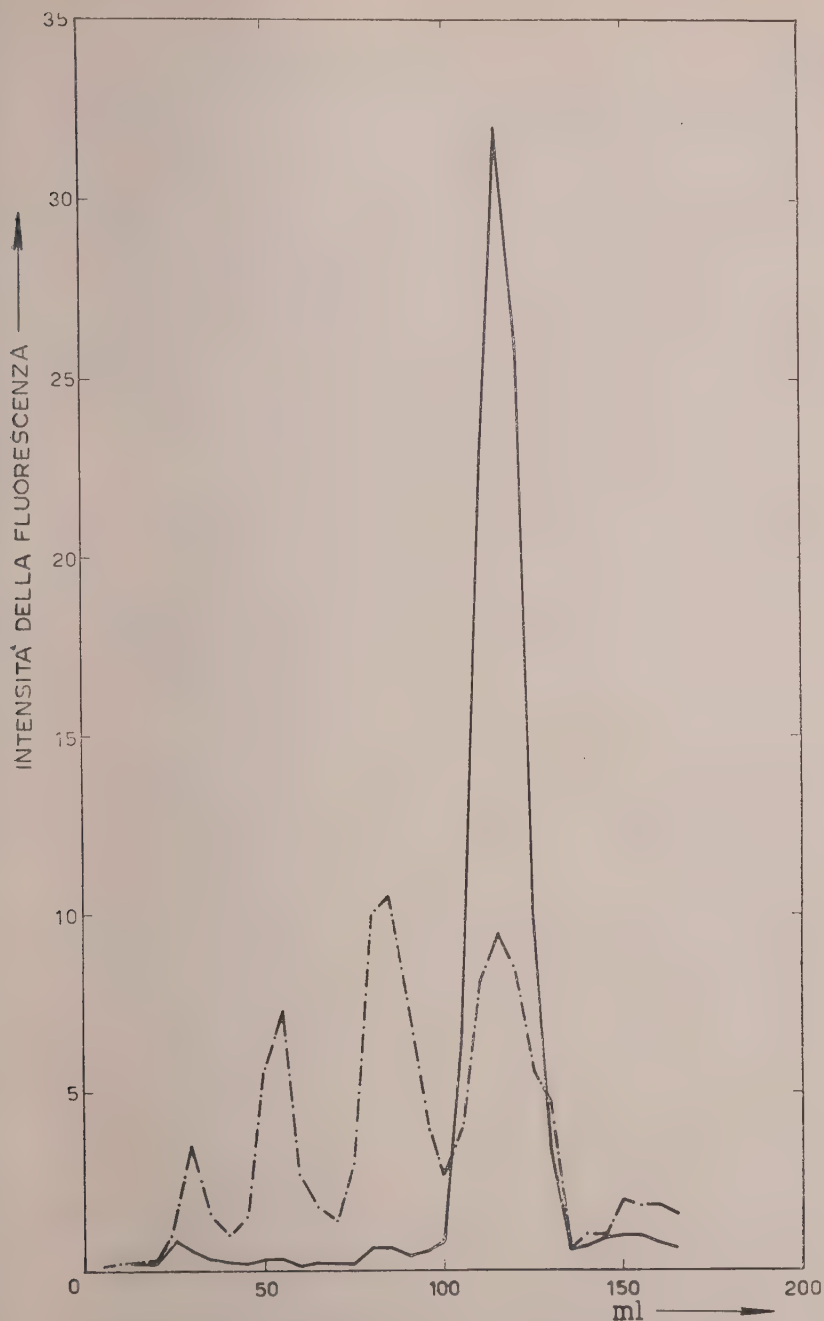


Fig. 1. -- Eluzione da carbossimetil-cellulosa (in tampone acetato sodico, pH 4,6, forza ionica 0,004 μ) di idrolizzato chimotriptico di transaminasi trattata con boridruro sodico. La linea continua indica la fluorescenza caratteristica dei piridossil-derivati (eccitazione a 330 $m\mu$, emissione a 390 $m\mu$), mentre quella spezzata indica la fluorescenza dei peptidi contenenti aminoacidi aromatici (eccitazione a 280 $m\mu$, emissione a 350 $m\mu$). La intensità della fluorescenza è espressa in unità convenzionali.

Un paragone con alcune proprietà cromatografiche e chimiche della ϵ -N-piridossil-lisina, da noi ottenuta per sintesi (Tabella I), mostra che il composto isolato dall'idrolizzato della glutamico-aspartico transaminasi ha proprietà identiche a quelle del composto sintetico.

TABELLA I.

Proprietà della ϵ -N-piridossil-lisina sintetica e del piridossil derivato isolato dall'idrolizzato di glutamico-aspartico transaminasi ridotta.

	ϵ -N-piridossil lisina	Piridossil derivato	Piridossamina	Piridossina
Rf in collidina-lutidina (1 : 1) sat. di acqua	0,51	0,51	0,52	0,88
Rf in <i>n</i> -butanolo ac. acetico acqua (4 : 1 : 5)	0,06	0,06	0,45-0,30	0,63
Reazione alla ninidrina . .	Positiva con colore purpureo	Positiva con colore purpureo	Positiva con colore giallo- arancione	Negativa.

È qui necessario notare che prove eseguite con piridossil fosfato derivati di aminoacidi sintetici hanno dimostrato che, nel corso della idrolisi acida, il gruppo fosforico viene idrolizzato. È per tale ragione che nell'idrolizzato della glutamico-aspartico transaminasi si rinviene il piridossil-derivato non fosforilato.

I presenti risultati dimostrano quindi che il piridossale fosfato è legato alla glutamico-aspartico transaminasi attraverso un legame aldiminico, riducibile con boridruro, con il gruppo aminico terminale di una lisina.

Ad una simile conclusione sono giunti Fischer e Krebs [18] in base ad una loro analisi dei prodotti di idrolisi di preparazioni di cistationasi e di glutamico-aspartico transaminasi ridotte con boridruro. Poiché i dati di questi Autori sono stati finora pubblicati solo sotto forma di sunto di una comunicazione ad un congresso, privi di dettagli sperimentali, non è possibile stabilire ulteriori paragoni tra i dati di questi Autori ed i nostri.

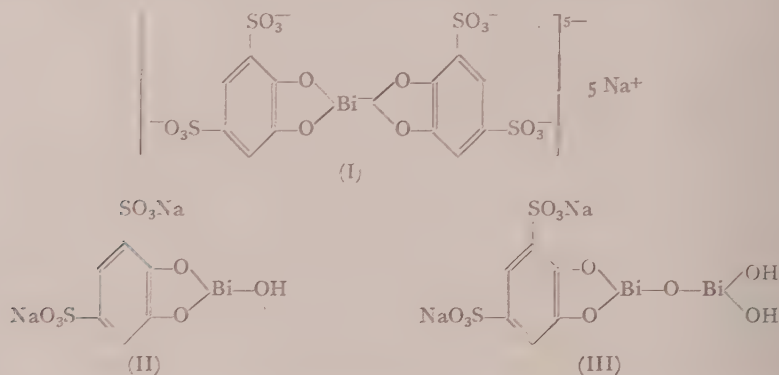
I presenti dati suggeriscono delle importanti considerazioni quantitative. È noto [1, 3, 4, 7] che ad ogni molecola di glutamico-aspartico transaminasi del cuore di Porco sono legate due moli di coenzima. L'aver dimostrato che la maggior parte del piridossale fosfato si rinviene legato ad un unico peptide dopo idrolisi chimotriptica sembra indicare che la molecola della transaminasi sia in realtà un dimero. Gli aspetti funzionali di questa conclusione verranno discussi altrove, trattando della cinetica e della termodinamica dell'azione enzimatica.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] W. T. JENKINS e I. W. SIZER, « J. Am. Chem. Soc. », 79, 2655 (1957).
- [2] W. T. JENKINS e I. W. SIZER, « J. Biol. Chem. », 235, 620 (1960).
- [3] H. LIS e P. FASELLA, « Rev. Espanola Fisiol. », 16, Suppl. III, 105 (1960).
- [4] H. LIS, P. FASELLA, C. TURANO e P. VECCHINI, « Bioch. Bioph. Acta », 45, 529 (1960).
- [5] C. TURANO, P. FASELLA e A. GIARTOSIO, Rias. Com. VI Riun. Naz. Soc. Ital. Biochim., Montecatini, n. 22, p. 70.
- [6] E. E. SNELL, *Vitamins and Hormones*, 16, 77 (1958).
- [7] W. T. JENKINS, D. A. YPHANTIS e I. W. SIZER, « J. Biol. Chem. », 234, 51 (1959).
- [8] P. FASELLA, C. TURANO, A. GIARTOSIO e I. HAMMADY, « Giornale di Bioch. » (in corso di stampa).
- [9] H. LIS, « Bioch. Bioph. Acta », 28, 191 (1958).
- [10] H. LIS e P. FASELLA, « Bioch. Bioph. Acta », 33, 567 (1959).
- [11] S. MOORE e W. H. STEIN, « J. Biol. Chem. », 211, 907 (1954).
- [12] E. A. PETERSON, H. A. SOBER, « J. Am. Chem. Soc. », 78, 751 (1956).
- [13] P. OLESEN LARSEN e A. KJAER, « Bioch. Bioph. Acta », 38, 148 (1960).
- [14] F. FEIGL e E. JUNGREIS, « Clin. Chim. Acta », 3, 399 (1958).
- [15] C. TURANO, P. FASELLA, e P. VECCHINI, in corso di stampa.
- [16] E. H. FISCHER, A. B. KENT, E. R. SNYDER e E. G. KREBS, « J. Am. Chem. Soc. », 80, 2907 (1958).
- [17] Y. MATSUO e D. M. GREENBERG, « J. Biol. Chem. », 234, 507 (1959).
- [18] E. H. FISCHER and E. G. KREBS, 136th Meeting ACS, Atlantic City, N. J., Sept. 1959, Abstracts, p. 24 c.
- [19] C. TURANO, P. VECCHINI, A. GIARTOSIO, P. FASELLA, in corso di stampa.

Farmacologia. — *Ulteriori ricerche sull'attività antivirale di complessi metallici idrosolubili*^(*). Nota di TITO BERTI, FERRUCCIO D'ANGELI, CARLO LANZANI e PAOLA MENEGHELLI, presentata^(**) dal Socio U. D'ANCONA.

In una precedente comunicazione [1] avevamo riferito i primi risultati ottenuti studiando l'azione antivirale (virus della malattia di Newcastle - NDV, di un gruppo di complessi ottenuti dal pirocatechindisolfonato sodico (Tiron)⁽¹⁾ e idrato o nitrato di Bi e ivi rappresentati con le formule (I), (II), (III). Di tali composti è stata segnalata la notevole azione inibente lo sviluppo del NDV nelle uova embrionate di pollo, evidente per dosi di farmaco assai lontane da quelle tossiche per lo stesso substrato biologico.



Successivamente abbiamo approfondito lo studio delle proprietà antivirali del più attivo dei composti allora provati (P 8), estendendo l'indagine all'azione da esso esercitata sull'evoluzione dell'infezione da virus dell'influenza A (PR 8) nell'uovo embrionato e nel topo [2].

Per ottenere maggiori informazioni sui rapporti tra costituzione chimica ed azione antivirale dei complessi idrosolubili di Bi, nelle ricerche riferite nella presente Nota, abbiamo preso in esame anche altri complessi ottenuti da bismuto (idrato, nitrato e sodio bismutato, e Tiron e complessanti diversi dal Tiron (ac. tartarico, ac. gallico, nonché complessi del Tiron stesso con altri metalli (Sn, Co, e, ancora, altri complessi idrosolubili di As e di Sb).

L'opportunità di esaminare l'eventuale attività antivirale di complessi contenenti metalli diversi dal Bi è stata da noi considerata e per le affinità

(*) Lavoro eseguito nel Centro di Studio per la Chemioterapia del C.N.R. presso l'Istituto di Farmacologia dell'Università di Padova.

(**) Nella seduta dell'8 aprile 1961.

(1) Precedentemente da noi indicato con la sigla Piro-Na.

chimiche esistenti tra alcuni di essi e i complessi di Bi trovati attivi e per i favorevoli risultati ottenuti da altri Autori con composti di tale tipo. Si possono ricordare a tale proposito i dati di Groupé e coll. [3] e di Schmidt e Rasmussen [4] con il CoCl_2 e Co-EDTA sul virus dell'influenza A (PR 8) nell'embrione di pollo e quelli di Cutting [5] con un complesso di Co e guanina e con il gluconato di Mn sui virus dell'ectromelia e Columbia SK nel topo.

I quesiti che abbiamo cercato di risolvere con queste ricerche riguardano l'importanza, per l'azione antivirale, delle seguenti entità: 1° contenuto in Bi del complesso; 2° valenza e grado di mascheramento del Bi; 3° struttura chimica del complessante; 4° natura del metallo. I due ultimi punti sono stati considerati in base all'ipotesi che l'azione antivirale sia genericamente attribuibile a particolari proprietà dei complessi metallici. I risultati ottenuti consentono di fornire attendibili risposte alla maggior parte di questi quesiti.

PARTE CHIMICA.

I composti studiati nelle presenti ricerche sono stati ottenuti per reazione tra vari complessanti (pirocatechindisolfonato sodico - Tiron; acido tartarico - A.T.; acido gallico - A.G.) e bismuto allo stato di nitrato neutro, di idrato o di sodio bismutato, e inoltre tra Tiron e CoCl_2 e, per confronto, tra EDTA e CoCl_2 .

Gruppo I. - Nelle precedenti ricerche [1] si era ammesso che la marcata attività antivirale di alcuni complessi Tiron: Bi poteva essere in relazione, oltre al grado di « mascheramento » del Bi, anche a fenomeni di ossidazione, eventualmente intervenuti durante la preparazione. Per chiarire questa ipotesi si è voluto ottenere complessi di Bi in ambiente ossidante e si è fatto regire il Tiron, anziché con $\text{Bi}(\text{OH})_3$ o $\text{Bi}(\text{NO}_3)_3$, con NaBiO_3 (sodio bismutato) ⁽²⁾. Come nelle citate ricerche, si è operato in modo da ottenere soluzioni acquose che si sono diluite con CH_3OH per precipitare i complessi, idrosolubili per la presenza dei gruppi $-\text{SO}_3\text{Na}$.

Si sono condotte reazioni tra Tiron e NaBiO_3 nei rapporti molecolari (R.M.) 2 : 1; 1 : 1; 1 : 2; e si sono ottenute, anche a seconda delle condizioni sperimentali, sostanze a vario titolo di Bi. Esse hanno caratteri comuni con i composti già descritti: in particolare la solubilità in acqua e, per quelle ottenute in R.M. 2 : 1 e 1 : 1, il titolo in Bi. Quando si è operato con R.M. 1 : 2, cioè con eccesso di NaBiO_3 , si sono ottenuti a volte composti con l'atteso titolo in Bi ($\sim 47\%$), a volte composti con titolo inferiore in Bi ($\sim 40\%$): i due gruppi di composti danno, per dissoluzione in acqua e riprecipitazione con CH_3OH , composti contenenti circa 60% di Bi, pure solubili in

(2) Il sodio bismutato, corrispondente all'ossido Bi_2O_5 , è uno dei pochi composti noti contenenti Bi^{V} ; come altre combinazioni del Bi con valenza superiore a tre, è instabile (tanto che la sua esistenza è stata discussa [6] [7]) e può cedere ossigeno, specialmente in ambiente acido e a caldo, trasformandosi in derivati del Bi^{III} [8].

acqua, e probabilmente provenienti da fenomeni di idrolisi e polimerizzazione con conseguente «allungamento» della catena bismutilica [9] [10]. Sono poco stabili al suaccennato trattamento anche i composti corrispondenti al R.M. 1 : 1, e relativamente instabili quelli con R.M. 2 : 1.

Non si è assegnata una costituzione né ai composti di questo gruppo né a quelli dei successivi, tenendo conto del fatto, ben noto, che l'isolamento di composti può essere ingannevole poiché l'energia del reticolo cristallino stabilizza molti complessi, troppo deboli per esistere in soluzione [11] ⁽³⁾. La confermata pentavalenza del Bi nel sodio bismutato e la possibilità che il complessamento stabilizzi lo stato instabile a superiore valenza di sali di metalli polivalenti (cfr. per il Co^{III} [13] [14]) poteva suggerire che i composti ottenuti da NaBiO_3 contenessero Bi^{V} ; si è visto che detti composti liberano, in presenza di HCl , iodio da una soluzione di KJ , ma la determinazione quantitativa dell'ossigeno perossidico ha dato valori assai inferiori ai teorici. Questo fatto, assieme a quanto è noto sugli infruttuosi tentativi di ottenimento di complessi contenenti Bi^{V} ⁽⁴⁾ fa dubitare che il Bi possa trovarsi allo stato pentavalente nei composti qui descritti.

TABELLA I.

Reattivi Volume cc.	Composti Tiron-Bi								Composti Tiron- Co^{II}		
	Sigla	P 8	P 81	P 82	P 89	P 891	P 877	P 878	Co-EDTA *	Co 6	Co 7
	Bi %	50,3	21,3	33,4	47,0	60,7	41,1	59,5	13,6	9,3	12,4
HCl N 0,6		—+	+	—+	—+	—+	—+	—+	+	—	+
NaOH N 0,6		+	+	+	—	—	—	—	+	—	—
NaHCO_3 sat. 1,0		+	+	+	+	+	+	+	+	+	—
Na_2CO_3 10 % 0,5		+	+	+	+	+	+	+	+	+	—
Tamp. Fosf. 5,0 M/15, pH 7,2		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

Concentrazione: mg 20 di composto in cc 1 di H_2O

+ stabilità per almeno due ore;

—+ precipitato iniziale, solubile nella quantità di reattivo indicata;

— precipitato dopo due ore;

— precipitazione immediata;

* riportato per confronto.

(3) Riguardo la varietà delle formule discusse per complessi della pirocatechina con il Bi si confrontino i recenti lavori di GIRARD [12]. La preparazione di complessi del Bi e di altri metalli con derivati polifenolici è descritta anche in Germ. P. 567754 (1933) e in Brit. P. 313541 (1928).

(4) Complessi con As e Sb pentavalenti sono stati ottenuti, mentre per il Bi sembra che non ne possano esistere, con l'eccezione di K_3BiOF_6 [15].

I dati sopra riportati mostrano, in conclusione, che fra questi composti e quelli ottenuti da Tiron e $\text{Bi}(\text{OH})_3$ o $\text{Bi}(\text{NO}_3)_3$ si sono potute rilevare solo modeste differenze nelle proprietà e nel contenuto analitico; tuttavia, la costatazione che alcuni di tali composti presentano peculiari proprietà chemioterapiche antivirali ci ha indotto a riportarne i metodi di ottenimento, lo studio preliminare della stabilità (Tabella I) e i dati analitici trovati per Bi, Na e H_2O e riportati di confronto con valori calcolati per I, II, III: i valori analitici calcolati, sono, per tutti i composti, relativi a derivati del Bi^{III} .

$P\ 8I = g\ 12,6$ (moli 0,038) di Tiron ($\text{C}_6\text{H}_4\text{O}_8\text{Na}_2\text{S}_2 \cdot \text{H}_2\text{O}$; P.M. 332) sciolti in H_2O cc 48 si trattano con g 5,60 (moli 0,02) di NaBiO_3 . Si agita magneticamente per 30' e si ottiene una soluz. quasi omogenea, pressoché neutra; si centrifuga per allontanare traccia di NaBiO_3 indisciolto e la soluz. verde si versa agitando su CH_3OH cc 100. Si ottiene una polvere verde che si centrifuga, si lava e si secca: g 12,70 ($P\ 8I$). Questo e tutti gli altri composti ottenuti sono stati lavati con metanolo e quindi con etere e seccati su CaCl_2 in vuoto a temperatura ambiente, a meno che non venga esplicitamente indicato.

La soluz. idroalcolica (ocra rossa) lascia separare col tempo prismi gialli: g 1,8 ($P\ 8II$).

Analisi:	$P\ 8I$	Trov. %	Bi 21,74	Na 12,46	H_2O (105°)	8,90
	$P\ 8II$		22,07			
per 1.4 H_2O		Calc.	22,50	12,30		7,70

Un campione (g 2,0) di $P\ 8I$ viene sciolto in H_2O cc 18: la soluz., diluita con egual volume di CH_3OH , non dà precipitato; per averlo si deve aggiungere ancora cc 30 di CH_3OH : polvere gialloverde g 0,58: trov. % Bi 27,7. Le a.m., per successiva diluizione con CH_3OH , danno polvere giallo chiara: g 0,55; trov. % Bi 21,7.

$P\ 82 = g\ 9,42$ (moli 0,028) di Tiron sciolti in H_2O cc 36 si trattano con g 8,4 (moli 0,03) di NaBiO_3 ; si agita e la sospensione dapprima verde scura, diventa giallo-aranciato dopo 20' e aranciata dopo 60'. Dopo 2 h si centrifuga per separare poco indisciolto e la soluzione alcalina (cc 35), di colore rosso, si versa agitando su CH_3OH cc 120. Si ottiene un prec. giallo-verde che viene lavato fino a reazione quasi neutra e seccato: g 15,3 di prodotto verde ($P\ 82$).

Operando analogamente in soluz. più diluita (Tiron g 9,42 in H_2O cc 50) e mantenendo più a lungo in agitazione (3 h) si è ottenuta una soluzione (cc 48) che, versata su CH_3OH , ha dato un prodotto giallo: g 11,6 ($P\ 82I$).

Analisi (5):	$P\ 82$	Trov. %	Bi 32,8	Na 11,5	H_2O	7,1
	$P\ 82I$		33,5			6,7
per II.2 H_2O		Calc.	36,4	8,0		6,2

g 2,0 di $P\ 82$ sciolti in H_2O cc 18 danno soluz. gialla che, per diluizione con CH_3OH cc 18, dà una polvere gialla: g 0,72; trov. % Bi 53,0. Le a.m., diluite ancora con CH_3OH cc 30, danno polvere gialla; gr. 0,2; trov. % Bi 39,7. Le soluzioni sature di $P\ 82$ (rosse) danno con CH_3OH , prodotti verdi (o giallo-verdi).

$P\ 89 = g\ 11$ (moli 0,033) di Tiron, sciolti in H_2O in modo da avere cc 105 di soluzione, si trattano con g 19,6 (moli 0,07) di NaBiO_3 . Si ha reazione esotermica (circa 45°); si man-

(5) Analisi di controllo su composti ottenuti da Tiron e $\text{Bi}(\text{NO}_3)_3$ hanno dato:

$P\ 36$ (R.M. 1 : 1)	Trov. %	Bi 32,7	Na 9,6	H_2O	9,3
$P\ 8$ (R.M. 1 : 2)		Bi 49,4	6,2		8,3

tiene a 40-45° sotto agitazione per 24 h. Si lascia riposare 12 h e si centrifuga a 10.000 giri; si ottiene un indisciolto (g 5,85) costituito prevalentemente di NaBiO_3 . La soluzione, fortemente alcalina (cc 98) viene versata su cc 218 di CH_3OH , agitando. Si ottiene una polvere gialla che viene lavata e seccata: g. 20,0 (*P 89*). Un campione si è seccato a 105° (*P 89 a*).

Analisi (⁵):	<i>P 89</i>	Trov. %	Bi 47,0	Na 8,9	H_2O 4,1
	<i>P 89 a</i>		50,3		
per $\text{III} \cdot 2\text{H}_2\text{O}$	Calc.		51,2	5,6	4,4

Le analisi indicano che *P 82* e *P 89* contengono una percentuale di Na notevolmente più elevata di quella relativa ai composti II e III; corrispondentemente le soluzioni acquose di *P 82* e *P 89* sono fortemente alcaline. I procedimenti di dissoluzione e riprecitazione di seguito descritti abbassano notevolmente la percentuale in Na e l'alcalinità delle soluz. acquose dei prodotti che si ottengono.

P 89I e *P 892* = g 9 di composto *P 89* vengono sciolti in H_2O cc 81. La soluz. rossa versata su CH_3OH cc 81 dà un precipitato giallo che viene lavato fino a eliminazione dell'alcalinità e seccato: g 5,5 (*P 89I*). Un campione di *P 89I* (g 3) viene sottoposto a identico trattamento: si ottiene un prodotto gelatinoso che viene reso centrifugabile con altro CH_3OH cc 30. Si ha un prodotto gelatinoso che, lavato e seccato, dà polvere giallo ranc.: g 1,8 (*P 892*).

Analisi:	<i>P 89I</i>	Trov. %	Bi 60,7	Na 4,7	H_2O 4,5
	<i>P 892</i> (105°)		63,0	4,3	

Analogo trattamento ha trasformato anche il composto *P 8* (v. nota ⁽⁵⁾) in un prodotto a titolo in Bi di questo ordine: Trov. % : Bi 57,2 Na 4,2.

P 877 e *P 878* = g 6,28 (moli 0,019) di Tiron, sciolti in H_2O cc 24, si trattano con g 11,2 (moli 0,04) di NaBiO_3 ; si ha spontaneo riscaldamento a circa 50° che viene mantenuto su b.m. per 12 h, sotto agitazione. Dopo 24 h la sospensione viene centrifugata a 10.000 giri. La soluz. (cc 21), versata su CH_3OH cc 50, dà polvere giallo ranc. che viene lavata e seccata: g 10 (*P 877*). g 5 di *P 877* vengono sciolti in H_2O cc 45; si versa su CH_3OH cc. 45; si ottiene polvere giallo ranc. che si lava fino a scomparsa dell'alcalinità e si secca: g 3,22 (*P 878*).

Analisi:	<i>P 877</i>	Trov. %	Bi 41,1	Na 10,3	H_2O 4,0
	<i>P 878</i>		59,4	5,0	4,8
	<i>P 878 a</i> 105°		61,8		

Gruppo II. - Si sono ottenuti alcuni gallati idrosolubili contenenti Bi sia a partire dal Bi gallato basico (insolubile in acqua) delle Farmacopee, sia da acido gallico e $\text{Bi}(\text{NO}_3)_3$ o NaBiO_3 . È stato precedentemente descritto l'ottenimento di forme idrosolubili dal Bismuto gallato e lo studio nei confronti della sifilide [16]. Le caratteristiche di stabilità dei composti di questo gruppo sono riportate nella Tabella II.

G 7 e *G 8* = g 15 di Bi gallato basico (moli 0,036; P.M. 412) vengono portati in soluz. gradualmente con cc 66 di NaOH N sotto agitazione durante tre ore; la soluz. alcalina viene versata su CH_3OH cc 150. Il precipitato viene centrifugato, lavato, seccato, indidriscolato in H_2O cc 50 e riprecipitato versando la soluz. su CH_3OH cc 75. Si filtra e si secca a 70° in vuoto per 12 h: polvere giallo-ocra: g 13,1 (*G 7*).

In un'identica preparazione condotta in 30' e lavando fino a scomparsa dell'alcalinità il prodotto riprecipitato, si è ottenuto un prodotto analogo (*G 8*).

Analisi	<i>G 7</i>	Trov. %	Bi 45,3	Na 7,5	H_2O 9,1
	<i>G 8</i>		45,4	7,6	9,8
per $\text{C}_7\text{H}_5\text{O}_6\text{Na}_2\text{Bi} \cdot 2\text{H}_2\text{O}$	Calc.		44,0	9,7	7,5

TABELLA II.

Reattivi	Composti A.G.-Bismuto					
	Sigla	G 7	G 24	G 131	G 161	G 171
	% Bi	45,3	59,0	33,6	39,2	51,7
HCl		—	— +	—	— +	—
NaOH		+	+	+	+	+
NaHCO ₃		+	+	+	+	+ —
Na ₂ CO ₃		+	+	+	+	+ —
Tamp. Fosf.		+	+	+	+	+

Concentrazione dei reattivi e condizioni come in Tabella I.

G 22 = g 6,58 (centimoli 3,5) di acido gallico (A.G.) vengono sciolti in H₂O cc 210 a 40–50° e trattati con la soluz. di g 8,48 (centimoli 1,75) di Bi(NO₃)₃·5 H₂O in acido acetico cc 17 e H₂O cc 10. La sospensione gialla viene agitata per 30' indi trattata gradualmente con NaOH 10/N (cc 43) in modo da non superare i 50° (circa 1 h). Si ha una soluz. giallo-verde (cc 240, pH ~ 8) che si versa su CH₃OH cc 750; il precipitato separatosi viene centrifugato, lavato e seccato: g 9,5. Si presenta come polvere giallo-ocra.

Analisi : Trov. % Bi 33,8 Na 9,2 H₂O 11,0
 per C₁₄H₆O₁₀Na₃Bi·4 H₂O
 Calc. 30,5 10,0 10,5

G 23 = g 3,29 (centimoli 1,75) di A.G. vengono sciolti in H₂O e trattati con centimoli 1,75 di Bi(NO₃)₃ come per *G 22*; la sospensione viene trattata con mg 1 di idrochinone, indi con NaOH 10 N cc 38; si ha soluz. omogenea giallo-oro (cc 170) che, versata su CH₃OH cc 600 dà un precipitato che, centrifugato, lavato e seccato si presenta come polvere ocra: g 8,1.

Analisi : Trov. % Bi 43,9 Na 9,0 H₂O 9,2
 per C₇H₃O₆Na₂Bi·2 H₂O
 Calc. 44,0 9,7 7,5

G 24 e *G 24I*. La soluz. di g 2,35 (centimoli 1,25) di A.G. in H₂O cc 110 a 50° viene versata sulla soluz. di g 12,12 (centimoli 2,5) di Bi(NO₃)₃·5 H₂O in CH₃COOH cc 25 e H₂O cc 10: la sospensione si mantiene a 50° sotto agitazione e si tratta con NaOH 10 N (cc 57,5) fino ad ottenere una soluz. omogenea giallo ranc.; questa viene versata agitando su CH₃OH cc 500: si separa un prodotto che centrifugato, lavato e seccato, si presenta come polvere rosso mattone: g 8,3 (*G 24*). La preparazione è stata ripetuta: ottenuto: g 8,3 (*G 24I*).

Analisi: *G 24* Trov. % Bi 59,7 Na 4,9 H₂O 5,7
 G 24I 59,0 5,1 5,6
 per C₇H₄O₈Na₂Bi₂·2 H₂O
 Calc. 58,5 6,4 5,0

Questi prodotti, a differenza dei precedenti, si alterano col tempo (15–20 giorni) divenendo in parte insolubili in acqua.

Si è condotta anche una serie di reazioni tra A.G. (soluz. acquosa neutralizzata come indicato più sotto) e Bi(OH)_3 nei rapporti molecolari: 2 : 1, 1 : 1, 1 : 2, in presenza di NaOH in quantità sufficiente a solubilizzare la maggior parte di Bi(OH)_3 nelle condizioni descritte [1] per ottenere i complessi tra Tiron e Bi(OH)_3 . Si sono ottenuti prodotti con caratteristiche dei tipi seguenti.

Analisi:	<i>G 19</i>	Trov. %	Bi 32-34	Na 8,2	H_2O 13,2
	<i>G 20</i>		42-43	7,4	14-11
	<i>G 21</i>		49,7	6,7	8,8

G 131 = g 7,52 (moli 0,04) di A.G. vengono trattati con H_2O cc 10 e mg 5 di idrochinone: si porta in soluz. con l'equivalente di NaHCO_3 (g 3,36) sciolto in H_2O cc 70 e la soluz. neutra si tratta con g 5,6 (moli 0,02) di NaBiO_3 ; la sospensione, mantenuta in agitazione 10', dà una soluz. omogenea verde-nera (cc 74) che viene trattata con g 1 di carbone attivo e filtrata su CH_3OH cc 150: si separa un prec. verde che, lavato e seccato, si presenta come polvere ocra scuro: g 10,1.

Analisi:	Trov. %	Bi 33,6	Na 10,3	H_2O 10,9
----------	---------	---------	---------	---------------------------

G 161 = g 5,64 (moli 0,03) di A.G. vengono portati in soluz. e trattati con NaBiO_3 g 8,4 (moli 0,03) c. s. La soluz. ottenuta viene parimenti trattata con carbone e filtrata su CH_3OH cc 150. Si ottiene un prodotto giallo-ocra: g. 11,5.

Analisi :	Trov. %	Bi 39,2	Na 9,3	H_2O 9,2
		40,7		

G 171. La soluz. neutra (cc 40) ottenuta c. s. dà g 3,76 (moli 0,02) di A.G., viene trattata con NaBiO_3 g 11,2 (moli 0,04); si ha reaz. esotermica (circa 40°). La sospensione, inizialmente verde-nera, appare, dopo 10' di agitazione, rosso-nera; si diluisce con H_2O cc 20, si agita ancora 50' indi si centrifuga per separare l'indisciolto (g 2,3). La soluz. trattata con carbone e filtrata su CH_3OH cc 200 dà un prodotto marrone: g 9,1. Anche se conservato con protezione dalla umidità e dalla luce si altera, diventando insolubile in acqua.

Analisi :	Trov. %	Bi 51,7	Na 8,0	H_2O 11,5
-----------	---------	---------	--------	---------------------------

Gruppo III. - Allo scopo di confrontare alcuni tartrati sodio bismutici con i composti dei gruppi precedenti, abbiamo ripetuto, con eventuali accorgimenti, la serie di reazioni tra tartrato bisodico e $\text{Bi(NO}_3)_3$ descritte da van Oettingen e coll. [17]. Abbiamo ottenuto prodotti con caratteristiche e titolo in Bi vicini a quelli indicati dagli Autori; in particolare si ebbero, in 14 serie di reazioni, circa 20 frazioni, solubili in acqua, con titolo in Bi compreso tra 53 % e 73,5 %. Descriviamo di seguito alcuni dettagli, tenendo conto che ci interessavano particolarmente campioni che davano soluz. acquose stabili di fronte agli ioni fosfato, per l'indagine sull'attività antivirale.

T 55 = g 5-25 di $\text{Bi(NO}_3)_3 \cdot 5 \text{H}_2\text{O}$ vengono sciolti in ac. acetico (2 parti in vol.); si diluisce con acqua (5 p. in vol.) e la soluz. si tratta con tartrato bisodico biidrato (R.M. 1 : 2) in H_2O (5 p. in vol.) agitando. Il precipitato incolore viene centrifugato dall'ac. m., lavato con acqua per eliminare la maggior parte dell'ac. acetico, poi con alcool ed etere (sempre centrifugando) e quindi seccato a 80°; è insolubile in acqua e contiene circa 58 % di Bi; esso viene sospeso in 2-3 parti di H_2O e il magma viene omogeneizzato per alcuni minuti, e trattato con NaOH N/1 fino a ottenere una soluz. a pH 7,5; questa, versata su etanolo 95 %

(1-2 volumi), dà un precipitato che, lavato con etanolo e con etere e seccato a 80°, si presenta come polvere microcristallina incolore, solubile in acqua.

Analisi:	Trov. %	Bi	54,9
per $C_8H_4O_{12}Na_2Bi_2$	Calc.		55,3

Su analoghi campioni si è trovato Bi % 53,4 e 55,01.

T 3I e *T 10*. Campioni di magma della preparazione precedente vengono trattati con NaOH N/1 fino ad ottenere soluzioni a pH 8-9 o rispettivamente 10; queste, versate su circa 1 vol. di etanolo, forniscono composti che, lavati e seccati c. s. hanno i seguenti titoli in Bi:

Analisi	<i>T 3I</i>	Trov. %	Bi	61,7
	<i>T 10</i>			68,1
per $C_8H_4O_{15}Na_2Bi_4$	Calc.			68,5

Gli Autori citati considerano i campioni tipo *T 3I* miscugli di $C_8H_4O_{12}Na_2Bi_2$ e $C_8H_4O_{15}Na_2Bi_4$. *T 3I* e campioni analoghi (Trov. % Bi 61,6 ; 62,1 ; 63,3) sono stabili in H_2O e in Tampone-fosfato; *T 10* e campioni analoghi (Trov. % Bi da 66,7 a 70,5) sono invece instabili.

T 11 e *T 14* = g 2,0 di *T 10* sciolti in H_2O cc 20 e mantenuti a 60° per 20' si trattano con cc 1 di NaOH N/1 (R.M. 1,5 : 1) e si mantengono a 60° per altri 5'; si raffredda, si tratta con etanolo cc 15, e si centrifuga: il precip. viene lavato e seccato c. s.

Analisi:	<i>T 11</i>	Trov. %	Bi	73,4	Na	2,8
	<i>T 14</i>			73,6		
per $C_4H_2O_9NaBi_3$	Calc.			74,2		2,7

Questi campioni non hanno potuto finora essere studiati data la scarsa stabilità.

Gruppo IV. - Co 6. In recipiente evacuato, g 12,6 (moli 0,04) di Tiron, sciolti in H_2O cc 50, vengono aggiunti a g 4,76 (moli 0,02) di $CoCl_2 \cdot 6 H_2O$ sciolti in H_2O cc 5; si agita per 10' indi si porta a neutralità con NaOH 10 % (cc 21,5). La soluz. rossa, versata su CH_3OH cc 200, dà un precipitato che, lavato e seccato, si presenta come polvere viola.

Analisi:	Trov. %	Co	9,3	Na	12,1	H_2O	13,5
per $C_{12}H_4O_{16}S_4Na_4Co \cdot 4 H_2O$							
	Calc.		7,9		12,2		9,5

Co 7. Si opera come per Co 6, usando g 9,52 (moli 0,04) di $CoCl_2 \cdot 6 H_2O$ e cc 33 di soluz. di NaOH 10 %; la soluz. limpida rossa (pH 8), versata su CH_3OH cc 350, dà precipitato viola: g 14,0.

Analisi:	Trov. %	Co	12,4	Na	9,6	H_2O	14,5
per $C_6H_2O_8S_2Na_2Co \cdot 4 H_2O$							
	Calc.		11,0		10,4		16,5

Questo composto è riprecipitabile con titolo pressoché inalterato (Trov. Co % 13,1) diluendo con metanolo le soluz. acquose (1 : 1,5). Da soluz. diluite (1 : 9) non si è avuta riprecipitazione.

Co-EDTA = g 11,2 (moli 0,03) di sale bisodico dell'acido etilendiaminotetracetico, sospesi in H_2O cc 50 e portati in soluz. (pH 8) con cc 12 di NaOH 10 %, si trattano con mg 5 di idrochinone indi, in una volta, con $CoCl_2 \cdot 6 H_2O$ g 7,14 (moli 0,03) sciolti in H_2O cc 10. La soluz. divenuta acida (pH 2,6) si riporta a neutralità con NaOH 10 % cc 11,6: si

tratta con CH_3OH cc 200 ed etere cc 150; si separa, durante 2 di a 0° , un precipitato rosa-viola, che viene lavato e seccato: g 12,5.

Analisi:	Trov. %	Co	13,6	Na	11,2
per $\text{C}_{10}\text{H}_{12}\text{N}_2\text{O}_8\text{Na}_2\text{Co} \cdot 2 \text{H}_2\text{O}$	Calc.		13,7		10,7

La soluz. di questo composto non lascia precipitare (in relazione alla sua alta stabilità [18]) a differenza di tutti i complessi di Bi e Co sopra descritti, il solfuro del metallo per trattamento con H_2S [19]. L'analisi si è quindi condotta mineralizzando il composto con HNO_3 e determinando Co e Na nelle ceneri.

PARTE FARMACOLOGICA.

Tecnica. - Tutte le indagini sono state eseguite impiegando un ceppo di influenza A (PR 8) adattato alle uova embrionate di pollo [2].

Per la valutazione dell'attività antivirale, per il metodo di somministrazione dei farmaci e per ogni altra modalità tecnica ci siamo attenuti a quanto descritto in Note precedenti [20] [21]. Quando necessario, le soluz. dei farmaci vennero portate a pH = 7,5-8,0 con tampone-fosfati M/15 pH 5,2.

Risultati. - Tutti i composti descritti nella parte chimica sono stati studiati per la loro eventuale attività antivirale.

Nella Tabella III vengono riportati i risultati ottenuti con i composti più rappresentativi di ciascun gruppo. Di ogni composto è indicata la tossicità per l'uovo embrionato di pollo (DL_{50}), l'attività antivirale (DE_{50}), il coefficiente chemioterapico per l'uovo embrionato ($\text{DL}_{50}/\text{DE}_{50}$) e la concentrazione minima agglutinante gli eritrociti di pollo *in vitro*. Per riferimento ai risultati precedentemente comunicati sono indicati anche i dati riguardanti il composto P 8, il più attivo dei complessi ottenuti dalla reazione del Tiron con Bi trivalente [2].

A) *Complessi di Tiron con bismutato sodico* (P 81, P 82, P 89, P 89r). - Dei quattro complessi di questo tipo riportati, tre sono dotati di attività antivirale; il solo complesso inattivo (P 81) è quello ottenuto con un rapporto molare Tiron : Bi = 2 : 1, corrispondente agli analoghi complessi di Tiron con $\text{Bi}(\text{NO}_3)_3$ (P 30) e $\text{Bi}(\text{OH})_3$ (P 2) anch'essi risultati inattivi nelle precedenti ricerche [1].

Interessante è l'osservazione che, in questo gruppo di composti, il coefficiente chemioterapico per l'uovo embrionato è sicuramente più favorevole di quello degli analoghi sopra ricordati. Corrispondente a quella osservata con tali composti è invece la relazione tra attività antivirale e azione emoagglutinante *in vitro*, nel senso che tutti i composti attivi sono dotati anche di quest'ultima proprietà.

B) *Complessi di Bi con ac. gallico* (G 7, G 22, G 23, G 24, G 161, G 171). - In tabella sono riportati i risultati di tre tipi di composti:

1° G 7, forma idrosolubile del gallato basico; 2° G 22, G 23, G 24, ottenuti da $\text{Bi}(\text{NO}_3)_3$; 3° G 161, G 171, ottenuti da NaBiO_3 .

L'attività antivirale dei composti dei gruppi 2° e 3° è notevolmente elevata, risultando la più alta riscontrata nel corso delle presenti ricerche. Particolarmente interessante appare il G 24, il cui coefficiente chemioterapico per l'uovo embrionato è molto elevato, analogo a quello del P 89, il migliore composto della serie dei complessi di Bi e Tiron. Come nel caso di questi ultimi, i composti ottenuti con NaBiO_3 risultano meno tossici dei corrispondenti composti ottenuti con $\text{Bi}(\text{NO}_3)_3$ o con $\text{Bi}(\text{OH})_3$.

TABELLA III.

Composto	% Bi/Co	DL ₅₀ mg/uovo	DE ₅₀ mg/uovo	Coefficiente chemioterapico DL ₅₀ /DE ₅₀	Conc. minima emoagglutinante γ/ml
P 8	50,3	35	0,7	50	10
P 81	21,3	>100	>50	—	625
P 82	32,4	>100	1,8	55	2
P 89	50,3	96	0,7	137	2
P 891	60,7	>100	2,4	42	4
G 7	45,3	20	1,5	17	0,6
G 22	33,8	12	0,4	30	12
G 23	43,9	33	0,3	94	20
G 24	59,0	> 50	0,4	>125	24
G 161	40,7	40	0,5	73	12
G 171	51,7	83	0,9	92	20
T B.P.	41,3	>100	17	> 6	5
T 55	55,0	>100	7	> 12,5	5
T 31	61,7	>100	22	> 4,5	5
Co 6	9,3	8	> 5		>1000
Co 7	12,4	22	>15		>1000
Co-EDTA	13,6	58	>35		>1000
CoCl ₂	29,8	6	> 4		>1000

I prodotti di questa serie agglutinano gli eritrociti di pollo, benché a concentrazioni più elevate dei composti della serie precedente; fa eccezione il G 7 che, pur non possedendo una grande attività antivirale, ha un altissimo potere emoagglutinante *in vitro*.

C) *Complessi di Bi con ac. tartarico* (T.B.P. [22], T 55, T 31). — I tre composti provati inibiscono lo sviluppo del virus dell'influenza e agglutinano gli eritrociti di pollo *in vitro*; la loro attività è tuttavia notevolmente inferiore a quella degli altri complessi di Bi qui descritti. Un più significativo confronto sulla base dei rispettivi coefficienti chemioterapici non è risultato possibile poiché la DL₅₀ dei tre composti è maggiore della massima dose che è stato possibile iniettare nella cavità allantoidea dell'uovo (cc 0,5 di una soluz. 20 % = 100 mg/uovo).

D) *Complessi del Co⁺⁺ con Tiron e con EDTA* (Co 6, Co 7, Co-EDTA). — Questi tre complessi, e il CoCl₂ provato per confronto, non hanno dimostrato alcuna apprezzabile atti-

vità antivirale fino alla massima concentrazione provata, pari alla DL_5 . Nessuno di essi, inoltre, è dotato di attività emoagglutinante.

E) *Complessi idrosolubili di Sb e As.* - Il tartaro emetico ($Sb = 36\%$), che pure ha struttura chimica analoga a quella di uno dei tartrati di Bi dotati di attività antivirale, è risultato del tutto inattivo e privo anche di potere emoagglutinante; esso inoltre è molto tossico per l'uovo embrionato ($DL_{50} = 0,1$ mg/uovo). Va notato a questo proposito che anche un altro complesso idrosolubile di Sb, l'*antimonio bis-pirocatechindisolfonato sodico* = *Fuadina*, è risultato privo di attività antivirale in precedenti ricerche [20].

Sono stati infine provati due composti di As: *Neo-Salvarsan* e *diamino-difenil-arsenossido*. Nessuno dei due modifica lo sviluppo del virus dell'influenza A (*PR 8*) fino alla massima concentrazione provata (2,5 mg/uovo), pari alle rispettive DL_5 . Interessante è la constatazione che il Neo-Salvarsan agglutina gli eritrociti di pollo *in vitro* anche in concentrazione relativamente piccola (9 γ /ml); esso pertanto rappresenta, nella serie dei complessi da noi fino ad ora esaminati, l'unica eccezione al principio che i composti dotati di potere emoagglutinante sono altresì attivi come antivirali.

CONCLUSIONI.

Le presenti ricerche hanno portato ad individuare alcuni altri complessi idrosolubili del Bismuto dotati di elevata attività inibente l'accrescimento del virus dell'influenza A (*PR 8*) nell'embrione di pollo; alcuni di essi, ottenuti da pirocatechindisolfonato sodico (Tiron) e $NaBiO_3$ e da acido gallico e $Bi(NO_3)_3$ o $NaBiO_3$, hanno un coefficiente chemioterapico per l'uovo embrionato nettamente più favorevole di quello dei composti precedentemente descritti.

In relazione ai quesiti che hanno guidato queste ricerche si può concludere quanto segue:

nei derivati del Bi l'attività antivirale non è proporzionale alla percentuale del metallo: i composti a titolo più elevato in Bi non sono infatti i più attivi;

la presenza di complessamento e il grado di stabilità del complesso sembrano avere considerevole importanza; composti troppo debolmente o troppo fortemente complessati appaiono privi di attività, mentre derivati con stabilità diversa di fronte ad alcuni reattivi presi in considerazione, presentano anche azione antivirale di differente entità;

la natura chimica del legante organico sembra avere importanza secondaria, dato che esiste notevole attività in derivati del Bi con leganti diversi;

nessuna conclusione si può trarre fino ad ora nei confronti delle relazioni tra valenza del metallo e attività del complesso.

Maggiori chiarimenti sui rapporti struttura-azione potranno verosimilmente aversi e da uno studio chimico-fisico adeguato a chiarire la natura dei composti fin qui studiati e dall'estensione delle indagini a complessi contenenti elementi diversi dal Bi.

Riguardo a quest'ultimo indirizzo di ricerca i risultati qui riferiti delle prove eseguite con complessi di Co^{++} , Sb e As sono del tutto negativi. Tuttavia,

ci sembra interessante segnalare che i primi risultati di ricerche con complessi di Fe, attualmente in corso [23], hanno dimostrato che alcuni di essi (particolarmente il tartrato ferrico-potassico) inibiscono lo sviluppo del virus dell'influenza A (PR 8) nell'uovo embrionato a concentrazioni minori di quelle dei più attivi complessi di Bi descritti in questa Nota.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] BERTI T., BEZZI S., VISENTINI P., «Atti Acc. Naz. Lincei», Cl. Sc. fis. mat. nat., 24, 439 (1958).
- [2] BERTI T., VISENTINI P., MENEGHELLI P., «Giorn. Microbiol.», 8, 159 (1960).
- [3] GROUPÉ V., ENGLE C. G., GAFFNEY P. E., «J. Bacter.», 70, 623 (1955).
- [4] SCHMIDT J. R. A., RASMUSSEN A. F., «Proc. Soc. Exp. Biol. Med.», 81, 244 (1952).
- [5] CUTTING W., FURST A., «Antib. Chemother.», 8, 441 (1958).
- [6] ALOY J., FREBAULT P., «Bull. Soc. Chim. France», 35, 396 (1906).
- [7] RUFF O., «Z. Anorg. Chemie», 57, 220 (1908).
- [8] PASCAL P., *Traité de Chimie Minérale*, Ed. Masson, Paris (1933), vol. IV, pp. 138, 198.
- [9] CHABEREK S., MARTELL A. E., *Organic Sequestering Agents*, Ed. Wiley, New York (1959).
- [10] MARTELL A. E., in *Metal-Binding in Medicine*, Ed. Lippincott, Philadelphia (1960).
- [11] CHENOWETH M. B., «Pharmac. Rev.», 8, 57 (1956).
- [12] GIRARD M., «Bull. Soc. Chim. France», 300 (1957).
- [13] PASCAL P., loc. cit., vol. X, p. 721.
- [14] CHABEREK S., MARTELL A. E., loc. cit., p. 50.
- [15] SIDGWICK N. V., *The Chemical Elements and their Compounds*. Ed. Wiley, New York (1950).
- [16] LEBEAU P., JANOT M. M., *Traité de Pharmacie Chimique*, Ed. Masson, Paris, vol. II, p. 1102 (1955-56).
- [17] VAN OETTINGEN W. F., ISHIKAWA Y., «J. Am. Pharm. Ass.», 17, 124 (1928).
- [18] CHABEREK S., MARTELL A. E., loc. cit., p. 572.
- [19] TREADWELL E. F., *Trattato di Chimica Analitica*, Ed. Vallardi, Milano, II, 187 (1929).
- [20] VISENTINI P., «Giorn. Microbiol.», 3, 134 (1957).
- [21] BERTI T., VISENTINI P., «Giorn. Microbiol.», 5, 42 (1958).
- [22] *British Pharmacopoeia* 1958, 94.
- [23] BERTI T., BOLOGNA G., «Boll. Soc. It. Biol. Sperim.», (in stampa).

Fisiologia (Chimica fisiologica). — *Superficie d'espansione su carta da filtro di aliquote di soluzioni proteiche in funzione della concentrazione* (*). Nota di CARLO DOLCINI e BIANCAMARIA DOLCINI, presentata (**) dal Corrisp. G. AMANTEA.

Ci siamo occupati recentemente dei requisiti fondamentali che un metodo di colorazione delle proteine separate per elettroforesi su carta deve possedere, onde poter essere correttamente impiegato a fini quantitativi. In particolare abbiamo studiato il comportamento della *colorabilità* C , intesa come rapporto tra *quantità di colorante* $Q_{(col)}$ fissato da una determinata *quantità di proteina* $Q_{(pr)}$, ed abbiamo accertato come il valore di C , nel caso dell'impiego dei coloranti più comuni per lo sviluppo dei foregrammi, (amido nero, blu di bromofenolo, ecc.), lungi dal mantenersi costante, condizione indispensabile per determinazioni quantitative, varii in funzione della *concentrazione superficiale* (Conc. sup.), che il materiale proteico assume sulla carta (¹).

Il reperto riferito, che ovviamente invalida l'impiego per determinazioni quantitative dei metodi in questione, è in contrasto con ricerche analoghe, nelle quali tuttavia la colorabilità viene studiata in rapporto alla *concentrazione proteica* (Conc. pr.) (²) delle soluzioni usate. Al fine di stabilire il necessario confronto abbiamo dovuto sperimentare sui rapporti tra la Conc. sup. (mg/mm²) e la Conc. pr. (mg/ml) per soluzioni di frazioni proteiche pure.

Le misure relative alla Conc. sup. erano effettuate rilevando la superficie d'espansione S su carta da filtro di aliquote delle soluzioni a concentrazioni (Conc. pr.) scalari. In tal modo abbiamo ottenuto curve sperimentali relative alla funzione $S = f(\text{Conc. pr.})$, che ci permisero di calcolare i valori di Conc. sup. e quindi di determinare le funzioni $\text{Conc. sup.} = f(\text{Conc. pr.})$ necessarie per i confronti ricordati.

La regolarità e la semplicità, almeno apparenti, delle curve $S = f(\text{Conc. pr.})$, ci hanno suggerito, oltre i limiti e lo scopo inizialmente proposti, altre possibili applicazioni delle stesse, inducendoci a prendere in particolare considerazione, nella presente Nota, i dati di cui disponiamo.

Riferiamo in dettaglio la tecnica sperimentale.

Abbiamo adoperato frazioni proteiche umane e precisamente: *albumina* (in soluzione stock al 30% - prodotta dalla Pentex Incorporated Kankakee Illinois, Lot. n. 47 FO 1), *α -globulina* (Fr. IV Lot. n. 50 GO 8), *γ -globulina*

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Perugia.

(**) Nella seduta dell'11 febbraio 1961.

(1) C. DOLCINI e B. DOLCINI, « Rivista di Biologia » (in corso di stampa).

(2) G. T. FRANGLEN e N. H. MARTIN, « J. Clin. Pathol. », 7, 87 (1954).

(Fr II Lot. n. 50 GO 8), ed inoltre *ovoalbumina*, cristallizzata secondo la tecnica di Kekwich e Cannan⁽³⁾.

Delle *albumine* umane e delle *ovoalbumine*, a partire da soluzioni al 10% venivano preparati campioni di concentrazione scalare al 10, 9...2, 1%; le α e le γ -*globuline* venivano utilizzate in soluzioni dal 4, 3,5...1, 0,5%.

Di ciascuna diluizione e per tutte le frazioni proteiche studiate, venivano usate almeno 30 aliquote di 10 mm³, che erano deposte a mezzo di micropipetta in altrettante macchie su strisce di carta speciale Wathman 1 per elettroforesi. Le strisce erano successivamente essiccate in corrente di aria calda e sottoposte ai procedimenti di colorazione che sperimentavamo.

È ovvio che per studiare specificamente il fenomeno che andiamo descrivendo, non ha importanza alcuna il tipo di colorazione adottato; conviene pertanto procedere per la via più breve.

A colorazione effettuata, i profili delle macchie venivano riportati su carta millimetrata trasparente; i valori di superficie erano ricavati agevolmente e senza notevoli possibilità d'errore, per conteggio diretto, mediante planimetria o meglio per pesata.

Riportando i valori di *S*, medie ottenute da almeno 30 replicazioni, in funzione della *concentrazione proteica* delle soluzioni, si ottengono le curve ad andamento di iperbole, riportate nelle figg. 1 e 2. Le funzioni diventano

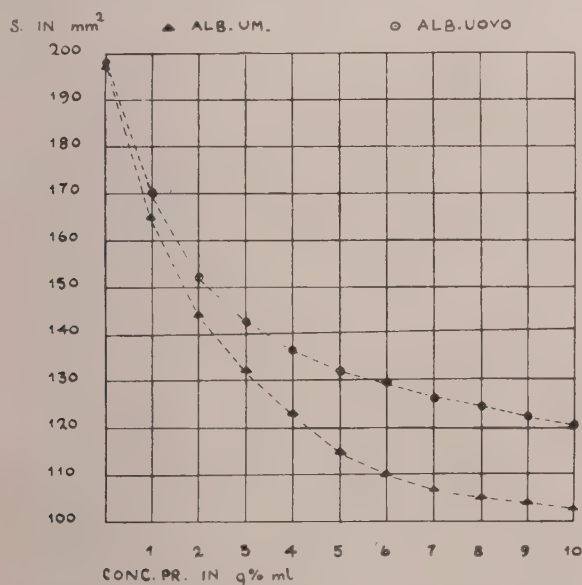


Fig. 1. - Superficie di espansione (*S*) in funzione della concentrazione proteica (Conc. pr.) di soluzioni di *albumina umana* e di *ovo-albumina* deposte su carta Wathman 1 in aliquote di 10 mm³.

Per la determinazione di *S*₀, superficie d'espansione corrispondente a Conc. pr. = 0, abbiamo utilizzato 30 macchie eseguite con acqua bidistillata contenente tracce di blu di bromofenolo.

(3) KEKWICH e CANNAN, « Biochem. J. », 30, 227 (1936).

parallele all'asse della S per $\text{Conc. pr.} = 0$ ⁽⁴⁾, ed all'asse della Conc. pr. quando questa raggiunge i limiti della solubilità della frazione proteica in esame.

L'andamento generale delle curve riportate ci aveva fatto pensare in un primo tempo di poterle con facilità descrivere analiticamente mediante un'equazione del tipo $y = a/x$, o tutt'al più con la $y = a/x^2$. In pratica poi

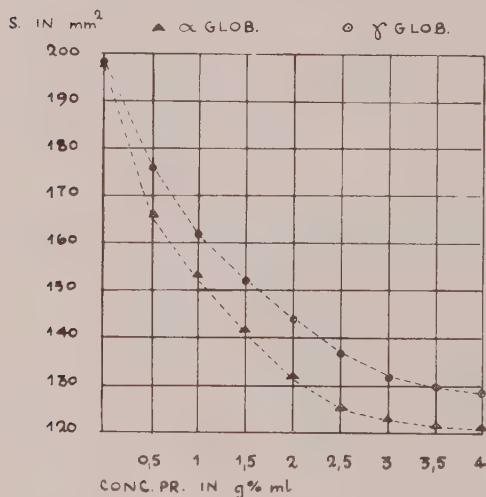


Fig. 2. - Superficie di espansione (S) in funzione della concentrazione proteica (Conc. pr.) di soluzioni di α e γ globuline umane deposte su carta Wathman 1 in aliquote di 10 mm³.

Per la determinazione di S_0 , superficie d'espansione corrispondente a $\text{Conc. pr.} = 0$, abbiamo utilizzato 30 macchie eseguite con acqua bidistillata contenente tracce di blu di bromofenolo.

carta da filtro: potrebbe essere il caso dell'analisi di campioni ottenuti da esperimenti di elettroforesi continua o cromatografia su colonna.

Le numerosissime prove che in tal senso abbiamo eseguito ce lo confermano: non abbiamo mai riscontrato differenze significative all'analisi delle medie tra i dati in tal modo ottenuti e quelli forniti dai metodi classici di determinazione dell' N proteico. Abbiamo riscontrato percentuali d'errore del 3-2% od inferiori, rarissimamente punte massime del 5%. Fattori che influenzano il fenomeno studiato, e che pertanto vanno accuratamente standardizzati, sono: tipo di carta, temperatura ed umidità ambiente, pH e forza ionica dei solventi usati; di tutto ciò bisogna tener conto se si vogliono ottenere le basse percentuali d'errore ricordate; d'altra parte le standardizza-

tali equazioni si sono rivelate assolutamente inadatte a rappresentare la funzione $S = f(\text{Conc. pr.})$ e ciò non è stato ottenuto neppure con equazioni del tipo $y = a/x^n$ ed $y = a/x + b/x^2$.

Una buona rappresentazione della curva può essere fornita invece dall'equazione $y = a + bx + c/x + d/x^2$, ottenuta con un procedimento di interpolazione algebrica. A questo punto, anche se non siamo in grado di fornire un'espressione direttamente significativa circa il determinismo del fenomeno studiato, possiamo tuttavia indicare una possibilità di applicazione pratica dello stesso. Le curve riportate evidentemente si prestano alla determinazione rapida della concentrazione di soluzioni proteiche a partire dal lato relativo alla superficie di espansione su

(4) Per la determinazione di S_0 , superficie d'espansione corrispondente a $\text{Conc. pr.} = 0$ abbiamo utilizzato 30 macchie eseguite con acqua bidistillata contenente tracce di blu di bromofenolo.

zioni necessarie non sono di disagevole attuazione. Sarà pure opportuno in tal senso operare su curve interessanti una gamma di concentrazioni inferiore a quella delle nostre e non limitare troppo il numero delle replicazioni, che anzi in ciò appunto si fonda la bontà della tecnica, potendosi agevolmente eseguire un notevole numero, data la esiguità del materiale necessario per ciascun saggio, (10 mm³ nei nostri esperimenti, suscettibili di essere ulteriormente ridotti), e data la rapidità e semplicità con cui può essere ottenuta l'informazione relativa ad S.

Ovviamente lo studio del fenomeno è suscettibile di ulteriori approfondimenti, dai quali potranno risultare altre e più importanti possibilità di applicazione. È probabile infatti che si possano ottenere informazioni relative a costanti chimico-fisiche e forse a caratteristiche morfologiche dei materiali proteici usati, analizzando anche l'aspetto dinamico del fenomeno. Contiamo di riferire tra breve i risultati delle ricerche che proseguono nella direzione indicata.

Fisiologia. — *Determinazione incruenta della pressione di CO₂ nel sangue venoso misto* (*). Nota di GIORGIO BRANDI, presentata (**) dal Socio R. MARGARIA.

Il volume di CO₂ eliminato dai polmoni in un minuto (\dot{V}_{CO_2}) è il prodotto della gettata cardiaca per la differenza artero-venosa in CO₂, secondo l'equazione:

$$(1) \quad \dot{V}_{CO_2} = \dot{Q} (C_{\bar{v}_{CO_2}} - C_{a_{CO_2}})$$

\dot{V}_{CO_2} è facile determinazione; per calcolare \dot{Q} occorre conoscere $C_{a_{CO_2}}$ e $C_{\bar{v}_{CO_2}}$; quando non è possibile determinare tali concentrazioni con metodo diretto, cruento, basato su analisi di sangue arterioso e di sangue venoso misto, si può ricorrere alle misure indirette.

La concentrazione di CO₂ nel sangue arterioso può essere facilmente calcolata dalla composizione dell'aria alveolare, che è in equilibrio col sangue arterioso. Più difficile è la determinazione della concentrazione di CO₂ nel sangue venoso misto, che può essere eseguita sul seguente principio.

Durante un periodo di apnea di 10-15 sec, di durata inferiore cioè al tempo di circolo, la concentrazione di CO₂ nel sangue venoso misto rimane costante, mentre P_{ACO_2} aumenta progressivamente tendendo al valore di $P_{\bar{v}_{CO_2}}$.

La velocità con cui P_{ACO_2} aumenta nell'aria alveolare in queste condizioni è direttamente proporzionale alla quantità di CO₂ che passa nell'unità di tempo dal sangue agli alveoli (\dot{V}_{CO_2}) ed inversamente proporzionale al volume dell'aria negli alveoli polmonari, o meglio alla capacità complessiva per il CO₂ *a*) dell'aria, *b*) del sangue capillare polmonare e *c*) del tessuto polmonare (effective lung volume, E.L.V.) (Dubois, Britt e Fenn, 1952 [2] secondo la seguente equazione:

$$(2) \quad \frac{dP_{ACO_2}}{dt} = \dot{V}_{CO_2} \frac{Pb - 47}{E.L.V.}$$

Le stesse considerazioni valgono se il soggetto, anziché essere in apnea, respira in un sacco di noto volume, preventivamente riempito con aria alveolare: il volume polmonare (E.L.V.) in questo caso comprenderà anche il volume delle vie respiratorie e del sacco polmonare. Sostituendo nella (2) il valore di \dot{V}_{CO_2} della (1) otteniamo:

$$(3) \quad \frac{dP_{ACO_2}}{dt} = \dot{Q} \frac{Pb - 47}{E.L.V.} (C_{\bar{v}_{CO_2}} - C_{a_{CO_2}})$$

(*) Dall'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Milano.

(**) Nella seduta dell'8 aprile 1961.

La curva di dissociazione per il CO₂ del sangue arterioso, limitatamente al tratto da 35 a 70 mm Hg, può essere considerata rettilinea (fig. 1), senza incorrere in errore apprezzabile: essa potrà quindi essere espressa dalla:

$$(4) \quad C_{a_{CO_2}} = a + b (P_{CO_2})$$

in cui b , l'inclinazione della retta, ha normalmente un valore di 0,46 ml/mm Hg. La differenza $a - v$ in CO₂ dovuta al solo gradiente di pressione di CO₂ tra sangue venoso e alveoli (m) sarà allora, per il sangue arterioso:

$$(5) \quad m = C_{v_{CO_2}}^{art.} - C_{a_{CO_2}} = b (P_{v_{CO_2}} - P_{a_{CO_2}}).$$

Senonché il sangue venoso ha una curva di dissociazione per il CO₂ diversa da quella del sangue arterioso, essendo spostata verso l'alto: al volume di CO₂, quale è dato dalla (4), che rappresenta la variazione di volume dovuta unicamente alla variazione di P_{CO_2} occorre aggiungere il volume di CO₂ che si libera per effetto dell'ossigenazione. Partendo dal presupposto che le curve di dissociazione del sangue arterioso e venoso siano parallele nel tratto che interessa, e poiché nella zona di pH 6,8-7,5 l'effetto acidificante dell'ossigenazione dell'emoglobina è costante (Margaria et al., 1960 [3]), si può presumere che il volume di CO₂ che si libera dal sangue per il solo effetto dell'ossigenazione (n) sia proporzionale alla entità dell'ossigenazione stessa, secondo la seguente equazione:

$$(6) \quad n = \frac{5,5}{20} (C_{a_{O_2}} - C_{v_{O_2}})$$

dove 20 esprime la capacità del sangue per l'O₂ in ml % e 5,5 i ml di CO₂ liberati per 100 ml di sangue, passando dalla completa riduzione alla totale ossigenazione. Poiché negli esperimenti da noi eseguiti $P_{A_{O_2}}$ era sufficiente ad ossigenare completamente l'Hb, e la quantità di O₂ assorbita dal sangue era la stessa per tutta la durata della respirazione, il volume di CO₂ liberato per effetto dell'ossigenazione dall'Hb era pertanto costante. Per giungere ad un tale volume di CO₂ si sarebbe dovuto elevare la pressione del CO₂ nel sangue arterioso al valore $P_{v_{CO_2}}^{art.}$ (ved. fig. 1), tale cioè che, come risulta dalla (5), la differenza $a - v$ in CO₂ dovuta al solo effetto dell'ossigenazione del sangue venoso (n) sia

$$(7) \quad n = C_{v_{CO_2}} - C_{v_{CO_2}}^{art.} = b (P_{v_{CO_2}}^{art.} - P_{v_{CO_2}}).$$

La differenza arterovenosa in CO₂, globale, cioè dovuta all'ossigenazione del sangue venoso e al gradiente di P_{CO_2} , si ottiene sommando membro a membro la (5) e la (7):

$$(8) \quad m + n = C_{v_{CO_2}} - C_{a_{CO_2}} = b (P_{v_{CO_2}}^{art.} - P_{a_{CO_2}}).$$

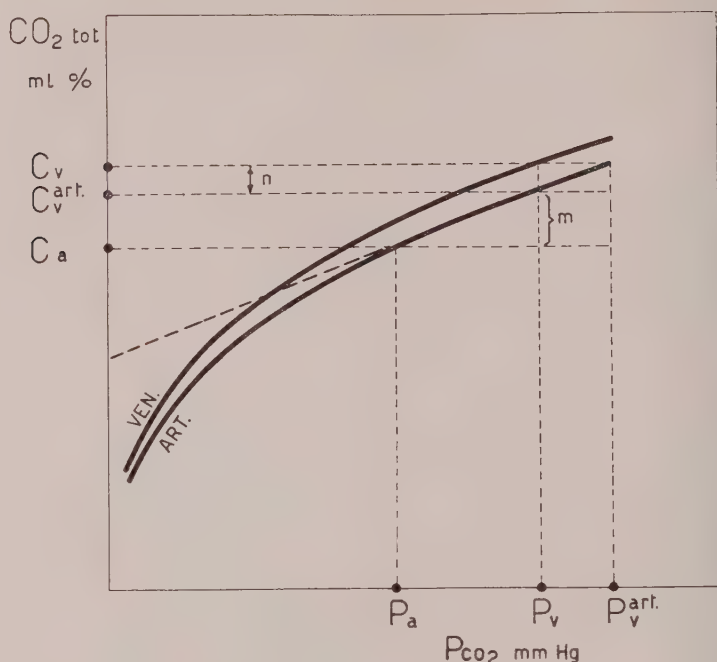


Fig. 1. - Curve di dissociazione per il CO_2 del sangue arterioso (art.) e del sangue venoso (ven.); sull'ordinata C_{CO_2} in ml di CO_2 su 100 ml di sangue; sull'ascissa P_{CO_2} in mm Hg. Il significato degli altri simboli è spiegato nel testo.

Sostituendo nella (3) il valore di $C_{v_{\text{CO}_2}} - C_{a_{\text{CO}_2}}$ della (8) avremo:

$$(9) \quad \frac{dP_{\text{ACO}_2}}{dt} = \dot{Q} \frac{Pb - 47}{\text{E.L.V.}} b (P_{v_{\text{CO}_2}}^{\text{art.}} - P_{a_{\text{CO}_2}}).$$

Poiché di tutte le grandezze a destra del segno di eguaglianza l'unica variabile durante la rirespirazione è $P_{a_{\text{CO}_2}}$, $\frac{dP_{\text{ACO}_2}}{dt}$ deve essere funzione lineare di $P_{a_{\text{CO}_2}}$: questa condizione si verifica in effetti sperimentalmente. Ovviamente una condizione di equilibrio è raggiunta quando $\frac{dP_{\text{ACO}_2}}{dt} = 0$, che si verifica quando $P_{a_{\text{CO}_2}} = P_{v_{\text{CO}_2}}^{\text{art.}}$: è possibile ottenere quest'ultimo dato per estrapolazione grafica, com'è indicato in fig. 2; poiché normalmente $P_{a_{\text{CO}_2}} = P_{\text{ACO}_2}$ quest'ultimo valore può essere sostituito al primo.

Il metodo usato è il seguente: il soggetto respira nel circuito indicato in fig. 3 fino a raggiungere una condizione di equilibrio nel consumo di O_2 ; in seguito, in uno spirometro di Tissot vengono raccolti 40-50 litri di aria espirata

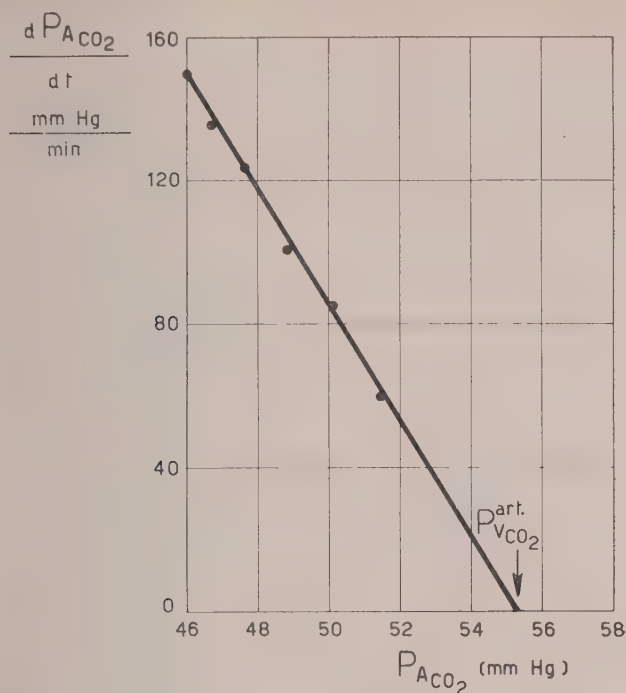


Fig. 2. — Velocità di aumento di $P_{A_{CO_2}}$ (ordinata) in funzione di $P_{A_{CO_2}}$ (ascissa). Estrapolando la retta alla velocità zero essa interseca l'ascissa ad un valore di $P_{A_{CO_2}}$ uguale a $P_{vCO_2}^{art.}$.

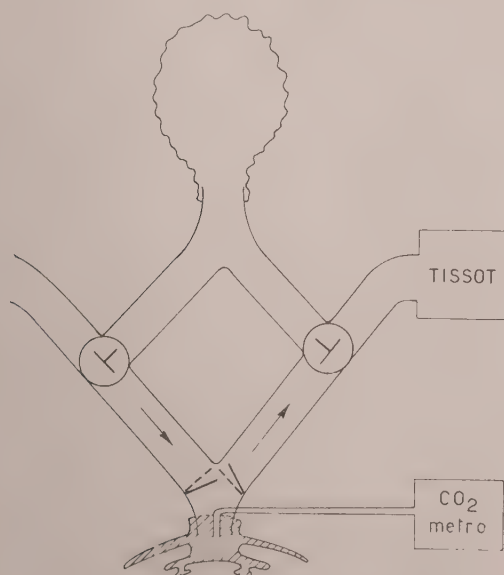


Fig. 3. — Schema del circuito di riorespirazione.

e contemporaneamente si registra la composizione in CO_2 dell'aria alveolare, mediante un CO_2 metro a raggi infrarossi; si possono così ottenere i valori di \dot{V}_{O_2} , \dot{V}_{CO_2} , R , P_{ACO_2} . Ad un momento determinato, girando opportunamente i rubinetti, si fa respirare il soggetto in un circuito chiuso, costituito da un palloncino di gomma inizialmente riempito di ossigeno in modo da garantire una completa ossigenazione dell'Hb: la rirespirazione viene continuata per 10-12 secondi. I valori di P_{ACO_2} dei singoli atti respiratori durante la rirespirazione vengono messi in funzione del tempo, e le tangenti alla curva, cioè i valori $\frac{dP_{\text{ACO}_2}}{dt}$, sono posti in funzione di P_{ACO_2} . Il valore di $P_{\text{vCO}_2}^{\text{art.}}$ viene quindi ottenuto per estrapolazione grafica dei dati, come indicato in fig. 2, il valore $C_{\bar{v}\text{CO}_2} - C_{a\text{CO}_2}$ calcolato secondo la (8), ed infine la gettata cardiaca calcolata secondo la (1).

Il metodo proposto in questo lavoro consente l'applicazione incruenta del principio di Fick all'uomo per determinare la gettata cardiaca a riposo: nel lavoro muscolare il tempo di circolo è abbreviato ed occorre perciò ridurre corrispondentemente la durata delle osservazioni probabilmente a meno di 10 secondi. L'attendibilità del metodo appare abbastanza buona in condizioni di riposo: determinazioni ripetute sullo stesso soggetto rivelano che la deviazione individuale della media (σ) è di circa 5 %. Nel lavoro muscolare che implica un consumo di O_2 da 8-10 fino a 40 ml/Kg/min la variazione individuale si è rivelata essere di $\pm 15\%$ e di $\pm 5\%$ in due soggetti rispettivamente.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] DUBOIS A. B., FOWLER R. C., SOFFER A. and FENN W. O., « J. Appl. Physiol. », 4, 526 (1952).
- [2] DUBOIS A. B., BRITT A. G. and FENN W. O., « J. Appl. Physiol. », 4, 535 (1952).
- [3] MARGARIA R., MARCHI S., ROSSI L., « Rend. Acc. Naz. Lincei », serie VIII, 28, 304 (1960).

Fisiologia. — *Differenza arterovenosa in ossigeno, gettata cardiaca e gettata pulsatoria in funzione del consumo energetico* (*). Nota di GIORGIO BRANDI e ITALO BRAMBILLA, presentata (**) dal Socio R. MARGARIA.

Con un metodo precedentemente descritto (Brandi 1961 [2]), è stata determinata la gettata cardiaca nel lavoro muscolare, in condizioni cioè di elevato metabolismo energetico.

Sono stati eseguiti 26 esperimenti su due soggetti sani, B. R. di 27 anni e L. V. di 23 anni, abituati ad esperimenti di respirazione e con moderata attività sportiva. Gli esperimenti consistevano in marcia e corsa in piano su ergometro trasportatore. Raggiunto uno stato di equilibrio nel consumo di O_2 , venivano raccolti 40–50 litri di aria espirata in uno spirometro di Tissot della capacità di 180 l e della sensibilità di 1,746 l/cm e la percentuale in CO_2 e in O_2 misurata; in tal modo si ottenevano \dot{V}_{O_2} , \dot{V}_{CO_2} , R; $P_{\bar{A}CO_2}$ veniva misurata continuamente a mezzo di un CO_2 metro a raggi infrarossi.

Dal calcolo della velocità di aumento di P_{ACO_2} durante un successivo periodo di rirespirazione, di durata non superiore a 10–12 sec, si otteneva la differenza arterovenosa in CO_2 ; dividendo questo valore per R si aveva il valore della differenza arterovenosa in O_2 . Questo dato, posto in funzione del consumo di O_2 (figg. 1 e 2), sembra essere funzione rettilinea del consumo

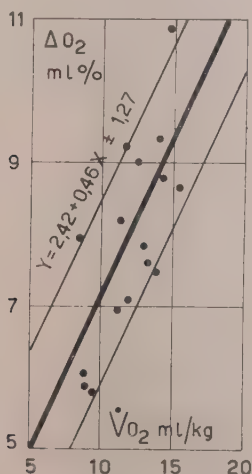


Fig. 1. — Differenza arterovenosa in O_2 (ΔO_2) in funzione del consumo di O_2 (\dot{V}_{O_2} , ml/Kg) nel soggetto B. R.

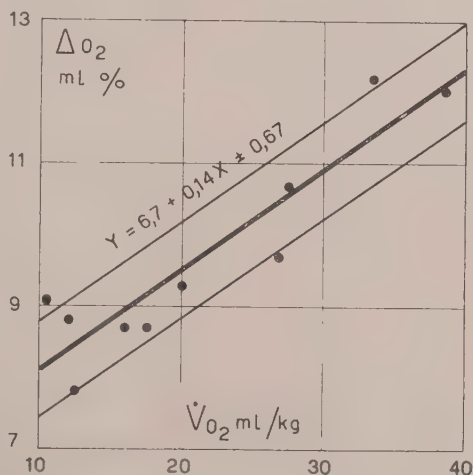


Fig. 2. — Differenza arterovenosa in O_2 (ΔO_2) in funzione del consumo di O_2 (\dot{V}_{O_2} , ml/Kg) nel soggetto L. V.

(*) Dall'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Milano.

(**) Nella seduta dell'8 aprile 1961.

energetico e cioè:

$$(1) \quad \Delta_{O_2}^{a-v} = a + b \dot{V}O_2.$$

Partendo da tale presupposto, col metodo dei minimi quadrati, sono stati calcolati i parametri a e b della (1) per i due soggetti in esperimento. Poiché

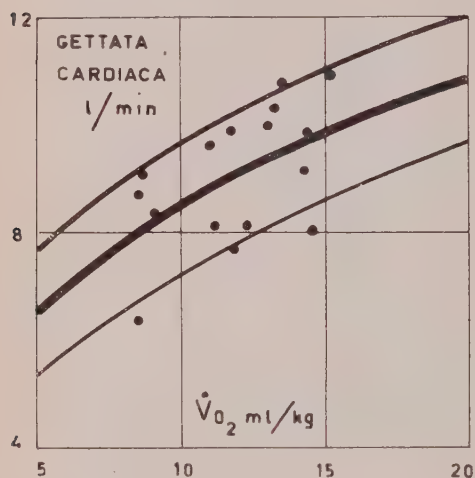


Fig. 3. — Gettata cardiaca (\dot{Q}) in funzione del consumo di O_2 ($\dot{V}O_2$, ml/Kg) nel soggetto B. R.

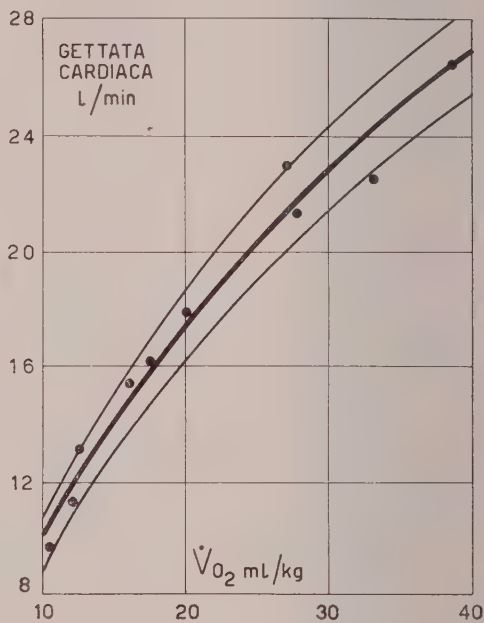


Fig. 4. — Gettata cardiaca (\dot{Q}) in funzione del consumo di O_2 ($\dot{V}O_2$, ml/Kg) nel soggetto L. V.

la gettata cardiaca è

$$(2) \quad \dot{Q} = \frac{\dot{V}O_2}{\Delta_{O_2}^{a-v}}$$

dalla (1) avremo:

$$\dot{Q} = \frac{\dot{V}O_2}{a + b \dot{V}O_2}$$

La gettata cardiaca, calcolata in base alla differenza $a-v$ in CO_2 , è dunque funzione iperbolica del consumo di O_2 , come appare effettivamente essere dalle figg. 3 e 4.

La frequenza cardiaca ai vari livelli metabolici è stata misurata servendosi di un elettrocardiografo e la gettata pulsatoria è stata quindi calcolata. Questa aumenta nel soggetto L. V. fino ad un consumo di 20-25 ml/Kg/min, mentre per lavori più intensi tende a restare costante (fig. 5); anche nel soggetto B. R., che non ha superato valori di consumo di O_2 di 16 ml/Kg/min la gettata pulsatoria si eleva coll'aumentare del metabolismo (fig. 6). In entrambi i casi l'aumento è di circa il 50 % rispetto ai valori di riposo.

Questi risultati sono in accordo con quelli di Riley, 1947 [6], Dexter, 1951 [4], Warner, 1953 [8], Chapman, 1954 [3] e Freedman, 1955 [5]: questi Autori con metodo cruento, mediante cioè prelievi di sangue arterioso e di sangue venoso misto da soggetti che lavoravano su cicloergometro, hanno riscontrato che durante il lavoro la gettata pulsatoria aumenta, in media, del 30 % rispetto ai valori di riposo.

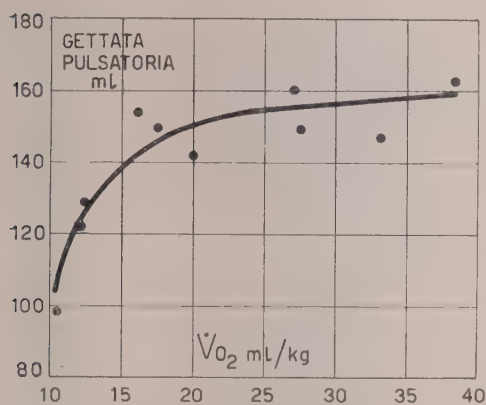


Fig. 5. - Gettata pulsatoria in funzione del consumo di O_2 (\dot{V}_{O_2} , ml/Kg) nel soggetto L. V.

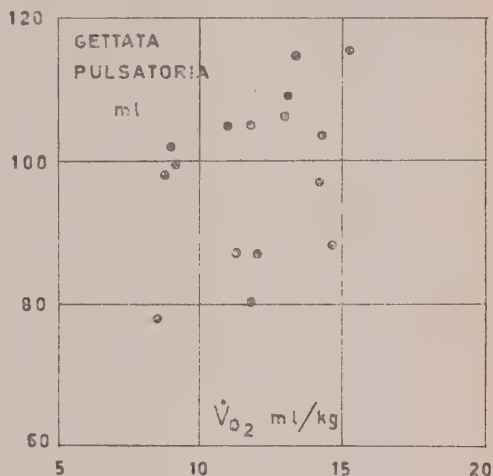


Fig. 6. - Gettata pulsatoria in funzione del consumo di O_2 (\dot{V}_{O_2} , ml/Kg) nel soggetto B. R.

Recentemente Rushmer, 1959 [7] basandosi su misure dei diametri e della circonferenza del ventricolo sinistro del cane ha dedotto che la gettata pulsatoria durante lavoro non varia rispetto al riposo. Anche nell'uomo Asmussen e Nielsen, 1955 [1] hanno osservato durante lavoro costanza della gettata pulsatoria in soggetti in cui la gettata cardiaca era determinata contemporaneamente col metodo dell'acetilene e dell'iniezione di colorante: quest'ultime osservazioni si riferiscono d'altra parte a individui che già a riposo avevano una gettata pulsatoria elevata, di 120 ml, e quindi la generalizzazione di tali risultati può essere ingiustificata.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] ASMUSSEN E. and NIELSEN M., « Physiol. Rev. », 35, 778 (1955).
- [2] BRANDI G., precedente Nota all'Accademia dei Lincei.
- [3] CHAPMAN C. B. and FRASER R. S., « Circulation », 9, 57 (1954).
- [4] DEXTER L., WITTEMBERGER J. L., HAYNES F. W., GOODALE W. T., GORLIN R. and SAWYER G. S., « J. Appl. Physiol. », 3, 439 (1951).
- [5] FREEDMAN M. E., SNIDER G. L., BROSTOFF P., KIMELBLAT S. and KATZ L. N., « J. Appl. Physiol. », 8, 37 (1955).
- [6] RILEY R. L., HIMMELSTEIN A., MOTLEY H. L., WEINER H. M. and CURNAND A., « Am. J. Physiol. », 152, 372 (1948).
- [7] RUSHMER R. F. and SMITH O. A. Jr., « Physiol. Rev. », 39, 41 (1959).
- [8] WARNER H. R., SWAN H. J. C., CONNOLLY D. C., TOMPKINS R. G. and WOOD E. H., « J. Appl. Physiol. », 5, 495 (1953).

Fisiologia. — *Separazione degli zuccheri dello sperma mediante elettroforesi su carta* ^(*). Nota di PIETRO D'ARCANGELO, presentata ^(**) dal Corrisp. G. AMANTEA.

Durante alcune esperienze intraprese allo scopo di accertare se nel liquido seminale, come prospettano i risultati di recenti indagini (Kubicek e Santavy ⁽¹⁾), possano trovarsi altri zuccheri oltre quelli di cui è stata finora dimostrata la presenza (fruttosio e, solo in poche specie animali, glicoso (Mann ⁽²⁾, Mann e Parsons ⁽³⁾, Patton ⁽⁴⁾, e altri)), nella ricerca di un metodo che consentisse di ottenere agevolmente e in breve tempo un quadro del contenuto di zuccheri dello sperma, abbiamo voluto sperimentare l'impiego dell'elettroforesi su carta, che non ci risulta sia stata mai applicata da altri allo studio degli zuccheri del liquido seminale.

Per poter realizzare la separazione elettroforetica degli zuccheri dello sperma abbiamo messo a punto un metodo, che utilizza in parte la tecnica introdotta da Consden e Stanier ⁽⁵⁾ per l'analisi di miscele di zuccheri. Questi formano con lo ione borato dei complessi (Böeseken ⁽⁶⁾; Zittle ⁽⁷⁾), che in campo elettrico migrano verso l'anodo (Consden e Stanier ⁽⁵⁾; Michl ⁽⁸⁾; Jaenicke ⁽⁹⁾; Bourdon ed altri ⁽¹⁰⁾). Grazie a differenze di mobilità esistenti tra complessi derivati da zuccheri diversi è possibile, in opportune condizioni, ottenere una buona risoluzione di miscele di vari zuccheri. Una migliore separazione si può realizzare sottoponendo ad elettroforesi in tamponi di differente pH vari campioni di una stessa miscela, in quanto la mobilità dei diversi complessi varia con il variare del pH del mezzo.

In ripetute prove su sperma di varie specie animali il metodo da noi seguito ci ha permesso di ottenere un quadro sufficientemente indicativo

(*) Lavoro eseguito nell'Ist. di Fisiologia Umana dell'Università di Roma nel 1960.

(**) Nella seduta dell'8 aprile 1961.

(1) R. KUBICEK e F. SANTAVY, « Bull. Soc. Chimie Biologique », **40**, 1603 (1958).

(2) T. MANN, « Biochem. J. », **39**, 458 (1945); IDEM, ibidem, **40**, 481 (1946); IDEM, « Nature », **157**, 79 (1946); IDEM, « Adv. Enzymol. », **9**, 329 (1949); IDEM, *The Biochemistry of Semen*, Methuen, London (1954).

(3) T. MANN e U. PARSONS, « Biochem. J. », **46**, 440 (1950).

(4) A. R. PATTON, « J. Chem. Educ. », **27**, 60, 574 (1950).

(5) R. CONSDEN e W. M. STANIER, « Nature », **169**, 783 (1952).

(6) J. BÖESEKEN, « Adv. in Carbohydrate Chemistry », **4**, 189 (1949).

(7) C. A. ZITTLE, « Adv. Enzymol. », **12**, 493 (1951).

(8) H. MICHL, « Monatsh. Chem. », **82**, 489 (1951); IDEM, ibidem, **83**, 737 (1952).

(9) L. JAENICKE, « Naturwiss. », **39**, 86 (1952).

(10) D. BOURDON, J. COTTE, M. L. GIELFRICH, « Bull. Soc. Chimie Biologique », **41**, 181 (1959).

del contenuto di zuccheri del liquido seminale. Esso, pur non avendo la capacità di risoluzione dei migliori metodi cromatografici, presenta il duplice vantaggio di una maggiore semplicità e di un tempo di esecuzione di gran lunga minore. Riteniamo, perciò, opportuno esporne brevemente nella presente nota la tecnica di esecuzione, nella convinzione che esso possa trovare utile impiego nell'analisi degli zuccheri dello sperma, in particolare come metodo di *routine* per un primo esame orientativo, salvo ad integrare le indicazioni da esso fornite, qualora ne risultasse la necessità, con l'uso di altri metodi di più complessa esecuzione che offrano una maggiore possibilità di discriminazione analitica.

Lo sperma viene deproteinizzato mescolandolo con 5 volumi di alcool etilico a 96° mantenuto in ghiaccio. Dopo aver lasciato la miscela in ghiaccio per 30 min, agitandola ripetutamente, si separa il precipitato mediante centrifugazione. Il liquido supernatante, limpido, viene versato in una capsula di vetro di dimensioni adeguate e sottoposto ad evaporazione sotto vuoto alla temperatura di 40°-50°C, fino a completo essiccamento. Il materiale essiccato viene ridisciolti in una piccola quantità di acqua per poi essere deposto sulla carta da elettroforesi. Se la deproteinizzazione dello sperma non viene effettuata entro pochi minuti dalla eiaculazione esso va conservato a bassa temperatura (2°-3°C), onde inibire la fruttolisi ed eventuali processi di degradazione a carico di altri zuccheri che dovessero essere presenti.

La quantità di materiale da deporre sulla striscia di carta per ottenere una buona separazione elettroforetica dipende dalla concentrazione di zuccheri dello sperma in esame. In nostre prove su sperma umano normale, ad esempio, abbiamo ottenuto i migliori risultati con una quantità di materiale corrispondente a 0,05-0,1 ml di liquido seminale; con sperma di cavia abbiamo ottenuto una buona separazione degli zuccheri con 0,2-0,4 ml di liquido seminale. In altre prove su sperma di cane abbiamo ottenuto soddisfacenti risultati solo impiegando quantità maggiori (corrispondenti a 0,5-0,8 ml di liquido seminale).

Come campioni standard usiamo soluzioni di zuccheri allo 0,5 % in alcool isopropilico al 10 % (in quantità di 4 µl per ciascuna soluzione).

L'elettroforesi viene eseguita in camera umida ad evaporazione ridotta, usando celle del tipo orizzontale (21 cm di lunghezza, 14 cm di larghezza e 8 cm di altezza) munite di supporto asportabile per sostenere le strisce di carta. Le celle vengono connesse con un alimentatore stabilizzato capace di erogare corrente continua fino a 100 mA con tensioni variabili da 100 a 800 V.

Le soluzioni di tampone borato (da pH 7 a pH 9,2) si preparano mescolando in opportune proporzioni una soluzione di borace 0,05 M e una di acido borico 0,2 M e cloruro di sodio 0,05 M (come soluzione di pH 9,2 si usa quella di borace come tale). Per realizzare una soddisfacente separazione degli zuccheri dello sperma può essere necessario sottoporre ad elettroforesi in tamponi di differente pH varie aliquote di uno stesso campione.

Impieghiamo strisce di carta (Wathman n° 1) di 4×28 cm. La parte emersa delle strisce, una volta montate sul supporto e introdotte nella cella contenente la soluzione tampone (1 litro), risulta di 24 cm di lunghezza.

Per la deposizione del campione sulla striscia, al fine di ottenere la migliore risoluzione dell'elettroferogramma e di evitare che il campione una volta immerso le due estremità della striscia nel tampone, sotto la spinta di questo che diffonde sulla carta, si sposti dal punto di deposizione prima dell'applicazione del campo elettrico, abbiamo adottato la seguente tecnica. Mediante micropipetta il materiale viene deposto « a striscia » per una estensione di 1,5 cm sulla carta asciutta e mantenuta in corrente di aria calda. La deposizione viene effettuata lungo una linea situata a 8,5 cm dalla estremità della striscia di carta destinata al catodo. Immediatamente prima di essere applicata sul supporto e introdotta nella cella la striscia viene in gran parte bagnata con la soluzione tampone immergendone rapidamente in questa entrambe le estremità: dalla parte destinata al catodo viene immersa per 5 cm, dall'altra per 18 cm. Seguendo questa tecnica il campione si mantiene esattamente nel punto dove è stato deposto, come abbiamo accertato con ripetuti controlli effettuati fino ad 1 h dopo che la striscia era stata montata nella cella.

Introdotte le strisce nella cella elettroforetica, dopo 30 min si applica un potenziale di 240 V, corrispondente a 10 V/cm (amperaggio iniziale variabile da 0,6 a 0,8 mA/cm, a seconda del tampone impiegato). Dopo 3 h e 1/2-4 h di elettroforesi le strisce si mettono ad asciugare in stufa a $50^{\circ}\text{--}60^{\circ}\text{C}$ per 20-25 min, ben tese in posizione orizzontale, usando l'accorgimento di asportarne le estremità che si trovavano immerse nel tampone, onde evitare fenomeni di diffusione del liquido verso il centro della striscia, con conseguente spostamento delle bande dell'elettroferogramma.

Per la rivelazione delle macchie di zuccheri impieghiamo il reattivo all'anilina e acido ftalico secondo Partridge⁽¹¹⁾; a questo vanno aggiunte alcune gocce di acido acetico glaciale, quando l'elettroforesi sia stata condotta in tampone nettamente alcalino. Le strisce asciutte si immergono per brevissimo tempo nel reattivo e, sempre ben tese orizzontalmente, si pongono in stufa a 110°C per 10-15 min.

Riportiamo a titolo di esempio alcuni elettroferogrammi ottenuti da sperma di cavia con tamponi di diverso pH. Da essi risulta che, oltre al fruttosio, sono presenti nello sperma di questo animale notevoli quantità di un altro zucchero, che in base al comportamento elettroforetico è identificabile con il glicoso; a pH 8,5 e 9,2 si evidenziano, inoltre, altre due macchie, di dimensioni e di intensità molto minori di quelle del fruttosio e del glicoso, non ancora identificate. Nello sperma di cavia, a quanto ci risulta, non era stata mai segnalata prima d'ora la presenza di altri zuccheri oltre al fruttosio.

(11) S. M. PARTRIDGE, « Nature », 164, 443 (1949).

Biologia. — *Nuove esperienze sull'asportazione dello strato dell'ependima presuntivo in embrioni di Anfibi anuri*^(*). Nota di ALDO ROSSI, presentata^(**) dal Corrisp. A. STEFANELLI.

In una precedente Nota [1], apparsa su questi « Rendiconti », è stato descritto che l'asportazione totale dello strato dell'ependima presuntivo da placche neurali di embrioni di *Bufo bufo* e di *Bufo viridis* provoca notevoli alterazioni nella morfogenesi delle cavità ventricolari. Conformemente alle osservazioni di Cotronei (1915, 1921, 1922 [2, 3, 4]) e di Weiss (1934, 1955 [5, 6]) e alle osservazioni morfofisiologiche dei casi di idrocefalia congenita (Lunghetti 1938 [7], Spadolini 1943 [8], Chiarugi 1944 [9], Russel 1949 [10]), si è supposto che l'alterazione della morfogenesi delle cavità ventricolari sia dovuta alla diminuita secrezione del liquido ventricolare. Da questa ricerca è risultato inoltre che, pur essendo stato asportato lo strato dell'ependima presuntivo, le cavità ventricolari dei cervelli operati sono tappezzate da cellule con aspetto ependimale.

Volendo approfondire maggiormente il problema, sono state impostate nuove esperienze con il preciso scopo di analizzare il valore prospettico dello strato dell'ependima presuntivo e quello dei sottostanti strati cellulari della placca neurale. Dalla ricerca bibliografica si è constatato che mentre sono numerosi i lavori riguardanti un'analisi sul valore prospettico dei vari territori della placca neurale (Adelmann 1935 [11], Carpenter 1937 [12], Nakamura 1942 [13], Stefanelli 1947 [14], Gallera 1958 [15], Jacobson 1959 [16]), non vi sono ricerche riguardanti un'analisi stratigrafica della placca neurale.

Nel presente lavoro sono stati intrapresi quattro differenti tipi di esperienze: in un primo lotto è stata praticata la completa asportazione del solo strato dell'ependima presuntivo su tutta la placca di embrioni di *Rana esculenta* allo stadio 13 (fine gastrula — inizio della placca neurale secondo le tabelle di sviluppo della *Rana pipiens* compilate da Shumway 1940 [17]); in un secondo lotto è stato asportato ad embrioni di *Bufo bufo* allo stadio 12-13 (stadio di fine gastrula — inizio della placca neurale e stadio di placca neurale secondo le tabelle di sviluppo del *Bufo bufo* compilate da Rossi 1958 [18]) tutta la metà destra dello strato dell'ependima presuntivo nel senso della maggior lunghezza della placca neurale. Nel terzo lotto di esperienze sono stati trapiantati sul fianco destro di portatori della stessa specie (*Bufo bufo*), e di pari stadio (12-13), pezzi di placca anteriore privi dello strato dell'ependima presuntivo; infine in un quarto lotto sono stati trapiantati lembi più o

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata « G. B. Grassi » dell'Università di Roma, con i mezzi del Centro di studio di Neuroembriologia del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'8 aprile 1961.

meno estesi del solo strato dell'ependima presuntivo, sempre su portatori della stessa specie (*Bufo bufo*) e di pari stadio (12-13).

L'asportazione del solo strato dell'ependima presuntivo è stata fatta al solito con l'aiuto di sottili capelli innestati in bacchette di vetro. Tutte le operazioni sono state eseguite in soluzione Holtfreter. Come fissativo si è impiegato il Goldschmith per gli embrioni con il tuorlo e il Sanfelice e il Bouin per le larve. Le sezioni seriate di 5 e 10 μ sono state colorate con l'emallume di Mayer ed eosina oppure con Mallory-Azan.

Nel primo gruppo di esperienze fatte su *Rana esculenta* gli embrioni operati (asportazione totale dello strato dell'ependima presuntivo) sono stati uniti in parabiosi con embrioni della stessa specie e di pari stadio; l'embrione operato è stato sempre unito sul fianco destro dell'embrione portatore. Complessivamente sono stati presi in esame 11 casi e sono stati fissati progressivamente 4, 6, 10, 16, 20, 26 e 27 giorni dopo l'operazione.

Dall'esame generale di questi casi risulta che con l'ablazione dello strato dell'ependima presuntivo le cavità ventricolari del neurasse degli individui operati si obliterano in gran parte. Già 4 giorni dopo l'operazione il canale neurale è completamente obliterato lungo quasi tutto il neurasse; solo nella parte più dorsale di questa massa compatta di cellule vi possono essere delle piccole cavità. Negli individui operati esaminati più tardivamente si constata che nel tubo neurale vi sono delle cavità di forma irregolare e di differente grandezza. L'esame istologico rivela che alcune cavità sono tappezzate da cellule di aspetto ependimale, mentre altre (specialmente le più grandi) sono delimitate variabilmente da cellule piccole rotondeggianti, da cellule di tipo ependimale e in alcuni punti solo da sostanza bianca.

Già 16 giorni dopo l'operazione si nota che in più punti le cavità sono nuovamente tappezzate da un epitelio ependimale simile a quello che riveste il canale ventricolare del controllo unito in parabiosi.

È particolarmente interessante notare che anche nei cervelli delle larve esaminate 27 giorni dopo l'operazione, dalle pareti laterali del tubo neurale, in più punti, migrano nell'interno delle cavità, cellule isolate (o gruppi di più cellule) unite variabilmente da ponti protoplasmatici. In tal modo una parte dello spazio di queste cavità viene riempito da una rete di cellule più o meno ampia; in alcuni punti infine, fra queste cellule rotondeggianti si forma della sostanza bianca.

Nel secondo gruppo di esperienze (asportazione di tutta la metà destra dello strato dell'ependima presuntivo nella maggior lunghezza della placca neurale, di embrioni di *Bufo bufo* allo stadio 12-13) sono stati presi in esame 13 casi che sono stati fissati progressivamente: subito dopo l'operazione, dopo 12 ore, e 2, 3, 5, 11, 23 giorni dopo l'operazione.

L'analisi istologica di due embrioni presi in esame subito dopo l'operazione ha chiaramente rivelato che con l'operazione viene asportato solo uno strato di cellule lungo tutta la metà destra della placca neurale; nella metà sinistra della placca si osserva che tale strato è costituito da uno strato di cellule basse di forma cubica fortemente pigmentate. Ruffini (1925 [19])

ha dato a tale strato un valore particolare e lo ha denominato « perieto-derma », e lo ha distinto nettamente dalle sottostanti cellule ectodermiche pluristratificate, dall'autore denominate « strato ectodermico propriamente detto o foglietto sensitivo » (*Fisiogenia*, 1925; pp. 302, 397, 778 [19]).

Negli embrioni esaminati 12 ore dopo l'operazione il tubo neurale, completamente chiuso, già presenta cavità ventricolari ben conformate. L'epitelio ventricolare del lato operato non rivela delle differenze morfologiche molto dissimili da quell'epitelio che riveste la parete ventricolare del lato normale. Dall'esame del neurasse, di larve fissate da 2 a 23 giorni dopo l'operazione, risulta che si sono formate delle regolari cavità ventricolari e non si sono avute anomalie morfologiche a carico delle pareti laterali del tubo neurale. Come risulta invece dai dati riportati nella precedente Nota [1], l'ablazione completa dello strato dell'ependima presuntivo da placche neurali di embrioni della stessa specie (*Bufo bufo*) provoca delle sensibili alterazioni morfologiche che culminano nella completa occlusione delle cavità ventricolari (identici risultati si sono ottenuti in *Bufo viridis* e confermati nella presente Nota, anche in *Rana esculenta*).

È interessante notare che nelle larve esaminate 23 giorni dopo l'operazione la parete ventricolare del lato operato è completamente tappezzata da cellule con aspetto ependimale e simili alle cellule ependimali che tappezzano le pareti ventricolari del lato normale.

Nel terzo gruppo di esperienze (trapianto di parti più o meno estese del solo strato dell'ependima presuntivo sul fianco destro di embrioni di pari specie [*Bufo bufo*] e di pari stadio: 12-13) sono stati presi in esame complessivamente 6 casi fissati progressivamente 12, 21, 23, 31, 34 e 50 giorni dopo l'operazione.

Dall'esame di questi 6 casi risulta che si sono differenziate non solo cellule di tipo ependimale (delimitanti una cavità) ma anche neuroblasti e sostanza bianca. Nella generalità dei casi si è formato un tubo neurale tappezzato da cellule ependimali, circondate da una variabile quantità di neuroblasti e di sostanza bianca; nel suo insieme questo sistema ricorda un tubo neurale con uno strato ependimale, uno mantellare e uno marginale.

Nel quarto lotto di esperienze (trapianti di una metà destra e sinistra della parte anteriore della placca neurale previamente privata dello strato dell'ependima presuntivo. Il trapianto è stato eseguito sul fianco destro di portatori di pari specie [*Bufo bufo*] e di pari stadio: 12-13) sono stati presi in considerazione 5 casi fissati progressivamente 10, 21, 31 e 50 giorni dopo l'operazione.

Dall'esame dei casi di questi trapianti di parti della placca neurale private dello strato dell'ependima presuntivo, risulta che si sono formati dei tubi neurali molto simili a tubi neurali normali con una cavità ventricolare più o meno ampia, dove nella generalità dei casi si sono sviluppati i plessi corioidei. Le pareti delle cavità ventricolari di un caso esaminato 10 giorni dopo l'operazione presentano solo in alcuni punti cellule con aspetto ependimale,

mentre le altre cellule sono piccole e rotondeggianti morfologicamente simili alle cellule che si trovano più internamente nella placca. Nei casi esaminati in tempi più tardivi (21, 31 e 50 giorni dopo l'operazione) si osserva che le cavità ventricolari sono tappezzate estesamente da cellule di aspetto ependimale, ma in più punti si trovano ancora cellule piccole e rotondeggianti. Si è osservato inoltre in un caso preso in esame 50 giorni dopo l'operazione, che in alcuni punti la parete del ventricolo non è tappezzata da cellule ed è formata esclusivamente da sostanza bianca.

In un paio di casi si sono osservate delle oblitterazioni della cavità ventricolare e i tubi neurali presentano in questi punti delle anomalie morfologiche simili a quelle descritte nella precedente Nota. Infatti in uno dei due casi si è formata una anomalia che caratterizza tipicamente la regione mesencefalica ossia fra i neuroblasti si sono formate due cavità dorsali e una ventrale; nell'altro caso si è riscontrata un'anomalia che si ritrova tipicamente nella regione romboencefalica, ossia, la cavità ventricolare è divisa da un setto mediano formato da sostanza bianca e da cellule nervose (vedi Nota precedente figg. 4-5).

In tutti i casi di trapianto di placca privata dello strato di ependima presuntivo, si sono formati i plessi corioidei che in alcuni casi hanno una estesa superficie.

Riassumendo brevemente i dati di tutte queste esperienze si osserva che l'asportazione dello strato dell'ependima presuntivo di tutta la placca neurale provoca in ogni caso gravi alterazioni nella morfogenesi della cavità ventricolare, mentre asportando solo una metà dello stesso strato, nel senso della maggior lunghezza della placca, le cavità ventricolari si formano regolarmente. Trapiantando parti più o meno estese della placca neurale (la metà destra o sinistra della parte anteriore della placca) previamente privata dello strato dell'ependima presuntivo, si formano tubi neurali che presentano cavità ventricolari discretamente sviluppate; esse possono presentare solo in alcuni punti anomalie simili a quelle osservate nelle cavità ventricolari delle placche neurali completamente private dell'ependima presuntivo. Infine trapiantando solo lo strato dell'ependima presuntivo si forma un tubo neurale atipico con una cavità ventricolare più o meno ampia delimitata da strati simili a quello ventricolare, mantellare e marginale.

L'esame comparativo di questi dati mette in evidenza quindi che i pezzi di placca neurale previamente privati dello strato dell'ependima presuntivo e trapiantati sul fianco di un portatore di pari stadio, formano delle cavità ventricolari molto più ampie di quelle che si sviluppano nel neurasse degli individui in cui la placca è stata completamente privata dello strato dell'ependima presuntivo.

Ciò porta a concludere che, se effettivamente l'alterata morfogenesi della placca neurale fosse dovuta principalmente alla mancanza della pressione esercitata dal liquido ventricolare secreto dalle cellule ventricolari (Weiss 1934, 1955 [5-6]) in ambedue i casi si sarebbero dovuti formare dei tubi neurali praticamente pieni. Si deve ritenere pertanto che le alterazioni morfo-

logiche del canale ventricolare osservate in seguito all'ablazione totale dello strato dell'ependima presuntivo, non sono dovute solo alla mancata secrezione del liquido ventricolare, ma anche a fattori di natura meccanica. L'alterata morfogenesi del canale ventricolare può essere dovuta infatti ad una imperfetta neurulazione a causa della rapida fusione delle pareti in conseguenza dell'ampia ferita provocata dall'ablazione di tutto lo strato superficiale della placca. Infatti si osserva anche macroscopicamente che dopo l'operazione la placca prima si estroflette e poi si piega nuovamente a doccia oppure (in altri casi) si introflette più precocemente rispetto alle placche neurali degli embrioni normali di pari stadio.

Al contrario, i pezzi di placca trapiantati, i quali come è noto si piegano a forma di doccia anche se isolati dall'embrione per proprietà intrinseche alla placca stessa (Roux 1895 [20]; Holtfreter 1934 [21]), costituiscono più facilmente delle formazioni vescicolari.

Da questa ricerca è risultato inoltre che nelle cavità dei cervelli operati si differenzia nuovamente, sebbene più limitatamente, un epitelio ventricolare con le caratteristiche morfologiche delle cellule ependimali e si formano sempre i plessi corioidei. Dato che lo strato destinato a dare le cellule ventricolari è stato precocemente asportato, prima della chiusura della placca neurale, è evidente che altri elementi della placca neurale hanno potenzialità di differenziarsi in cellule ependimali e in cellule dei plessi corioidei.

Inversamente si è osservato che lo strato presuntivo delle cellule ependimali non ha solo la potenzialità di dare cellule ependimali ma anche altre cellule nervose e sostanza bianca. Poiché le osservazioni fatte riguardano, in queste prime ricerche, le fasi precoci dello sviluppo dei trapianti del solo strato ependimale presuntivo, non è possibile precisare l'esatta natura delle cellule nervose che si sono differenziate.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] A. ROSSI, *Esperienze di asportazione dell'ependima presuntivo in embrioni di Anfibi anuri*, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. 8^a), 29 438 (1960).
- [2] G. COTRONEI, *Correlazioni e differenziazioni. Ricerche sullo sviluppo degli Anfibi Anuri*, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. 5^a), 24, 1248 (1915).
- [3] G. COTRONEI, *Sulla morfologia causale dello sviluppo oculare (Verifica sperimentale sul Bufo vulgaris delle ricerche di Carlo Rabl)*, « Ricerche di Morfologia », 2, 103 (1921).
- [4] G. COTRONEI, *I processi di inibizione differenziale nella regione olfattoria degli Anfibi anuri*, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. 5^a) 31, 433 (1922).
- [5] P. A. WEISS, *Secretory activity of the inner layer of the embryonic midbrain of the chick as revealed by tissue culture*, « Anat. Rec. », 58, 299 (1934).
- [6] P. A. WEISS, *Nervous system in analysis of development* (B. H. WILLIER, P. A. WEISS, V. HAMBURGER). Editore W. B. Saunders Company, Philadelphia e London (1955).
- [7] B. LUNGHETTI, *Anatomia patologica del sistema nervoso*, vol. I del *Trattato di Anatomia patologica* (F. VANZETTI, A. CESARIS-DEMEL, G. SCOTTI, B. DE VECCHI, A. FABRIS, B. LUNGHETTI) Editore U.T.E.T. (1938).
- [8] I. SPADOLINI, *Fisiologia umana*, Editore U.T.E.T. (1943).

- [9] G. CHIARUGI, *Trattato di Embriologia*, Edito da Società Editrice Libreria, Milano (1944).
- [10] D. S. RUSSEL, *Observations on the pathology of hydrocephalus* (Privy Council, Medical Research Council Special, Report series No. 265) London: Her Majesty's Stationery Office (1949).
- [11] H. B. ADELMANN, *The problem of cyclopia*, « Quart. Rev. Biol. », **11**, 161 (1936).
- [12] E. CARPENTER, *The head pattern in Amblystoma studied by vital staining and transplantation methods*, « J. Exp. Zool. », **75**, 103 (1937).
- [13] O. NAKAMURA, *Die Entwicklung der hinteren Körperhälfte bei Urodelen*, « Annot. Zool. Jap. », **21**, 169 (1942).
- [14] A. STEFANELLI, *I fenomeni della determinazione, della rigenerazione e del differenziamento del sistema nervoso*, « Atti Acc. Naz. Lincei », (ser. 8^a), **1**, 27 (1947).
- [15] J. GALLERA, *L'action inductrice de la plaque préchordale sur de l'ectoblaste qui était auparavant influence par la chorde* (*Triturus alpestris*), « J. Acta Anat. », **35**, 47 (1958).
- [16] C. O. JACOBSON, *The localization of the presumptive cerebral regions in the neural plate of the Axolotl larva*, « J. Embryol. exp. Morph. », **7**, 1 (1959).
- [17] W. SHUMWAY, *Stages in the normal development of Rana pipiens. I. External form*, « Anat. Rec. », **78**, 139 (1940).
- [18] A. ROSSI, *Tavole cronologiche dello sviluppo embrionale e larvale del Bufo bufo (L.)* « Monit. Zool. Ital. », **66**, 133 (1958).
- [19] A. RUFFINI, *Fisiogenia. La biodinamica dello sviluppo ed i fondamentali problemi morfologici dell'embriologia generale*, Edito da F. Vallardi, Milano (1925).
- [20] W. ROUX, *Beiträge zur Entwicklungsmechanik des Embryo. I*, « Roux' gesammelte Abhandlungen über Entwicklungsmechanik der Organismen », **2**, 143 (1895).
- [21] J. HOLTFRETER, *Formative Reize in der Embryonalentwicklung der Amphibien dargestellt an Explantationsversuchen*, « Arch. exp. Zell.-forsch. », **15**, 281 (1934).

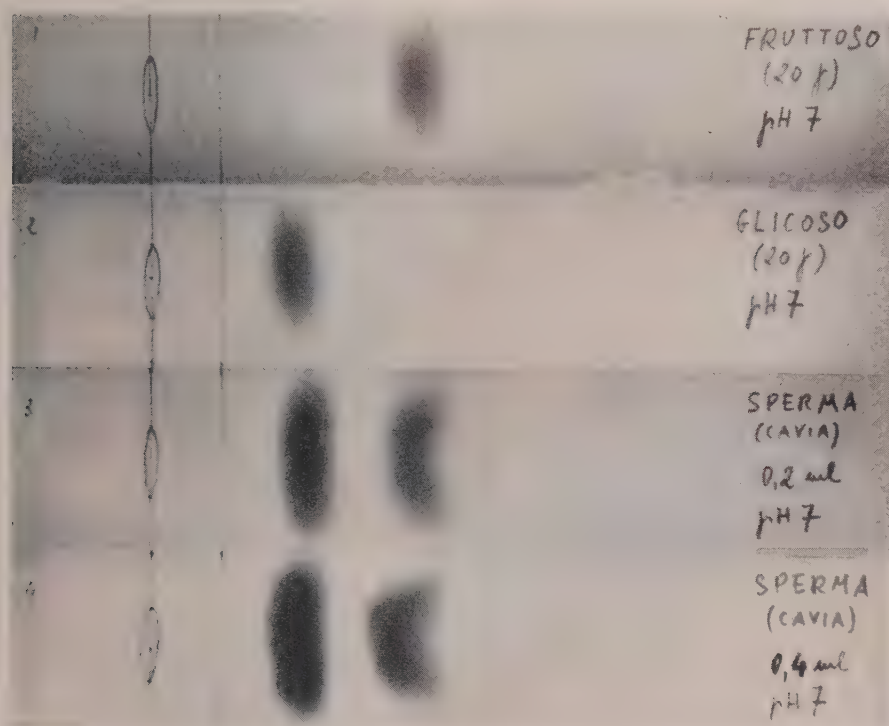


Fig. 1. - Separazione elettroforetica degli zuccheri di sperma di cavia.

Tampone borato pH 7; 10 V/cm, per 225 min. Dall'alto in basso: standards (4 μ l 0,5 %) di fruttosio e di glicoso; sperma ottenuto mediante elettroeiaculazione (elettroshock con corrente alternata di 120 V applicata per circa 1 sec mediante due elettrodi poggiati ai due lati del capo dell'animale, secondo il metodo originariamente proposto da S. Cerquiglini, in E. Brocca e S. Cerquiglini, « Zootecnica e Veterinaria », 5, 710 (1950)) e raccolto direttamente in alcool etilico a 96° in ghiaccio.

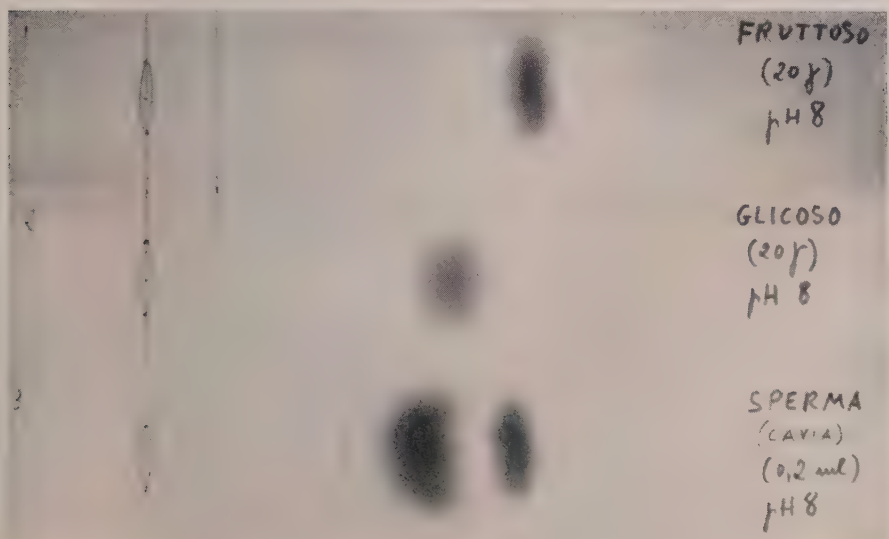


Fig. 2. - Separazione elettroforetica degli zuccheri di sperma di cavia.

Tampone borato pH 8; 10 V/cm, per 225 min. Dall'alto in basso: come in fig. 1.

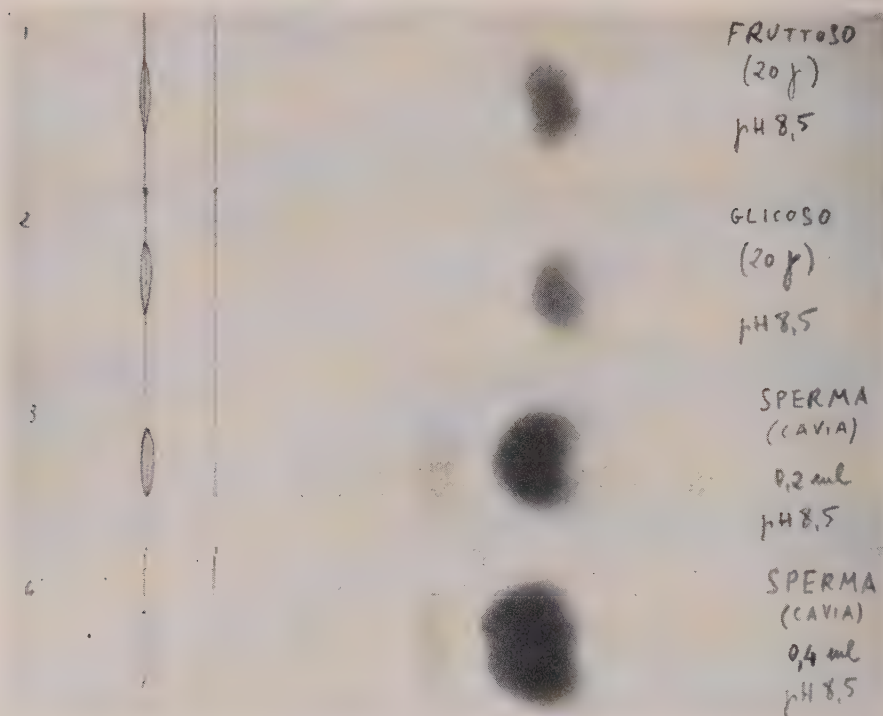


Fig. 3. - Separazione elettroforetica degli zuccheri di sperma di cavia.

Tampone borato pH 8,5; 10 V/cm, per 225 min. Dall'alto in basso: come nelle figure precedenti.

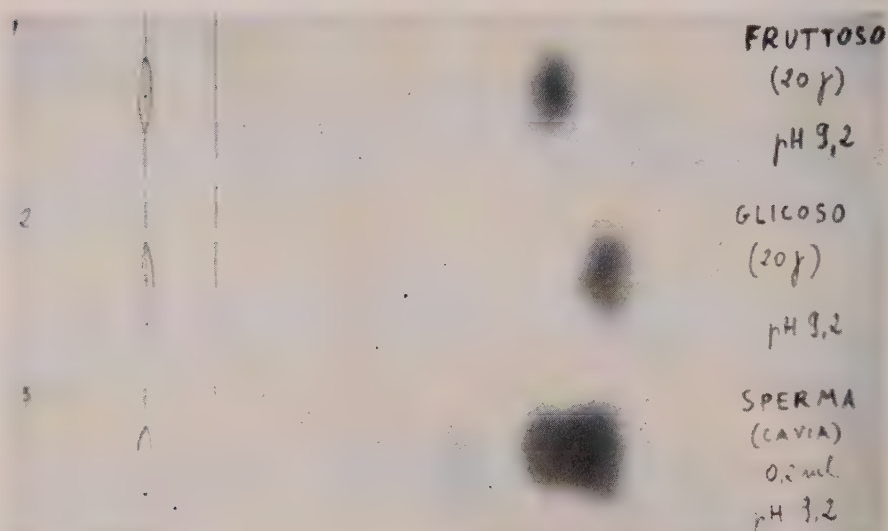


Fig. 4. - Separazione elettroforetica degli zuccheri di sperma di cavia.

Tampone borato pH 9,2; 10 V/cm, per 225 min. Dall'alto in basso: come nelle figure precedenti.

Biologia. — *Sul significato ecologico dell'azoto conchigliare nella Elicide dunicola Euparypha pisana (Müll.)* – II. *Analisi di fenotipi differenti in una singola popolazione* ^(*). Nota di CESARE F. SACCHI e MARIA R. GAUDIOSI, presentata ^(**) dal Corrisp. G. MONTALENTI.

In una nota precedente [1] abbiamo analizzato il contenuto conchigliare d'azoto in popolazioni di diversa origine geografica ed ambientale. Qui studiamo fenotipi diversi d'una sola popolazione, quella di Roscoff (Finistère, Bretagna) rilevata da uno di noi durante l'estate 1960 ⁽¹⁾. Il termine « popolazione » ha, in questo caso, un'accezione naturalistica, non genetico-demografica, perché dati anche nostri, in parte inediti, hanno confermato anche in *Euparypha pisana* una « viscosità di popolazione » elevata, cioè un raggio di spostamento assai limitato dei singoli individui, che, in pratica, restringe notevolmente la popolazione da incrocio effettivo [2]. Tuttavia è certo che un flusso genico importante deve pur sussistere tra le diverse parti di popolazione, o colonie, di zone anche ampie, purché non separate da un'imponente barriera topografica (braccio di mare, ampia foce fluviale, ungo tratto di costa alta senza terreni sabbiosi, e simili) perché la specie presenta, entro tutta la sua area distributiva, fisionomie locali, date da concentrarsi di particolari fenotipi, e dall'assenza di altri, che, in un materiale di storia relativamente recente (in Europa, quaternaria) possono forse equivalere a razze geografiche in fieri [3]. Così, la « popolazione » della costa settentrionale della Bretagna presenta caratteristiche comuni: assenza di colori di fondo rosei; assenza, o, localmente, frequenza bassissima di fenotipi inornati; nicchio grande (15–20 mm di diametro massimo; non rari gli individui di 25–30 mm) e di aspetto cretaceo; quasi come il materiale di Cadice [1]; però sottile e fragile; alte frequenze di albin.

Qualcuno di questi caratteri può essere posto in relazione convincente con le condizioni di vita di *E. pisana* in Bretagna. Se confrontato con climi mediterranei, il clima basso-bretonese appare caratterizzato da inverno abbastanza rigido – rigore tuttavia molto attenuato nelle immediate vicinanze del mare – e da estate mite e piovosa [5]. Le Elicidi di duna affrontano pertanto una pausa invernale, ma praticamente non conoscono estivazione, sopprimendosi così la pausa, micidiale per la specie, tra la nascita primaverile

(*) Ricerca eseguita presso il Centro di studio per la Biologia del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'8 aprile 1961.

(1) Durante un periodo di lavoro alla Station Biologique de Roscoff dell'Università di Parigi, ottenuto con posto di scambio con l'estero del C.N.R.

e l'inizio di più intenso accrescimento autunnale pel primo anno di vita, e conducendosi vita attiva quasi ininterrotta per le estati degli anni successivi, tanto più che, conseguenza essa stessa di estate umida e fresca, la vegetazione continua a fornire cibo abbondante ed appetibile. Quando si tenga presente che in Mediterraneo, oltre ai tre-quattro mesi di estivazione, *E. pisana* affronta quasi dovunque anche un, pur breve, periodo di ibernazione; e che in parecchie zone (Alto Adriatico, per esempio) [1] l'ibernazione stessa è pure prolungata a due-tre mesi, riducendo a metà dell'anno la vita attiva, si potrà concludere che il clima bretone è più conveniente alla specie che i climi di molta parte del bacino mediterraneo. All'attenuata aridità estiva, ed alla minore insolazione, si suole attribuire la sottigliezza della conchiglia, che però conserva il suo aspetto « calcareo » perché la disponibilità di CaCO_3 nel suolo è quasi sempre elevata. La Bretagna è notoriamente costituita in grande prevalenza di masse scistose e granitiche, ma la sabbia marina è talmente arricchita di detriti calcarei organogeni, da essere normalmente usata come correttivo delle stesse « terre fredde » silicee; anzi, il trasporto di sabbia dalla costa dà alle Elicidi di duna possibilità di spingersi all'interno per due-tre chilometri; fatto non realizzato, nonostante l'ampia influenza del clima marittimo sull'intera regione, che è poco rilevata, peninsulare e frastagliatissima, dove l'apporto di sabbia calcarea manchi. Il contenuto di calcare delle sabbie ad *Euparypha* di Roscoff, costituenti in genere basse dune, può stimarsi in media sul 20%. Calcare abbondante ed ampie disponibilità di nutrimento possono valere a spiegare le grandi moli degli animali.

L'assenza pratica di fenotipi senza disegno è fatto abbastanza comune in molte specie delle Elicidi polimorfe europee, mentre non sembrano trovarsi in natura popolazioni composte, per intero, di individui inornati. In specie affini (gen. *Cepaea*), geneticamente studiate, dove si è verificato che l'assenza di disegno domina su qualsiasi tipo di presenza, i fenomeni delineati sopra sono stati interpretati in via ipotetica come risultato di « recessività universale » [2]. Tra le popolazioni italiane di *E. pisana* in cui parimenti i fenotipi inornati hanno frequenze vicine a zero, ricorderemo quella della lunga catena di dune formatasi alla foce del Volturno, tra Cuma e Mondragone.

L'elevata frequenza degli albinì è, invece, un fatto meno comune, tanto in *E. pisana* (in Mediterraneo, il vero albinismo è un fatto episodico) che in *Cepaea*. In *C. nemoralis* ed in *C. hortensis* gli albinì veri possono, sì, raggiungere tale frequenza locale che la frequenza del gene responsabile di questo albinismo, recessivo assoluto, può raggiungere e superare il 30% [2]; ma le zone in cui tali concentrazioni si verificano sono normalmente limitate a poche centinaia di mq; mentre l'alta frequenza degli albinì di *E. pisana* in Bretagna si estende su più di cento chilometri di costa. Si tratta qui di un albinismo completo, perché il cercine del peristoma, anziché giallo-carnicino o roseo come nei normali bretoni, è del tutto depigmentato; il colore di fondo è bianco-niveo; le bande sono incolore e trasparenti. Esse, pertanto, anche più che il fondo, quando la tinta grigiastra della massa viscerale tra-

spare nel vivo, assumono una tinta grigio-azzurrognola. Tali fenotipi corrispondono alla forma nota ai vecchi Autori come « var. *diaphana* Bourg » [4]. Essi costituiscono aliquote variabili delle singole colonie, fino a raggiungere oltre il 50 % nella piccola popolazione, molto isolata, del Légué, il porto-estuario di Saint-Brieuc (Côtes-du-Nord) dove hanno verisimilmente giocato effetti casuali, tipo « deriva genetica » od « effetto del fondatore » [2]. A Roscoff, pur con piccole oscillazioni locali di frequenza, *diaphana* forma il 5-10 per cento della popolazione totale.

Accanto a fenotipi normali e *diaphana* (fig. 1) è stato preparato ed analizzato al micro-Kjeldahl, secondo le tecniche già descritte [1] il guscio di un individuo d'aspetto sommariamente simile ai fenotipi veneziani *testu-*

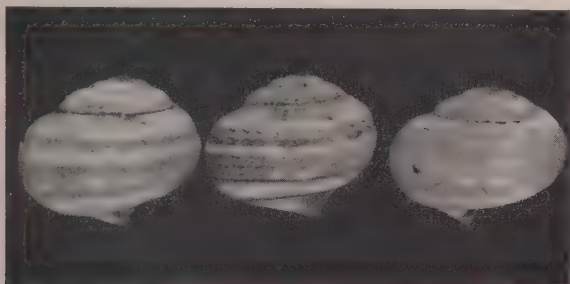


Fig. 1. — In mezzo, individuo con disegno normale. Ai lati, individui albi (fen. *diaphana* Bourg.). Popolazione di Roscoff (Finistère, Bretagna). Estate 1960.

dinea: fondo bruniccio subtrasparente, cioè di aspetto « corneo »; bande pure traslucide brune; nicchio grande (18 mm di diametro massimo) e molto sottile; peristoma, però, intensamente roseo. Tale individuo proveniva da una piccola colonia marginale alle sabbie, già quasi in pieno vivente su suolo granitico. Una sola determinazione di azoto totale è stato possibile eseguirne: il dato relativo appare in Tabella I.

TABELLA I.

Azoto totale conchigliare (in mg 100 g di sostanza secca).

	NORMALI	DIAPHANA	TESTUDINEA simile
<i>n</i>	10	6	1
<i>m</i>	82,6	63,7	183,5
<i>s</i>	± 8,8	± 1,5	
<i>e_m</i>	± 2,7	± 0,6	

In entrambe le tabelle i dati sono disposti come segue: il numero delle determinazioni (n) eseguite per ciascuna categoria fenotipica; il valore medio (m) ottenuto; il suo scarto quadratico medio (s); l'errore medio (e_m) relativo.

L'esame delle due tabelle conduce alle conclusioni seguenti:

a) gli albinì sono più poveri di azoto conchigliare, a conferma della maggior ricchezza relativa di conchiolina nelle zone pigmentate;

b) il valore assai più basso dello scarto quadratico medio di *diaphana*, oltre che in relazione con la minor ampiezza del campione entro cui si è potuto randomizzare il lotto studiato, può esser messo in relazione appunto con il differente grado di pigmentazione delle bande (il fondo è quasi sempre chiarissimo) dei normali analizzati. Tali bande possono variare, anche in Bretagna, dal bruno-nerastro al fulvo ed all'albicocca: a Roscoff, tuttavia i fenotipi con bande più attenuate sono la maggioranza (circa il 60 % dei normali);

TABELLA II.

Azoto conchigliare acidosolubile (in mg per 100 g di sostanza secca).

	NORMALI	DIAPHANA
n	4	4
m	27,4	18,8
s	$\pm 0,8$	$\pm 0,7$
e_m	$\pm 0,4$	$\pm 0,35$

c) l'azoto acidosolubile costituisce all'incirca un terzo dell'azoto totale (poco più del 33 % nei normali; il 29,5 % negli albinì). Il debole valore degli s di Tabella II fa pensare, nonostante il numero modesto di analisi, che anche questa differenza tra normali e *diaphana* sia significativa. Nella nota precedente [1] avevamo riferito dati che dimostravano come anche nei normali di Chioggia e nel materiale di Cadice la frazione acidosolubile costituisse circa un terzo dell'azoto totale; mentre pel materiale di Tenerife esso era oltre il 40 %. Ma il materiale di Tenerife è appunto quello raccolto durante la fase di più intenso e vistoso accrescimento: a conferma che l'azoto acidosolubile è dato più da tappe intermedie di sintesi della conchiolina, che di demolizione. Anche per i normali e per *diaphana* di Roscoff la reazione alla ninidrina, eseguita secondo le tecniche già esposte [1] ha dato risultato nettamente positivo. È probabile che nelle stesse considerazioni possa inquadrarsi l'azoto totale minore, in senso assoluto, nel materiale bretone, tanto normale che albino, rispetto a tutto il materiale studiato in precedenza: perché, a differenza di quello, questo, prelevato in agosto-settembre, aveva terminato il proprio accrescimento. È ben noto che nei Molluschi la depo-

sizione del carbonato di calcio è preceduta dalla secrezione di una trama conchiolinica, che dirige e regola la deposizione stessa della sostanza minerale, per cui, fin che l'accrescimento del guscio non sia compiuto, la frazione azotata è relativamente più abbondante. Per comparazioni di validità generale è pertanto necessario scegliere, non solo materiale di ecologia il più possibile omogenea, ma anche rilevato in condizioni fisiologiche simili;

d) l'individuo *testudinea*-simile, a differenza delle vere *testudinea* veneziane, è di gran lunga più ricco d'azoto dei normali della stessa popolazione. Esso ne contiene nel guscio oltre il doppio del più alto valore ottenuto per un normale di Roscoff (91,7 mg/100 g sost. secca); e raggiunge praticamente il valore medio della popolazione di Tenerife [1], nonostante che il suo sviluppo fosse, al momento della cattura, completo, e documentato tra l'altro dallo sviluppo perfetto del cercine peristomatico. Se ne potrebbe pertanto forse dedurre che esso rappresenti una sorta di fenocopia di *testudinea*, imposta da un ambiente molto decalcificato; se, a parte la mole notevolissima, del tutto pari a normali ed albinì (tra queste due ultime categorie non si rilevano differenze dimensionali), esso non si fosse trovato a convivere con individui, pochi, sì, ma di aspetto normale, sugli stessi terreni ruderali silicei. Ci sembra comunque confermato che, in questo caso, l'aspetto « corneo » del nicchio è effettivamente, almeno in parte, dovuto ad un guscio relativamente men ricco di sostanza minerale dei normali e degli albinì di conchiglia vistosamente « calcarea » e « cretacea »;

e) il minor contenuto di azoto in *diaphana* rispetto alla norma fa propendere per un'interpretazione della regola dei colori del Rensch su base selezionistica, non prettamente adattativa individuale. Gli individui meno ornati essendo relativamente più ricchi di calcare, la prevalenza di fenotipi senza disegno, o con ornamento molto pallido, in luoghi più aridi, caldi e soleggiati dovrebbe considerarsi come l'effetto di una pressione selettiva che, eliminando gli individui più ricchi di pigmento bruno nella conchiglia, favorisca gli inornati insieme con gli individui di ornamento ridotto o pallido.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] GAUDIOSI M. R. e SACCHI C. F., *Sul significato ecologico dell'azoto conchigliare nell'Elicide dunicola* Euparypha pisana (Müll.), « Atti Acc. Naz. Lincei », Cl. Sc. fis. e nat. (8), 29, 634-638 (1960).
- [2] SACCHI C. F., *Problemi e metodi di genetica ecologica: significato selettivo di caratteri cromatici in animali terrestri*, « Attual. Zool. », 10, 1-39 (1959).
- [3] ID., *Ricerche sulla variabilità geografica in popolazioni italiane di Euparypha pisana* (Müll.), « Ann. Mus. Civ. St. Nat. Genova », 65, 211-258 (1952).
- [4] TAYLOR J. W., « Monograph of the Land and fresh-water Mollusca of the British Isles », 3. (Zonitidae, Endodontidae and Helicidae). Leeds (1914).
- [5] WALTER H. e LIETH H., *Klimidiagramm-Weltatlas*. 1 Lieferung, Jena (1960).

COMMEMORAZIONI

Commemorazione del Socio Corradino Mineo

tenuta (*) dal Socio GIOVANNI BOAGA

Per quel benevolo vincolo di colleganza che ebbi, specialmente dopo il secondo conflitto mondiale, con Corradino Mineo, ho accettato con animo commosso l'incarico affidatomi dalla Presidenza dell'Accademia di farne la commemorazione. Come gli egregi Colleghi ricorderanno, il Mineo sempre, ma specialmente negli ultimi anni, fece vita solitaria, sì che parlare di lui oggi in questa sede significa ricordare la sua opera di scienziato e di maestro.

Nato a Palermo il 26 luglio 1875, chiuse colà la sua operosa vita il 15 marzo 1960, alla vigilia, si può dire, del suo ottantacinquesimo compleanno.

A venticinque anni, a Palermo, conseguì la laurea in matematica e due anni dopo ebbe inizio la sua carriera scientifica, come assistente alla Cattedra di Geodesia della Facoltà di Scienze dell'Università di Palermo, tenuta con tanto onore dal prof. Adolfo Venturi ed al quale Mineo succedette come incaricato nel 1914, dopo aver conseguito — nel 1910 — la libera docenza in geodesia teoretica.

Nel 1922 in seguito a risultati di pubblico concorso divenne titolare di quella cattedra, ove rimase fino al 1948, anno in cui passò all'astronomia, avendo diretto in precedenza la Specola del Palazzo Reale, dopo la morte di Filippo Angelitti, in due periodi dal 1931 al 1936 e dal 1938 al 1948.

Nell'Università di Palermo egli dedicò gran parte della sua attività all'insegnamento, anche in campi diversi dalla disciplina cui fu titolare. Tenne per incarico e per diversi anni successivamente i corsi di analisi infinitesimale per gli studenti di matematica, fisica matematica, meccanica superiore e matematica complementare; corso quanto mai impegnativo che tenne ininterrottamente dal 1931 al 1950 col fermo proposito di orientare i giovani alla preparazione ai concorsi per cattedre nelle Scuole Medie. A questo corso Egli diede una impronta tutta speciale in funzione della sua vasta cultura e della sua mentalità critico-filosofica. Egli fu veramente un grande Maestro e lasciò ai suoi allievi appunti manoscritti o stampati delle sue lezioni, dove gli argomenti più delicati e complessi sono esposti col massimo rigore e nello stesso tempo con semplicità, chiarezza ed equilibrio.

(*) Nella seduta dell'8 aprile 1961.

Della Facoltà di Scienze di Palermo fu anche Preside. Appartenne alla Accademia dei Lincei dal 1937; fu socio ordinario dell'Accademia di Scienze Lettere ed Arti di Palermo, della quale anzi dal 1945 al 1949 è stato Presidente; membro ordinario della Commissione Geodetica Italiana, Vice Presidente della Società di Scienze Naturali ed Economiche di Palermo e socio di altri importanti consessi scientifici e culturali. Nel 1924, per i lavori di Geodesia conseguì il premio Reina, istituito dalla Società Italiana per il Progresso delle Scienze.

Con decreto del Presidente della Repubblica nel 1951 fu proclamato professore emerito. Alla memoria gli venne conferito, sempre dal Presidente della Repubblica, il diploma di I classe, con medaglia d'oro, quale benemerito della Scuola, della Cultura e dell'Arte.

L'attività scientifica del Mineo è stata assai vasta. In un centinaio di Note e Memorie, delle quali una ventina nei Rendiconti dell'Accademia dei Lincei e le rimanenti in Atti di altre Accademie scientifiche italiane e straniere ed in Riviste matematiche, Egli ha trattato problemi fondamentali di analisi matematica, geometria, meccanica razionale; meccanica celeste, geodesia teoretica (geometrica e meccanica), geodesia astronomica, geodesia operativa, cartografia, calcolo delle probabilità. Gli studi di carattere geodetico del Mineo, si può ben dire, occupano uno dei primi posti nella produzione internazionale della prima metà di questo secolo, sia per l'uso — sempre equilibrato — dello strumento matematico, sia per la esatta impostazione e risoluzione di problemi fondamentali, doti queste — preclare — che sono state ereditate dai suoi allievi verso i quali dimostrò sempre benevolenza, ma nello stesso tempo esigenza e rigidezza scientifica.

Il primo lavoro del Mineo porta la data 1903 ed è stato pubblicato nei « Rendiconti del Circolo matematico di Palermo » col titolo: Sulla curva luogo dei punti di contatto delle superficie d'un fascio d'ordine n con le superficie di un fascio d'ordine n' .

Di questo argomento si era occupato fino dal 1896 il prof. Segre, come mezzo per determinare un carattere delle varietà algebriche a tre dimensioni. Il Nostro Autore si propose invece di costruire il luogo anzidetto deducendolo come intersezione parziale di due superficie; ciò gli ha permesso di determinare, oltre all'ordine, il genere, e successivamente, con procedimento indicato dal Segre per due fasci di curve, passò a calcolare il numero delle coppie di superficie dei due fasci che hanno tra loro contatto stazionario o doppio contatto. Per la costruzione della curva fece ricorso ai luoghi relativi a fasci di superficie secondo i fondamenti della Teoria dettata dal Guccia (1895).

Due anni dopo, in una Nota dal titolo « Sul luogo dei punti parabolici delle superficie di un fascio », mise in rilievo che alcuni risultati cui era pervenuto nella Nota precedente erano stati ottenuti, con altri procedimenti, dallo Zeuthen, fino dal 1879, ma che Egli ignorava. In questa nuova Nota dimostrò che il luogo dei punti parabolici di un fascio costituisce la « Jacobiana » del sistema lineare « infinito cubo » di tutte le superficie relative al

fascio, sotto la quale forma si possono poi studiare per via sintetica le proprietà del luogo.

Nel 1907 seguendo le ricerche di Loria e Burali-Forti, utilizzando il metodo di Grassmann, effettuò lo studio delle curve la cui radiale è un cerchio, intendendo per radiale di una curva piana il luogo degli estremi dei vettori eguali ai raggi di curvatura di essa e aventi una stessa origine. Per venne con facilità non solo alla equazione vettoriale di queste curve, ma altresì alle loro equazioni cartesiane parametriche, sotto forma quanto mai adatta alla discussione di esse, il che generalmente non accade col metodo cartesiano.

In un lavoro del 1909 si occupò dell'interessante correlazione fra « Logica e Matematica », con l'intento di tracciare un panorama d'insieme sull'argomento, che vantava già allora una letteratura estesissima, alla quale avevano contribuito matematici illustri quali: Peano, Enriques, Helmholtz, Weierstrass, Dedekind e numerosissimi altri ancora.

Che cosa è il continuo matematico? quale ne è la genesi? quale la sua utilità pratica? in che rapporto esso sta col continuo fisico? Ecco le questioni alle quali il Mineo ha cercato di rispondere in una conferenza « il continuo matematico » tenuta nella Biblioteca filosofica di Palermo nel 1914 e pubblicata nella « Rivista Logos », dove, pur affermando che il principio di continuità conserverà gran parte della sua importanza, prevede che l'analisi del discontinuo avrà nel campo della fisica matematica applicazione sempre maggiore e che risulterà più idonea a interpretare i fatti del mondo fisico. Ancora una volta, afferma il Nostro, l'analisi matematica si rinnoverà al contatto fecondo della Natura.

Avendo fatto notare il Peano che « i matematici non sono d'accordo sulla definizione migliore degli irrazionali » il Mineo, in una magistrale memoria, considerò la questione non soltanto dal punto strettamente tecnico o formale, ma anche da quello reale e storico. Ha avuto così occasione di fissare l'attenzione dei matematici su un argomento molto delicato e dibattuto al quale fecondi risultati erano già stati dati da Peano, Cipolla, Soschino, Enriques, Castelnuovo, per citare solo matematici italiani.

Subito dopo in una Nota inserita nei « Rendiconti del Circolo matematico di Palermo », tenuto conto che sopra una superficie si possono chiamare linee di equidistanza obliqua, secondo l'angolo w , da una data curva C , le linee luogo degli estremi dei segmenti geodetici di lunghezza costante spiccati dai singoli punti di C , da una stessa parte di essa e formanti col verso positivo di C angoli dello stesso verso eguali a w , rispose alla domanda: quando tali linee di equidistanza obliqua da C sono geodeticamente parallele? ossia coincidono con le linee di equidistanza ortogonale da C ? e pervenne al risultato che ciò avviene se la superficie è applicabile sopra una superficie di rotazione e C è curva di egual curvatura totale sulla superficie. Nel caso poi che la superficie sia a curvatura totale costante, necessita che C sia a curvatura geodetica costante sulla superficie, condizione questa incidentalmente dimostrata dal Severi nella Nota « sulla curvatura delle superficie e varietà »

(1917), dove è anche precisato — con procedimenti semplici ed eleganti — rispetto a quali ordini infinitesimali sia lecita la sostituzione di elementi metrici d'un intorno d'una superficie qualunque con elementi metrici di una sfera o pseudosfera. Il Mineo affrontò anche questa questione e raggiunse direttamente lo scopo per mezzo di sviluppi in serie i quali forniscono pure le relazioni che passano tra gli elementi di un triangolo geodetico tracciato sopra una superficie qualunque e le coordinate curvilinee dei suoi vertici.

Il Bonnet, ricercando gli estremi delle corde di una ellisse che risultano normali all'ellisse stessa in uno dei suoi estremi, trovò che, quando il minimo assoluto è dato da quattro corde normali in punti che non sono vertici della ellisse, gli altri estremi delle anzidette corde si trovano sulla evoluta dell'ellisse («Nouvelles Annales», 1843). Il Mineo in una breve Nota del 1929 generalizzò la questione estendendola alle superficie.

A questi studi di carattere geometrico fanno degna corona poi alcuni di carattere analitico aventi per oggetti: il problema delle prove ripetute, le funzioni sferiche di Laplace d'ordine n , ricerche sui polinomi di Legendre, ecc.

Nel campo della Meccanica nel ventennio 1930-1950 il Mineo ha affrontato e risolto importanti problemi, fra i quali non vanno taciuti i due seguenti: *a*) il moto dei sistemi soggetti a vincoli unilaterali senza attrito esprimibili per mezzo di inequazioni in forma finita, dove dimostrò che la relazione simbolica della dinamica (nella forma consueta) basta alla risoluzione del problema del moto ed è perfettamente equivalente al principio della minima costrizione di Gauss; *b*) modo di variare dell'energia di accelerazione del moto maggiormente impedito, con la dimostrazione che, sotto certe ipotesi, l'energia anzidetta decresce, a ogni nuovo impedimento, per tutti quei moti nei quali i punti del sistema hanno tutti accelerazioni costanti.

Nel 1932 in una Nota Lincea, ricordato che il Volterra partendo dalla ipotesi molto generale di densità positive, finite ed integrabili, dimostrò la impossibilità di una stratificazione per ellissoidi omotetici per le masse fluide eterogenee rotanti in equilibrio relativo; affrontò ex-novo il problema, ammettendo sempre densità verificanti l'equazione di Poisson, dando una dimostrazione semplicissima della impossibilità di una stratificazione nel senso dianzi detto, senza bisogno di introdurre le linee di forza ed il Teorema di Bruns, essendo sufficiente soltanto escludere che al centro dell'astro la densità possa divenire infinita o essere inferiore alla densità media dell'astro stesso.

Subito dopo ritenne opportuno precisare una importante relazione dovuta a Wavre, tra densità, stratificazione e gravità, onde evitare applicazioni non legittime. Stabili così le equazioni differenziali delle linee di forza, mostrando nel contempo come si possa dare l'espressione effettiva della relazione di Wavre e come essa possa costituire una utile condizione necessaria per la cercata configurazione di equilibrio.

In questo ordine di idee presentò alcune interessanti considerazioni sui due problemi: quello molto attraente delle figure di equilibrio delle masse

fluide rotanti (omogenee o non omogenee) che ha occupato i più grandi geometri ed analisti (MacLaurin, Jacobi, Poincaré, Liapounoff, Pizzetti ed altri) e che è ben lontano dall'essere risoluto; e quello assai più semplice e limitato, e che si può considerare chiuso, dovuto allo Stokes, della determinazione della forma della Terra per mezzo di misure gravimetriche.

Nel campo astronomico rese più precisa in un punto essenziale una dimostrazione, dovuta al Darboux, d'un teorema del Bertrand, fondamentale nella teoria del moto reale dei sistemi binari (o multipli) di stelle.

Occupandosi della determinazione indiretta della differenza di longitudine astronomica, per mezzo di una latitudine e di azimut reciproci osservati, pervenne, fra l'altro, ad una formula analoga a quella stabilita da Poincaré.

Nelle «Memorie della Società Astronomica Italiana» si trovano due Note del Mineo, una relativa alla migliore distribuzione delle stelle nel metodo generale delle altezze eguali; l'altra, sulla determinazione della precisione della latitudine della specola della Martorana in Palermo, osservata per mezzo dell'astrolabio di Claude e Driencourt. Queste due Note contengono acute osservazioni critiche atte a riportare sulla giusta via taluni problemi che nascono nel caso che si tratti di determinare con ogni precisione l'uno o l'altro dei due elementi: latitudine o tempo locale.

In una di queste due Note, per chiudere una grossa polemica sull'uso degli strumenti portatili, si avvalse dei risultati delle osservazioni effettuate da diversi operatori nelle spedizioni Tilho nei territori dello Tsad (1908); nel Tibesti, Barku, Ennedi (1913-17); nella spedizione Schwartz nella Costa dell'Avorio (1911) e nella Guinea (1912); nella ricognizione del Sahara occidentale (1920-21), ed in molte altre spedizioni nell'Angola, nella Bolivia, nel Perù, nell'Algeria, ecc. e concluse che nessuno strumento può competere con l'astrolabio a prisma sia per rapidità, nella preparazione della stazione, sia nelle misurazioni e nei calcoli definitivi, sia ancora per la precisione conseguibile. La Nota è del 1922; dopo quarant'anni possiamo dire che le conclusioni del Nostro hanno trovato negli ingegneri geografi francesi piena soddisfazione.

Nel campo della Geodesia teoretica il Mineo ha dato contributi magnifici con un gruppo di lavori, di cui ognuno si può ritenere come continuazione del precedente, il che dimostra la continuità di pensiero. Il primo di questi lavori porta il titolo «Sulle superficie riferite ad un sistema geografico e sulla determinazione intrinseca del Geoide» ed è del 1910. In relazione a ricerche del Venturi, di Christoffel, di Pizzetti e di Viterbi il Nostro in questa Memoria si propose di determinare i valori dei coefficienti D , D' , D'' della seconda forma fondamentale della superficie, esprimendo per essi tutti gli altri elementi della superficie. La questione, così bella ed attraente, ha portato il Mineo allo studio, con una certa ampiezza, dei sistemi geografici sopra una superficie qualunque (non sviluppabile) esprimendo i simboli di Christoffel per mezzo dei coefficienti D , D' e D'' tra i quali passano le due ben note relazioni del Codazzi e stabilendo con tutta generalità un sistema completo di formule. A niuno può sfuggire la utilità anche pratica di queste ricerche

che permettono l'impiego dei particolari sistemi curvilinei costituiti dalle coordinate geografiche, le quali, servendosi di misure, permettono di scoprire relazioni tra coordinate cartesiane e coordinate geografiche della superficie geoidica sconosciuta. Nel problema della determinazione intrinseca della superficie geoidica, dimostrò che determinati i coefficienti D , D' e D'' la ricerca della equazione della superficie è ricondotta, teoricamente almeno, alle quadrature; le misure delle quali il Nostro suppose di disporre sono quelle astronomiche di latitudine, di longitudine e di azimut e l'operazione geodetica di misura di basi.

Successivamente, tenendo altra via da quella assai faticosa ed indiretta seguita da Bessel, e poi dal Pucci, il Mineo si propose di dare un sistema di formule più complete non solo, ma più generali, per il paragone delle due superfici: ellissoidica e geoidica, argomento questo della massima importanza nello studio delle deviazioni della verticale.

In considerazione del fatto che il Teorema di Dalby è stato qualche volta utilizzato per la determinazione, mediante calcolo, della longitudine astronomica di un punto P rispetto ad altro punto Q , quando siano noti gli azimut reciproci dei due punti e la latitudine astronomica di P ritenendo — ben inteso — sufficientemente piccola la distanza geodetica dei punti medesimi, il Mineo effettuò una minuta analisi per stabilire fino a qual punto il procedimento si possa ritenere legittimo.

Si occupò subito dopo della risoluzione di una classe notevole di problemi di trigonometria sferoidica, istituendo nuovi sviluppi utilissimi specialmente nella geometria dell'ellissoide rotazionale terrestre per archi di linee geodetiche comprese nel campo di Weingarten.

Sulla determinazione intrinseca del geoide, il Mineo ritornò dieci anni più tardi in una Memoria della « Società Astronomica ». Ricordando gli ultimi studi di Reina, si occupò dapprima della questione della lunghezza da dare ai lati della rete, sostituendo poi al sistema proposto da questo Autore un sistema più semplice, più adatto allo scopo, dimostrando che non sono necessarie, come si era ritenuto finora, le determinazioni di azimut astronomico in ogni vertice della rete, bastandone una sola per l'orientamento della rete stessa. La Memoria è chiusa da un quanto mai opportuno confronto fra il metodo intrinseco e quello classico.

Proseguì i suoi studi assumendo come punti corrispondenti, sulla superficie S e sull'ellissoide terrestre, due punti situati su una stessa normale di S , ammettendo che l'angolo delle normali alle superficie in due punti corrispondenti sia una piccola quantità della quale si possa trascurare il quadrato. Confrontò in questa ipotesi gli elementi metrici di S con i corrispondenti ellissoidici, studiando in particolare le trasformate ellissoidiche delle geodetiche di S , facendo da ultimo una applicazione della Teoria alla determinazione del geoide per mezzo delle deviazioni dalla verticale, ponendo questa determinazione su fondamenti più rigorosi.

Tenendo poi conto del fatto che esistono parecchi ellissoidi locali di riferimento, si può dire uno per ogni nazione, anche se aventi le medesime dimen-

sioni, a partire dai quali si possono costruire porzioni di geoide, il Mineo fece notare che non è possibile, in generale, ridurre tutti questi ellissoidi ad un ellissoide unico senza generare tra geoide e questo unico ellissoide deviazioni molto più forti che non siano quelle esistenti fra le varie porzioni del geoide ed i relativi ellissoidi parziali e senza produrre nelle varie reti di triangolazioni cambiamenti oltrepassanti di gran lunga gli errori di osservazioni. Egli era del parere che soltanto l'esperienza può decidere se due o più ellissoidi di riferimento siano riducibili ad uno solo entro i limiti degli errori di osservazione; in questo senso presentò formule elementari e semplici che permettono tale decisione e possono dar luogo a verifiche e a ricerche teoriche della massima importanza ai fini geodetici.

In seguito stabilì le formule atte al passaggio da uno ad un altro degli ellissoidi locali relativi a una data regione del geoide e sulle conseguenti variazioni delle coordinate ellissoidiche dei vertici della rete geodetica. Siamo qui intorno al 1940, epoca, nella quale la Commissione Geodetica Italiana aveva in discussione non solo il cambio dell'ellissoide di riferimento (da quello di Bessel finora utilizzato a quello internazionale, accettato dalla Unione Geodetica e Geofisica Internazionale) per i lavori della cartografia ufficiale costruita dagli Enti dello Stato: Istituto Geografico Militare, Istituto Idrografico della Marina, Amministrazione del Catasto, ma altresì il cambio dell'origine delle coordinate, da Genova a Monte Mario (Roma). In questa occasione fra l'altro il Mineo fornì formule assai semplici per la risoluzione dei due problemi.

L'attenzione del Mineo è stata poi attratta da un problema posto da Christoffel, ma non risoluto, concernente la determinazione delle superficie sulle quali il triangolo geodetico ha un semplice grado di mobilità: Il problema stesso è stato affrontato da Weingarten il quale fornì una risoluzione che secondo Mangoldt non era esauriente; Mangoldt trovò che le superficie in questione sono unicamente quelle applicabili su superficie di rotazione e pervenne a questo risultato per mezzo di numerosi, lunghi e laboriosi sviluppi in serie. Il problema venne poi considerato anche da Darboux, che con ingegnose considerazioni geometriche, semplificò il procedimento. Nel 1950, in una Nota Lincea, il Nostro presentò la risoluzione del problema, dimostrando che il risultato si può raggiungere rapidamente e semplicemente senza che, *ad hoc*, sia necessario alcun calcolo. Successivamente diede la risoluzione del problema della determinazione delle superficie sulle quali la famiglia delle linee di eguale longitudine (rispetto ad una data direzione) risulta una famiglia di geodetiche.

Parallelamente a questa bella, superba, attività geodetico-geometrica, con la quale il Nostro ha indicato la via rigorosa da seguire nella risoluzione dei più importanti problemi dell'alta geodesia, troviamo sviluppata altra attività, pure meritevole della massima considerazione, nel campo della Geodesia meccanica.

Sulla distribuzione della massa nell'interno di un corpo in corrispondenza ad una assegnata azione esterna, il Mineo, completando due belle

ricerche del Pizzetti e del Lauricella, dimostrò che, modificando in modo semplice la considerazione fondamentale del Pizzetti, si possono per altra via ottenere quante si vogliano distribuzioni di massa, in relazione alla assegnata azione esterna non nulla. Ne fece poi applicazione ad un caso importante per la Geodesia: quello di un pianeta che ammette come superficie di equilibrio esteriore un ellissoide a tre assi, dotato d'un moto rotatorio uniforme, attorno ad uno dei suoi assi, e di massa totale conosciuta.

Successivamente dimostrò come si possa stabilire rigorosamente lo sviluppo della funzione potenziale esterna di un pianeta, mediante l'impiego di funzioni sferiche (d'una sola variabile) e come se ne possano calcolare agevolmente i coefficienti con quell'approssimazione che si vuole. Determinato lo sviluppo della funzione potenziale, il Mineo passò alla determinazione dell'accelerazione di gravità alla superficie del pianeta, ed osservò che il metodo indicato può essere opportunamente adoperato anche nel problema inverso, che consiste nel cercare di risalire dalla forma di accelerazione di gravità alla equazione d'uno sferoide di dato tipo.

Questo problema, come è noto, fu posto e risolto dallo Stokes, in particolari ipotesi e dentro una certa approssimazione. Ora nei casi che hanno reale importanza nella Teoria della figura della Terra, e nella ipotesi che lo sferoide terrestre sia di rotazione, il metodo seguito dal Nostro appare anche vantaggioso nella trattazione del problema inverso, non solo perché applicabile in ipotesi più generali delle consuete, ma anche perché le equazioni dalle quali dipende la determinazione delle costanti, che entrano nell'equazione dello incognito sferoide, risultano più semplici di quelle alle quali conducono i metodi adoperati dallo Helmert (1884) e dall'Almansi (1917).

Su questo stesso argomento, una Nota di Brillouin, poggiata anziché sul procedimento indicato dallo Stokes, su un procedimento fondato sull'uso della funzione di Green-Neumann, diede lo spunto al Mineo per dimostrare l'irrazionalità di tale applicazione; inoltre il Nostro osservò come una formula alla quale arrivò il Brillouin, nell'approssimazione di Stokes, si riduce a una equazione di Fredholm; risultato questo non nuovo, in quanto il Signorini già quindici anni prima aveva dimostrato (in una Nota Lincea) che il problema di Stokes è riconducibile a una equazione integrale di Fredholm, ch'egli ha del resto elegantemente integrato, ritrovando la formula di Stokes.

Nel contempo il Mineo esaminò anche il metodo proposto da Buchwaldt (1922) che ha stretta analogia con quello del Brillouin, ed in tale occasione presentò un complesso di formule e di considerazioni atte a mettere in luce come nella mente del Nostro la visione generale della questione risulti proiettata nel tempo e nello spazio in un'epoca in cui si potranno utilizzare le misure gravimetriche effettuate in numero notevole in mare e sui continenti con procedimenti più spediti di quelli pendolari.

Egli prevede insomma quanto avviene attualmente; fornì agli operatori il formulario per la risoluzione del fondamentale problema della Geodesia, per mezzo di misure di gravità, distribuite queste su tutti i mari e su tutti i

continenti e corrette soltanto secondo la teoria matematica, prescindendo, per quanto si riferisce alla distribuzione delle masse interne terrestre, da qualunque ipotesi in genere e dalla ipotesi isostatica in particolare.

La Teoria esige soltanto che le masse esterne al geoide vengano sostituite con altre masse interne al Geoide e che abbiano su questo lo stesso potenziale per la qualcosa basta, il più delle volte, un semplice rovesciamento delle masse esterne.

Con particolare riferimento a taluni studi di Poincaré, di Callandreau, e di Viterbi, il Mineo dimostrò che il problema di dedurre dalla totalità delle deviazioni della verticale lo scostamento lineare del Geoide è problema prettamente geometrico. In tale occasione stabilì la formula nella consueta approssimazione, ammettendo che la superficie di partenza sia uno sferoide di rotazione poco differente da una sfera.

Un altro problema, molto importante del resto, che si collega a quelli esposti e discussi dal Mineo con spirito critico, ma costruttivo, è quello concernente le distribuzioni di massa nell'interno della Terra compatibili con i valori della gravità in superficie.

In una Memoria inserita negli Atti dell'Accademia delle Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo, il Mineo passò in rassegna i contributi di Stokes, Schiapparelli, Pizzetti, Lauricella, Crudeli, Brillouin, Laura, e considerò i casi in cui la superficie esteriore di equilibrio coincide con un ellissoide a tre assi, o con un ellissoide a due assi, riducendo le formule trovate alla approssimazione così detta di Clairaut. Egli ha avuto così occasione di mettere in luce quanta arbitrarietà resti per la densità interna senza che avvengano alterazioni sulla azione esterna o sulla gravità alla superficie del pianeta.

Richiamò l'attenzione dei geodeti a non sbizzarrirsi in ricerche di ipotesi a priori sulla variazione della densità interna, ma di considerare soltanto quelle che hanno un significato fisico: idrostatico, elastico, geologico; in particolare le ipotesi che tengono conto dei principi idrostatici hanno importanza perché discendono dall'ipotesi plausibile d'una configurazione d'equilibrio del pianeta raggiunta in un probabile stato iniziale di fluidità e press'a poco conservata nella successiva solidificazione.

In un certo numero di Note il Mineo precisò in quali ipotesi e con quale approssimazione vale il Teorema di Stokes relativo alla determinazione della forma della Terra per mezzo di misure di gravità ed in merito anzi esaminò la approssimazione di talune formule cui è pervenuto il Somigliana nella sua « teoria del campo gravitazionale terrestre », pubblicata in numerose Note e in Atti di diverse Accademie e nelle « Memorie della Società Astronomica italiana », pervenendo alla conclusione che – al momento attuale – date le precisioni con le quali si possono effettuare le misure – il *paradosso* della determinabilità delle dimensioni della Terra con sole misure di gravità – senza eseguire alcuna misura lineare sul terreno – è insostenibile.

In una Memoria pubblicata negli « Annali di Matematica pura ed applicata » il Mineo pose in termini rigorosi il problema della riduzione delle misure di gravità a superficie di equilibrio terrestre, in parte esterna e in parte interna

alle masse attraenti, mettendo in rilievo le difficoltà analitiche del problema, e sottoponendo a discussione la prassi seguita per la riduzione delle misure di gravità al geoide.

Nel campo della Geodesia pratica, allo scopo di continuare le ricerche sul coefficiente di rifrazione in Sicilia, iniziate presso il Gabinetto di Geodesia di Palermo sino dal 1893 dal Venturi e continuate poi dal Soler, il Mineo effettuò il calcolo delle posizioni geodetiche dei due nuovi segnali di Ciancardo e Valguarnera nelle vicinanze di Palermo collegati a quattro altri vertici: Martorana, Monte Cuccio, Monte Alfano, Monte Pellegrino, inclusi nei rilievi dello Istituto Geografico Militare. Ebbe così anche occasione di effettuare la compensazione di tutta la rete col metodo dei minimi quadrati.

Nuovi studi sulla rifrazione atmosferica in Sicilia vennero eseguiti dal Mineo nel 1908 lungo le traiettorie Martorana-Valguarnera, Martorana-Ciancardo; nel 1914 tra Valverde-Valguarnera e Valverde-Ciancardo; nel 1918 tra l'Osservatorio Astronomico di Palermo e Valguarnera. In una Memoria inserita nel « Giornale della Società di Scienze Naturali ed Economiche di Palermo », Egli sottopose a commento, non solo le sue osservazioni, ma anche quelle di Venturi, Soler ed altri, effettuate lungo le traiettorie della rete dianzi accennata, comprendenti vent'anni di osservazioni eseguite in tutti i mesi dell'anno per un complesso di circa 6700 distanze zenitali.

Nell'ambito delle determinazioni di gravità relativa mediante l'apparato Sterneck il Mineo, su incarico del Venturi per rispondere ad un quesito posto dalla Commissione geodetica italiana, effettuò nel biennio 1911-1912 molte misure allo scopo di determinare l'influenza della variazione della temperatura che avviene nella cella nella quale si fa oscillare il pendolo durante la misura delle coincidenze. Allo scopo di svelare variazioni di temperatura non sentite probabilmente dai termometri a lungo bulbo dei quali è corredato l'apparato Sterneck, il Mineo adoperò delle pile termoelettriche collegate in serie. La corrente, generata da una differenza di temperatura tra le due facce della pila, veniva misurata da un galvanometro a quadro mobile (e letture effettuate col metodo di Poggendorf). In condizioni più sfavorevoli possibili il Mineo ha riscontrato differenze di temperatura nei corpi inseriti nella cella di appena 13 millesimi di grado Celsius. Questa differenza di temperatura attribuita al pendolo durante le oscillazioni produceva una variazione della durata di oscillazione del pendolo in bronzo (tipo Sterneck) di 0,7 unità della settima cifra decimale del secondo e quindi una variazione di circa 2,3 unità del decimo di milligal. Il Mineo esclude nella maniera più assoluta che la radiazione del muro « sia pure esterno », al quale viene fissato l'apparato, possa influire sensibilmente sulle durate delle oscillazioni pendolari e concluse affermando - in base ai dati sperimentali - che i dubbi accampati contro la mensola a muro, per quel che si riferisce alla temperatura, si sono dimostrati assolutamente insussistenti.

Per invito del compianto prof. Fabiani l'Istituto di Geodesia diretto dal Mineo, nel 1920 e negli anni seguenti, diede la sua collaborazione alla determinazione di gravità relative pendolari per le ricerche geofisiche per

l'esplorazione della Sicilia, per le quali lo stesso Fabiani precisò il programma nella primavera 1929.

In queste misure il Mineo è stato coadiuvato dal suo assistente dott. Gullotta e dal prof. Tortorici, allora incaricato dell'insegnamento della Topografia nella Facoltà di Ingegneria dell'Università di Palermo. L'Istituto diretto dal Mineo effettuò 16 misure nel biennio 1929-30 e di queste diede referenza in una Memoria inserita negli atti della già citata Accademia di Palermo.

Anche in questa relazione non manca il suo spirito critico con appunti molto convincenti su taluni metodi entrati nella prassi comune. Egli difatti ricordò che alcuni osservatori danno un valore medio *teorico* delle durate di oscillazione dei pendoli fondato su tutte le osservazioni, ma che sovente gli errori medi *concreti* di serie di misurazioni risultano tripli di quell'error medio teorico. Lamentò pure che gli osservatori parlano talvolta di variabilità dei pendoli nella stessa stazione o nel passaggio da una stazione alla successiva, ammettendo ipotesi diverse dalla proporzionalità, ma non meno arbitrarie, per correggere le eventuali differenze, dato che il metodo di determinazione della gravità relativa è fondato sulla invariabilità dei pendoli. Se questa invariabilità non esiste, dice il Nostro, è meglio allora abbandonare il metodo. Mise in dubbio anche le formule ed i procedimenti in uso per la determinazione della flessione della mensola ed esaminò con spirito critico l'importante questione « riduzione dei valori osservati della gravità » proponendo nuovi procedimenti. Forse si finirà - Egli scrisse - con l'abbandonare ogni schema teorico per studiare in sé la distribuzione effettiva della gravità sulla Terra, *quale essa è*. E in verità quello che importa - proseguì il Nostro - è che le determinazioni si estendano sempre più in tutto il globo, e che in terraferma siano eseguite in opportune stazioni gravimetriche, dove le osservazioni in avvenire possano essere ripetute. Ed è proprio questo - come già si ebbe occasione di ricordare - che viene effettuato oggi nel mondo intero sotto la guida della Associazione geodetica internazionale.

Nel *campo cartografico* il Mineo ha considerato una particolare rappresentazione denominata « isodromica » introdotta dal Venturi dimostrando fra l'altro che il problema di assegnare le formule di ogni rappresentazione isodromica di una superficie S su di un'altra S' , si può ricondurre alle quadrature tutte le volte che alle quadrature si riduce la determinazione delle lossodromiche di S rispetto alla famiglia qualunque di linee prescelta.

Su questa particolare rappresentazione ritornò il Mineo recentemente (anno 1958) in una Nota Lincea per porre esattamente il problema in quanto delle due equazioni date dal Venturi una è estranea al problema e per risolvere le relative equazioni necessarie e sufficienti per l'isodromia, che corrisponde ad una generalizzazione molto elegante della rappresentazione conforme. Come per quest'ultima, la ricerca dipende dal trovare due funzioni armoniche una delle quali si può assegnare ad arbitrio, mentre l'altra resta una conseguenza determinata (salvo una costante arbitraria).

Non vanno da ultimo dimenticati gli studi sulle rappresentazioni geografiche di una superficie sopra un'altra, che si realizzano allorché risulta

stabilita tra esse una corrispondenza puntuale biunivoca in modo che nei punti corrispondenti i piani tangenti alle due superficie siano paralleli. Problema questo già risoluto da Christoffel nel caso di rappresentazione conforme, il che getta luce sull'ardua ricerca delle superficie a linee di curvatura isoterme. Il Nostro riesce a stabilire le proprietà generali di queste rappresentazioni e risolve altre questioni che nascono dalla generalizzazione delle note proprietà della rappresentazione sferica di Gauss.

Recentemente poi si occupò di alcune questioni di geodesia intrinseca e delle proprietà generali delle rappresentazioni cartografiche.

Il Mineo è stato sempre, ma specialmente negli ultimi anni, particolarmente legato alle sue « Conferenze sulla geometria non euclidea » e, fatto singolare, aveva quasi ultimata la revisione delle bozze, quando venne a mancare.

La geometria non euclidea iperbolica, secondo la superba interpretazione del Beltrami, non è sostanzialmente che la geometria euclidea della pseudosfera e si può per questa via presentare in modo semplice ed elementare. Così ha fatto il Mineo. Lo studio della geometria pseudosferica nelle sue « conferenze », è reso più agevole per mezzo di una rappresentazione piana conforme della superficie, che può essere intesa come « una immagine euclidea » della geometria iperbolica.

Le sue ricerche in questo campo sono state poi continuate dalle sue allieve Trevale, Santerelli, Tortorici, ecc. La prima delle quali attraverso le note immagini euclidee dei cicli, oricicli e ipercicli, della geometria piana iperbolica, ha dimostrato le proprietà di questi luoghi pervenendo alla rettificazione del ciclo e di archi di oricicli e di ipercicli, mentre la seconda si è occupata della costruzione di un sistema di figure e di relazioni che costituiscono una immagine euclidea del piano proiettivo iperbolico, e la Tortorici ha dato una dimostrazione analitica del teorema del rapporto tra proiezione ortogonale di un segmento e segmento obiettivo nel piano iperbolico anche nel caso di rette non secanti, completando così le ricerche del Maestro.

Questa la bella e vasta produzione scientifica di Corradino Mineo. Con Renato Calapso possiamo ben dire che negli scritti del Nostro si può ammirare la grande semplicità dei mezzi con cui Egli è sempre riuscito a superare questioni più difficili, rendendo facili, e nel contempo rigorose, risoluzioni di altri autori, sui problemi di fondamentale importanza per il progresso specialmente della Geodesia. Come è stato detto egli fu un « isolato »; così attestano anche i suoi allievi prediletti: Gulotta che gli è succeduto alla Cattedra di Geodesia a Palermo e Chiara, che si è dedicato alla Astronomia. Nell'isolamento egli ha potuto meditare sui problemi che ha attaccato sempre con sicurezza e che costituiscono le più difficili, delicate e importanti questioni relative al problema della determinazione della forma e grandezza della Terra. Dato questo suo intimo, personale, rigoroso lavoro, mal sopportava facili improvvisazioni nel campo scientifico. Le Note e le Memorie di altri Autori egli esaminava con spirito critico e la critica è stata sempre costruttiva, come risulta dalle numerose Memorie che riguardano problemi consi-

derati da altri. Di carattere piuttosto impetuoso, partecipava talvolta alle discussioni scientifiche con vivace energia, ma certamente non era capace di conservare rancori; operando in questo modo riteneva compiere il suo dovere verso la scienza.

Noi, ricordandolo, rammenteremo il suo grande amore per la Scienza e il suo lavoro, lavoro di primo piano che lo ha posto fra i più grandi geodeti contemporanei.

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI DI CORRADINO MINEO ⁽¹⁾.

1. - *Sopra una classe di superficie unicursali*, «M.P.A.», vol. I, 1901.
2. - *Sulla curva luogo dei punti di contatto delle superficie d'un fascio di ordine n con le superficie d'un fascio di ordine n'* , «C.M.P.», t. XVII, 1903.
3. - *Sul luogo dei punti parabolici delle superficie di un fascio*, «C.M.P.», t. XXI, 1906.
4. - *Calcolo delle posizioni geodetiche dei nuovi segnali di Ciancardo e Valguarnera nelle vicinanze di Palermo*, «G.S.P.», t. XXV, 1907.
5. - *Le antiradiali del cerchio*, «C.M.P.», t. XIV, 1907.
6. - *I numeri razionali secondo Bertrand Russel*, «P.M.», 1910.
7. - *Sulle superficie riferite a un sistema geografico e sulla determinazione intrinseca del Geoide*, «G.M.B.», vol. XLVIII, 1910.
8. - *Sistemi geografici sulle superficie*, «P.M.», 1910.
9. - *Sulle formule fondamentali per il confronto della superficie geoidica con l'ellissoide besseliano*, «G.M.B.», vol. XLIX, 1911.
10. - *Di una applicazione del teorema di Dalby*, «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», vol. XLVII, 1911-12.
11. - *Logica e matematica*, «R.F.», Anno III, Fasc. I, 1911.
12. - *Sulle rappresentazioni isodromiche*, «R.A.L.», vol. XX, 1911.
13. - *Sulle rappresentazioni isodromiche*, Nota II, «R.A.L.», vol. XX, 1911.
14. - *Su una deduzione della legge di frequenza degli errori*, «Zeitschrift für Mathematik und Physik», B. 61, 1913.

(1) Abbreviazioni:

- A. - Archimede - Organo della S.U.S.M. Palermo.
 A.A.C. - Atti Accademia Gioenia di Scienze Naturali di Catania.
 A.A.P. - Atti Accademia di Scienze Lettere ed Arti di Palermo.
 A.M. - Annali di Matematica pura e applicata. - Pisa.
 B.U.M.I. - Bollettino dell'Unione Matematica Italiana - Bologna.
 C.M.C. - Circolo Matematico di Catania.
 C.M.P. - Circolo Matematico di Palermo (Rendiconti).
 G.M.B. - Giornale di Matematiche di Battaglini - Napoli.
 G.S.P. - Giornale della Società di Scienze Naturali ed Economiche di Palermo.
 M.P.A. - Matematiche pure ed applicate - Città di Castello.
 M.S.A.I. - Memorie della Società Astronomica Italiana - Milano.
 O.A.P. - Osservatorio Astronomico di Palermo (Pubblicazioni) - Nuova Serie.
 P.M. - Periodico di Matematiche - Bologna.
 R.A.I. - Rendiconti dell'Accademia d'Italia - Roma.
 R.A.L. - Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei - Roma.
 R.F. - Rivista di Filosofia - Organo della Società Filosofica Italiana.
 S.I.F.E.T. - Bollettino Società di Fotogrammetria e Topografia - Roma.
 Q.J.M. - The Quarterly Journal of Mathematics - Oxford.

15. — *Sur la détermination indirecte de la différence de longitude astronomique au moyen d'une latitude et de deux azimuts réciproques observés*, « Bulletin Astronomique », t. XXX, Paris, 1913.
16. — *Sull'influenza della temperatura nelle determinazioni di gravità relativa mediante l'apparato di Sterneck*, « Nuovo Cimento », Bologna, 1913.
17. — *Sui problemi della trigonometria sferica*, « A.A.C. », vol. VII, 1914.
18. — *Rettifica al calcolo numerico contenuto nella Nota: « Sui problemi della trigonometria sferoidica »*, « A.A.C. ».
19. — *Il continuo matematico*. Logos, « Rivista internazionale di Filosofia », 1914, fasc. II.
20. — *Sul concetto di numero reale e su una teoria elementare di questi numeri*, « P.M. », Anno XXX, 1914.
21. — *Commemorazione di Adolfo Venturi*, « G.S.P. », vol. XXXI, 1915.
22. — *Sulla distribuzione della massa nell'interno di un corpo in corrispondenza a un'assegnata azione esterna*, « R.A.L. », vol. XXIV, 1915.
23. — *Una osservazione sul calcolo di alcuni valori probabili nelle prove ripetute*, « P.M. », Anno XXXII, 1917.
24. — *Un teorema sulle linee di equidistanza obliqua da una data curva sopra una superficie*, « C.M.P. », t. XLIII, 1918-19.
25. — *Sopra un caso limite notevole di triangoli geodetici*, « R.A.L. », vol. XXVII, 1918.
26. — *Nuova soluzione del problema inverso del trasporto delle coordinate lungo una geodetica*, « R.A.L. », vol. XXIX, 1920.
27. — *Elementi di calcolo delle probabilità e applicazioni*. Tip. Capozzi, Palermo, 1920-21.
28. — *Latitudine della Specola della Martorana in Palermo per mezzo dello Astrolabio di Claude e Driencourt*, « M.S.A.I. », vol. I, 1921.
29. — *Sulla determinazione intrinseca del Geode*, « M.S.A.I. », vol. II, 1921.
30. — *Sulla migliore distribuzione delle stelle nel metodo generale delle altezze eguali*, « M.S.A.I. », vol. II, 1922.
31. — *Latitudine della Specola della Martorana in Palermo per mezzo dello Astrolabio di Claude e Driencourt*. Nota II, « M.S.A.I. », vol. II, 1922.
32. — *Paragone d'un intorno superficiale con un intorno sferico o pseudosferico*, « C.M.P. », t. XLII, 1923.
33. — *Nuovi studi sulla rifrazione atmosferica in Sicilia*, « G.S.P. », vol. XXXIII, 1923.
34. — *Funzione potenziale esterna di un pianeta del quale sia assegnata una superficie di equilibrio esteriore*, A. 1923.
35. — *Lezioni di Geodesia*, Ed. Capozzi, Palermo, 1923-24.
36. — *Sulle rappresentazioni geografiche d'una superficie su di un'altra*, « C.M.C. », vol. II, 1924.
37. — *Sopra alcune serie di polinomi di Legendre*, « B.U.M.I. », ottobre 1924.
38. — *Teoria degli errori di osservazione*, Arti Grafiche Castiglia, Palermo, 1925.
39. — *Su una proprietà delle funzioni armoniche di spazio e sul cosiddetto problema di Stokes*, « M.S.A.I. », vol. III, 1926.
40. — *Sullo sviluppo rigoroso in serie di funzioni sferiche del potenziale esterno e della gravità superficiale di un pianeta*, « B.U.M.I. », 1926.
41. — *Sulla determinazione del potenziale esterno e della gravità superficiale d'un pianeta per mezzo della teoria delle funzioni sferiche*, « A.A.P. », vol. XIV, 1926.
42. — *Sulla formula di Stokes che serve a determinare la forma della Terra*, « C.M.P. », t. LI, 1927.
43. — *Il valore filosofico del calcolo delle probabilità*. « Logos », « Rivista Internazionale di Filosofia », fasc. III, 1927.
44. — *Il problema della forma della Terra nella scienza positiva e nella speculazione*, « Annuario dell'Università di Palermo », 1927.
45. — *Su una forma analoga a quella di Stokes, per la determinazione del geode con le deviazioni della verticale*, « R.A.L. », vol. XII, 1927.
46. — *Sulla gravità superficiale di un pianeta supposto ellissoidico a tre assi*, « B.U.M.I. », 1928.

47. - *Forma e grandezza della Terra e misure di gravità*, «A.A.P.», vol. XV, 1928.
48. - *Relazione tra i parametri dell'ellissoide terrestre e i valori della gravità*, «R.A.L.», vol. IX, 1929.
49. - *Distribuzioni di massa nell'interno della Terra compatibili con i valori della gravità in superficie*, «A.A.P.», vol. XIV, 1929.
50. - *Distribuzione della massa nell'interno d'un pianeta compatibili con un'assegnata azione esterna*, «B.U.M.I.», 1929.
51. - *Sur l'orientation de l'ellipsoïde équatoriale terrestre*. «Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences», Paris, 1929.
52. - *Di una interpretazione del principio del minimo sforzo di Gauss*, «B.U.M.I.», 1929.
53. - *Misure di gravità ed effettiva determinazione del geoido*, «Unione Geodetica e Geofisica del C.N.R.», 1929.
54. - *Sui massimi e minimi di corde normali a una superficie*, «B.U.M.I.», 1929.
55. - *Sugli apparecchi in uso per la determinazione del campo gravimetrico terrestre*. «Bollettino dell'Associazione Mineraria Siciliana», Palermo 1930.
56. - *Sullo stato dell'Osservatorio Astronomico di Palermo*, «O.A.P.», vol. VI.
57. - *Ricerche intorno al campo gravimetrico della gravità terrestre*, «A.A.P.», 1930.
58. - *On the expansion of the earth's gravity in powers of the square of the sine of the latitude*, «Q.J.M.», vol. I, 1930.
59. - *Sul modo di variare dell'energia di accelerazione nei moti maggiormente impediti*, «B.U.M.I.», 1930.
60. - *Sul modo di variare dell'energia d'accelerazione in certi moti maggiormente impediti*, «B.U.M.I.», 1931.
61. - *Sulle nuove determinazioni di gravità relative in Sicilia e su qualche considerazione generale*, «A.A.P.», vol. XVII, 1931.
62. - *Commemorazione di Michele Gebbia*, «G.S.P.», 1931.
63. - *Errori d'osservazione* (Voce) nell'*Enciclopedia Italiana*.
64. - *Sul moto dei sistemi soggetti a vincoli unilaterali senza attrito esprimibili per mezzo di inequazioni in forma finita*, «B.U.M.I.», 1932.
65. - *Commemorazione di Filippo Angelitti*, vol. XVII, 1932.
66. - *Sull'impossibilità d'un teorema relativo alla forma della Terra*. «A.A.P.», vol. XVIII, 1933.
67. - *On the limits of validity of a theorem of Stokes regarding the figure of the Earth*. «Q.J.M.», 1933.
68. - *Potenziale newtoniano all'esterno d'un astro e stratificazione d'equilibrio*, «Atti della S.I.P.S.», vol. II, 1933.
69. - *Geodesia* (Voce) nell'*Enciclopedia Italiana*.
70. - *Über die Bestimmung der Form eines Planeten durch Schwerekräftmessungen bei nicht Achsendrehung*, «Astronomische Nachrichten», B. 256, Kiel 1935.
71. - *Sulla geometria d'una superficie poco differente da un ellissoide con applicazione al caso della Terra*, «A.M.», t. XIV, 1935-36.
72. - *Sullo stato dell'Osservatorio astronomico di Palermo*, «O.A.P.», vol. VII.
73. - *Il potenziale terrestre e la riduzione dei valori osservati della gravità a una superficie di riferimento*. «A.M.», t. XVI, 1937.
74. - *Sulla impossibilità d'una stratificazione d'equilibrio statica per gli astri fluidi rotanti*, «R.A.L.», vol. XXVI, 1937.
75. - *Sull'riduzione dei valori osservati della gravità all' livello del mare*, «G.S.P.», vol. XXXIX, 1937.
76. - *Conferenza sulla geometria non euclidea*. Scuola tip. «Boccone del Povero». Palermo, 1937.
77. - *Forma d'un pianeta e teoria dei valori della gravità in superficie*, «R.A.L.», vol. XXIX, 1939.
78. - *Forma d'un pianeta dedotta dai valori della gravità in superficie*. Nota II, «R.A.I.», vol. I, 1939.

79. - *Sul passaggio da uno a un altro degli ellissoidi locali relativi a una data regione del geode, e sulle conseguenti variazioni delle coordinate ellissoidiche dei vertici della rete geodetica*, «R.A.I.», vol. II, 1940.
80. - *Sulla possibilità di sostituire un unico ellissoide a due o più ellissoidi di riferimento e sulla determinazione del geode*, «O.A.P.», vol. IX, 1940.
81. - *Sul trasporto d'una rete di triangoli geodetici da uno a un altro degli ellissoidi locali di una data regione del geode*, «G.S.P.», 1940.
82. - *Commemorazione di Emanuele Soler*, «G.S.P.», vol. XXII, 1940.
83. - *Su una dimostrazione di Darboux intorno alle leggi di forza per le quali tutte le traiettorie sono coniche*, «A.A.P.», 1941.
84. - *Su una formula integro-differenziale relativa alle funzioni di Laplace*, «R.A.I.», vol. II, 1941.
85. - *Sulla determinazione della forma d'un pianeta per mezzo di misure di gravità nel caso di rotazioni non lente*, «G.S.P.», vol. XLIII, 1942.
86. - *Superficie dotate di geodetiche che sono eliche su cilindri ortogonali a una direzione fissa*, «R.A.I.», vol. II, 1942.
87. - *Forma d'un pianeta dedotta dai valori della gravità in superficie*, Nota III, «R.A.I.», vol. IV, 1942.
88. - *Stratificazione e linee di forza degli astri fluidi rotanti in equilibrio relativo*, «A.A.P.», 1945.
89. - *Su una condizione necessaria per la stratificazione d'un astro fluido rotante in equilibrio relativo*, «R.A.L.», vol. I, 1946.
90. - *Superficie sulle quali il triangolo geodetico ha un semplice grado di mobilità*, «R.A.L.», vol. IX, 1950.
91. - *Recensione su: André Charrueau: Sur des congruences de droites ou de courbes et sur une transformation de contact liée à ces congruences*, «B.U.M.I.», 1951.
92. - *Teoria idrostatica delle configurazioni d'equilibrio dei pianeti fluidi rotanti e teoria di Stokes nel caso particolare della Terra*, «R.A.L.», 1952.
93. - *Adolfo Venturi, astronomo e geodeta*, «S.I.F.E.T.», 1952.
94. - *Lezioni di Geodesia*. Tip. «Renna», Palermo, 1952.
95. - *In Memoria di Gaspare Mignosi*, «Le matematiche», VII, Catania, 1952.
96. - *Sul modo di risolvere una indeterminazione del problema di Clairaut generalizzato delle configurazioni degli astri fluidi rotanti in equilibrio relativo*, «R.A.L.», vol. XIV, 1953.
97. - *Superficie sulle quali una semplice infinità di geodetiche sono eliche su cilindri ortogonali a una direzione fissa*, «R.A.L.», vol. XVI, 1954.
98. - *Geodesia intrinseca e proprietà generali delle rappresentazioni cartografiche*, «R.A.L.», vol. XVIII, 1955.
99. - *Ancora sulla geodesia intrinseca*, «R.A.L.», vol. XX, 1956.
100. - *Sulle rappresentazioni isodromiche di una superficie sopra un'altra* «R.A.L.», volume XXIV, 1958.
101. - *Conferenze sulla geometria non euclidea*. II edizione. Flaccovio editore. Palermo, 1960.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio Anziano Crocco chiede di essere dispensato dalla presidenza, che viene pertanto assunta dal Collega Cassinis, il quale, dopo il prof. Crocco, è il più anziano tra i Soci Nazionali presenti.

Il prof. Cassinis dà la parola al Socio Boaga che commemora il compianto Collega Corradino Mineo.

Sono presenti i familiari dello scienziato scomparso, il Rettore della Università di Palermo prof. Tommaso Aiello e il prof. Beniamino Gulotta, ordinario di Geodesia in quella Università. Il Preside della Facoltà di Scienze matematiche, fisiche e naturali dell'Ateneo palermitano, prof. Alberto Monroy, impossibilitato ad intervenire alla cerimonia, ha inviato la sua adesione.

Il Socio Anziano Cassinis ringrazia il Collega Boaga per l'elevata orazione e desidera esprimere i sentimenti del suo personale rimpianto per la perdita dell'illustre Consocio, con il quale egli ha sovente collaborato, anche in seno alla Commissione Geodetica Italiana, avendo così modo di apprezzarne l'appassionata opera e i notevoli risultati scientifici conseguiti.

Il Socio Anziano Cassinis conclude rinnovando ai familiari del prof. Mineo l'espressione del più vivo cordoglio dell'Accademia e suo personale ed elevando alla memoria dell'insigne Collega un pensiero di reverente omaggio.

Il prof. Cassinis, costretto ad assentarsi, lascia quindi l'aula ed è sostituito, nella presidenza, dal Collega Bianchi.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Pupilli presenta una monografia del prof. Andrea Devoto dal titolo: « I precedenti psicologici dello schizofrenico », con le seguenti parole:

« Ho l'onore di presentare all'Accademia la monografia che di recente Andrea Devoto ha pubblicata su " I precedenti psicologici dello schizofrenico " ». L'autore tratta il complesso problema della etiopatogenesi della dissociazione mentale, indagando a fondo le strutture dei comportamenti personali e familiari che costituiscono il contesto psicosociale da cui prende forma la personalità dell'individuo. La esposizione di un panorama bibliografico ampio e in modo conveniente ripartito, in cui fanno spicco le indagini di psichiatria e di psicologia sociale portate a compimento da studiosi americani, consente al Devoto d'impostare con grande chiarezza il problema e quindi di valutare con rigore e sorveglianza critica i vari contributi presi in esame.

« I precedenti psicologici dello schizofrenico » sono dapprima lumeggiati mediante un'acuta disamina della essenza e dei modi delle relazioni tra la madre e il bambino nei primissimi anni di vita, relazioni che psicologi di orientamento psicoanalitico hanno di recente considerato come fattori importanti nella edificazione dell'Io normale o psicotico. Una precisa analisi, in modo

particolare per quanto attiene all'aspetto metodologico, è poi fatta sia delle ricerche che hanno contribuito a dare fondamento al concetto di personalità psicotica come struttura reattiva allo stabilirsi d'iniziali relazioni oggettuali, in ispecie negative ed ostili, sia degli studi che hanno attentamente considerato il fattore disposizione. Sicché l'intento del Devoto appare quello d'integrare i risultati dei vari metodi a fine di dare una visione d'insieme dell'arduo problema.

«La definizione del concetto di precedente psicologico e la sua specificità clinica rimangono tuttora di difficile formulazione. Ma senza dubbio va fatto merito al Devoto di avere, col suo scritto critico, efficacemente mostrato quale sia l'utilità operativa di tale concetto per meglio chiarire le "modalità d'ingresso" nella malattia mentale. E sono pregi notabili di questo compiuto saggio la felice ideazione del piano di studio, l'oculato vaglio dei dati bibliografici, la organica esposizione degli argomenti discussi e soprattutto la originalità del tema scelto, che tanto in psichiatria quanto in psicologia genetica ha veramente grande rilevanza».

Il Socio Bianchi ringrazia il Collega Pupilli per l'interessante comunicazione.

Il Segretario Accademico presenta le pubblicazioni pervenute in dono all'Accademia.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci Segre, Sansone (anche per conto del Collega Miranda), Picone, Margaria, Cambi, Tricomi, Bonino, Montalenti, Stefanelli e D'Ancona.

Quest'ultimo, presentando la Nota dei Signori Berti, D'Angeli, Lanzani e Meneghelli, informa la Classe che tale presentazione doveva essere effettuata dal compianto Socio Meneghetti e desidera, in questa occasione, rinnovare un pensiero di affettuoso omaggio alla Sua memoria.

Il Collega Bianchi si associa di cuore, a nome della Classe, e dopo aver ricordato che proprio in questi giorni cade il primo vigesimo della morte dell'insigne e carissimo Consocio, auspica che la fervida opera da Lui svolta, quale Direttore del Centro di Chemioterapia del Consiglio Nazionale delle Ricerche, possa essere continuata dai suoi allievi e costituisca per essi la base fondamentale del futuro lavoro.

Viene letto l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Il Socio Bianchi, dopo aver comunicato che è uscito il fascicolo I dei Rendiconti (gennaio 1961) e che quello del febbraio è già impaginato, constata, con vivo compiacimento, come la pubblicazione stia ora riacquistando il suo ritmo normale che, negli scorsi mesi, aveva subito un rallentamento a causa del ritardo da parte di qualche autore nella restituzione delle bozze.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Socio Bianchi dà notizia che il Collega Pistolesi, membro, con i Soci Crocco e Bozza, della Commissione per la borsa di studio Miranda per l'Ingegneria, ha chiesto, a causa di gravi e inderogabili impegni, di essere sostituito nella Commissione stessa.

La Classe, ad unanimità, designa, in sostituzione del Socio Pistolesi, il Collega Finzi.

CONGRESSI

Il Socio Bianchi informa i Colleghi che la Commissione organizzatrice del Convegno sul tema «Insetticidi ed equilibri biologici», già previsto per i giorni 10 e 11 maggio, ha proposto di rinviare il Convegno stesso all'inizio del prossimo anno accademico.

Avrà invece luogo, nei giorni di lunedì 29, martedì 30 e mercoledì 31 maggio, come precedentemente annunciato, il Convegno Internazionale sulle funzioni della Geologia nelle opere di pubblico interesse.

Il Socio Bianchi comunica inoltre che avrà inizio giovedì 13 corrente, alle ore 11, il Convegno sul tema «Dalla Tribù allo Stato», indetto dalla Classe di Scienze morali, storiche e filologiche, i lavori del quale continueranno nei giorni 14 e 15.

Al Convegno, che si concluderà domenica 16 con la visita all'Abbazia di Fossanova e al Tempio di Giove Anxur a Terracina, sono invitati tutti i Soci Nazionali, Corrispondenti e Stranieri delle due Classi residenti in Italia.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta dell'8 aprile 1961

- BABIĆ Ivo i PAVEŠIĆ Slavko. — *Terminologija veterinarske i humanomedicinskih parazitologije*. Zagreb, Jugoslavenska Akademija Znanosti i Umjetnosti, 1960. Pp. 134, in-8°.
- BRUNI Giordano. — *Gli ammassi nebulari sono disposti analogamente ai coesili di un liquido*. Estr. da «Chimica», 1960, n. 8.
- *Il coesile critico del Propilene*. Estr. da «Idrocarburi», a. VIII, 1959, n. 2.
- *La fase critica del Diisopropile*. Estr. da «Idrocarburi», 1960, n. 6.
- *La fase critica dell'ammoniaca*. Estr. da «Chimica», 1959, n. 2.
- *Il modulo di riempimento dello spazio dedotto dalla coesione dei solidi*. Estr. da «Idrocarburi», a. VII, 1958, n. 10.
- CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE. LABORATOIRES DE BELLEVUE. — *Rapport d'activité. Octobre 1958-octobre 1959*. T. I: *Sciences de la Terre. Physique. Centres d'Analyse et de Techniques Physico-Chimiques*; t. II: *Chimie. Biologie*. S.n.t. Voll. 2, in-8°.
- COLONNETTI Gustavo. — *Proiettili*. Milano, Ulrico Hoepli Editore, 1918. Pp. XI-115, in-8°, con figg. e tavv.
- DEVOTO Andrea. — *I precedenti psicologici dello schizofrenico*. Firenze, Leo S. Olschki - Editore, 1960. Pp. 83, in-8° (Accademia Toscana di Scienze e Lettere «La Colombaria»).
- ISTITUTO IDROGRAFICO DELLA MARINA. — *Radioservizi per la navigazione*. P. II (3ª edizione): *Servizi radiometeorologici del Mediterraneo*. Genova, Tipo-Litografia dell'Istituto Idrografico della Marina, 1960. Paginaz. varia, in-8°, con tavv.
- PAVEŠIĆ Slavko. — Vedi: BABIĆ Ivo i PAVEŠIĆ Slavko.
- Search (A) for faint blue stars*. I: *The North Galactic Pole*; II: *The Hyades and the South Galactic Pole*; III: *Selected Areas*; IV: *The Hyades*; V: *The Ursa Major Region*; VI: *Selected Areas*. Minneapolis, The Observatory University of Minnesota, 1952-56. Pp. 17, in-8°.

A. SIGNORINI e G. COTRONEI.

PREMI IN CORSO DI ASSEGNAZIONE
PRESSO L'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ELENCO DEI CONCORRENTI

ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO DEL MINISTRO
DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE PER LA *MATEMATICA E LA MECCANICA*

(Scadenza 31 dicembre 1960 - Premio L. 4.000.000)

1. AGOSTINELLI CATALDO. — 1. «Sul problema dei tre corpi» (4 copie). — 2. «Sul moto di rotolamento su un piano orizzontale di una sfera pesante a struttura giroscopica rispetto a un diametro». — 3. «Figure di equilibrio prossime all'ellissoide di una massa liquida omogenea attratta da più corpi lontani con la legge di Newton». — 4. «Sull'esistenza di soluzioni periodiche nel problema ristretto dei tre corpi». — 5. «Sulla risoluzione mediante integrali definiti del problema delle vibrazioni di una piastra». — 6. «Piccoli movimenti in una massa gassosa stellare in evoluzione adiabatica». — 7. «Sui sistemi canonici che ammettono particolari classi di soluzioni stazionarie». — 8. «Sistemi di equazioni differenziali normali del 1° ordine che ammettono speciali relazioni invarianti e che interessano il movimento di sistemi anolonomi». — 9. «Nuova forma sintetica delle equazioni del moto di un sistema anolonomo ed esistenza di un integrale lineare nelle velocità lagrangiane». — 10. «Nuove funzioni per la risoluzione dei problemi ai limiti relativi al campo ellittico senza fare uso delle trascendenti di Mathieu». — 11. «Sulle funzioni epicicloidali e loro applicazione ad alcuni problemi di Fisica matematica». — 12. «Su un nuovo procedimento atto a determinare il profilo della sezione retta di un ghiacciaio». — 13. «Ulteriori considerazioni sul movimento di un ghiacciaio e sulla determinazione del profilo di una sua sezione retta». — 14. «Sulla propagazione di onde elettromagnetiche in un tubo conduttore riempito di dielettrico eterogeneo». — 15. «Vibrazioni elettromagnetiche in una cavità riempita di dielettrico eterogeneo». — 16. «Sopra due casi notevoli di integrabilità delle equazioni della propagazione di onde elettromagnetiche in un tubo cilindrico circolare con dielettrico eterogeneo». — 17. «Sulla propagazione di onde elettromagnetiche guidate entro tubi cilindrici». — 18. «Onde elettromagnetiche stazionarie in una cavità ellissoidale a tre assi con involucro metallico perfettamente conduttore». — 19. «Onde elettromagnetiche guidate entro un tubo cilindrico percorso da un fluido dielettrico in moto traslatorio uniforme». — 20. «Sulla propagazione di onde elettromagnetiche in un tubo cilindrico circolare con dielettrico variabile periodicamente secondo l'asse». — 21. «Sulla propagazione di onde elettromagnetiche guidate entro tubi cilindrici con dielettrico eterogeneo». — 22. «Sulle equazioni di Schrödinger integrabili per separazioni di variabili». — 23. «Sulle equazioni delle onde di Schrödinger integrabili per separazione di variabili». — 24. «Soluzioni stazionarie delle equazioni della magneto-idrodinamica interessanti la Cosmogonia» (2 copie). — 25. «Oscillazioni magneto-idrodinamiche in una massa fluida rotante di dimensioni cosmiche di forma ellissoidale rotonda». — 26. «Oscillazioni magneto-idrodinamiche in una massa fluida cosmica uniformemente rotante, dotata di un campo magnetico assiale e di un campo magnetico equatoriale rotante» (2 copie). — 27. «Sulla compatibilità di una forma ellissoidale a tre assi per una massa fluida cosmica rotante, elettricamente conduttrice, immersa in un campo magnetico uniforme». — 28. «Oscillazioni magneto-idrodinamiche in una massa fluida ellissoidale rotante. Influenza della viscosità» (1 copia). — 29. «Su alcuni moti magneto-idrodinamici di una massa fluida cilindrica rotante interessanti la Cosmogonia» (2 copie). — 30. «Onde magnetoidrodinamiche in

una, massa fluida incompressibile cilindrico circolare indefinita». — 31. «Moti magneto-idrodinamici simmetrici rispetto a un asse. Caso delle piccole oscillazioni in una massa fluida sferoidale». — 32. «Turbolenza in magnetoidrodinamica. Lezioni tenute al "Corso sulla teoria della turbolenza"» (1 copia). — 33. «Su alcuni moti magneto-idrodinamici ai quali è applicabile la teoria di Helmholtz sui vortici». — 34. «Figure di equilibrio ellissoidali per una massa fluida elettricamente conduttrice uniformemente rotante, con campi magnetici variabili col tempo». — 35. «Sui vortici sferici in magneto-idrodinamica». — 36. «Su di una classe notevole di figure ellissoidali rotonde di masse fluide magneto-idrodinamiche uniformemente rotanti e gravitanti». — 37. «Sull'equilibrio relativo magneto-idrodinamico di masse fluide elettricamente conduttrici uniformemente rotanti e gravitanti». — 38. «Sul moto di un elettrone veloce in un campo elettromagnetico simmetrico rispetto a un asse». — 39. «Figure ellissoidali di equilibrio relativo magnetoidrodinamico di masse fluide elettricamente conduttrici uniformemente rotanti e gravitanti». — 40. «Sulle equazioni dell'equilibrio adiabatico magneto-dinamico di una massa fluida gassosa uniformemente rotante e gravitante». — 41. «Sull'equilibrio adiabatico magnetodinamico di una massa fluida gassosa gravitante, in rotazione non uniforme». — 42. «Sull'equilibrio radiativo magnetodinamico di una massa gassosa stellare uniformemente rotante e gravitante». — 43. «Sulle superficie d'onda in magnetofluidodinamica». — 44. «Sulla stabilità dei moti magnetofluidodinamici stazionari» (estratti in corso di stampa).

2. BARBATO GIUSEPPE. — «Il ponte della didattica» (5 copie). Con lo stesso lavoro concorre anche al Premio del Ministro della Pubblica Istruzione per le Scienze Sociali e Politiche.

3. BROGLIO LUIGI. — 1. «Il metodo delle forze bilanciate nella scienza e nella tecnica». — 2. «Balance method in advanced aeronautical structures analysis». — 3. «The Balance method applied to swept-wing stress analysis». — 4. «Una soluzione esatta per piastre rettangolari libere caricate lateralmente». — 5. «Exact solution for cantilever plates of whichever trapezium planform and of variable thickness» (2 copie). — 6. «The calculation of stresses for the shell of translation». — 7. «Sul calcolo delle velocità critiche delle ali». — 8. «Problemi di vibrazioni nelle strutture dei velivoli ad alta velocità». — 9. «A method for solving dynamic problems of modern transonic and supersonic wings». — 10. «Balance method in thermal stress analysis» (1 copia). — 11. «Alcuni contributi all'analisi della conduzione del calore e degli sforzi termici nelle strutture dei velivoli e dei missili». — 12. «Heat conduction in solids at hypersonic speeds». — 13. «Anisotropic composite thermal structures for hypersonic flight». — 13 bis. «Strutture composite ed anisotrope per il volo ipersonico». — 14. «Transient temperatures and thermal vibrations in space structures». — 15. «Similar solutions in re-entry lifting trajectories». — 16. «Re-entry aero-space trajectories» (1 copia). — 17. «Modeling technique and theory for aeroelastic similarity in blow-down wind tunnel tests». — 18. «The equielastic model technique in blown-down wind-tunnel tests». — 18 bis. «La tecnica del Modello equielastico nelle prove in Galleria supersonica a funzionamento intermittente». — 19. «Un metodo generale per lo studio del campo supersonico dietro onda d'urto aderente». — 20. «Theoretical and experimental analysis of cowlings configurations for the reduction of the drag on a body of revolution with large cone angle» (2 copie). — 21. «Experimental investigation on delta wing and complete configuration models for aeroelastic similarity problems at supersonic blow down wind-tunnel». — 22. «Una tecnica per lo studio alla galleria aerodinamica intermittente dei fenomeni di riscaldamento cinetico sui corpi alle altissime velocità» (1 copia).

4. CACIOPPO SANTINO. — «Il criterio di divisibilità e i complementi a 10^n » (5 copie manoscritte).

5. ESPOSITO SEBASTIANO. — «Movimento cosmico» (5 copie dattiloscritte).

6. FICHERA GAETANO. — 1. «Sulla maggiorazione dell'errore di approssimazione nei procedimenti di integrazione numerica delle equazioni della Fisica matematica». — 3. «Neue funktionalanalytische Grundlagen für die Existenzprobleme und Lösungsmethoden von Systemen linearer partieller Differentialgleichungen». (in collaborazione con M. Picone). (2 copie). — 3. «Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno, relativi

all'equilibrio di un corpo elastico » (1 copia). — 4. « Estensioni e sviluppi del concetto di funzione continua nell'Analisi moderna ». — 5. « Risultati concernenti la risoluzione delle equazioni funzionali lineari dovuti all'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo » (2 copie). — 6. « Methods for solving linear functional equations developed by the Italian Institute for the Applications of Calculus ». — 7. « Sui teoremi d'esistenza della teoria del potenziale e della rappresentazione conforme ». Note I e II (4 copie). — 8. « Esistenza del minimo in un classico problema di calcolo delle variazioni ». — 9. « Ueber eine Möglichkeit zur Kontrolle der physikalischen Widerspruchsfreiheit der Gleichungen der mathematischen Elastizitätstheorie ». — 10. « Geometria analitica degli spazi funzionali ed equazioni differenziali lineari ». — 11. « On general computation methods for eigenvalues and Eigenfunctions ». — 12. « Results of recent experiments in the analysis of periods, carried out in the Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo ». — 13. « Interpretazione ed estensione funzionale di recenti metodi d'integrazione delle equazioni differenziali lineari ». — 14. « Formule di maggiorazione globale connesse ad una classe di trasformazioni lineari ». — 15. « Sulla "Kernel function" ». — 16. « Sul problema della derivata obliqua e sul problema misto per l'equazione di Laplace ». — 17. « Formule di maggiorazione connesse ad una classe di trasformazioni lineari ». — 18. « Sulla torsione elastica dei primi cavi ». — 19. « Condizioni perché sia compatibile il problema principale della statica elastica ». — 20. « Lezioni sulle trasformazioni lineari », vol. I (Introduzione all'Analisi lineare). — (1 copia). 21. « Sulla derivazione delle funzioni additive d'insieme ». — 22. « Alcuni recenti sviluppi della teoria dei problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali lineari ». — 23. « Su un metodo del Picone per il calcolo degli autovalori e delle autosoluzioni » (2 copie). — 24. « Sull'esistenza delle forme differenziali armoniche ». — 25. « Methods of functional linear Analysis in Mathematical Physics ». — 26. « Sulle equazioni differenziali lineari ellittico-paraboliche del secondo ordine ». — 27. « Su un principio di dualità per talune formule di maggiorazione relative alle equazioni differenziali ». — 28. « Sulla teoria generale dei problemi al contorno per le equazioni differenziali lineari » Note I e II. — 29. « Sulle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine ellittico-paraboliche » 30. « La vita matematica di Luigi Fantappié ». — 31. « Caratterizzazione della traccia, sulla frontiera di un campo, di una funzione analitica di più variabili complesse ». — 32. « Una introduzione alla teoria delle equazioni integrali singolari ». — 33. « Computation of eigenvalues and eigensolutions ». — 34. « Premesse ad una teoria generale dei problemi al contorno per le equazioni differenziali ». — 35. « On a unified theory of Boundary Value Problems for elliptic-parabolic equations of second order ». — 36. « On the completeness of sequences of reciprocals of linear functions ». — 37. « Approssimazione uniforme delle funzioni olomorfe mediante funzioni razionali aventi poli semplici prefissati ». — 38. « Progressi di taluni rami dell'Analisi matematica durante il cinquantennio 1906-1956 ». — 39. « Misure tensoriali ed omologia su una varietà differenziabile ». — 40. « Teoria astratta del prolungamento di Weierstrass e applicazioni ». — 41. « Sul concetto di problema "ben posto" per una equazione differenziale ». — 42. « Spazi lineari di k -misure e di forme differenziali ». — 43. « Linear elliptic equations of higher order in two independent variables and singular integral equations, with applications to anisotropic inhomogeneous elasticity ». — 44. « Il teorema del massimo modulo per l'equazione dell'elastostatica tridimensionale ». — 45. « Teoria assiomatica delle forme armoniche ».

7. GRAFFI DARIO. — 1. « Sulla propagazione delle onde di tipo elettrico e magnetico in una guida a sezione circolare riempita da un dielettrico eterogeneo ». — 2. « Le guide d'onda ». — 3. « Su alcune questioni di elasticità ereditaria ». — 4. « Giovanni Giorgi, necrologio ». — 5. « Forced oscillations for several non-linear circuits » (1 copia). — 6. « Sul problema dei due corpi di massa variabile ». — 7. « Il metodo ereditario per lo studio di alcuni fenomeni fisici » (1 copia). — 8. « Meccanica, ottica geometrica e propagazione ionosferica ». — 9. « Un teorema di unicità per le equazioni di Maxwell e sue applicazioni alla teoria delle guide di onda ». — 10. « Equazioni delle oscillazioni non-lineari in relazione alle applicazioni ». — 11. « Sul periodo delle oscillazioni nei sistemi non-lineari a due gradi di libertà ». — 12. « Sul problema della derivata obliqua ». — 13. « Il teorema di unicità nella dinamica dei fluidi com-

pressibili ». — 14. «Sulle oscillazioni forzate nella meccanica non-lineare ». — 15. «Sulla teoria dei materiali elastico-viscosi ». — 16. «Sull'espressione delle soluzioni periodiche nei sistemi non lineari a due gradi di libertà ». — 17. «Sur la periode d'oscillation des systemes non lineaires à plusieurs degrés de liberté ». — 18. «Über den Reziprozitätssatz in der Dynamik der elastischen Körper ». — 19. «Sulle oscillazioni forzate nei sistemi non lineari a due gradi di libertà ». — 20. «Oscillazioni non lineari ». — 21. «Su alcune equazioni differenziali non lineari » (1 copia). — 22. «Su una legge di minimo della magnetostatica ». — 23. «Questioni varie sulle oscillazioni non lineari ». — 24. «Waveguides with nonhomogeneous dielectric ». — 25. «Alcune proprietà delle guide d'onda con dielettrico eterogeneo ». — 26. «Su un problema di induzione magnetica ». — 27. «Alcuni problemi non lineari della fisica matematica ». — 28. «Su una equazione funzionale non lineare della fisica matematica » (4 copie). — 29. «Alcuni teoremi di elettrostatica dei dielettrici non lineari ». — 30. «Alcune considerazioni sulle guide d'onda riempite con dielettrico eterogeneo ». — 31. «Guide d'onda con dielettrico eterogeneo ». — 32. «Giancarlo Vallauri, necrologio ». — 33. «Il teorema di unicità per i fluidi incompressibili perfetti eterogenei » (3 copie). — 34. «Vittorio Gori, commemorazione ». — 35. «Lezioni di onde elettromagnetiche » (1 copia). — 36. «Francesco Sbrana, necrologio ». — 37. «Sulle condizioni al contorno approssimate nell'elettromagnetismo ». — 38. «Commemorazione dell'accademico benedettino Quirino Majorana ». — 39. «Un esercizio di cinematica relativistica ». — 40. «Sur un theoreme d'unicité pour le mouvement d'un fluide visqueux dans un domaine illimité ». — 41. «Sul teorema di unicità per le equazioni del moto dei fluidi compressibili in un dominio illimitato ». — 42. «Luigi Lombardi, commemorazione ». — 43. «Sul teorema di unicità nella dinamica dei fluidi ». — 44. «Considerazioni sui metodi approssimati della meccanica non-lineare ». — 45. «Le onde evanescenti e la riflessione totale » (in corso di stampa). — 46. «Meccanica non lineare » (in corso di stampa). — 47. «Sulla propagazione nei mezzi dispersivi » (manoscritto). — 48. «Sull'integrazione approssimata delle equazioni della meccanica non lineare » (in corso di stampa).

8. TRICOMI FRANCESCO G. — 1. «Funzioni ellittiche ». — 2. «Funzioni analitiche ». — 3. «Equazioni differenziali ». — 4-5. «Higher transcendental Functions», I-II. (Opera in collaborazione; Tricomi ha curato spec. i Cap. VIII-IX-X e XIII, come detto nella prefazione). — 6. «Funzioni ipergeometriche confluenti ». — 7. «Vorlesungen über Orthogonalreihen ». — 8. «Equazioni a derivate parziali ». — 9. «Lezioni sulle equazioni integrali ». — 10. «Funzioni speciali ». — 11. «Esercizi e complementi di Analisi matematica », Parte II. — 12. «Fonctions hypergéométriques confluentes ». — 13. «Sulla funzione gamma incompleta ». — 14. «Expansion of the hypergeometric function in series of confluent ones and application to the Jacobi Polynomials ». — 15. «On the Finite Hilbert Transformation ». — 16. «Una nuova trascendente intera connessa con una ben nota serie non continuabile ». — 17. «A class of non-orthogonal polynomials related to those of Laguerre ». — 18. «Un problema di statistica matematica sorto dalla batteriologia ». — 19. «Zur Asymptotik der konfluenten hypergeometrischen Funktionen ». — 20. «Equazioni differenziali con punti di transizione ("turning points") ». — 21. «Sull'inversione dell'ordine di integrali "principali" nel senso di Cauchy ». — 22. «Equazioni integrali singolari del tipo di Carleman ». — 23. «Sull'equazione di Tomotika e Tamada ». — 24. «Problemi matematici dell'Aerodinamica transonica » (tutto in unico esemplare).

ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO «BATTISTA GRASSI»

(Scadenza 31 dicembre 1960 - Premio L. 300.000)

1. BOLOGNARI ARTURO. — 1. «Osservazioni sull'apparato nucleolare di *Patella coerulea* L. durante il corso dell'accrescimento ovocitario ». — 2. «Caratteri ultrastrutturali dell'apparato nucleolare degli ovoidi di *Patella coerulea* L. durante il loro accrescimento ». — 3. «Osservazioni al microscopio elettronico sui globuli purinici del corpo bianco di *Octopus vulgaris* Lam. ». —

4. « Esperienze con enzimi sui nucleoli degli ovociti in accrescimento di *Mytilus galloprovincialis* Lam. e di *Patella coerulea* L. ». — 5. « Tecnica per la messa in evidenza al microscopio elettronico dell'azione della ribonucleasi sulle ultrastrutture citoplasmatiche granulari degli ovociti di *Patella coerulea* L. » (in collab. con G. G. Calapaj). — 6. « Ultrastructure of Nucleoli in Oocytes of *Patella coerulea* ». — 7. « L'azione della ribonucleasi sul nucleolo degli ovociti in accrescimento del molluschi ». — 8. « Sui caratteri ultrastrutturali dei nucleoli degli ovociti in accrescimento di alcune specie di molluschi ». — 9. « Caratteri ultrastrutturali dei dittosomi (corpi del Golgi) degli ovociti di *Aplysia depilans* L. ». — 10. « Osservazioni al microscopio elettronico sulla formazione del vitello negli ovociti di *Patella coerulea* L. con qualche considerazione sulle granulazioni ribonucleoproteiche del citoplasma e sull'apparato del Golgi ». — 11. « Processi vitellogenetici di *Aplysia depilans* L. osservati al microscopio elettronico con ulteriori considerazioni sull'apparato del Golgi ». — 12. « Sull'impiego del cloruro di platino come sostanza di impregnazione » (in collab. con M. Albanese e A. Donato). — 13. « Esame morfologico e volumetrico dell'ipofisi di Teleostei abissali e bentonici » (in collab. con M. P. Albanese). — 14. « Recenti vedute sulla struttura, sull'ultrastruttura, sullo stato fisico-chimico e sulle attività funzionali del nucleolo ». — 15. « Osservazioni al microscopio elettronico sul condrioma e sulle granulazioni acidofile e basofile delle cellule del corpo bianco dei Molluschi Cefalopodi ». — 16. « Aspetti strutturali e citochimici dell'apparato nucleolare degli ovociti in accrescimento di *Patella coerulea* L. ^{1,2} ». — 17. « Aspetti citochimici dell'apparato nucleolare degli ovociti di *Patella coerulea* ». — 18. « Qualche precisazione sul corpo bianco dei molluschi cefalopodi ». — 19. « Rapporto tra dimensioni nucleolari e numero dei granuli nucleolonemali negli ovociti di *Bufo vulgaris* Laur. ^{1,2} » (in collab. con M. P. Albanese). — 20. « Struttura ed ultrastruttura del nucleolo degli ovociti del Riccio di mare (*Paracentrotus lividus*) ». — 21. « Aspetti del nucleolo di cellule normali e patologiche ». — 22. « Yolk Formation in Oocytes of *Patella coerulea* L. and *Aplysia depilans* L. as observed in the electron microscope ». — 23. « Golgi Bodies and Golgi Zones in molluscan Oocytes ». — 24. « Precisazioni sul Nucleolonema ». — 25. « Su alcuni aspetti strutturali ed ultrastrutturali delle cellule tumorali con particolare riferimento al carcinoma di Walker ». — 26. « Su alcuni problemi attuali di cariologia normale e patologica ». — 27. « La causa di errore sulla Feulgen-positività endonucleolare ». — 28. « Ulteriori dati volumetrici sull'ipofisi dell'*Engraulis* del Lago Verde di Oliveri » (in collab. con M. P. Albanese). — 29. « Osservazioni al microscopio elettronico sui globuli vitellini degli ovociti dei molluschi e degli echinodermi ». — 30. « Osservazioni al microscopio elettronico sull'azione della ribonucleasi sulle cellule del carcinoma di Walker ». — 31. « La cellula dei tumori con particolare riferimento agli ovociti ed agli embrioni testicolari (tutto in tre copie).

2. CIACCIO GIACINTO. — 1. « Action de la spiramycine (5. 337 R. P.) sur l'infection de la Souris par l'agent de la psittacose et sur le développement de la psittacose dans l'embryon de Poulet » (in collab. con R. Maral). — 2. « Reperti istopatologici nell'encefalomielite da virus Columbia SK nel topo » (in collab. con O. Maleci). — 3. « Influence de la cortisone sur les réactions locales et générales. Cas de l'antigène du groupe boutonneux-pourpré » (in collab. con P. Giroud e N. Dumas). — 4. « Les Rickettsies pathogènes et les Poissons » (in collab. con P. Giroud). — 5. « Essai de neutralisation du virus de Newcastle par le sérum de lapin et le lait de vache ». — 6. « Comportement du lapin adulte à l'inoculation du virus de Newcastle ». — 7. « Quelques remarques à propos d'une souche souris-jeune lapin (de 3 à 4 mois) de virus aphteux de type C » (in collab. con P. Giroud). — 8. « Adaptation d'une souche cobaye-souris de type C de virus aphteux au hamster (*Mesocricetus auratus*) ». — 9. « Recenti ricerche e nuovi progressi nello studio dei virus. - I. Ricerche sul virus dell'afta epizootica. Esperimenti di trattamento con fenolo ed acido nitroso ». (tutto in tre copie - meno i nn. 3 e 9 che il concorrente non ha inviati) N. B. Il concorrente ha inviato pubblicazioni (in triplice copia) anteriori al triennio precedente la scadenza del concorso.

3. GHIRARDELLI ELVEZIO. — 1. « La rigenerazione in *Spadella cephaloptera* Busch: influenza del capo sulla rigenerazione della regione caudale ». — 2. « La struttura delle pinne e la istogenesi rigenerativa in *Spadella cephaloptera* Busch ». — 3. « Osservazioni sulla deficienza dei poteri rigenerativi nei Chetognati. Considerazioni sui rapporti fra riproduzione agamica e

determinazione del ceppo germinale». — 4. « Osservazioni preliminari sulla corona ciliata in *Spadella cephaloptera*. Busch. (Chaetognatha) ». — 5. « Habitat e biologia della riproduzione nei Chaetognati ». — 6. « L'apparato riproduttore femminile nei Chaetognati ». — 7. « Su di un esemplare di *Platichthys flesus italicus* (Günther) anomalo ». — 8. « Contribution à l'étude de la biologie des soles (*Solea solea*) en moyenne Adriatique ». — 9. « Contribution à la connaissance de la biologie du merlu (*Merluccius merluccius* L.) en moyenne Adriatique ». — 10. « Osservazioni sulla corona ciliata nei Chaetognati ». — 11. « Esperimenti di asportazione parziale dell'abbozzo genitale presuntivo in embrioni di *Bufo bufo* ». (in coll. con E. Vannini). — 12. « La pêche des mollusques cephalopodes et leur importance biologique et économique ». — 13. « Histologie et cytologie des stades de maturité chez les Chaetognathes ». (Riassunto ciclostilato) (tutto in 3 copie).

4. SARÀ MICHELE. — 1. « Contributo alla conoscenza dei Poriferi del Mar Ligure ». — 2. « Studio sui Poriferi di una grotta di marea del Golfo di Napoli ». — 3. « Considerazioni sulla distribuzione ed ecologia dei Poriferi nelle grotte ». — 4. « *Pseudotrachya oxystyle* sp. n. (*Demospongiae*) e suo rinvenimento nella zona litorale dell'Isola d'Ischia ». — 5. « Sulla coesistenza di specie strettamente affini di Poriferi in biotipi litorali ». — 6. « Specie nuove di Demospongie provenienti da acque superficiali del Golfo di Napoli ». — 7. « Poriferi del litorale dell'Isola d'Ischia e loro ripartizione per ambienti ». — 8. « Aspetti e problemi di una ricerca sinecologica sui Poriferi del Golfo di Napoli ». — 9. « Osservazioni sulla composizione, ecologia e differenziamento della fauna di Poriferi di acqua salmastra ». — 10. « Ditteri Psicodini della Spagna e della Grecia con descrizione di specie nuove ». — 11. « Sinossi dei Psicodini italiani con descrizione di nuova specie del gen. *Pericoma* (Dipt) » (3 copie).

ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO «CARLO ERBA ALLA MEMORIA DI GIANNI PAULETTA».

(Scadenza 31 dicembre 1960 — Premio L. 1.000.000)

1. ARCHETTI ITALO. — « Studio al microscopio elettronico dello sviluppo e della struttura di un virus enterico della scimmia ». (5 copie).

2. CAMPESI GIUSEPPE. — « Sulla costituzione delle cisti da *Echinococcus granulosus*. Revisione del concetto della situazione intermedia dello strato chitinoso ». (5 copie).

3. FALCONE GIUSEPPE. — 1. « Attività transaminasiche in spore quiescenti, attivate al calore e germinanti di *B. subtilis* » (in coll. con A. Caracò). — 2. « Sull'azione di alcuni aminoacidi sulla germinazione da L-alanina di spore di *B. subtilis* » (in coll. con A. Caracò e G. Salvatore). — 3. « Mechanism of induction of spore germination in *Bacillus subtilis* by l-alanine and hydrogen peroxide » (in coll. con G. Salvatore e I. Covelli). — 4. « Action des hormones thyroïdiennes et de l'acide 3: 5: 3'-triiodothyroacetique sur la respiration d'*Escherichia coli* » (in coll. con J. Roche e G. Salvatore). — 5. « Function of protein disulfide reductase in cellular division of yeasts » (in coll. con W. J. Nickerson). — 6. « Enzymatic reactions involved in cellular division of microorganisms » (in coll. con W. J. Nickerson). — 7. « Polysaccharide: protein complexes of yeast cell walls » (in coll. con W. J. Nickerson e G. Kessler). — 8. « Ricerche sul metabolismo ossidativo e glicolitico di forme filamentose batteriche » (in coll. con L. Califano e G. Cavallo). — 9. « Enzymatic reduction of selenite » (in coll. con W. J. Nickerson). — 10. « Metabolism of selenite and mechanism of inhibitory action of selenite on yeasts » (in coll. con W. J. Nickerson). — 11. « Electron transfer by glutathione-menadione complex (thiodione) in terminal reductions » (in coll. con W. J. Nickerson e G. Strauss). — 12. « Mechanism of formation and redox potential of thiodione » (in coll. con W. J. Nickerson e G. Strauss). — 13. « Photochemical formation of semiquinone and photochemical cleavage of thioether linkages » (in coll. con W. J. Nickerson e G. Strauss) (tutto in cinque copie).

4. LEONARDI GIUSEPPE. — « Sulla patogenesi del tetano. Possibile azione anticolinesterasica della tossina tetanica » (in collab. con Bernardi). (5 copie).

5. MACCACARO G. A. — 1. « Further studies on bacterial fimbriae ». — 2. « La misura dell'informazione contenuta nei criteri di classificazione ». — 3. « Studi sulle fimbrie batteriche »: — I. « Lo studio genetico delle fimbrie » (in coll. con C. Colombo e A. Di Nardo). — 4. « Studi sulle fimbrie batteriche »: — II. « Osservazioni microelettroforetiche » (in coll. con M. Turri). — 5. « Studi sulle fimbrie batteriche »: — III. « L'effetto delle fimbrie sulla respirazione di colture in accrescimento » (in coll. con R. Dettori). — 6. « Studi sulle fimbrie batteriche »: — IV. « Metabolismo ossidativo e fermentativo in cellule fimbriate e sfimbriate » (in coll. con R. Dettori). — 7. « Studi sulle fimbrie batteriche »: — V. « Sferoplasti fimbriati » (in coll. con M. Turri). — 8. « The irreversible lowering of the charge density of bacterial surfaces by diazomethane » (in coll. con A. M. James). — 9. « Studies on bacterial fimbriae ». — VI. « Agglutination of fimbriated cells by dipolar molecules » (in coll. con R. Dettori). — 10. « Osservazioni microelettroforetiche su cellule di *E. coli* K 12 di diversa compatibilità sessuale » (in coll. con M. Turri). — 11. « The genetics of fimbriation in *E. coli* » (in corso di stampa) (in coll. con W. Hayes). — 12. « Pairing interaction as a basis for negative interference » (in corso di stampa) (in coll. con W. Hayes). — 13. « The information content of biological classifications. » (in corso di stampa) (in coll. con A. Rescigno), (tutto in cinque copie).

6. MASCHERPA PIETRO. — 1. « Caratteristiche chimiche, biologiche e terapeutiche della "sostanza M", antibiotico antitubercolare di origine tessutale » (in collab. con A. Crema, F. Berté, A. Mascherpa). — 2. « Einige biochemische und pharmakologische Eigenschaften der Substanz M, tierisches Antibiotikum mit Wirkung auf den Tuberkel-Bazillus ». — 3. « Sostanze naturali di difesa collegate col lisozima ». — 4. « La "substance M" et la maladie tuberculeuse ». — 5. « Ueber weniger bekannte Seiten antituberkulöser Chemotherapeutika (Die "M-Stoffe") ». — 6. « Sostanze fisiologiche di difesa antitubercolare: la "sostanza M" ». — 7. « Ricerche biochimiche sulla "sostanza M" ». — 8. « Comportamento dei chemioantibiotici nell'organismo ». — 9. « Organotropismo ed azioni metaboliche di alcuni chemioantibiotici antitubercolari a livello del polmone ». — 10. « Substances tissulaires de défense contre les infections » (tutto in 5 copie). N. B. Il concorrente ha inviato altre pubblicazioni anteriori al biennio precedente la data di scadenza del concorso.

7. VOZZA RICCARDO. — « Ricerche virologiche sulla malattia tracomatosa » (5 copie).

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 13 maggio 1961

Presiede il Socio anziano GINO CASSINIS

NOTE DI SOCI

Analisi matematica. — *Calcolo di alcuni integrali che intervengono in un criterio sufficiente di minimo assoluto.* Nota ^(*) dei Soci MAURO PICONE e ANTONIO SIGNORINI.

1. (PICONE). — In un criterio sufficiente per il minimo assoluto di un integrale bidimensionale del second'ordine, nella funzione scalare minimante, intervengono ⁽¹⁾ gl'integrali

$$(1) \quad \int_{\sigma} (rt - s^2) d\sigma, \int_{\sigma} (rt - s^2) x d\sigma, \int_{\sigma} (rt - s^2) y d\sigma,$$

per i quali σ designa un dominio regolare arbitrario del piano (x, y) , e r, s, t sono, rispettivamente, le derivate parziali seconde z_{xx}, z_{xy}, z_{yy} di una funzione reale z , delle due variabili reali x e y , continua, con le sue derivate parziali prime e seconde nel detto dominio. Essi integrali intervengono utilmente in virtù della costanza ⁽²⁾ del loro valore, al variare comunque della superficie Σ di equazione $z = z(x, y)$, di cui siano mantenuti fissi l'orlo C e la sviluppabile Γ dei piani ad essa tangenti lungo C .

(*) Presentata nella seduta del 13 maggio 1961.

(1) M. PICONE, *Criteri sufficienti per il minimo assoluto di un integrale bidimensionale del second'ordine nello scalare minimante e conseguenti limitazioni per gli autovalori di un parametro da cui dipende un'equazione cui riana a derivate parziali del quart'ordine.* Nota presentata nella seduta del 3 maggio della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali dell'Accademia delle Scienze di Torino.

(2) Constatata anche, per quello che occupa il primo posto nella (1), da S. Bernstein in un suo lavoro del 1910, pubblicato nel vol. 69 delle « Math. Annalen ».

Tale costanza, nell'ipotesi secondo la quale la funzione $z(x, y)$ possiede, in σ , continue anche le derivate parziali terze e quarte, è una conseguenza del fatto che le equazioni di Eulero competenti alle funzioni

$$rt - s^2, x(rt - s^2), y(rt - s^2)$$

sono delle identità. Sorgeva così la domanda di ricercare, per gli integrali (1), delle espressioni dove soltanto comparissero elementi di C e di Γ .

A questa domanda largamente ha risposto il collega e amico Signorini con quanto figura nei nn. 2 e 3: ad esempio è ivi messo in luce che per la detta costanza basta la continuità fino alle derivate terze.

2. (SIGNORINI). - Sia n la normale interna al contorno c di σ ; s l'ascissa curvilinea di c , contata nel verso che occorre perché, anche in segno, come coseni direttori di n si abbiano

$$n_x = -\frac{dy}{ds} = -\sin \varphi, \quad n_y = \frac{dx}{ds} = \cos \varphi,$$

se s'indica con φ l'anomalia della tangente.

Detti a e b due qualunque numeri reali, prendo in esame l'integrale

$$I_{a,b} \equiv \int_{\sigma} x^a y^b (rt - s^2) d\sigma,$$

che banalmente comprende tutti tre gli integrali (1).

Intendendo, naturalmente,

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

comincio con l'osservare che

$$rt - s^2 = \frac{\partial}{\partial x}(pt) - \frac{\partial}{\partial y}(ps);$$

onde si ha

$$I_{a,b} = \int_{\sigma} d\sigma \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (x^a y^b pt) - ax^{a-1} y^b pt \right\} - \int_{\sigma} d\sigma \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (x^a y^b ps) - by^{b-1} x^a ps \right\},$$

nonché

$$\begin{aligned} I_{a,b} = & - \int_C ds \cdot x^a y^b p (tn_x - sn_y) - \int_{\sigma} d\sigma \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (ax^{a-1} y^b pq) - ax^{a-1} y^b sq \right\} \\ & + \int_{\sigma} d\sigma \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (by^{b-1} x^a pq) - by^{b-1} x^a rq \right\}. \end{aligned}$$

D'altra parte, lungo l'intera c , è

$$\begin{aligned} tn_x - sn_y = & - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{dx}{ds} \right) = - \frac{dq}{ds} \\ ax^{a-1} y^b n_y - by^{b-1} x^a n_x = & \frac{dx^a}{ds} y^b + \frac{dy^b}{ds} x^a. \end{aligned}$$

Se dunque si pone

$$H_{a,b} = \int_{\sigma} d\sigma \left\{ ax^{a-1} y^b sq - by^{b-1} x^a r q \right\}$$

si ottiene

$$I_{a,b} = \int_C x^a y^b p dq + \int_C p q d(x^a y^b) + H_{a,b}.$$

Convieni anche porre

$$i_{a,b} = \frac{1}{2} \int_{\sigma} d\sigma \{ a(a-1) x^{a-2} y^b q^2 - 2ab x^{a-1} y^{b-1} p q + b(b-1) y^{b-2} x^a p^2 \}$$

e servirsi delle identità

$$sq = \frac{1}{2} \frac{\partial q^2}{\partial x}, \quad rq = \frac{\partial}{\partial x} (pq) - \frac{1}{2} \frac{\partial p^2}{\partial y}.$$

La precedente espressione di $I_{a,b}$ si può sostituire con

$$\begin{aligned} I_{a,b} &= \int_C x^a y^b p dq + \int_C p q d(x^a y^b) + \frac{1}{2} \int_{\sigma} d\sigma \frac{\partial}{\partial x} (ax^{a-1} y^b q^2) \\ &\quad - \int_{\sigma} d\sigma \frac{\partial}{\partial x} (by^{b-1} x^a p q) + \frac{1}{2} \int_{\sigma} d\sigma \frac{\partial}{\partial y} (by^{b-1} x^a p^2) - i_{a,b}. \end{aligned}$$

In più è

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_C p q d(x^a y^b) + \frac{1}{2} \int_C ds \cdot ax^{a-1} y^b q^2 \frac{dy}{ds} - \int_C ds \cdot by^{b-1} x^a p q \frac{dy}{ds} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_C ds \cdot by^{b-1} x^a p^2 \frac{dx}{dy} - \frac{1}{2} \int_C ds \cdot ax^{a-1} y^b q \left(p \frac{dx}{ds} + q \frac{dy}{ds} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_C ds \cdot by^{b-1} x^a p \left(q \frac{dy}{ds} + p \frac{dx}{ds} \right). \end{aligned}$$

Da tutto questo risulta

$$\begin{aligned} (2) \quad I_{a,b} + i_{a,b} &= \int_C x^a y^b p dq + \frac{1}{2} \int_C p q d(x^a y^b) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_C dz \{ ax^{a-1} y^b q - by^{b-1} x^a p \}, \end{aligned}$$

restando così già messo in luce che $I_{a,b} + i_{a,b}$ non può mai dipendere altro che da C e Γ : e lo stesso deve verificarsi per ciascuno dei tre integrali (1), dato che

$$i_{0,0} = i_{1,0} = i_{0,1} = 0.$$

3. (SIGNORINI). - In corrispondenza al punto generico di C chiamo δ l'inclinazione del piano tangente a Σ rispetto al piano xy : in altri termini, intendo

$$\operatorname{tg} \delta = \sqrt{p^2 + q^2}.$$

Insieme introduco l'angolo θ mediante le posizioni

$$(3) \quad p = -\operatorname{tg} \delta \sin \theta, \quad q = \operatorname{tg} \delta \cos \theta,$$

equivalenti a porre

$$\begin{cases} \frac{dz}{ds} \equiv p \cos \varphi + q \sin \varphi = \operatorname{tg} \delta \sin (\varphi - \theta), \\ \frac{dz}{dn} = -p \sin \varphi + q \cos \varphi = \operatorname{tg} \delta \cos (\varphi - \theta). \end{cases}$$

Sarà bene notare fin d'ora che se z è costante lungo C (C sezione di Σ con un piano parallelo a xy) insieme a $dz/ds \equiv 0$ si viene ad avere che la $d\theta/ds$ si riduce alla flessione con segno,

$$f = \frac{d\varphi}{ds},$$

della C .

Comunque, introducendo le espressioni (3) di p e q sotto il segno \int_C nel secondo membro delle (2), in primo luogo avremo

$$\begin{aligned} \int_C x^a y^b p dq &= - \int_C x^a y^b \operatorname{tg} \delta \sin \theta d(\operatorname{tg} \delta \cos \theta) = \\ &= - \int_C x^a y^b \operatorname{tg} \delta \sin \theta (\cos \theta d \operatorname{tg} \delta - \operatorname{tg} \delta \sin \theta d\theta) = \\ &= \int_C d(x^a y^b \sin \theta \cos \theta) \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \delta + \int_C x^a y^b \operatorname{tg}^2 \delta \sin^2 \theta \cdot d\theta. \end{aligned}$$

Ne segue

$$\begin{aligned} \int_C x^a y^b p dq + \frac{1}{2} \int_C p q d(x^a y^b) &= \int_C x^a y^b p dq - \frac{1}{2} \int_C d(x^a y^b) \operatorname{tg}^2 \delta \cos \theta \sin \theta = \\ &= \frac{1}{2} \int_C x^a y^b \operatorname{tg}^2 \delta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \int_C x^a y^b \operatorname{tg}^2 \delta \sin^2 \theta \cdot d\theta = \frac{1}{2} \int_C x^a y^b \operatorname{tg}^2 \delta d\theta. \end{aligned}$$

Con la stessa sostituzione si ottiene

$$\begin{aligned} \int_C dz \{ax^{a-1} y^b q - by^{b-1} x^a p\} &= \int_C dz \operatorname{tg} \delta \{ax^{a-1} y^b \cos \theta + by^{b-1} x^a \sin \theta\} = \\ &= \int_C dz \operatorname{tg} \delta \frac{d(x^a y^b)}{d\tau}, \end{aligned}$$

se s'indica con τ la direzione orientata di anomalia θ .

La (2) equivale dunque proprio ad un'uguaglianza del tipo voluto:

$$I_{a,b} + i_{a,b} = \frac{1}{2} \int_C x^a y^b \operatorname{tg}^2 \delta \, d\theta + \frac{1}{2} \int_C \operatorname{tg} \delta \frac{d(x^a y^b)}{d\tau} dz.$$

Ad esempio ne risulta

$$\int_{\sigma} d\sigma (rt - s^2) = \frac{1}{2} \int_C \operatorname{tg}^2 \delta \, d\theta, \quad \int_{\sigma} d\sigma x (rt - s^2) =$$

$$\frac{1}{2} \int_C x \operatorname{tg}^2 \delta \, d\theta + \frac{1}{2} \int_C \frac{dx}{d\tau} \operatorname{tg} \delta \, dz, \text{ ecc.:}$$

nonché

$$\int_{\sigma} d\sigma (rt - s^2) \equiv \frac{1}{2} \int_C \operatorname{tg}^2 \delta \cdot f \, ds$$

se lungo C è $z = \text{cost.}$

Meccanica. — *Moltiplicatore critico λ_{cr} per volte autoportanti.*
 Nota IV del Socio GIULIO KRALL e di DOMENICO CALIGO, presentata (*)
 dal Socio G. KRALL.

§ 4. — VOLTA SEMICIRCOLARE ISOLATA: CASI LIMITI E TABELLAZIONI.

11. — È interessante rilevare, riguardo alle espressioni (26_g) , (26_p) di $\bar{\lambda}$ ottenute nella Nota precedente, che, per $L/a \rightarrow \infty$, $\bar{\lambda}_{cr}$ tende ad un valore finito; ciò accade anche per il $\bar{\lambda}$ fornito dalla terna (20).

Si ha infatti, sempre con m pari,

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{\substack{L \\ a \rightarrow \infty}} \bar{\lambda} = \left(10^2 \frac{h}{a}\right)^3 \frac{(m^2-1)(4m^2-1)}{4m^2-16}, \quad \text{dalla } (21_g); \\ \lim_{\substack{L \\ a \rightarrow \infty}} \bar{\lambda} = \left(10^2 \frac{h}{a}\right)^3 \cdot \begin{cases} \frac{(m^2-1)(4m^2-1)}{2(m^2-3-\pi^2/3)}, & \text{dalla } (26_g), \\ m^2, & \text{dalla } (26_p). \end{cases} \end{array} \right.$$

La prima di queste espressioni asintotiche consegue il minimo, che vale $19,6875 \left(10^2 \frac{h}{a}\right)^3$, per $m=4$; le altre due lo conseguono per $m=2$:

$$(27_a) \quad \lim_{\substack{L \\ a \rightarrow \infty}} \bar{\lambda}_{cr} |_{m=2} = \left(10^2 \frac{h}{a}\right)^3 \cdot \begin{cases} 13,16, & \text{dalla } (26_g), \\ 4, & \text{dalla } (26_p). \end{cases}$$

Si rileva anche che, se $L/a \neq 0$, è in ogni caso $\lim_{m \rightarrow \infty} \bar{\lambda}/m^2 = (10^2 h/a)^3$, (m pari).

Il fatto che il carico critico non tende a zero con $L/a \rightarrow \infty$, ma ad un valore dipendente dalla sola flessorigidezza della direttrice, si spiega pensando che, atteso l'equilibramento globale, sezione per sezione, degli sforzi interni T_1 (nel caso del carico diffuso g , con il concorso dei tiri Z ai bordi), il corrispondente lavoro di second'ordine \mathcal{L}_2^* risulta nullo quando l'estensione della direttrice è trascurabile rispetto alla portata.

Dalle (27) con riguardo alle (18) si ha in definitiva

$$(28) \quad \left. \begin{array}{l} (q_{cr}) \\ (g_{cr}) \\ (p_{cr}) \end{array} \right\} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{h}{a}\right)^3 \left\{ \begin{array}{l} —, \quad (0,333); \\ 1,722, \quad (0,494); \\ 0,667, \quad (0,667). \end{array} \right.$$

Nella (28) i valori 1,722 e 0,667 si desumono da (27_a); i numeri in () sono invece calcolati secondo ⁽²⁴⁾, n. 5, p. 555 omettendo \mathcal{L}_2 della (15), perché

(*) Nella seduta dell'11 febbraio 1961.

non si tratta qui di pressioni idrostatiche, per un anello circolare elemento di un involucro cilindrico di raggio a con uno sforzo T_2 dato da:

$$1) T_2 = -ag \quad ; \quad 2) T_2 = -ag |\cos \psi| \quad ; \quad 3) T_2 = -ap \cos^2 \psi.$$

Questi T_2 corrispondono alla componente normale Z di $q = \text{cost.}$, o di distribuzioni come g , rispettivamente p , (con il concorso, queste ultime, degli sforzi S) ammesse simmetriche rispetto al diametro $\psi = \psi_0 = \pm \pi/2$.

Dal confronto con questi valori in () si rileva l'eguaglianza del $\lim p_{cr}$ (caso 3)), il divario del $\lim g_{cr}$ (caso 2)). Questo si spiega poiché per g si ha la discontinuità di $Z = \mp$ o impulsivo in $\psi_0 = \pm \pi/2$, mentre per p alla soluzione a membrana corrisponde una distribuzione regolare di sforzi. Non occorre dire che tali limiti hanno interesse a solo titolo di confronto; prima del collasso della direttrice si ha, per $L/a \rightarrow \infty$, la rottura per gli sforzi S e T_1 .

12. - Siano assegnati h/a , a/L , ν .

a) Lo studio dell'espressione $(2I_g)$ di λ al variare di m conduce a rilevare che il minimo si consegue per $m = 2$ o per $m = 4$, a seconda dei valori di a/L ($0 \leq \nu \leq 1/3$).

b) Per le espressioni di λ , provenienti dalla terna (23), l'esplorazione numerica è stata fatta sistematicamente in questi termini: fissato $n = 1$ sono stati calcolati, per ogni data coppia di rapporti h/a e a/L , i valori $\bar{\lambda}$ al crescere di m pari da 2 a 40 (ciò che è più che sufficiente per i valori accettabili dei predetti rapporti) conservando memoria del $\bar{\lambda}$ più piccolo ottenuto e del corrispondente m . Poiché $\bar{\lambda}_{cr}$ è *praticamente insensibile* a ν , il calcolo è stato effettuato con le formule (26) per $\nu = 0$. Nel fattore di $\bar{\lambda}_{cr}$ delle $(18_g)-(18_p)$ si pone però, in ogni caso, il valore effettivo di ν .

I risultati sono riportati nelle Tabelle II e III. In esse con il simbolo \triangle (rispettivamente, con \square) è indicata la posizione corrispondente ai valori di h/a e a/L *medi* per volte di *tipo lungo*, rispettivamente *corto* ⁽²¹⁾, precisate al n. 4 d, (pag. 318).

Le due Tabelle II e III pongono in evidenza che il λ_{cr} cresce tanto con h/a quanto con a/L (perciò, tenuto conto di (18) e di (28), g_{cr} assume valori maggiori di 1,72 $(h/a)^3 E$ e p_{cr} valori maggiori di 0,667 $(h/a)^3 E$ per $a/L = 0$); invece il valore di m , che fornisce il minimo, decresce al crescere di h/a e di L/a .

Si rilevi che è facile, quando si fa intervenire l'energia elastica estensionale, arrivare a carichi critici g_{cr} o p_{cr} ai quali corrispondono sollecitazioni specifiche σ oltre il limite di proporzionalità $\sigma = \sigma_p$. Essi diventano allora illusori come i carichi assiali critici della bicentenaria formola di Eulero quando un'asta ha poca snellezza.

Comunque, come si è detto, dai dati illusori è sempre possibile risalire a dati validi. E ciò introducendo un modulo d'elasticità variabile, opportunamente scelto, tanto nella formola d'Eulero (che tale modulo fa ricadere nelle formule sperimentali di Tetmajer) quanto nei g_{cr} , p_{cr} qui considerati. Sarà trattato in merito in una Nota successiva a conclusione di queste.

(21) Cfr. op. cit. (4), §§ 22 e 33.

TABELLA II.

Minimi $\bar{\lambda}_{cr}$ del $\bar{\lambda}$, fornito dalla (26_g), e valori di m minimanti (*); $(g_{cr} = \frac{\pi E}{24(1-\nu^2)} 10^{-6} \bar{\lambda}_{cr})$.

$10^2 k/a$ a/L	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,6	2,0
0,1	0,22 (4)	1,34 (4)	4,24 (4)	9,82 (4)	18,97 (4)	32,58 (4)	76,76 (4)	149,51 (4)
0,2	0,40 (6)	2,67 (6)	7,73 (4)	14,62 (4)	25,21 (4)	40,42 (4)	88,40 (4)	165,95 (4)
0,3	0,62 (8)	3,47 (6)	9,99 (6)	22,27 (6)	42,23 (6)	71,30 (4)	131,59 (4)	223,19 (4)
0,4	0,80 (8)	4,92 (8)	13,25 (6)	26,95 (6)	48,61 (6)	80,22 (6)	181,22 (6)	345,89 (6)
0,5	1,0 (10)	5,74 (8)	17,15 (8)	36,21 (6)	60,89 (6)	95,08 (6)	205,74 (6)	382,16 (6)
1,0	2,1 (14)	12,3 (12)	33,9 (10)	72,7 (10)	135,1 (8)			
2,0	4,4 (18)	26,5 (16)	76,9 (14)	166,4 (14)				
3,0	7,0 (22)	44,3 (20)	131,1 (18)					

(*) In ogni casella il primo numero è il $\bar{\lambda}_{cr}$, il secondo (entro parentesi) è il corrispondente m . Per il significato di Δ e \square vedere n. 12 b.

TABELLA III.

Minimi λ_* del $\bar{\lambda}$, fornito dalla (26_v), e valori di m minimanti (*); ($p_{cr} = \frac{E}{6(1-\nu^2)} 10^{-6} \lambda_{cr}$).

$10^3 h/a$ a/L	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,6	2,0
0,1	0,19 (4)	1,17 (4)	3,69 (4)	8,55 (4)	16,52 (4)	28,37 (4)	66,84 (4)	97,48 (2)
0,2	0,38 (6)	2,52 (6)	6,73 (4)	12,74 (4)	21,96 (4)	35,20 (4)	76,99 (4)	144,54 (4)
0,3	0,59 (8)	3,28 (6)	9,45 (6)	21,06 (6)	39,92 (6)	62,13 (4)	114,67 (4)	194,49 (4)
0,4	0,77 (8)	4,77 (8)	12,53 (6)	25,48 (6)	45,96 (6)	75,84 (6)	171,33 (6)	318,69 (4)
0,5	0,99 (10)	5,57 (8)	16,63 (8)	34,23 (6)	57,56 (6)	90,74 (6)	194,52 (6)	361,31 (6)
0,6	1,2 (10)	7,0 (8)	19,0 (8)	41,2 (8)	77,2 (8)			
0,7	1,4 (10)	8,2 (10)	22,6 (8)	46,6 (8)	85,0 (8)			
0,8	1,6 (12)	9,2 (10)	27,4 (10)	54,6 (8)	96,0 (8)			
0,9	1,8 (12)	10,6 (10)	29,8 (10)	65,6 (8)	111,0 (8)			
1,00	2,0 (14)	12,1 (12)	33,2 (10)	71,3 (10)	131,0 (8)			
1,25	2,6 (14)	15,2 (12)	44,0 (12)	91,4 (10)	162,2 (10)			
1,50	3,2 (16)	18,8 (14)	53,4 (12)	114,2 (12)				
1,75	3,8 (16)	22,6 (14)	65,2 (14)	137,6 (12)				
2,00	4,4 (18)	26,3 (16)	76,1 (14)	164,8 (14)				
2,25	5,0 (20)	30,6 (16)	89,8 (16)					
2,50	5,6 (20)	34,8 (18)	101,6 (16)					
2,75	6,4 (22)	39,2 (18)	116,2 (16)					
3,00	7,0 (22)	44,2 (20)	130,4 (18)					

(*) In ogni casella il primo numero è il λ_{cr} , il secondo (entro parentesi) è il corrispondente m . Per il significato di Δ e \square vedere n. 12 b.

c) Un compendio dei risultati è rappresentato in figura 8. Questa figura contiene quattro curve: per $h/a = 0,004$, $h/a = 0,006$, $h/a = 0,008$ ed infine per $h/a = 0,010$; ogni curva è formata da molti archi (a tratto marcato), ciascuno dei quali è il grafico di $\bar{\lambda}$ in funzione di a/L per un valore di m , indicato sopra l'arco, e per quello di h/a della curva a cui l'arco

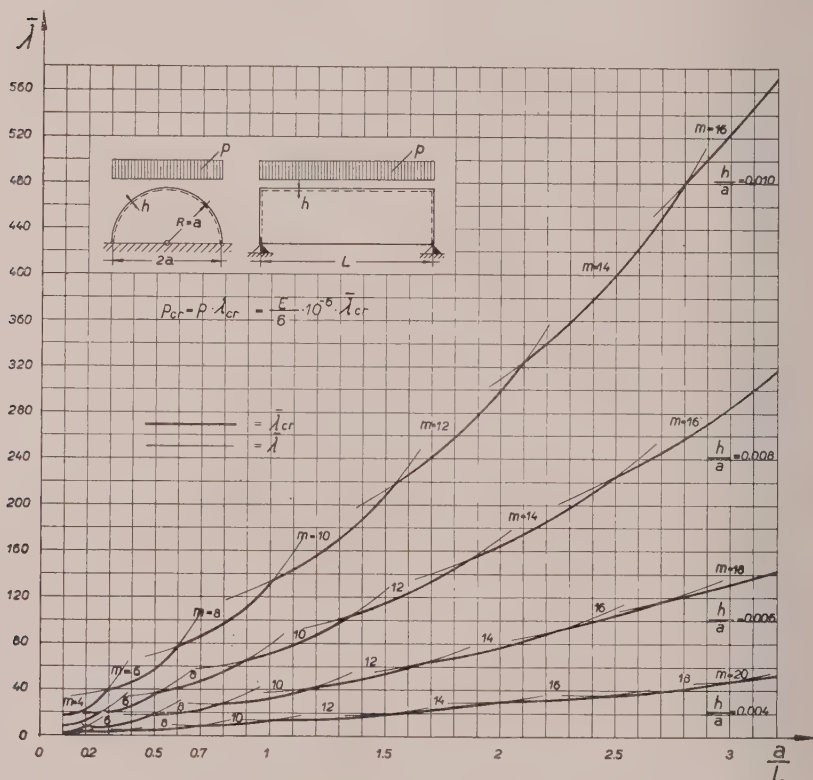


Fig. 8.

appartiene. Gli archi sono prolungati, a tratto sottile, oltre i punti di intersezione con i due archi adiacenti.

Detta figura consente di apprezzare il valore minimo di $\bar{\lambda}$ ($= \bar{\lambda}_{cr}$) e il corrispondente m , che lo procura, per ogni coppia di valori h/a , a/L ($v = 0$) negli intervalli ivi adottati. Naturalmente per $p_{cr} = \lambda_{cr} p$ o $g_{cr} = \lambda_{cr} g$ non deve essere superato il limite di proporzionalità σ_p .

Ciò riduce, a priori, la validità dei grafici di fig. 8 ad un ben piccolo intorno dell'origine, salvo a valersi degli accorgimenti annunciati e di cui diremo.

§ 5. — IL MOLTIPLICATORE CRITICO λ_{cr} PER VOLTE AUTOPORTANTI
A DIRETTRICE SEMICIRCOLARE CONTINUE SU PIÙ CAMPATE.

13. — *a)* Applichiamo ora quanto si è esposto al n. 8 alla determinazione del carico critico per una volta con timpani fissi (incastata) ovvero per volte continue su infinite campate eguali e ugualmente caricate.

b) Ricordiamo che qui si devono modificare le espressioni di T_1 e di Z , prendendole dalla (3), (4), (7) e dalla (7'). Si ha allora:

con una distribuzione di carichi (2_g) (peso permanente g)

$$\begin{cases} T_2 = -ga \cos \psi & , \quad S = gL(1 - 2\xi) \sin \psi, \\ T_1 = -g \frac{L^2}{a} \left(\xi - \xi^2 - \frac{1}{6} \right) \cos \psi & , \quad Z = gL^2 \left(\xi - \xi^2 - \frac{1}{6} \right); \end{cases}$$

con una distribuzione di carichi (2_p) (carico accidentale p)

$$\begin{cases} T_2 = -pa \cos^2 \psi & , \quad S = \frac{3}{4} pL(1 - 2\xi) \sin 2\psi, \\ T_1 = -\frac{3}{2} p \frac{L^2}{a} \left(\xi - \xi^2 - \frac{1}{6} \right) \cos 2\psi & , \quad Z = 0; \end{cases}$$

$$(0 \leq \xi = x/L \leq 1 \quad , \quad 0 \leq \psi \leq \pi/2).$$

14. — *a)* Per tener conto delle condizioni di incastro (in $\xi = 0, \xi = 1$) riesce utile considerare la terna (cfr. ⁽¹⁾, p. 16):

$$(29) \quad \begin{cases} u = \sum_{mn} A_{mn} \sin 2n\pi\xi \cos m\psi, \\ v = \sum_{mn} B_{mn} \frac{1 - \cos 2n\pi\xi}{2} \sin m\psi, \\ w = \sum_{mn} C_{mn} \frac{1 - \cos 2n\pi\xi}{2} \cos m\psi. \end{cases}$$

Di questa si fa uso limitandosi ad un solo termine (m, n) (cfr. n. 10 *b*) con i coefficienti scelti così che risulti almeno $e_2^{(1)} = \omega^{(1)} = 0$ ⁽²²⁾:

$$(30) \quad A_{mn} = \frac{1}{m} A \quad , \quad B_{mn} = \frac{1}{n} \frac{L}{\pi a} A \quad , \quad C_{mn} = \frac{m}{n} \frac{L}{\pi a} A,$$

essendo A indeterminata, eliminabile nel rapporto (24) di cui si cerca il minimo rispetto agli interi m ed n . Circoscrivendo la ricerca ai soli valori pari di m minimanti (24) con $n = 1$, la (29) si riduce in conformità a

$$(31) \quad \begin{cases} u = A \sin 2\pi\xi \frac{\cos m\psi}{m} & , \quad v = A \frac{L}{\pi a} \frac{1 - \cos 2\pi\xi}{2} \sin m\psi, \\ w = A \frac{mL}{\pi a} \frac{1 - \cos 2\pi\xi}{2} \cos m\psi, & (0 \leq \xi = x/L \leq 1, 0 \leq \psi \leq \pi/2) \end{cases} \quad (23)$$

(22) Condizione questa che porta a soddisfare, per $v = 0$, alle condizioni del bordo libero della membrana: $T_2 = 0$, $S = 0$, in $\psi = \pm \psi_0$.

(23) Nelle formule (3) a p. 135 (Nota I) si è posto $-\psi_0 \leq \psi \leq \psi_0$; ciò è vero; ma, attesa la simmetria rispetto all'asse $\psi = 0$, le dette formule, come ogni altra che qui interviene, valgono per $0 \leq \psi \leq \psi_0$.

b) Con le posizioni (18) si è ridotti alla ricerca degli interi m pari per i quali è minima l'espressione

$$(32_g) \quad \bar{\lambda} = \left(10^2 \frac{h}{a}\right)^3 \frac{4m^2 - 1}{m^2(m^2 - 1)} \cdot \frac{12 \left(\pi \frac{a}{L}\right)^4 \left(\frac{a}{h}\right)^2 + m^4 \left\{ \left[\left(\pi \frac{a}{L}\right)^2 + \frac{13}{4}(m^2 - 1)\right]^2 - \frac{m^2 - 1}{2m^2} \left(\pi \frac{a}{L}\right)^2 [1 - \nu + (1/3 - 1)m^2] \right\}}{\left(\pi \frac{a}{L}\right)^2 + \frac{m^2}{8}(6m^2 - 13)}$$

in corrispondenza alla (18_g), ovvero

$$(32_p) \quad \bar{\lambda} = \left(10^2 \frac{h}{a}\right)^3 \frac{4}{m^2} \cdot \frac{12 \left(\pi \frac{a}{L}\right)^4 \left(\frac{a}{h}\right)^2 + m^4 \left\{ \left[\left(\pi \frac{a}{L}\right)^2 + \frac{13}{4}(m^2 - 1)\right]^2 - \frac{m^2 - 1}{2m^2} \left(\pi \frac{a}{L}\right)^2 [1 - \nu + (1/3 - 1)m^2] \right\}}{\left(\pi \frac{a}{L}\right)^2 + \frac{3}{4}(m^2 - 1)^2}$$

in corrispondenza alla (18_p).

§ 6. - VOLTE CONTINUE SU PIÙ CAMPATE: CASI LIMITI E TABELLAZIONI.

15. - Dalle (32) si ottengono, per $L/a \rightarrow \infty$, i seguenti valori finiti:

$$\lim_{\substack{L \\ a} \rightarrow \infty} \bar{\lambda} = \left(10^2 \frac{h}{a}\right)^3 \cdot \begin{cases} \frac{3(4m^2 - 1)(m^2 - 1)}{2(6m^2 - 13)}, & \text{dalla (32}_g\text{)}, \\ m^2 & , \text{dalla (32}_p\text{)}. \end{cases}$$

Il minimo valore di queste funzioni si consegue per $m = 2$ e risulta

$$(33) \quad \lim_{\substack{L \\ a} \rightarrow \infty} \bar{\lambda}|_{m=2} = \left(10^2 \frac{h}{a}\right)^3 \cdot \begin{cases} 6,14 & \text{dalla (32}_g\text{)}, \\ 4 & \text{dalla (32}_p\text{)}. \end{cases}$$

Come si vede, per $\lim p_{cr}$ si ritrova il valore (cfr. le (27_a)) per il caso dei timpani snodati agli estremi; al limite, per $L/a \rightarrow \infty$ non si fa più risentire il particolare tipo del vincolo.

Per $\lim g_{cr}$, attesa la diminuzione di $|Z|$ si ha un avvicinamento sensibile al caso 2) della (28); il fattore 1,722 scende a 0,803.

16. - Per le tabellazioni ci siamo attenuti ai criteri esposti al n. 12 per le volte isolate, abbiamo cioè assegnati h/a , a/L , ν e calcolati i valori di λ al crescere di m pari da 2 a 40. Si è posto $\nu = 0$.

I risultati delle tabellazioni eseguite con la (32_p) sono compendiabili in una figura, analoga alla fig. 8, che omettiamo per brevità.

TABELLA IV.

Minimi $\bar{\lambda}_{cr}$ del $\bar{\lambda}$, fornito dalla (32₈), e valori di n minimanti (*); $(g_{cr} = \frac{\pi E}{24(1-\nu^2)} 10^{-6} \bar{\lambda}_{cr})$.

$\frac{10^3 h/a}{a/L}$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,6	2,0
0,1	0,33 (6)	1,85 (4)	4,86 (4)	10,36 (4)	19,20 (4)	32,20 (4)	74,03 (4)	142,52 (4)
0,2	0,61 (8)	3,37 (6)	9,62 (6)	21,35 (6)	40,40 (6)	66,89 (4)	121,84 (4)	204,78 (4)
0,3	0,93 (10)	5,12 (8)	15,58 (6)	29,63 (6)	51,26 (6)	82,37 (6)	180,61 (6)	339,54 (6)
0,4	1,17 (10)	6,99 (8)	18,82 (8)	40,63 (8)	75,78 (8)	116,49 (6)	229,93 (6)	407,33 (6)
0,5	1,48 (12)	8,51 (10)	24,91 (8)	49,36 (8)	87,66 (8)	143,26 (8)	320,22 (8)	537,86 (6)
1,0	3,0 (16)	17,8 (14)	50,6 (12)	106,6 (12)	196,3 (12)			
2,0	6,6 (24)	40,0 (20)	116,3 (18)	250,4 (16)				
3,0	10,7 (28)	67,4 (24)	201,7 (22)					

(*) In ogni casella il primo numero è il $\bar{\lambda}_{cr}$, il secondo (entro parentesi) è il corrispondente m . Per il significato di \triangle e \square vedere il n. 12 b.

TABELLA V.

Minimi $\bar{\lambda}_{cr}$ del $\bar{\lambda}$, fornito dalla (32_v), e valori di m minimanti (*); $(p_{cr} = \frac{E}{6(1-\nu^2)} 10^{-6} \bar{\lambda}_{cr})$.

$10^2 h/a$ a/L	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,6	2,0
0,1	0,32 (6)	1,73 (4)	4,55 (4)	9,71 (4)	17,99 (4)	30,17 (4)	69,36 (4)	133,52 (4)
0,2	0,60 (8)	3,28 (6)	9,36 (6)	20,78 (6)	39,32 (6)	62,67 (4)	114,16 (4)	191,86 (4)
0,3	0,92 (10)	5,05 (8)	15,17 (6)	28,84 (6)	49,89 (6)	80,18 (6)	175,82 (6)	330,52 (6)
0,4	1,16 (10)	6,89 (8)	18,54 (8)	40,04 (8)	74,67 (8)	113,39 (6)	223,82 (6)	396,51 (6)
0,5	1,47 (12)	8,43 (10)	24,54 (8)	48,64 (8)	86,37 (8)	141,16 (8)	315,52 (8)	523,57 (6)
0,6	1,8 (12)	10,3 (10)	28,7 (10)	63,0 (10)	106,2 (8)			
0,7	2,1 (14)	12,1 (12)	33,8 (10)	70,6 (10)	129,4 (10)			
0,8	2,4 (14)	13,9 (12)	40,3 (12)	81,7 (10)	144,9 (10)			
0,9	2,7 (16)	16,2 (14)	44,5 (12)	96,9 (12)	166,3 (10)			
1,00	3,0 (16)	17,7 (14)	50,2 (12)	105,9 (12)	195,0 (10)			
1,25	3,9 (18)	23,0 (16)	64,8 (14)	140,6 (12)	245,5 (12)			
1,50	4,7 (20)	28,4 (16)	81,7 (16)	171,4 (14)				
1,75	5,6 (22)	33,8 (18)	97,9 (16)	210,1 (16)				
2,00	6,6 (24)	39,9 (20)	115,9 (18)	249,5 (16)				
2,25	7,5 (24)	46,3 (20)	136,0 (18)					
2,50	8,5 (26)	52,8 (22)	155,8 (20)					
2,75	9,7 (28)	60,3 (22)	179,0 (20)					
3,00	10,7 (28)	67,3 (24)	201,3 (22)					

(*) In ogni casella il primo numero è il $\bar{\lambda}_{cr}$, il secondo (entro parentesi) è il corrispondente m . Per il significato di Δ e \square vedere n. 12 b.

Dai calcoli effettuati con le espressioni (32_g) e (32_p) di $\bar{\lambda}$ abbiamo ricavato le Tabelle IV e V analoghe, rispettivamente, alle II e III.

Anche in questo caso il minimo di $\bar{\lambda}$ ($= \bar{\lambda}_{cr}$) cresce tanto con h/a quanto con a/L e, tenuto conto di (18) e di (33), si può affermare che, per $a/L \neq 0$, g_{cr} assume valori maggiori di 0,803 $(h/a)^3 E$ e p_{cr} maggiori di 0,667 $(h/a)^3 E$; mentre il valore di m , che fornisce il minimo, decresce al crescere di h/a e di L/a .

Con ciò il problema della ricerca del λ_{cr} per una volta autoportante è risoluto, almeno nell'ambito limitato in cui ci siamo posti. Restano alcune osservazioni e complementi, riguardanti, in particolare, il superamento del limite σ_p di proporzionalità e qualche raffronto.

A questi ci permetteremo di dedicare ancora una Nota a titolo conclusivo.

Meccanica. - *Problemi di conservazione dell'equilibrio interno di una massa rocciosa eterogenea in corso di trasferimento.* Nota (*) del Socio GUSTAVO COLONNETTI.

Il progettato sollevamento dei templi di Abu-Simbel ha proposto alcuni problemi non comuni e di non facile soluzione.

Eccone uno che concerne la prima tra le operazioni preliminari: quella del trasferimento del peso della massa rocciosa in cui è scavato il tempio, dal sottosuolo su cui grava attualmente, ad un piastrone orizzontale di base, chiamato in un primo tempo a sostenerla, poi a sollevarla a poco a poco dalla sua posizione attuale sulla riva del Nilo, alla posizione finale (62 metri più in alto) su le rive del lago a cui darà origine la costruzione della diga di Assuan.

È noto che questo piastrone sarà costituito da robuste travate in cemento armato gettate entro un sistema di gallerie orizzontali (longitudinali e trasversali) intersecantesi ortogonalmente; travate collegate tra loro in modo da creare una struttura reticolare di grande resistenza.

Il problema si presenterà nel momento in cui, terminata la costruzione del piastrone, dovrà iniziarsi la demolizione dei pilastri rocciosi che, durante detta costruzione, erano rimasti entro le maglie del reticolato a sostegno della massa soprastante, e più precisamente quando il peso di questa massa si trasferirà dai pilastri stessi al piastrone.

Si possono evidentemente immaginare infiniti modi di operare per gradi questo trasferimento; ma comunque si operi è evidente che, mano mano che il piastrone verrà ad essere caricato, tenderanno a prodursi in esso delle deformazioni elastiche, o non elastiche, e comunque non trascurabili, a meno che non si riesca a contrastarle con una distribuzione di reazioni sulla sua faccia inferiore eguali e contrarie ai carichi soprastanti.

Ora bisogna tenere presente che l'assenza - o comunque l'estrema piccolezza - delle deformazioni del piastrone è condizione essenziale per la incolumità della massa rocciosa soprastante, la quale - per la grande cavità in essa esistente e per la sua eterogeneità e le eventuali fessurazioni - si trova in un equilibrio che non deve in alcun modo venire turbato se non si vuole che le fessurazioni attuali si aggravino, o altre se ne determinino.

Così il problema della incolumità della massa rocciosa si traduce nel problema della indeformabilità del piastrone; indeformabilità che noi dovremo assicurare in ogni istante e qualunque siano le distribuzioni *incognite* di azioni con cui la massa rocciosa viene a gravare su di esso.

Due conseguenze ne derivano immediatamente. La prima è che le reazioni sotto il piastrone devono essere manovrate in modo da equilibrare

(*) Presentata nella seduta del 13 maggio 1961.

in ogni istante dell'operazione i carichi soprastanti. La seconda è che tale manovra dovrà essere comandata (possibilmente in modo automatico) dalle deformazioni stesse che nel piastrone tendono a prodursi, non appena un minimo squilibrio si verifichi tra carichi e reazioni.

Donde la necessità che i martinetti previsti per il sollevamento del piastrone e le apparecchiature di controllo della sua planarità ed orizzontalità entrino in funzione nel momento stesso in cui il piastrone incomincerà a ricevere il suo carico; ed a questa necessità dovrà venire condizionato tutto il piano dei lavori.

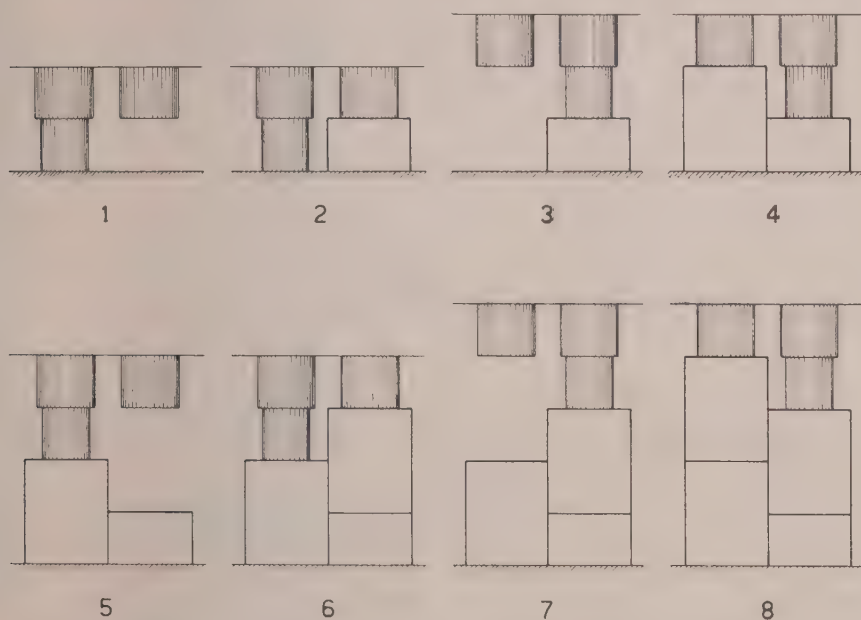


Fig. 1.

Va da se che ciò che si è detto della fase iniziale delle operazioni può ripetersi a proposito di tutte le fasi successive; che cioè la possibilità di intervento dei martinetti per mantenere la voluta distribuzione delle reazioni sotto il piastrone di base anche quando eventuali cedimenti (elastici o non elastici) degli appoggi tendessero ad alterarla, deve sussistere per tutta la durata delle operazioni.

A questo fine il dispositivo prospettato nella prima redazione del progetto⁽¹⁾ potrebbe essere vantaggiosamente modificato accoppiando i martinetti a due a due – o meglio dotando ciascun martinetto di due distinti pistoni – destinati a lavorare alternativamente nel modo schematicamente indicato nei successivi schemi della fig. 1, per modo che il peso del piastrone di base e

⁽¹⁾ Il progetto Italiano per il salvataggio dei templi di Abu-Simbel. Accademia Nazionale dei Lincei. Problemi attuali di scienza e di cultura (quaderno 49), 1961.

della massa rocciosa soprastante venga alternativamente supportato dall'uno o dall'altro dei pistoni, ed uno dei due sia sempre pronto ad effettuare le manovre che si rendessero eventualmente necessarie.

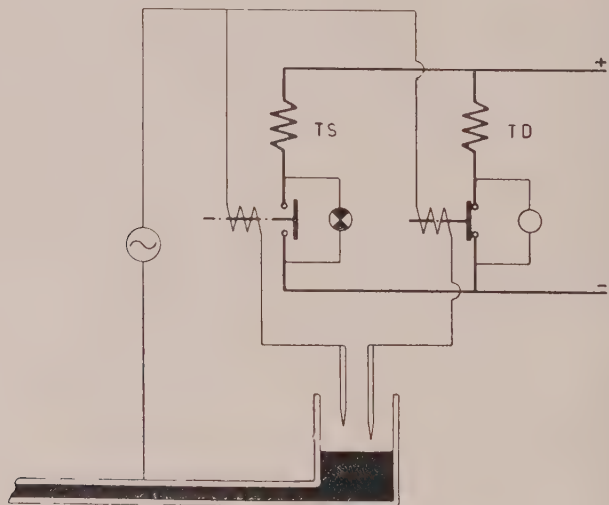


Fig. 2.

Quanto all'automatismo di tali manovre, un dispositivo a *relais* potrebbe essere concepito nel modo, sempre schematicamente, indicato nelle figg. 2, 3 e 4.

Nelle quali sono raffigurate le operazioni dei due *relais* (l'uno normalmente aperto ed a chiusura comandata, l'altro normalmente chiuso e ad

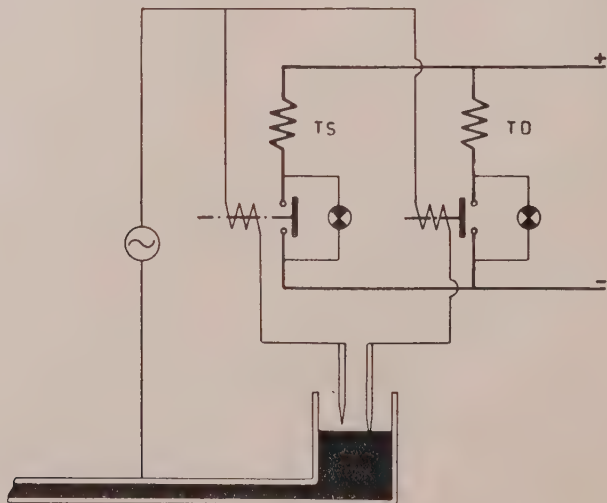


Fig. 3.

apertura comandata) destinati rispettivamente al comando dei teleruttori per la discesa (TD) e la salita (TS) dei pistoni, quando il livello del mercurio in uno degli apparati indicatori discenda al di sotto, o salga al di sopra, dei limiti di tolleranza prescritti.

In parallelo ai *relais* sono indicate in figura le lampade segnalatrici (alimentate da correnti di intensità insufficienti ad azionare i teleruttori) che daranno al direttore delle operazioni immediata notizia di ogni irregolarità nel processo delle operazioni e della sua eliminazione per l'intervento, automaticamente determinato, dei martinetti.

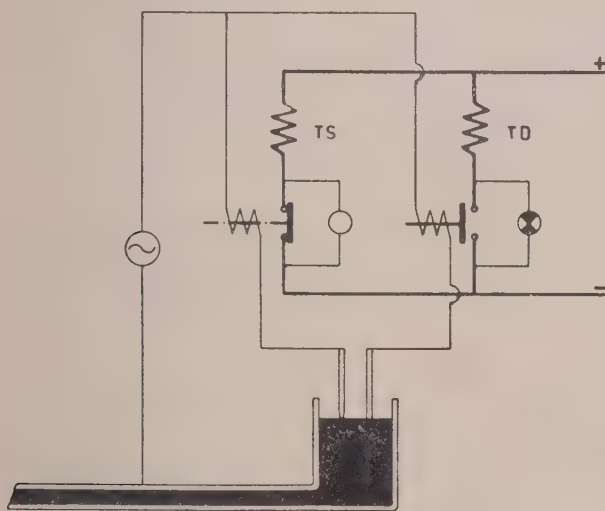


Fig. 4.

Occorre appena aggiungere che, con analoghi dispositivi facili ad immaginarsi, dovranno venir segnalate anche tutte quelle eventualità eccezionali (quali le fughe di mercurio e gli intralci al suo movimento nelle tubazioni) che influendo sui livelli nei diversi apparati indicatori, potrebbero determinare manovre dei martinetti non rispondenti alla effettiva situazione del piastrone.

In questi casi un teleruttore generale provvederà ad interrompere automaticamente il corso delle operazioni fino a che i necessari interventi abbiamo provvisto a ripristinare il normale funzionamento delle apparecchiature di controllo e di comando.

Astrofisica. — *Sulla correlazione tra i brillamenti solari e gli atmosferici a 27 KHz.* Nota di GIUSEPPE TAGLIAFERRI e GUGLIELMO RIGHINI, presentata (*) dal Corrisp. G. RIGHINI.

In occasione dei brillamenti solari si osservano delle perturbazioni ionosferiche, alcune delle quali vengono comunemente indicate con le sigle seguenti:

S.W.F. *Sudden short-wave fade-out* o evanescenza nelle trasmissioni radio a grande raggio (effetto di assorbimento);

S.P.A. *Sudden phase anomaly* o cambiamento di fase, rilevabile per confronto tra onda di terra di una trasmittente a onda chilometrica e onda riflessa dalla ionosfera e che si interpreta come una diminuzione di altezza dello strato D;

S.E.A. *Sudden enhancements of atmospherics* o improvviso rafforzamento del segnale medio registrato da un ricevitore a onda chilometrica e proveniente dalle scariche (atmosferici) prodotte nei centri temporaleschi lontani.

Quest'ultimo fenomeno, che è più vistoso per la frequenza di 27 KHz, fu scoperto dal Bureau nel 1934. In una ricerca statistica compiuta dallo stesso Bureau [1] nel 1941 ne fu rilevata la stretta relazione col ciclo undecennale dell'attività solare. L'Ellison [2] nel 1953 constatò ancora che alcuni brillamenti di notevole importanza erano sempre accompagnati da S.E.A.; per cui proponeva di sfruttare addirittura gli S.E.A. come indicatori dei brillamenti. La ricerca dell'Ellison però si limitava ad un piccolo numero di fenomeni e lasciava aperto il problema della « corrispondenza uno-uno » tra brillamenti ed S.E.A.

Nel presente lavoro si cerca appunto di chiarire quale sia tale corrispondenza e di indagare l'influenza che l'importanza visuale del brillamento ha nella correlazione suddetta.

La ricerca presente è limitata al 1959, anno di forte attività solare; i brillamenti sono rilevati dalle mappe del Fraunhofer Institut di Friburgo (Germania); gli S.E.A. sono rilevati invece dal bollettino dello Hertz Institut di Berlino. Dei brillamenti — classificati, come è noto, secondo una scala empirica d'importanza in funzione della area, dell'intensità e della durata — sono considerati soltanto quelli appartenenti alle classi 1 +, 2, 3; nella loro totalità invece sono stati presi gli S.E.A. — classificati in una scala pure empirica d'importanza secondo quattro tipi, 1 (deboli), 2 (medi), 3 (forti), 9 (fortissimi). I brillamenti delle classi 1 e 1— non sono stati considerati di proposito per molteplici ragioni, che per brevità omettiamo di riferire.

(*) Nella seduta del 13 maggio 1961.

Pertanto l'esame è stato esteso al materiale seguente:

Brillamenti n. 297

S.E.A. n. 293

Tale materiale è stato selezionato secondo il criterio di considerare soltanto gli S.E.A. registrati nei giorni di osservazione visuale del Sole.

Due eventi – brillamento ed S.E.A. – sono stati valutati coincidenti solo quando l'istante d'inizio dello S.E.A. cadeva entro la prima metà della durata del brillamento.

Con questo criterio le coincidenze rilevate fra brillamenti ed S.E.A. furono 116; le coincidenze casuali calcolate per lo stesso numero di eventi sono soltanto 28.

In particolare, suddividendo i brillamenti nelle singole classi si hanno le seguenti coincidenze percentuali:

TABELLA I.

Percentuale delle coincidenze tra brillamenti delle diverse classi ed S.E.A. qualsiasi.

Classe del brillamento	Percentuale
1 +	25 %
2	50 %
3	100 %

D'altra parte gli S.E.A. coincidenti con un qualsiasi brillamento risultano:

TABELLA II.

Percentuale delle coincidenze tra S.E.A. dei diversi tipi e brillamenti qualsiasi.

Tipo di S.E.A.	Percentuale
1	27 %
2	48 %
3	50 %
9	75 %

Da questo primo risultato si conclude che *vi sono brillamenti che non producono S.E.A.* e inoltre che *vi sono S.E.A. che non sono associati a brillamenti.*

Va rilevato inoltre che l'efficienza del brillamento nel produrre un S.E.A. non sembra dipendere dalla longitudine eliografica del brillamento stesso. Infatti suddividendo i 116 brillamenti, efficienti nel produrre S.E.A., in sei fusi di 30° di longitudine non si trova alcuna differenza significativa della efficienza dei diversi gruppi.

È d'altronde notevole il fatto che certi brillamenti non sono efficienti nel produrre S.E.A. e che esistono S.E.A. anche intensi non associati ad alcun brillamento. Considerando ora soltanto i brillamenti, « attivi » nel produrre S.E.A., delle classi 1+ e 2 (quelli di classe 3 sono troppo scarsi) si è indagato sulla loro efficienza nel produrre S.E.A. di tipo diverso e ne è risultato il seguente prospetto:

TABELLA III.

Percentuale di efficienza del brillamento nel produrre un S.E.A. di determinato tipo.

Tipo di S.E.A.	Classe del brillamento	
	1 +	2
1	35 %	28,5 %
2	52,5 %	50 %
3	10 %	18,5 %
9	2,5 %	3 %

Dalla Tabella III risulta che le percentuali di efficienza hanno un andamento indipendente dalla classe del brillamento con un massimo in corrispondenza alla produzione di S.E.A. di tipo 2.

Poiché gli S.E.A. sono conseguenza di un aumento del potere riflettente dello strato D, cioè in ultima analisi di un aumento della ionizzazione in questo strato, la interpretazione della presente statistica deve essere fatta ricercando quali sono le radiazioni solari che influenzano lo strato D della ionosfera.

Per molto tempo si è creduto che lo strato D fosse esclusivamente dovuto alla foto-ionizzazione del radicale NO (che si trova nell'atmosfera in piccola quantità) da parte dei quanti della riga di emissione Lyman α secondo la reazione:



Ora, pur non escludendo che tale meccanismo abbia una certa efficienza, bisogna tener presente che a seguito degli studi effettuati con rivelatori portati da razzi sonda siamo oggi sicuri che anche il Sole emette radiazioni X con una certa intensità [4]. Poiché la radiazione X agisce su tutti i componenti atmo-

sferici, e non soltanto su NO che è piuttosto scarso, è evidente che essa risulta molto più efficiente di Ly_{α} nel produrre la ionizzazione dello strato D.

Durante le perturbazioni ionosferiche si è trovato per mezzo degli effetti S.P.A. che l'altezza dello strato D si abbassa dagli 80 Km circa a 65 Km; se tale effetto fosse dovuto unicamente a Ly_{α} data la scarsità di NO si dovrebbe ammettere un aumento del flusso per un fattore 10^{10} che è assai difficile a spiegarsi dal punto di vista astrofisico.

D'altra parte i risultati ottenuti da Friedman e collaboratori [5] col satellite Sunray mostrano chiaramente che durante un brillamento l'intensità di Ly_{α} varia pochissimo, o non varia affatto, mentre invece il flusso dei raggi X con $\lambda < 8 \text{ \AA}$. presenta un netto aumento. Questo risultato proviene dalle osservazioni di un solo brillamento e non è pertanto che indicativo; pure in pochi casi è stato trovato con i razzi Sonda che lo spettro dei raggi X sembra estendersi verso le lunghezze d'onda minori.

Nonostante la provvisorietà di questi risultati si possono tuttavia trarre le conclusioni seguenti:

a) Lo strato D è probabilmente prodotto anche da Ly_{α} ma i quanti suddetti non hanno che un'azione secondaria e forse trascurabile nel produrre gli aumenti rapidi di ionizzazione.

b) Poiché non è mai stata studiata la correlazione fra S.P.A. ed S.E.A. non sappiamo ancora se quest'ultimi siano conseguenza del solo aumento di ionizzazione oppure anche dell'abbassarsi del soffitto riflettente.

c) È molto probabile che lo S.E.A. sia una conseguenza indiretta dell'aumento nel flusso X emesso dal Sole. Probabilmente l'aumento di flusso è accompagnato anche dalla estensione verso le lunghezze d'onda minori dello spettro di emissione.

Riprendendo ora in esame la Tabella I possiamo dire sulla base dell'ipotesi c) che:

La probabilità che durante un brillamento si abbia emissione di radiazione X cresce rapidamente con l'importanza del brillamento stesso.

D'altronde il tipo assegnato ai singoli S.E.A. è logicamente una funzione della densità ionica nello strato D e del tempo durante il quale tale densità viene mantenuta dalla radiazione ionizzante. Possiamo cioè dire in ultima analisi che il tipo dello S.E.A. è funzione del numero totale di ioni prodotti nel tempo di durata della perturbazione solare. Si conclude allora dalla Tabella III che:

I brillamenti efficienti, delle classi I+ e 2, producono di preferenza un debole o moderato numero di ioni (S.E.A. di tipi I e 2).

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI.

- [1] R. BUREAU, «Nature», 139, 110 (1937); «Comptes Rendus», 219, 451 (1944).
- [2] M. A. ELLISON, *Comm. Obs. l'dinbourgh*, 6 (1953).
- [3] C. DE JAGER, *Handbuch der Physik*, 52, Berlin (1959).
- [4] H. FRIEDMAN, *Physics of the Upper Atmosphere*, Ratcliffe Ed., New York and London (1960).
- [5] H. FRIEDMAN, Comunicazione al II Simposio del Cospar - Firenze 1961.

Astrofisica. — *Sulle condizioni fisiche del brillamento solare del 3 luglio 1957.* Nota di DORA RUSSO e GUGLIELMO RIGHINI, presentata (*) dal Corrisp. G. RIGHINI.

Il brillamento solare d'importanza 3 del 3 luglio 1957 è stato osservato e seguito nelle diverse fasi del suo sviluppo alla Torre Solare di Arcetri. Sugli spettroeliogrammi presi in tale occasione si è potuto eseguire uno studio fotometrico rilevando le isofote nella zona perturbata. Un esempio dei risultati è dato in fig. 1.

La leggenda dà l'intensità del brillamento riferita al fondo circostante non perturbato corrispondente all'incirca all'intensità centrale di H_{α} in assorbimento. I punti di massima intensità sono indicati con segni diversi e le intensità relative sono pure date nella leggenda accanto alla pagina.

Dalle isofote risulta che la zona perturbata presenta una specie di fronte più intenso che si sposta con una velocità dell'ordine di 10 Km/sec. Questa è anche la velocità delle onde acustiche nella cromosfera per cui non è improbabile che si formino delle onde d'urto nel brillamento come è stato suggerito da diversi Autori.

La potenza totale emessa dal brillamento, dedotta con misure planimetriche dalla fig. 1 e da altre analoghe, è riportata in fig. 2 in funzione del tempo. Questo grafico rappresenta quindi la curva di sviluppo del brillamento durante il periodo di osservazione. Si vede che al massimo osservato la potenza totale è di $1,0 \cdot 10^{26}$ erg/sec. Poiché l'area coperta dal brillamento nella fase del massimo osservato è di $5,6 \cdot 10^{18}$ cm² ne segue che la potenza $I(0, \theta)$ emessa per cm², è circa $3 \cdot 10^6$ erg cm⁻² sec⁻¹. Per un brillamento di profondità ottica τ si ha [1]:

$$I(0, \theta) = I_0(\theta) e^{-\tau \sec \theta} + J(1 - e^{-\tau \sec \theta})$$

dove $I_0(\theta)$ è la potenza emessa dalla cromosfera non perturbata, e J è la funzione di Planck per la temperatura T . Prendendo per τ il valore 10^4 ottenuto da Svestka [2] ed altri per via spettroscopica otteniamo dall'equazione precedente una temperatura dell'ordine di $9 \cdot 10^3$ °K. D'altronde De Jager [3] ha trovato per i brillamenti 3 e 3+ una densità elettronica pari a $1,5 \cdot 10^{13}$ elettroni per cm³. Conoscendo la temperatura del brillamento e la densità elettronica abbiamo ottenuto per mezzo della formula di Saha che la densità degli atomi neutri è di $6 \cdot 10^{12}$ atomi per cm³. Noti ora la temperatura del brillamento ed il numero totale di particelle per cm³ si è calcolato la pressione totale che risulta essere dell'ordine di 50 barie. D'altra parte nella zona in cui si sviluppa il brillamento, cioè al confine fra la cromosfera e la corona, si ha una pressione di $1,4 \cdot 10^{-2}$ barie in corrispondenza di una densità $n_e = 10^8$

(*) Nella seduta del 13 maggio 1961.

AD 823 IV

T.U. = 8^h 50^m

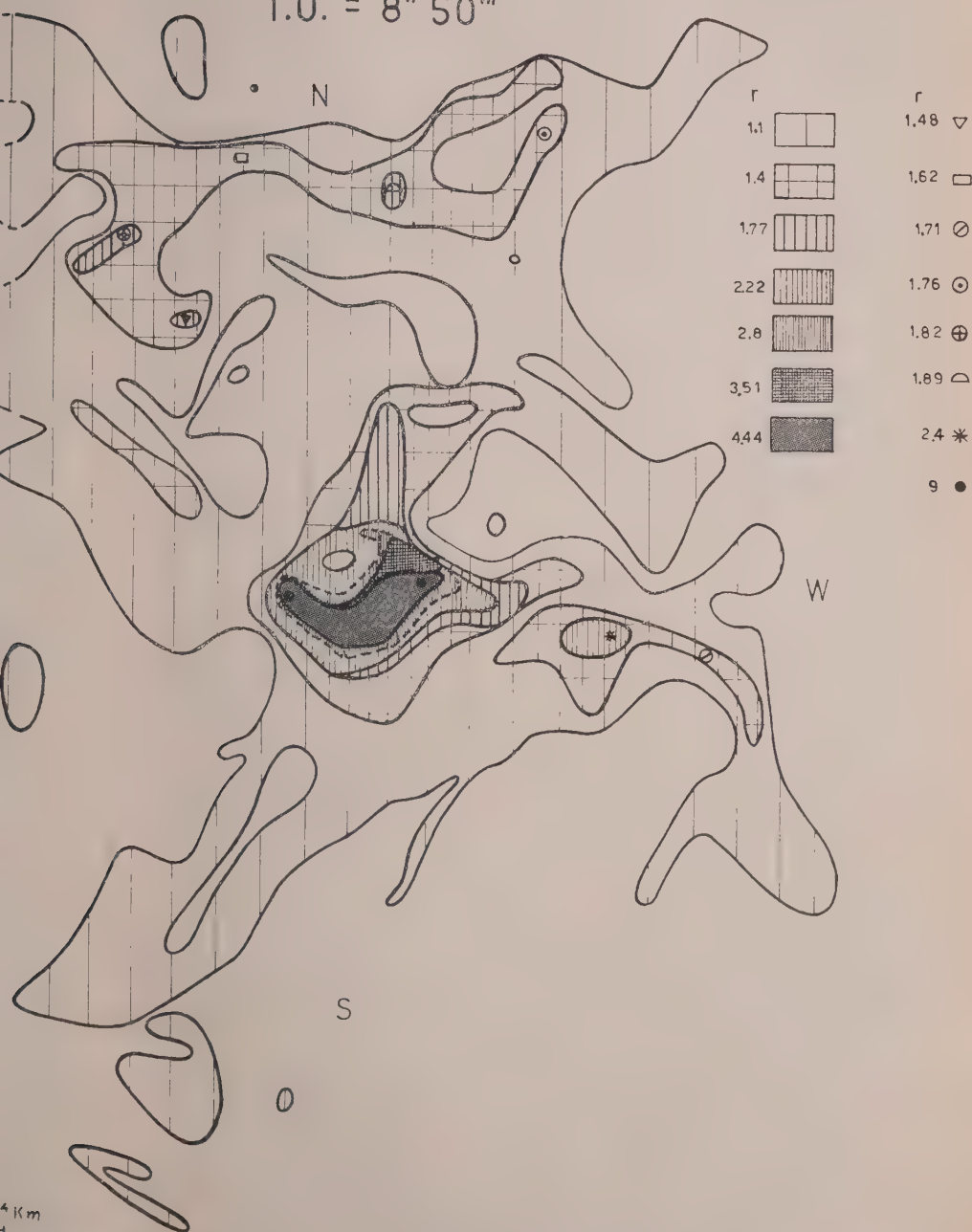


Fig. 1.

elettroni per cm^3 ed una temperatura $T = 10^6$ °K. La differenza fra la pressione del brillamento e la pressione esterna si attribuisce alla pressione esercitata dal campo magnetico locale. Poiché dunque fra la pressione P del brillamento, la pressione esterna P_0 e il campo d'induzione magnetica B vale la relazione

$$P = P_0 + \frac{B^2}{8\pi}$$

dai nostri dati otteniamo $B \simeq 30$ gauss.

La principale sorgente di errore nel metodo da noi seguito consiste nella applicazione dell'equazione di Saha, che vale nel caso dell'equilibrio termodinamico, ad un fenomeno come il brillamento che è chiaramente al di fuori di tale equilibrio.

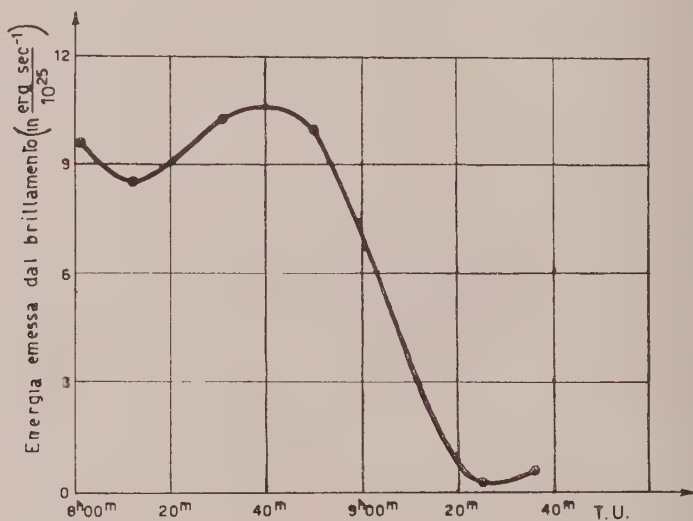


Fig. 2.

Quanto detto sopra vale anche per l'equazione di Boltzmann usata da De Jager per la determinazione della densità elettronica. L'uso di tali equazioni porta naturalmente a delle grossolane approssimazioni, ma d'altra parte, essendo la natura dei brillamenti pochissimo conosciuta non vi sono altre leggi che descrivano il fenomeno.

Il valore trovato per l'induzione magnetica non è molto lontano dalle stime che oggi si hanno per il campo magnetico necessario alla stabilità ed ai movimenti delle protuberanze.

Infatti, Correll [4] ed altri hanno trovato che è necessario supporre che il campo magnetico sia generato da un dipolo posto alla distanza di 0,8 raggi solari dal centro del Sole stesso per spiegare la forma delle linee di forza nella zona dove si verificano le protuberanze.

Marshall [5] dal modello suddetto ha calcolato inoltre che il campo magnetico prodotto da una coppia di grandi macchie aventi un campo di 3.500 gauss nel loro centro, la cui separazione sia di 50.000 Km, è di 3-4 gauss alla distanza di 50.000 Km dalle macchie stesse.

Il valore trovato, tenuto conto dell'incertezza generale nella teoria e delle approssimazioni fatte nei calcoli, sembra quindi accettabile.

Ne segue che il brillamento sarebbe controllato dal campo della macchia o del gruppo di macchie che penetra profondamente nella cromosfera e nella bassa corona.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] DE JAGER, « Handbuch der Physik », Band LII, 203 (1959).
- [2] SVESTKA, « Bull. Astr. Inst. Czech. Acad. Sci. », 32 (1957).
- [3] DE JAGER, « Handbuch der Physik », Band LII, 204 (1959).
- [4] CORRELL, « Ap. Journal », 124, 601 (1956).
- [5] MARSHALL, « Ap. Journal », 124, 597 (1956).

Geofisica. — *Sulle onde interne del lago di Bracciano e sulle loro probabili cause.* Nota (*) del Corrisp. PIETRO CALOI.

È noto che lo sviluppo delle oscillazioni libere di un bacino è particolarmente marcato, quando il periodo (o lo pseudo periodo) delle fluttuazioni di pressione coincide con quello delle sue oscillazioni libere.

Supponiamo ora che l'azione perturbante provenga da maree terrestri (maree solide), sia pure di piccolissima ampiezza.

Assumiamo come onda forzata di marea solida quella rappresentata da

$$(1) \quad M_0 = M \cos k(x - vt)$$

dove M è un numero generalmente molto piccolo. Le equazioni del moto di un'onda lunga, associata all'azione di M_0 — quando si trascuri l'effetto della viscosità (e quindi la turbolenza) — e quella della continuità, sono rispettivamente

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial M_0}{\partial x},$$

$$(3) \quad \eta = -h \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

dove ξ denota lo spostamento orizzontale delle particelle (e vale $\int u dt$, essendo u la velocità secondo x), c è la velocità di propagazione di un'onda lunga e ρ la densità media.

Per la (1), la (2) può scriversi

$$(4) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{kM}{\rho} \sin k(x - vt).$$

Consideriamo la soluzione delle (3) e (4) nel caso di un lago. In tal caso, le condizioni ai limiti sono

$$\xi = 0 \quad \text{per } x = \pm l,$$

dove $2l$ rappresenta la lunghezza del lago, prendendo l'origine delle coordinate al centro del lago stesso.

Con riferimento alla teoria delle maree forzate in un canale, (V. Lamb, *Hydrodynamics*, 5ª ed., 262), una soluzione per questo caso è la seguente

$$(5) \quad \xi = -\frac{M}{k\rho c^2(m^2 - 1)} \left[\sin k(x - vt) - \frac{1}{\sin 2klm} \{ \sin k(l + vt) \sin km(x - l) + \sin k(l - vt) \sin km(x + l) \} \right],$$

(*) Presentata nella seduta del 13 maggio 1961.

$$(6) \quad \eta = \frac{hM}{\rho c^2 (m^2 - 1)} \left[\cos k(x - vt) - \right. \\ \left. - \frac{m}{\sin 2k\ell m} \{ \sin k(\ell + vt) \cos km(x - \ell) + \sin k(\ell - vt) \cos km(x + \ell) \} \right],$$

dove $m = v/c$.

Nel caso che qui ci interessa, cioè di un lago stratificato (strato superiore di densità e spessore ρ' e h' ; strato inferiore di densità e spessore ρ'' e h'' rispettivamente), per onde lunghe (di lunghezza d'onda grande nei confronti di h' , h'') è

$$(7) \quad c^2 = g \frac{\rho'' - \rho'}{\frac{\rho''}{h''} + \frac{\rho'}{h'}}$$

e

$$T = \frac{4\ell}{i} \left\{ \frac{\rho''}{h''} + \frac{\rho'}{h'} \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{g(\rho'' - \rho')}.$$

Fatto

$$\varepsilon = \frac{h'}{h''},$$

ne consegue

$$(8) \quad T = \frac{4\ell}{i} \frac{1}{\sqrt{g h}},$$

essendo

$$(9) \quad h = \frac{h'(\rho'' - \rho')}{\rho' + \varepsilon \rho''}.$$

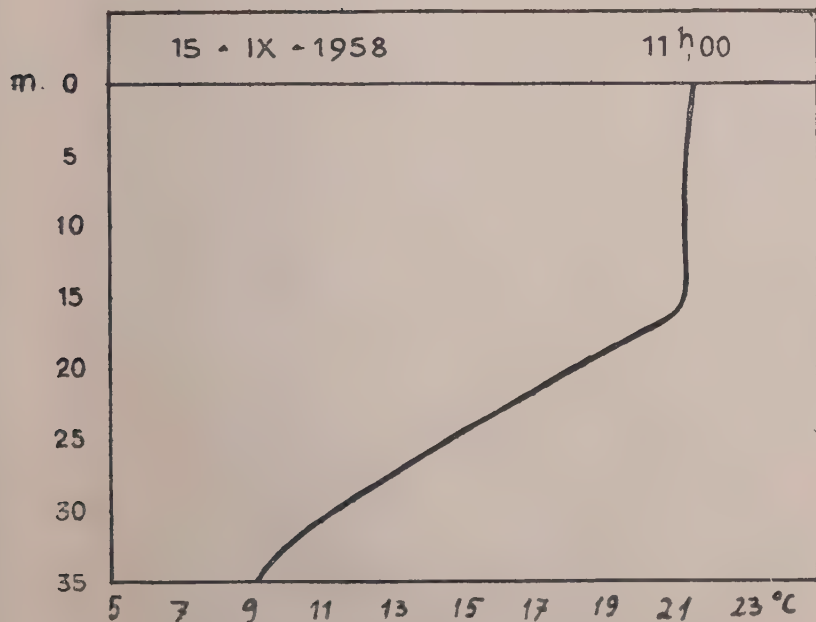


Fig. 1. - Tipica situazione termica del lago di Bracciano durante i mesi del primo autunno (registrata presso Trevignano).

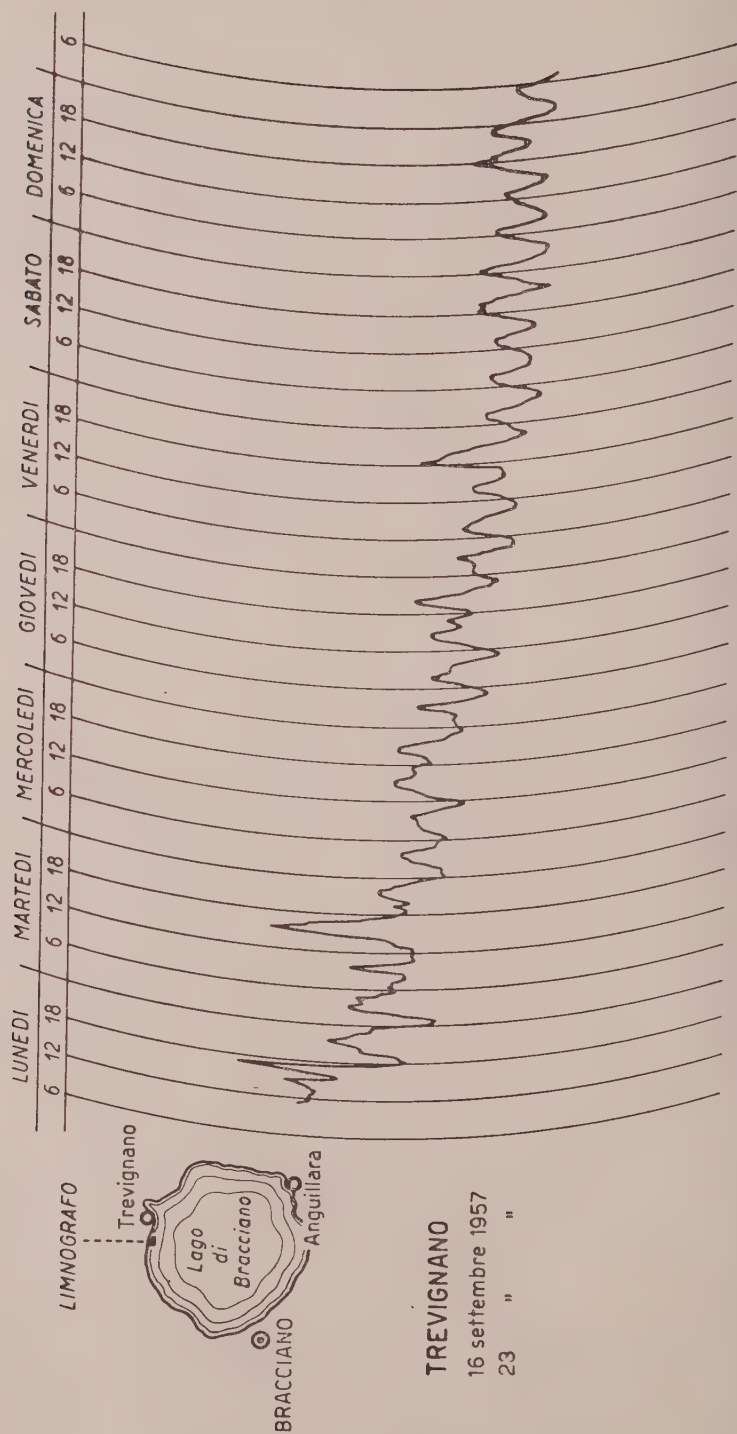


Fig. 2 a. - Registrazioni di onde interne del lago di Bracciano, ottenute alla superficie, con limnografo funzionante presso Trevignano.

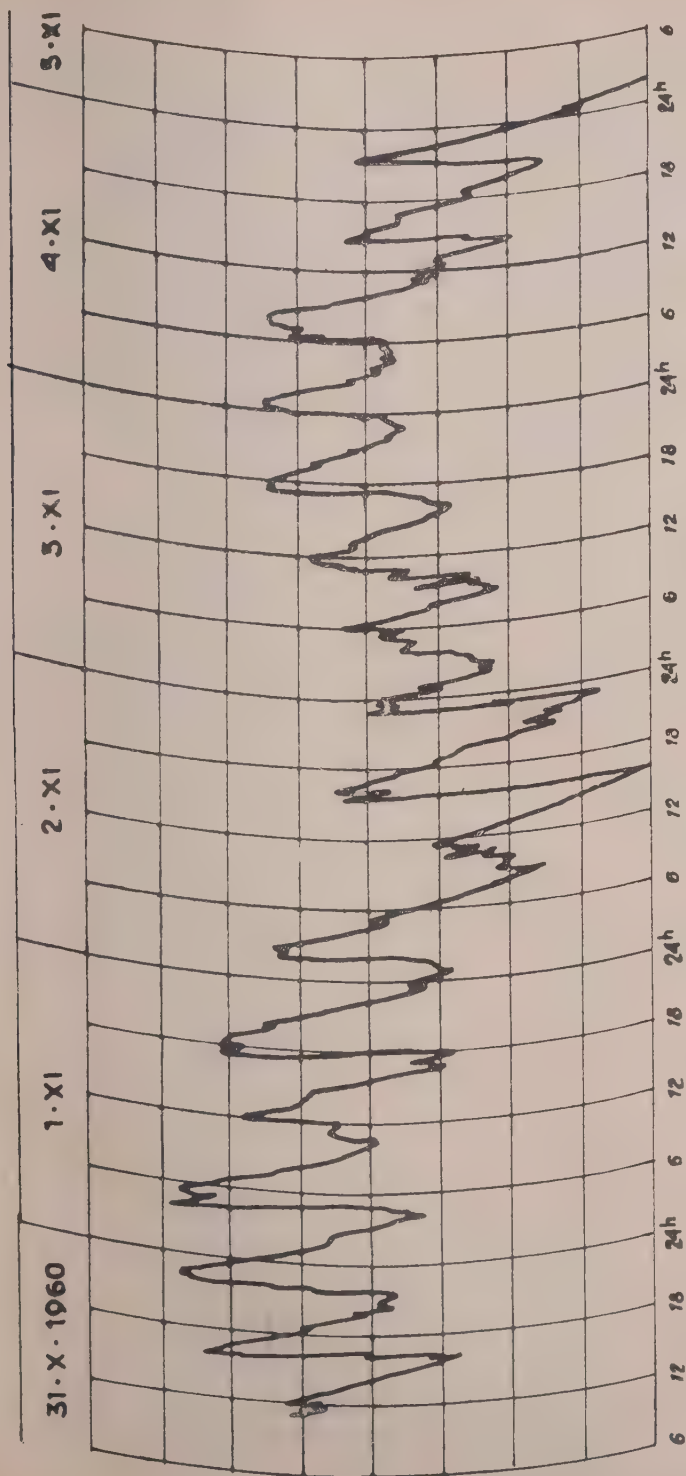


Fig. 2 b. -- Le onde interne possono tenere in movimento la superficie del lago di Bracciano fino ad autunno inoltrato, come prova questo esempio.

I valori di $c^2 (=gh)$ e di h che figurano nella (6) sono pertanto espressi dalle (7), (9) rispettivamente.

Ora, nella (6), per $v = c$, e quindi $m = 1$, η converge verso un valore finito, laddove per $\sin 2klm \rightarrow 0$, η tende all'infinito.

Ciò corrisponde al caso della risonanza. Se s è un intero, possiamo scrivere

$$(10) \quad 2klm = s\pi.$$

Se T_i è il periodo calcolato dell'onda interna di un lago, si ha

$$(11) \quad T_i = \frac{4l}{ic}.$$

Essendo $k = \frac{2\pi}{vT}$, $m = \frac{v}{c}$, per la (10) si ha

$$\frac{4l}{Tc} = s;$$

da cui, ricordando la (11), si ha

$$(12) \quad T = \frac{i}{s} T_i.$$

Quello considerato è naturalmente un caso ideale; serve comunque a spiegare fisicamente il caso del lago di Bracciano, dove l'onda interna uninodeale ($i = 1$), può essere esaltata quando il periodo della causa perturbante è prossimo ($s = 1$) a quello libero della superficie di discontinuità termica.

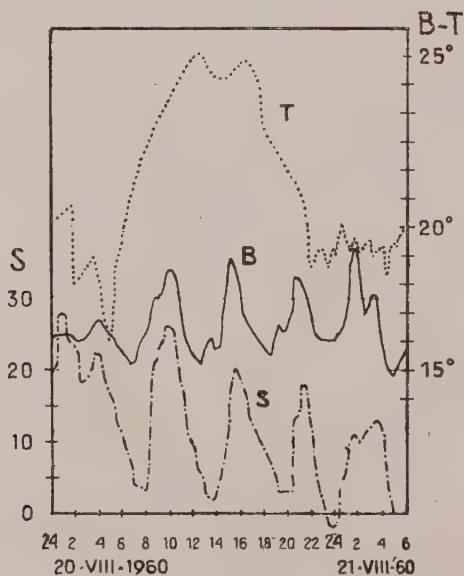


Fig. 3. - Contemporanea registrazione di variazione termica alla profondità di m 16 circa (curva B) e di variazione di livello in superficie (curva S), ottenuta presso Trevignano. (T, temperatura dell'aria).

È noto che le onde interne, associate all'esistenza dello strato del salto termico – quale, si genera, nei laghi della zona temperata, da agosto ad ottobre (fig. 1) – difficilmente possono raggiungere la superficie esterna di un lago, così da obbligarla in movimenti di ampiezza apprezzabile.

Ciò si verifica invece, pressoché sistematicamente, nel lago di Bracciano ⁽¹⁾, dove, nei mesi estivi, la superficie esterna è tenuta in moto per settimane e settimane, al ritmo di oscillazioni aventi un periodo di circa 6^h (vedi fig. 2 a). Si può quindi invocare, come causa di questa agitazione prolungata, un concomitante fenomeno di analogo periodo, quale può essere una marea terrestre quartidiurna o sottomultipla di una semidiurna, come conseguenza della coperiodale marea del vicino Tirreno.

(1) P. CALOI, *Termologia del lago di Bracciano: onde interne*. « Annali di Geofisica », XII, 1 (1959).

Chimica inorganica. — *Sali Rh^{III}-idrazinici di acidi carbossilici*^(*). Nota VII di LIVIO CAMBI, ERNESTINA DUBINI PAGLIA e G. BARGIGIA, presentata^(**) dal Socio L. CAMBI.

1. *Premesse* — Le esperienze che comunichiamo fanno parte del ciclo di ricerche sui sali Rh^{III}-idrazinici, apparse successivamente in questi « Rendiconti ». Costituiscono in particolare l'estensione di quelle più recenti⁽¹⁾, sui cloruri e acetati, ai complessi derivati dagli acidi carbossilici.

2. — *I sali indagati* sono riportati nelle tabelle che seguono dove si indicano soltanto i rapporti bruti dei componenti, senza considerare la loro struttura. Avvertiamo che abbiamo conservato il riferimento a $(4\text{ Rh})^{12+}$, come per gli acetati che precedono, per semplicità di confronto.

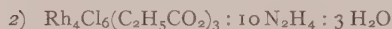
In merito agli indici atomici e molecolari frazionari, rimandiamo pure alla Nota VI precedente.

I. — *Acidi monocarbossilici.*

Acido idrazincarbonico



Acido propionico



Acido glicolico



Glicina



Acido cianacetico



Acido fenilacetico



Acido benzoico



Acido salicilico



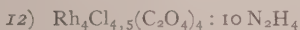
(*) Lavoro eseguito presso il Consorzio per la Laurea in Chimica Industriale dell'Università di Milano, con il concorso finanziario del C.N.R.

(**) Nella seduta del 13 maggio 1961.

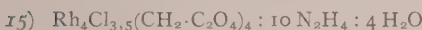
(1) L. CAMBI ed E. DUBINI PAGLIA, questi « Rendiconti », XXX (1961).

II. - *Acidi bicarbossilici.*

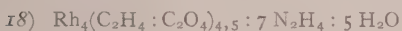
Acido ossalico



Acido malonico



Acido succinico



I sali riportati manifestano caratteri di polimeri, come i precedenti. Sono in generale insolubili in acqua e nei solventi organici. La massima solubilità in acqua, oltre gli acetati, si riscontra per i propionati, il glicolato e il complesso della glicina.

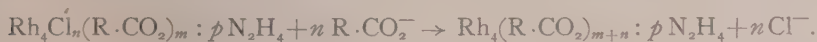
All'esame roentgenografico si presentano come amorfi.

Tali caratteri non ci hanno consentito finora di isolare composti sicuramente definiti.

3. *Declorurazione: reazioni di scambio.* - Le preparazioni dei sali predetti avvennero con gli stessi metodi descritti per i cloruri acetati e gli acetati: K_3RhCl_6 venne fatto reagire in eccesso di soluzioni neutre o debolmente acide dei sali di idrazina degli acidi esaminati, controllando il pH ai valori riportati nella parte sperimentale.

In generale, anche impiegando elevati rapporti di sali di idrazina, rispetto al rodio, si formano sali misti, cloruri e carbossilati. La eliminazione dei Cl^- l'ottenemmo facendo reagire in acqua un eccesso di sale potassico dell'acido carbossilico sui cloruri misti isolati, sia solubili sia insolubili o poco solubili.

Lo scambio risulta da un equilibrio praticamente spostato, nelle condizioni di esperienze, verso i complessi declorurati, ad esempio in schema:



Il processo che schematizziamo riguarda però uno stadio probabile primario o intermedio, perché in realtà abbiamo verificato in generale, nei prodotti finali, variazioni dei rapporti fra il Rh^{III} , l'anione e l'idrazina, rispetto ai sali di partenza.

Si deve supporre una successione di spostamenti per intervento della idrazina. Riportiamo il caso tipico degli ossalati. Ci riferiamo ai sali 13 e 14.

assumendo le formule ad anione $(\text{N}_2\text{H}_3)^{-1}$ che rendono più evidente il processo ⁽²⁾:



Cioè l'idrazina, che presumiamo di addizione, in parte si salifica come cloruro di idrazonio.

Il succinato 16) si comporta come l'ossalato, per generare il sale 17).

Possiamo concludere che il processo di declorurazione, già individuato per i Rh^{III} -acetati, è generale, ed avvalorà l'ipotesi dell'intervento dei radicali anionoidi idrazidici.

4. *Radicali idrazidici.* - L'ipotesi dei radicali idrazidici risulta valida, almeno per la maggioranza dei sali che descriviamo ad esempio:

i) *Propionati.* - La somma dei Cl^- e $\text{C}_2\text{H}_5\text{CO}_2^-$ è sempre inferiore alle valenze $(4 \text{Rh})^{12+}$. Per il sale 3), idrato, anche supponendo l'intervento di 3 OH^- , necessita la presenza di almeno 1,5 $(\text{N}_2\text{H}_3)^-$.

ii) *Glicolati.* - Il sale 4) anidro, porta a riconoscere la presenza di almeno 3 $(\text{N}_2\text{H}_3)^-$.

iii) *Glicinati.* - Il sale 5) si anidrifca senza decomorsi e deve ammettersi la presenza di almeno 4 $(\text{N}_2\text{H}_3)^-$



iv) *Cianoacetato.* - Il sale 6) implica l'intervento di almeno 1,5 $(\text{N}_2\text{H}_3)^-$, anche con la eventuale presenza di 1 OH^- .

v) *Benzoato.* - Il complesso 9) si anidrifca senza decomposizione e, sempre per il catione convenzionale $(4 \text{Rh})^{12+}$, implica l'intervento di almeno 1,5 $(\text{N}_2\text{H}_3)^-$.

vi) *Salicilato.* - Il derivato 11) è stato ottenuto anidro e per il catione assunto deve ammettersi almeno 5 $(\text{N}_2\text{H}_3)^-$.

vii) *Ossalati.* - Tutti gli ossalati studiati si deacquificano senza decomorsi. Il sale 13) indica la presenza di 1,5 $(\text{N}_2\text{H}_3)^-$, almeno, e per il complesso 14) deve assumersi:



In chiusa dobbiamo richiamare il fatto che i sali carbossilici di cui sopra manifestano una stabilità alquanto superiore a quella degli alogenuri descritti nelle precedenti Note. È superata soltanto dai cianuri che abbiamo già illustrato, e che costituiscono la serie più stabile dei sali idrazinici da noi finora studiati.

Per quanto i soli dati analitici finora acquisiti non ci consentano più estese discussioni, dall'esame che precede risulta ancora la probabilità della presenza dei radicali idrazidici.

(2) Non intendiamo escludere gli eventuali anioni $(\text{N}_2\text{H}_2)^{2-}$.

Giudichiamo utile richiamare il fatto che la maggioranza dei sali sopra esaminati manifesta, in presenza di acqua, reazione acida, pH da 4 a 5, in generale, e questo porta ancora a considerare il processo



analogo a quello delle rodio-esammine.

Le ricerche proseguono.

PARTE SPERIMENTALE.

I. - *Acidi monocarbossilici.*

Ac. Idrazincarbonico:

1) $\{Rh_4Cl_{4,5}(N_2H_3CO_2)_6(N_2H_3)_{1,5}(N_2H_4)_{3,5}\}$. - Alla soluzione acquosa concentrata idrazinica saturata con CO_2 , si aggiunge la soluzione pure concentrata di K_3RhCl_6 , nel rapporto $10N_2H_4/Rh$ operando a freddo con tempo di reazione 15'; pH finale 7. Il sale di colore giallo sporco venne separato alla centrifuga e lavato più volte con acqua. Essiccato nel vuoto, su H_2SO_4 e KOH per 12 ore, ha dato alle analisi:

trov. %:	Rh 34,50	Cl 13,95	C 5,96	N 26,00	H 3,51
per $\{Rh_4Cl_{4,5}C_6O_{12}N_{22}H_{36,5}\}$					
calc.	34,85	13,54	6,09	26,08	3,33
$\chi_{mol} \cdot 10^6 = -150.$					

Ac. propionico:

2) $\{Rh_4Cl_6(C_2H_5 \cdot CO_2)_3(N_2H_3)_3(N_2H_4)_7\} \cdot 3H_2O$. - Alla soluzione di $C_2H_5COOH \cdot N_2H_4$, è stata aggiunta la soluzione concentrata di K_3RhCl_6 con rapporto propionato di idrazina/Rh = 10/1. Tempo di reazione 20'; pH finale = 4,5. Il sale precipita con colore aranciato chiaro. Essiccato su H_2SO_4 e KOH per 12 ore ha dato alle analisi:

trov. %:	Rh 33,71	Cl 18,05	C 8,93	N 23,18	H 4,77
per $\{Rh_4Cl_6C_9O_6N_{20}H_{52}\} \cdot 3H_2O$					
calc.	33,90	17,54	8,88	23,05	4,81
$\chi_{mol} \cdot 10^6 = -205.$					

3) $\{Rh_4Cl_{1,5}(C_2H_5 \cdot CO_2)_7(N_2H_3)_{3,5}(N_2H_4)_{2,5}\} \cdot 3H_2O$. - Il sale 2) sopra descritto in soluzione acquosa concentrata, è stato trattato con eccesso di propionato di potassio, a freddo per circa 6 ore. Dopo eliminazione del KCl per ripetuto trattamento con alcool assoluto, si porta a secco la soluzione, si riprende con poca acqua il sale vetroso ottenuto, quindi si precipita con

alcool-etero il sale giallo che essiccato nel vuoto su P_2O_5 a 56° per due ore ha dato alle analisi:

trov. %:	Rh 34,12	Cl 4,73	C 19,90	N 13,73	H 5,59
per $\{Rh_4Cl_{1,5}C_{21}O_{14}N_{12}H_{55,5}\} \cdot 3 H_2O$					
calc.	33,80	4,35	20,70	13,79	5,11
$\chi_{mol} \cdot 10^6 =$	— 105.				

Ac. glicolico:

4) $\{Rh_4Cl_{3,5}(HO \cdot CH_2 \cdot CO_2)_{5,5}(N_2H_3)_3(N_2H_4)_{6,5}\}$. — Alla soluzione concentrata di glicolato di idrazina è stata aggiunta la soluzione pure concentrata di K_3RhCl_6 , operando a freddo con tempo di reazione 20'. pH iniziale 6; a reazione ultimata il pH è 4. Si aggiunge idrazina diluita fino a pH 5,5 e si completa la dissoluzione del sale insolubile inizialmente formatosi. Si precipita con metanolo il sale giallo che viene purificato ridisciogliendolo in acqua e riprecipitandolo con metanolo. Si separa alla centrifuga e si lava con metanolo al 40 %. Essiccato su KOH a 56° per 5 ore, ha dato analisi:

trov. %:	Rh 32,20	Cl 10,02	C 10,64	N 21,10	H 4,95
per $\{Rh_4Cl_{3,5}C_{11}O_{16,5}N_{19}H_{51,5}\}$					
calc.	32,96	9,92	10,56	21,29	4,15
$\chi_{mol} \cdot 10^6 =$	— 129.				

Glicina:

5) $\{Rh_4Cl_5(H_2N \cdot CH_2 \cdot CO_2)_3(N_2H_3)_4(N_2H_4)_{4,5}\}$. — Si opera a freddo come nelle precedenti preparazioni, con rapporto $H_2N \cdot CH_2 \cdot COOH \cdot N_2H_4/Rh = 10/1$. Il precipitato iniziale si scioglie istantaneamente nell'eccesso di sale idrazinico. Precipita con metanolo il complesso giallo aranciato che si separa alla centrifuga e si lava con metanolo al 40 %. Essiccato su KOH a 80° , alle analisi ha dato:

trov. %:	Rh 38,18	Cl 16,94	C 6,20	N 26,22	H 4,58
per $\{Rh_4Cl_5C_6O_6N_{20}H_{42}\}$					
calc.	38,14	16,43	6,10	25,92	3,92
$\chi_{mol} \cdot 10^6 =$	— 10.				

Ac. cianacetico:

6) $\{Rh_4Cl_5(NC \cdot CH_2 \cdot CO_2)_{4,5}(N_2H_3)_{2,5}(N_2H_4)_8\} \cdot H_2O$. — Si opera con rapporto $10 NC \cdot CH_2 \cdot COOH \cdot N_2H_4/K_3RhCl_6$. pH finale 4. Per aggiunta successiva di idrazina fino a pH 6 precipita il sale giallo che viene filtrato su setto poroso ed essiccato nel vuoto su KOH a 56° per 6 ore. Alle analisi ha dato:

trov. %:	Rh 30,70	Cl 13,36	C 11,80	N 26,65	H 4,49
per $\{Rh_4Cl_5C_{13,5}O_9N_{25,5}H_{48,5}\} \cdot H_2O$					
calc.	31,23	13,50	12,28	27,05	3,83

7) $\{ \text{Rh}_4\text{Cl}_4(\text{NC}\cdot\text{CH}_2\cdot\text{CO}_2)_5(\text{N}_2\text{H}_3)_3(\text{N}_2\text{H}_4)_9 \} \cdot 3 \text{H}_2\text{O}$. — È la seconda frazione che il metanolo in eccesso precipita dalle acque madri del cianacetato 6). Il sale ha colore giallo intenso come il precedente. Essiccato su H_2SO_4 per 12 ore ha dato alle analisi:

trov. % :	Rh 28,70	Cl 10,65	C 13,10	N 28,20	H 4,80
per $\{ \text{Rh}_4\text{Cl}_4\text{C}_{15}\text{O}_{10}\text{N}_{29}\text{H}_{55} \} \cdot 3 \text{H}_2\text{O}$					
calc.	29,25	10,02	12,78	28,82	4,33
$\chi_{\text{mol}} \cdot 10^6 = -108$.					

Ac. fenilacetico

8) $\{ \text{Rh}_4\text{Cl}_3(\text{C}_7\text{H}_7\cdot\text{CO}_2)_6(\text{N}_2\text{H}_3)_3(\text{N}_2\text{H}_4)_9 \} \cdot 4 \text{H}_2\text{O}$. — Si opera con rapporto $\text{C}_7\text{H}_7\text{COOH} \cdot \text{N}_2\text{H}_4 / \text{K}_3\text{RhCl}_6 = 10/1$ portando il pH a 8 per aggiunta di poche gocce di N_2H_4 . Tempo di reazione 20'. A reazione ultimata pH 5. Il pH si porta a 8 per aggiunta di N_2H_4 . Si decanta il sale giallo di aspetto pecioso e si anidrifca più volte con alcool assoluto e poi con etere. Si essicca a 56° su P_2O_5 per 5 ore. Le analisi sono:

trov. % :	Rh 23,41	Cl 5,74	C 32,06	N 19,00	H 5,22
per $\{ \text{Rh}_4\text{Cl}_3\text{C}_{48}\text{O}_{12}\text{N}_{24}\text{H}_{87} \} \cdot 4 \text{H}_2\text{O}$					
calc.	23,11	5,97	32,31	18,85	5,36
$\chi_{\text{mol}} \cdot 10^6 = -195$.					

Ac. benzoico.

10) $\{ \text{Rh}_4\text{Cl}_{2,5}(\text{C}_6\text{H}_5\cdot\text{CO}_2)_8(\text{N}_2\text{H}_3)_{1,5}(\text{N}_2\text{H}_4)_{9,5} \}$. — Alla soluzione neutra di benzoato di idrazina, si aggiunge K_3RhCl_6 , in soluzione concentrata, operando a freddo, con rapporti $\text{C}_6\text{H}_5\cdot\text{COOH} \cdot \text{N}_2\text{H}_4 / \text{Rh} = 10/1$ e tempo di reazione 15'. A reazione ultimata il pH da 5 si porta a 7 con poche gocce di idrato di idrazina diluito. Il sale precipita di colore giallo sporco. Si lava su filtro con metanolo al 30 %. Essiccato su P_2O_5 a 56° per 6 ore, ha dato alle analisi e alle misure magnetiche:

trov. % :	Rh 22,70	Cl 5,13	C 36,80	N 16,60	H 4,54
per $\{ \text{Rh}_4\text{Cl}_{2,5}\text{C}_{56}\text{O}_{16}\text{N}_{22}\text{H}_{82,5} \}$					
calc.	22,66	4,87	36,98	16,94	4,57
$\chi_{\text{mol}} \cdot 10^6 = -325$.					

Ac. salicilico:

11) $\{ \text{Rh}_4\text{Cl}_{1,5}(\text{HO}\cdot\text{C}_6\text{H}_4\cdot\text{CO}_2)_{9,5}(\text{N}_2\text{H}_3)(\text{N}_2\text{H}_4)_{13} \}$. — Si opera con gli stessi rapporti e modalità delle preparazioni precedenti. pH iniziale 8; pH a reazione ultimata 7. Il sale diamagnetico precipita di colore giallo. Essiccato su KOH a 56° per 6 ore ha dato alle analisi:

trov. % :	Rh 18,36	Cl 2,50	C 35,50	N 17,69	H 4,05
per $\{ \text{Rh}_4\text{Cl}_{1,5}\text{C}_{66,5}\text{O}_{28,5}\text{N}_{28}\text{H}_{102,5} \}$					
calc.	18,60	2,40	36,00	17,69	4,62

12) $\{ \text{Rh}_4(\text{HO} \cdot \text{C}_6\text{H}_4 \cdot \text{CO}_2)_7(\text{N}_2\text{H}_3)_5(\text{N}_2\text{H}_4)_{4,5} \}$. - Alla sospensione acquosa del cloro salicilato 11), si aggiunge la soluzione concentrata di salicilato potassico nel rapporto $15 \text{ HO} \cdot \text{C}_6\text{H}_4 \cdot \text{COOK}/\text{Rh}$, sotto forte agitazione per 2 ore e riscaldamento alla fine a circa 60° , pH 6. Si filtra e si ripete il trattamento con eccesso di salicilato di potassio. Il sale insolubile ottenuto viene lavato più volte con acqua calda. È diamagnetico. Il colore del sale dechlorurato è più intenso di quello di partenza. Dopo essiccamento nel vuoto su P_2O_5 a 80° per 10 ore ha dato alle analisi:

	trov. %:	Rh 24,70	C 35,09	N 16,02	H 4,48
per $\{ \text{Rh}_4\text{C}_{49}\text{O}_{21}\text{N}_{19}\text{H}_{68} \}$	calc.	24,61	35,12	15,90	4,10

II. - Acidi bicarbossilici.

Ac. ossalico:

13) $[\text{Rh}_4\text{Cl}_{4,5}(\text{C}_2\text{O}_4)_4(\text{N}_2\text{H}_4)_{9,5}][\text{N}_2\text{H}_5]_{0,5}$. - Alla soluzione neutra di $\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4 \cdot 2 \text{N}_2\text{H}_4$ si aggiunge goccia a goccia la soluzione concentrata di K_3RhCl_6 nel rapporto 10/1. Tempo di reazione 25'. A reazione ultimata $\text{Ph} = 5$. Il sale precipita di colore giallo, separato alla centrifuga, lavato più volte con acqua, ed essiccato su P_2O_5 a 56° per 6 ore, ha dato alle analisi:

	trov. %:	Rh 33,40	Cl 12,26	C 8,00	N 22,24	H 3,22
per $\{ \text{Rh}_4\text{Cl}_{4,5}\text{C}_8\text{O}_{16}\text{N}_{20}\text{H}_{40,5} \}$	calc.	33,30	12,72	7,75	22,62	2,93
	$\chi_{\text{mol}} \cdot 10^6 =$	- 145.				

14) $\{ \text{Rh}_4\text{Cl}_{2,5}(\text{C}_2\text{O}_4)_4(\text{N}_2\text{H}_3)_{1,5}(\text{N}_2\text{H}_4)_{10} \}$. - Si ripete la preparazione del sale 13) raddoppiando il tempo di reazione e lasciando a riposo la sospensione del complesso formatosi per circa 3 ore. Il sale giallo viene separato alla centrifuga e lavato ripetutamente con acqua. Essiccato su P_2O_5 a 56° per 6 ore, ha dato alle analisi:

	trov. %:	34,05	Cl 7,22	C 7,58	N 26,35	H 3,62
per $\{ \text{Rh}_4\text{Cl}_{2,5}\text{C}_8\text{O}_{16}\text{N}_{23}\text{H}_{44,5} \}$	calc.	33,82	7,28	7,88	26,42	3,68
	$\chi_{\text{mol}} \cdot 10^6 =$	- 105.				

15) $\{ \text{Rh}_4(\text{C}_2\text{O}_4)_5(\text{N}_2\text{H}_3)_2(\text{N}_2\text{H}_4)_7 \}$. - L'ossalato 14) in sospensione acquosa viene trattato con ossalato mono potassico in eccesso ($15 \text{ KHC}_2\text{O}_4/\text{Rh}$) a 60° circa per 2 ore a 50° con forte agitazione. Si lascia a sè la sospensione per 12 ore. Si filtra e si lava ripetutamente con acqua. Il sale ha colore giallo leggermente più chiaro del complesso. La sospensione acquosa ha pH 4,5. Essiccato su P_2O_5 a 56° per 6 ore ha dato alle analisi:

	trov. %:	Rh 36,10	C 10,69	N 22,07	H 3,25
per $\{ \text{Rh}_4\text{C}_{10}\text{O}_{20}\text{N}_{18}\text{H}_{34} \}$	calc.	36,20	10,55	22,12	3,01
	$\chi_{\text{mol}} \cdot 10^6 =$	- 155.			

Ac. malonico:

16) $\{ \text{Rh}_4\text{Cl}_{3,5}(\text{C}_2\text{H}_4\cdot\text{C}_2\text{O}_4)_4(\text{N}_2\text{H}_3)_{0,5}(\text{N}_2\text{H}_4)_{9,5} \} \cdot 4 \text{H}_2\text{O}$. — Si opera come nelle precedenti preparazioni. A reazione terminata il sale precipita di colore giallo e si lava più volte con acqua. Essiccato su H_2SO_4 per 12 ore ha dato alle analisi:

trov. %:	Rh 30,95	Cl 9,37	C 10,20	N 21,76	H 4,51
per $\{ \text{Rh}_4\text{Cl}_{3,5}\text{C}_{12}\text{O}_{16}\text{N}_{20}\text{H}_{47,5} \} 4 \text{H}_2\text{O}$					
calc.	30,87	9,28	10,78	20,98	4,15
$\chi_{\text{mol}} \cdot 10^6 = -160$.					

Ac. succinico:

17) $\{ \text{Rh}_4\text{Cl}_{5,5}(\text{C}_2\text{H}_4\cdot\text{C}_2\text{O}_4)_3(\text{N}_2\text{H}_3)_{0,5}(\text{N}_2\text{H}_4)_8 \} \cdot 6 \text{H}_2\text{O}$. — Alla soluzione di monosuccinato idrazinico si aggiunge a gocce K_3RhCl_6 in soluzione concentrata nel rapporto 10/1. pH a reazione ultimata 4. Si centrifuga e si lava con acqua, quindi con metanolo, il sale giallo precipitato. Essiccato con H_2SO_4 e KOH per 12 ore, ha dato alle analisi:

trov. %:	Rh 32,06	Cl 15,05	C 11,60	N 18,61	
per $\{ \text{Rh}_4\text{Cl}_{5,5}\text{C}_{12}\text{O}_{12}\text{N}_{17}\text{H}_{45,5} \} \cdot 6 \text{H}_2\text{O}$					
calc.	32,10	15,20	11,21	18,55	
$\chi_{\text{mol}} \cdot 10^6 = -205$.					

18) $\{ \text{Rh}_4\text{Cl}_{4,5}(\text{C}_2\text{H}_4\cdot\text{C}_2\text{O}_4)_4(\text{N}_2\text{H}_4)_9(\text{N}_2\text{H}_5)_{0,5} \} \text{H}_2\text{O}$. — Dalle acque madri del succinato 17) il metanolo precipita un sale giallo, che viene separato alla centrifuga e lavato con metanolo al 50 %. Essiccato su H_2SO_4 per 12 ore ha dato alle analisi:

trov. %:	Rh 30,05	Cl 11,68	C 14,35	N 19,76	H 4,38
per $\{ \text{Rh}_4\text{Cl}_{4,5}\text{C}_{16}\text{O}_{16}\text{N}_{19}\text{H}_{54,5} \} \text{H}_2\text{O}$					
calc.	30,32	11,78	14,15	19,60	4,20
$\chi_{\text{mol}} \cdot 10^6 = -190$.					

19) $\{ \text{Rh}_4(\text{C}_2\text{H}_4\cdot\text{C}_2\text{O}_4)_{4,5}(\text{N}_2\text{H}_3)_3(\text{N}_2\text{H}_4)_4 \} \cdot 5 \text{H}_2\text{O}$. — Il cloro succinato idrazinico *x*) sospeso in acqua viene trattato con monosuccinato di potassio in eccesso ($15 \text{C}_2\text{H}_4\cdot\text{C}_2\text{O}_4\text{HK/Rh}$), sotto forte agitazione e riscaldamento iniziale a circa 60° per 12 ore. Si filtra. Si riprende con succinato monopotassico riscaldando la sospensione alla fine a circa 80°. Si raffredda, si filtra, si lava con acqua a circa 50°. Il sale diamagnetico ha colore bianco-giallastro. Si essicca su KOH a 80° per 6 ore. Le analisi sono:

trov. %:	Rh 32,92	C 17,70	N 15,20	H 6,37	
per $\{ \text{Rh}_4\text{C}_{18}\text{O}_{18}\text{N}_{14}\text{H}_{43} \} 5 \text{H}_2\text{O}$					
calc.	33,12	17,36	15,76	4,26	

Elettrochimica. — *Sovratensione di idrogeno su monocristalli di antimonio* (*). Nota di ROBERTO PIONTELLI, LUISA PERALDO BICELLI e AURELIO LA VECCHIA presentata (**) dal Corrisp. R. PIONTELLI.

Nel quadro delle nostre ricerche sistematiche sui fenomeni di sovratensione di idrogeno su catodi monocristallini ⁽¹⁾, abbiamo studiato il comportamento di elettrodi di antimonio in bagno di HClO_4 0,1 M.

In letteratura esistono solo dati ⁽²⁾ molto scarsi, che mancano completamente nelle regioni delle basse d. c.

Abbiamo studiato elettrodi di antimonio monocristallini, aventi la superficie attiva orientata secondo i piani ⁽³⁾: (100), $(\bar{1}10)$ e (111); nonché elettrodi policristallini ottenuti per deposizione da bagno di solfato-fluoruro ⁽⁴⁾ (60 g/l di antimonio, 300 g/l di acido solforico libero, 20 g/l di acido fluoridrico libero); alle temperature di 25, 40 e 55°C.

Per la tecnica sperimentale rimandiamo alle precedenti Note, precisando però che, in questo caso:

1° le superficie degli elettrodi sono state lucidate anodicamente in un bagno di solfato-fluoruro, avente la composizione sopraindicata; ma diluito

(*) Istituto di Chimica Fisica, Elettrochimica e Metallurgia del Politecnico di Milano; Laboratorio del Gruppo di ricerca « Elettroliti e processi elettrochimici » del C.N.R.

La presente ricerca è stata finanziata in parte dall'ARDC, USAF mediante il Contratto AF 61 (052)-144, tramite l'European Office ARDC, Bruxelles. Parte dell'apparecchiatura è stata procurata con fondi del C.N.R.

(**) Nella seduta del 13 maggio 1961.

(1) Cu: R. PIONTELLI, U. BERTOCCI e C. TAMPLENIZZA, « Istituto Lombardo (Rend. Sc.) », **A**, 91, 378 (1959).

Ag: I. MARTIN TORDESILLAS, L. PERALDO BICELLI e B. RIVOLTA, « Ann. Chim. », **49**, 1595 (1959).

Pb: I. MARTIN TORDESILLAS e L. PERALDO BICELLI, « Z. f. Elektrochem. », **63**, 1049 (1959).

Sn: R. PIONTELLI e L. PERALDO BICELLI, questi « Rendiconti », **VIII**, 27, 162 (1959).

Ni: R. PIONTELLI, L. PERALDO BICELLI e A. LA VECCHIA, id., **VIII**, 27, 312 (1959).

Cd: Id., **VIII**, 28, 139 (1960).

Bi: Id., **VIII**, 28, 777 (1960).

Zn: Id., **VIII**, 29, 149 (1961).

(2) *Gmelins Handbuch der Anorg. Chemie*, Antimon, Teil B, p. 211; Clausthal-Zellerfeld (1949); A. C. PECHERSKAYA e V. V. STENDER, « J. Appl. Chem. USSR », **19**, 1303 (1946); E. NEWBERY, « Trans. Faraday Soc. », **43**, 127 (1947); M. D. ZHOLUDER e V. V. STENDER, « Zhur. Priklad Khim. », **31**, 719 (1958).

(3) Cioè gli stessi, per i quali, in questo laboratorio sono state studiate le sovratensioni inerenti agli scambi (anodico e catodico) di ioni Sb^{3+} (ved. questi « Rendiconti », **VIII**, 29, 345 (1960).

(4) R. PIONTELLI e G. TREMOLADA, « Metallurgia Ital. », **32**, 10 (1940).

1° a 1, a 10 A/dm²; con successivo brevissimo funzionamento catodico in HClO₄ 0,5 M a 35 A/dm²;

2° l'elettrodo è stato prepolarizzato in cella per 1 h a 50 A/m²;

3° le condizioni di preelettrolisi del bagno sono state: 50 a 100 Coulomb/cm³ a 0,1 A.

I principali risultati ottenuti sono riassunti in Tabella I e nelle figg. 1 a 5 e conducono alle seguenti conclusioni:

1° la sovratensione di idrogeno su elettrodi di antimonio, segue la legge di Tafel, con le anomalie più oltre indicate (fig. 1);

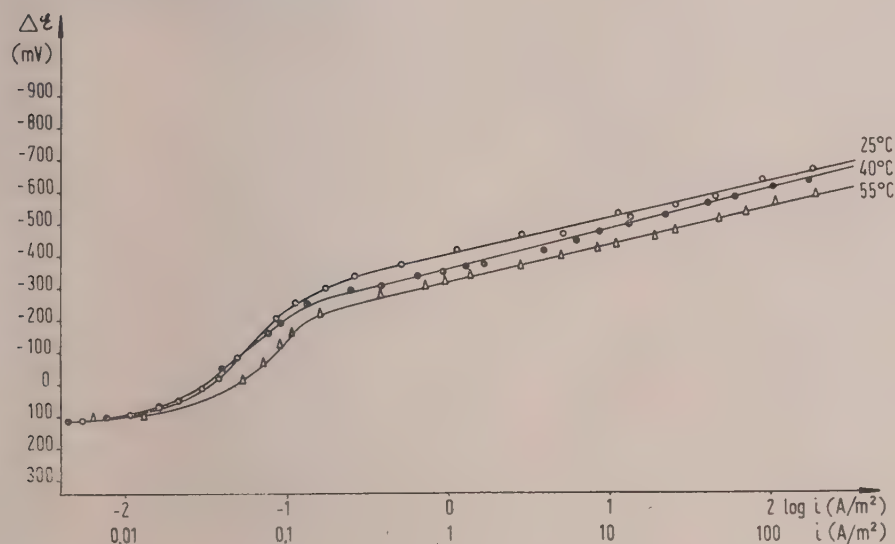


Fig. 1. - Sb (100)/HClO₄ 0,1 M.

2° il valore assoluto delle sovratensioni misurate dipende dall'orientamento della superficie elettrodica (fig. 2) e precisamente, aumenta nell'ordine: (100) < (111). Per gli elettrodi orientati secondo (110), la mediocre riproducibilità ha consentito soltanto di assegnare una fascia di valori, che, come risulta dalla fig. 2, comprende all'incirca i valori relativi agli altri due orientamenti ⁽⁵⁾;

3° per gli elettrodi policristallini è stato possibile stabilire un intervallo di valori di sovratensione delimitato inferiormente dal valore delle misure eseguite su deposito semimicrocristallino (fig. 3-I) e superiormente

(5) Ricordiamo che, per quanto concerne gli scambi di ioni Sb³⁺ (ved. nota ⁽³⁾), le sovratensioni anodiche crescono nell'ordine: (110) < (100) < (111); mentre le sovratensioni catodiche sono praticamente indipendenti dall'orientamento cristallografico della superficie dell'elettrodo.

dal valore del deposito lisciato alle carte (fig. 3-II) e che comprende tutte le altre misure, anche se relative a campioni diversi;

4° le sovratensioni decrescono regolarmente in valore assoluto al crescere della temperatura (figg. 1 e 3);

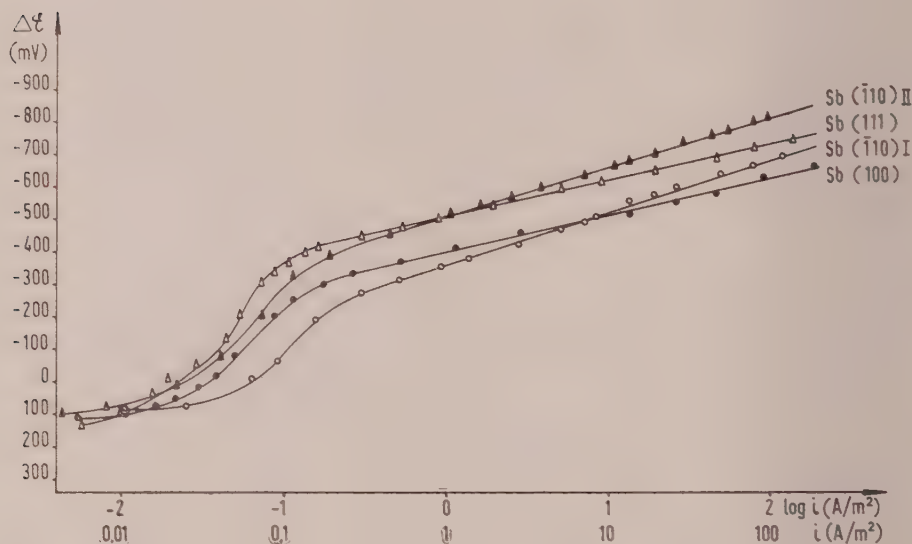


Fig. 2. - Sovratensione di idrogeno su elettrodi di antimonio in HClO_4 0,1 M; $t = 25^\circ\text{C}$.

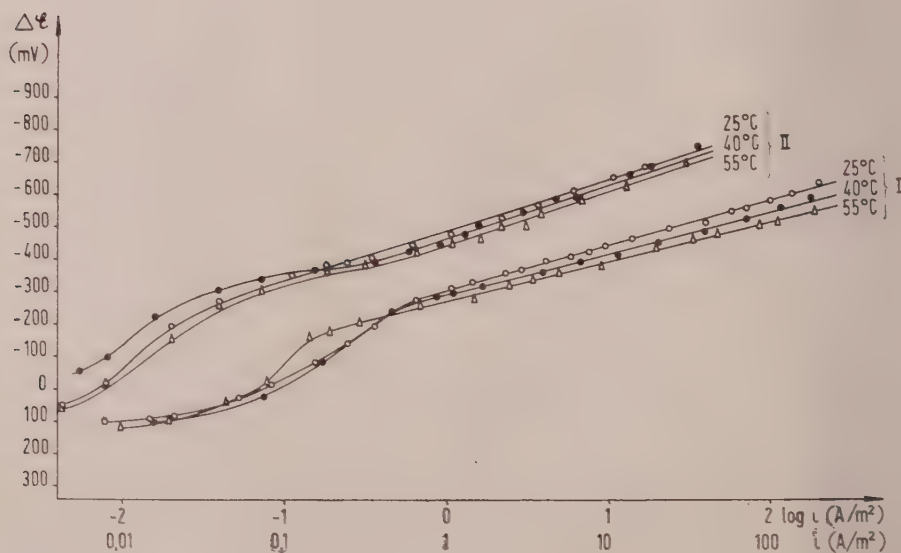


Fig. 3. - Sb Policrist./ HClO_4 0,1 M.

5° le leggi temporali dello stabilirsi e della scomparsa della sovratensione, come indicato dalle registrazioni oscillografiche (figg. 4 e 5), hanno un andamento caratteristico, che si può così riassumere.

Alle basse d. c. le tensioni elettrodiche sono più nobili di quella di equilibrio dell'elettrodo ad idrogeno.

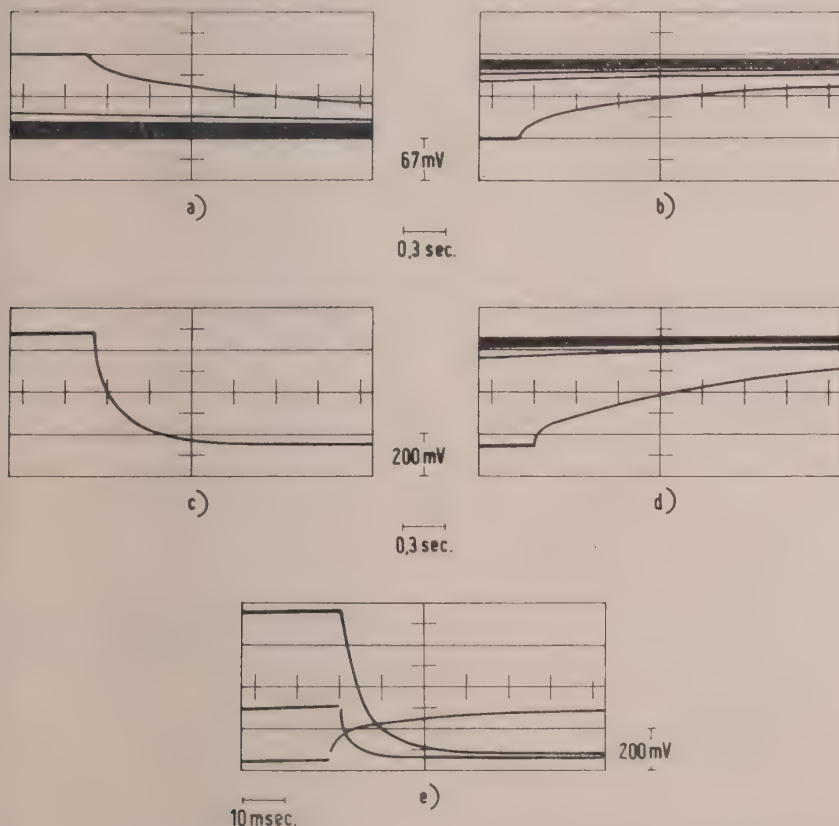


Fig. 4. - Oscillogramma: sovratensione funzione del tempo (Sb Policrist./HClO₄ 0,1 M).

- a) $i = 0,5 \text{ A/m}^2$, chiusura
- b) $i = 0,5 \text{ A/m}^2$, apertura
- c) $i = 5 \text{ A/m}^2$, chiusura
- d) $i = 5 \text{ A/m}^2$, apertura
- e) $i = 50 \text{ A/m}^2$, chiusura, apertura e chiusura.

Per funzionamento catodico, si ha dapprima solo un leggero snobilitarsi delle tensioni.

Oltrepassata una d. c. di $0,1 \text{ A/m}^2$, si nota, alla chiusura del circuito, un lento snobilitarsi della tensione di elettrodo, che si porta nel campo delle sovratensioni negative, raggiunte le quali, i fenomeni di spolarizzazione,

all'apertura del circuito, sono altrettanto lenti di quelli di polarizzazione. Ossia, contrariamente, a quanto osservato per il bismuto ⁽¹⁾, non si osservano mai fenomeni di spolarizzazione (all'apertura) più rapidi di quelli di polarizzazione.

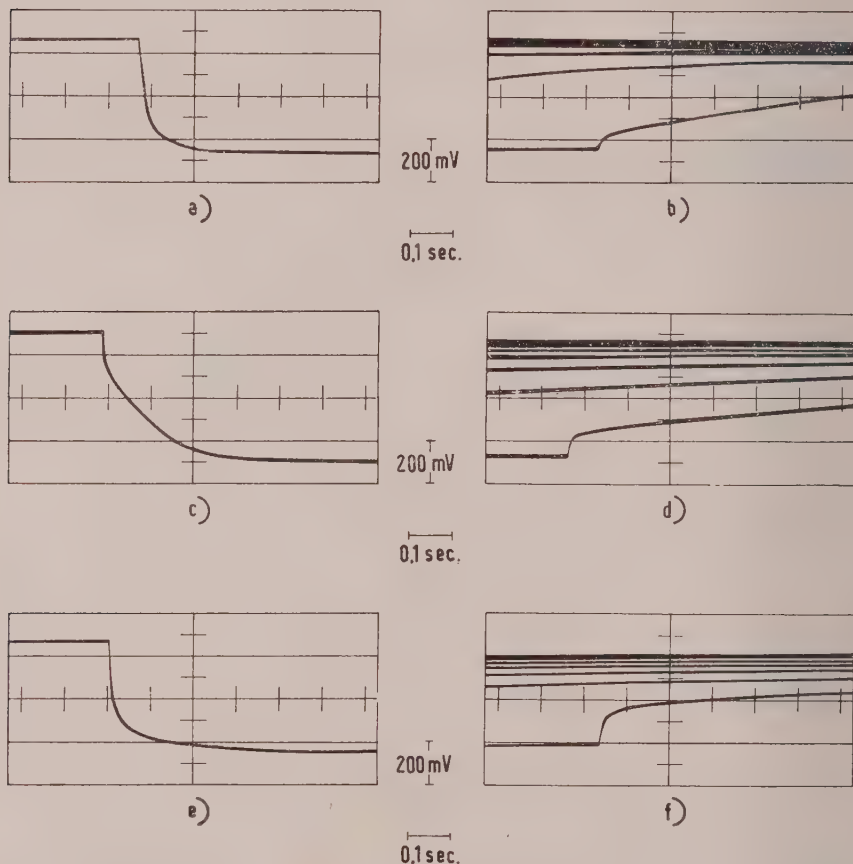


Fig. 5. - Oscillogramma: sovratensione funzione del tempo (HClO_4 0,1 M; $i = 5 \text{ A/m}^2$).

- a) Sb (100), chiusura
- b) Sb (100), apertura
- c) Sb ($\bar{1}\bar{1}0$), chiusura
- d) Sb ($\bar{1}\bar{1}0$), apertura
- e) Sb (111), chiusura
- f) Sb (111), apertura

Aumentando ancora la d. c., il fenomeno di polarizzazione diventa sempre più rapido e non è caratterizzato dalla comparsa di flessi;

6° i pretrattamenti polarizzanti non hanno una influenza regolare sui valori di d. c., in corrispondenza dei quali si ha il cambiamento di comportamento, anche questo contrariamente a quanto osservato per il bismuto.

TABELLA I.
Sb/HClO₄ 0,1 M.

Piano	Temperatura (°C)	a (mV)	b (mV)	$\log i_0$ (i_0 in A/m ²)	Sovratensione a: 10 A/m ² (mV)	ΔH (Kcal)
(100)	25	395	135	— 3,10	530	10
	40	360	135	— 2,70	500	
	55	285	135	— 2,10	425	
(110) I	25	365	160	— 2,30	530	5
	40	330	165	— 2,00	490	
	55	310	155	— 2,00	470	
(110) II	25	505	160	— 3,20	665	8
	40	420	155	— 2,65	575	
	55	410	155	— 2,60	565	
(111)	25	500	115	— 4,40	615	4
	40	480	115	— 4,20	595	
	55	450	110	— 4,15	560	
Sb policrist. I	25	310	140	— 2,20	450	3
	40	290	130	— 2,20	420	
	55	270	125	— 2,15	395	
Sb policrist. II	25	485	160	— 3,05	645	7
	40	465	170	— 2,75	635	
	55	440	170	— 2,60	610	

Geologia. — *Qualche osservazione comparativa fra le serie stratigrafiche dell'Hindu Kush afgano e del Tagikistan (Asia centrale).*
Nota (*) del Corrisp. ARDITO DESIO.

Lo spunto a questa breve Nota mi viene offerto da alcune pubblicazioni recenti sulla geologia del Tagikistan e da una elaborazione, appena ultimata (1961), dei materiali raccolti in occasione di una ricognizione geologica da me effettuata alcuni anni fa nell'Afghanistan settentrionale. Non mi propongo qui di procedere ad un vero studio comparativo della stratigrafia dei due territori, separati dal corso dell'Amu Daria, ma soltanto di richiamare brevemente l'attenzione su certe affinità e differenze nella composizione geologica. Uno studio vero e proprio sarebbe anche prematuro, per quanto sia stato già in parte tentato da Furon (1934) e da Cizancourt (1937); prematuro soprattutto per la scarsità di dati stratigrafici relativamente al territorio meridionale; sul quale tuttavia vi sono molti indizi che documenti paleontologici per un tale studio ne debbano esistere con una certa dovizia.

Per incominciare, cercherò di riassumere qui sotto in forma schematica, la composizione della serie stratigrafica dell'Afghanistan settentrionale fra l'Hindu Kush e l'Amu Daria, richiamando i dati da studi vecchi e recenti ed in particolare da un riepilogo di Popol e Tromp (1954), oltre che da quelli derivati dalla mia diretta osservazione. Ho escluso dal confronto i terreni metamorfici e quelli posteriori al Paleogene, poiché si prestano ancora meno degli altri ad un confronto (vedi tabella pag. 651).

I dati più recenti di cui si dispone relativamente al Tagikistan, sono contenuti nel tomo XXIV della «Geologia dell'U.R.S.S.» dedicato al Tagikistan (1959) ed in alcune Note apparse successivamente di vari Autori russi citati in fondo a questo articolo.

Per quello che sino ad oggi si sa, il Paleozoico fossilifero è rappresentato nell'Hindu Kush da terreni essenzialmente calcarei riferiti, come si vede nella tabella, al Devonico superiore, al Carbonico ed al Permico.

Non si conoscono i rapporti stratigrafici fra il Devonico e la serie sottostante. Forse una disconformità esiste pure fra il Devonico ed il Carbonico. I calcari attribuiti al Devonico nell'Hindu Kush non hanno finora fornito fossili determinabili: la loro età è stata stabilita per analogia con quelli fossiliferi di Hajigak (Hayden, 1911) da cui proviene una faunetta a brachiopodi attribuita al Devonico superiore.

Il Carbonico è male documentato paleontologicamente nell'Hindu Kush; buona parte dei fossili descritti da Cowper Reed (1931) sono diffusi anche nel Permico. Mancano dati sicuri sulla presenza del Carbonico inferiore, che potrebbe essere rappresentato dalla parte bassa della serie calcarea di Ak Ribat (Hayden 1911).

(*) Presentata nella seduta del 13 maggio 1961.

SERIE STRATIGRAFICA DELL'HINDU KUSH.

OLIGOCENE. — Marne e calcari a lamellibranchi — vulcaniti.

EOCENE	sup. medio	serie di Murghab	{	Marne grigie ad ostree (<i>Ostrea multicostata</i> var. <i>strictiplicata</i> R. e D., <i>O. esterhazyi</i> var. Rom., <i>O. cizancourti</i> Cox).
	inf.			Marne gessifere grigie ad <i>Ostrea gigantea</i> Sol. di Tashkurgan — Calcari gi. gi (ovest di Kunduz).

CRETA	superiore	{	Senoniano	Marne grigio-verdi (270 m).
			Turoniano	Calcari arenacei con Ostree, <i>Inoceramus labiatus</i> (Schlt.) e calcari massicci (200-400 m).
			Cenomaniano	Calcari arenacei e marne verdi e rossastre con echini, crinoidi ecc. (150 m).
	inferiore			Argille verdi e grigie con Ostree (Green Beds), (160-250 m). Argille e arenarie rosse (Red Grit) (80-320 m).

GIURA	Malm	Saighan	{	Scisti verdi e conglomerati (100 m) — Calcari fossiliferi di Karkar (110 m).
	Dogger			Argille con carbone fossile, arenarie e conglomerati (80 m).
	Lias	Doab	{	Conglomerati, porfiriti e tufi (Doab str. s.) (600-1000 m).
	sup.			Arenarie, vulcaniti e strati a vegetali (50-150 m).
TRIAS	medio	{	{	Calcari scistosi e nodulosi a <i>Ceratiti</i> e <i>Daonella</i> (200-300 m).
				Conglomerati
	inf (?)			Calcari scuri?

PERMICO	sup.	Calcari chiari a <i>Sumatrina</i> (+ 100 m).
	inf.	Calcari scuri a <i>Neoschwagerina</i> (100-300 m).

CARBONICO		Calcari neri con brachiopodi e Fusuline (<i>F. elongata</i> , <i>F. uralica</i>) e <i>Schwagerina</i> (<i>Sc. princeps</i>); (+ 1200 m).
-----------	--	--

DEVONICO	sup.	Scisti ematitici basali e calcari neri a brachiopodi e scisti argillosi (serie di Hajigak). Potenza sconosciuta.
----------	------	--

Assai meglio documentata è la presenza del Permico, pure essenzialmente calcareo e spesso fossilifero. Su questo dirò più avanti.

Prima devo notare come fra le serie paleozoiche del Pamir, quelle che sembrano offrire maggiori affinità con la serie dell'Hindu Kush siano quelle della zona del passo Akbaytal ove sia il Devonico, sia il Carbonico sono rappresentati da una potente serie di calcari più o meno fossiliferi. Anche nella zona di Akbaytal il Devonico superiore è rappresentato da calcari e dolomie neri a brachiopodi con qualche specie comune col Devonico dell'Afghanistan centrale (Hajigak), come la *Productella subaculeata* Murch.

Nella medesima zona il Carbonico inferiore è rappresentato da calcari di vario tipo con fossili del Tournesiano e del Viseano potenti quasi 200 m ed il Carbonico superiore è formato inferiormente da una alternanza di livelli calcarei ed arenacei; la parte superiore da calcari, inferiormente grigi e rossicci, superiormente neri e grigiocuri, potenti complessivamente oltre 200 m. L'età è assicurata dalla presenza di fossili fra cui foraminiferi (*Pseudoschwagerina pseudoiaponica* Dut. ecc.) crinoidi, briozoi, brachiopodi (*Schizophoria resupinata* Mart. ecc.) e lamellibranchi distribuiti in vari livelli.

In conseguenza del frazionamento tettonico non si conoscono le relazioni stratigrafiche fra il Carbonico superiore ed il Devonico, né fra il Carbonico superiore ed il Carbonico inferiore.

Le prime sono state recentemente illustrate nel Darvaz sud-occidentale ad opera di N.G. Vlasov e A. D. Miklukho-Maclay (1959 *b*). Nel bacino dell'Obi-Khyrak il Carbonico inferiore copre con inconformità i calcari del Devonico medio, ma la facies del primo è diversa da quella del Pamir essendo rappresentata da porfiriti grigie e verdi associate con tufi e spiliti, con qualche lente di calcare fossilifero.

Ma un'altra discontinuità nella sedimentazione separa il Carbonico inferiore da un complesso di arenarie e calcari (talora anche conglomerato) soprastanti, contenenti una fauna a foraminiferi, coralli e brachiopodi del Moscoviano superiore. Ho ricordato questa serie del Darvaz sud-occidentale poiché mi fa pensare che una parte delle porfiriti e dei tufi dell'Afghanistan, di cui non si conosce l'età e che vengono per lo più attribuiti alla serie di Saighan (Lias), possano appartenere invece al Carbonico con facies analoga a quella dell'Obi-Khyrak.

Sul Permico del Pamir e regioni contermini, possediamo dati assai più abbondanti che sull'Hindu Kush e si hanno anche aggiornamenti recenti, ad opera di vari Autori, delle notizie contenute nella monografia geologica del Tagikistan.

Le litofacies del Permico inferiore del Pamir e del Darvaz sono prevalentemente terrigene, mentre quelle del Permico superiore sono prevalentemente calcaree. Una delle zone che pare presenti maggiori affinità di facies con il territorio dell'Hindu Kush, sembra essere il Pamir sud-orientale e particolarmente la zona di Kurteke la cui interpretazione cronostatigrafica ha subito di recente notevoli rettifiche ad opera di Dronov, Karapetov e Leven (1959). Più che alle altre zone è quindi opportuno che ci riferiamo a

questa per un confronto, tanto più che anche altri piani più recenti della medesima regione, mostrano affinità rilevanti con quelli dell'Afghanistan.

Secondo gli autori suddetti, la serie di Kurteke può essere così riassunta dal basso all'alto:

1° Scisti argillosi (shales) e arenarie sottili con strati di calcari detritici, nella parte alta, contenenti brachiopodi dell'Artinskiano, fra cui *Chonetes latesinuatus* Schellw., *Gauerinella cancriniformis* (Tschern.), *Lino-productus aagardi* (Toula), *L. ufensis* Freder., *Leiorhynchus ripheicus* Step., *Spiriferella gjilensis* Step., *Spiriferina cristata* Schloth., *Athyris royssi* Waag., *Dielasma elongatum* Schloth. ecc. Potenza visibile 300-400 m;

2° Calcare detritico con microfauna dell'orizzonte a Misellina (*Neofusulinella* sp., *Misellina ovalis* Depr., *Cancellina*, ecc. del Permico inferiore (6 m).

3° Calcare simile al precedente con microfauna a *Neoschwagerina* cf. *colaniae* Ozawa, Sumatrinide e Verbeekine del Permico superiore (4 m).

4° Scisti silicei con fitti strati di calcare siliceo (4 m).

5° Calcarei massicci chiari con *Climacamina valvulinoides* Lange, *Cribrogenerina obesa* Lange, *Pachyphloia lanceolata* Maclay, *Geinitzina inflata* Maclay, *Manchinella orientalis* Maclay ecc. (40 m).

6° Calcarei neri laminari (30-40 m).

Seguono, nella zona di Istyk:

Calcarei di scogliera di Aktash (presente nella zona considerata solo la parte inferiore, 40-50 m), con *Halobia* sp. di aspetto Ladinico: Ladinico-Carnico;

(Arenarie e scisti argillosi del Norico-Retico. Non presente nella zona considerata).

Segue superiormente, con discordanza, la serie del Giurassico superiore così composto:

a) Conglomerati rossi con ciottoli di calcare e di scistosi licei (da 0 a 2 m);

b) Calcarei a strati grossolani, frequentemente nodulosi, conglomeratici e pseudoolitici (1-12 m);

c) Arenarie rosse e brune (2-6 m);

d) Carbone fossile, scisti carboniosi e calcari (10-13 m);

e) Calcarei carbonacei scuri stratificati (8-10 m);

f) Conglomerati grigi e rossi passanti superiormente ad arenarie rosse grossolane (10-15 m);

g) Calcarei scuri stratificati con fauna sparsa a lamellibranchi e ammoniti del Calloviano.

Lo studio dei pollini, che aveva precedentemente portato ad attribuire la serie giurassica al Permico, è stato rifatto e l'età giurassica è stata pure confermata da tale studio.

Per quanto riguarda il Permico, nemmeno la serie di Kurtake e gli affioramenti di Ak Robot, Khwajagar e Balula (Bamian) appaiono facilmente

correlabili, ma probabilmente soprattutto per deficienza di dati. Dalle indicazioni che ci ha lasciato Hayden sembra non manchino tuttavia, accanto ai calcari, i livelli scistosi della serie pamirica ed inoltre nel livello 3 di Kurtake si può forse riconoscere la « zona a *Verbekina Neoschwagerina-Polydioxodina* » indicata da Thompson nel suo studio sui fossili permici dei calcari di Balula (1946).

Per quello che io stesso ho potuto osservare nella regione di Balula, la sequenza locale non sembra molto diversa da quella rappresentata dai livelli 1-5 di Kurtake. Anche qui abbiamo un calcare massiccio grigio-chiaro che sovrasta calcari neri, talora detritici, a *Neoschwagerina* e vi sono pure calcari neri laminari con briozoi, di cui non ho potuto ancora definire la posizione rispetto ai livelli precedenti.

Comunque, notevoli affinità di facies sembrano esistere fra la serie di Kurtake e gli affioramenti permici dell'Hindu Kush.

La serie triassica ricordata da Furon e Rosset (1951) fra Doab a Ishpushta nell'Hindu Kush, per quanto ancora scarsamente conosciuta è abbastanza bene correlabile con il Trias del Pamir ed in particolare con la così detta serie di Mintekin (Markovkii 1959). In ambedue le regioni, sopra una superficie d'erosione dei calcari permo-carbonici s'incontra un conglomerato composto da ciottoli in prevalenza calcarei nell'Afghanistan, da ciottoli calcarei associati con rocce endogene nel Pamir. Segue nel Pamir una potente formazione clastica composta da arenarie, conglomerati e tufi con intercalazioni scistose e poi una serie effusiva con inclusioni di scisti neri carboniosi, con piante, riferite al Retico-Liassico.

Nell'Afghanistan v'è pure una serie arenacea (ladinica)? seguita da una serie effusiva con strati a vegetali e carbone fossile, ma fra il conglomerato inferiore e le arenarie stanno calcari nodulosi a Ceratiti dell'Anisico e calcari scistosi del Ladinico.

Del resto nella zona di Istyk, come ho fatto cenno sopra, il Ladinico e forse il Carnico, sono presenti con facies calcarea di scogliera e in essi è stata trovata anche una *Halobia* che può fare il paio con la *Daonella* trovata da Griesbach (1886) e poi anche da Furon e Rosset (1951) nel Ladinico dell'Hindu Kush.

Inoltre lungo la riva meridionale del lago Rangkul affiora una fascia di calcari potenti oltre 800 m in cui N. N. Oschurkov trovò una fauna ad ammoniti e lamellibranchi dell'Anisico.

La serie triassica dell'Hindu Kush presenta dunque caratteri affini, ed in parte comuni, con membri di serie diverse soprattutto del Pamir centrale e non è difficile prevedere che quando si potrà disporre di studi più dettagliati, le affinità fra la composizione del Trias dei due territori risulterà anche maggiore di quanto oggi non appaia.

In ambedue i territori il passaggio dal Paleozoico al Mesozoico è contrassegnato da una più o meno ampia discontinuità nella sedimentazione marina.

Come s'è visto da principio, il Giurassico è contrassegnato nello Hindu Kush da due diverse formazioni e cioè inferiormente da una formazione

effusiva prevalentemente porfiritica (Doab) che rappresenta approssimativamente il Lias; superiormente da una formazione elastica continentale con carbone fossile, sostituita superiormente da calcari fossiliferi marini.

Nel Pamir troviamo tracce della formazione inferiore sul versante meridionale della catena di Basardara (Dronov, Karapetov, Leven, 1959). Nelle valli Gurundi e Bashgumbes affiorano infatti lave porfiritiche accompagnate da tufi, breccie e conglomerati, più o meno intensamente metamorfosati al contatto con il granito di Bashgumbes. V'è dunque quasi identità di composizione con la serie vulcanica liassica dell'Hindu Kush. Ma la facies vulcanica del Lias è molto ridotta nel Pamir e non di rado il Lias è contrassegnato nella parte meridionale di quella regione da una lacuna stratigrafica.

Il Giura medio e superiore dell'Hindu Kush (serie di Saighan) trova pure un buon riscontro nella serie di Kurteke. Anche qui troviamo infatti un complesso arenaceo conglomeratico con livelli argillosi a carbone fossile e, superiormente, intercalazioni più o meno potenti di calcare con fauna marina a lamellibranchi e cefalopodi di cui per ora non conosciamo la composizione, ma sappiamo che appartengono al Calloviano, come altri precedentemente noti nel Pamir meridionale. La biofacies non è identica, nel senso che comunemente nel Pamir sono più frequenti i brachiopodi e le ammoniti, mentre la fauna di Karkar, per quello che sino ad oggi si sa, è composta essenzialmente da lamellibranchi e da coralli, che tuttavia non mancano anche nel Pamir meridionale.

In complesso le affinità appaiono veramente rilevanti fra il Giurassico delle due regioni, malgrado la scarsità delle nostre conoscenze sul Giurassico afgano. Sia nell'Hindu Kush, sia nel Pamir, buona parte del Giurassico è caratterizzato da facies continentali che fra il Batoniano ed il Calloviano sono state interrotte da un episodio marino di durata più o meno lunga a seconda delle regioni e che nella depressione tagika ha dato luogo a facies evaporitiche di carattere lagunare.

Il Cretaceo è ben differenziato, come abbiamo visto, nell'Afghanistan settentrionale, per quanto non sia ancora ben conosciuto. Comunque abbiamo una serie prevalentemente arenacea rossa (Red Grit) inferiormente, una serie argilloso-calcareo fossilifera superiormente.

Nel Tagikistan il Cretaceo è molto diffuso specialmente nella depressione principale, mentre nel Pamir l'area di diffusione è assai ristretta.

Diffusi sono nella depressione suddetta i depositi deltizi o di mare sottile a tinta rossa, che corrispondono al Red Grit afgano, e che rappresentano per lo più il Cretaceo inferiore.

Anche il Cretaceo superiore presenta sensibili affinità fra i due territori. Nel Pamir occidentale e nel Tagikistan prevalgono in generale litofacies argilloso-arenaceo-calcareo.

È difficile procedere a correlazioni biostratigrafiche per la scarsità delle faune finora note nell'Afghanistan. Se si confrontano tuttavia gli scarsi elenchi di specie fossili, se ne trova più d'una in comune, ma la loro distribuzione stratigrafica non appare sempre coincidente. È comunque caratte-

ristico di ambedue le regioni l'orizzonte ad *Inoceramus labiatus* (Schloth.), ch'è abbastanza costante ed esteso sul versante nord dell'Hindu Kush e che si trova anche oltre l'Amu Daria, orizzonte concordemente riferito al Turoniano.

I dati di cui disponiamo relativamente al Paleogene dell'Afghanistan sono pure per ora molto scarsi per procedere ad un buon confronto con i depositi coevi del Tagikistan meridionale illustrati specialmente da O. S. Vialov (1936, 1939), i quali mancano nel Pamir vero e proprio.

Possiamo tuttavia tentare di abbozzare una correlazione preliminare con la serie tagika. Tale serie viene suddivisa in 8 piani che rappresentano il Paleocene (Bukhara), l'Eocene inferiore (Susak), l'Eocene medio (Alai), l'Eocene superiore (Turkestan, Rishtan, Isfara) e l'Oligocene (Khanabad e Sumsar). A giudicare dai pochi fossili finora noti in Afghanistan, sembra siano rappresentati nella serie di Tashkurgan (Popol e Tromp 1954) l'orizzonte di Susak ad *Ostrea gigantica* Sol., l'orizzonte di Alai ad *O. multicosata* var. *strictiplicata* R. e D. e forse l'orizzonte del Turkestan con *O. esterhazyi* Pav. Quest'ultimo è dubbio, poiché sembra che le due ultime forme di Ostree citate provengano dallo stesso livello; mentre è probabile che sia rappresentato l'orizzonte di Bukhara negli strati di passaggio al Senoniano.

Sull'Oligocene, di cui si conosce una fauna fossile molto scarsa ed un po' dubbia presso Aliabad, mancano elementi di raffronto.

Riepilogando i dati che ho brevemente esposto circa i rapporti esistenti fra le serie stratigrafiche finora note nell'Hindu Kush e nel Tagikistan, possiamo rilevare quanto segue:

1° Il Paleozoico a facies sedimentaria normale dell'Hindu Kush ha composizione eminentemente calcarea e presenta affinità con la serie di Akbaytal. Non è escluso che una parte degli affioramenti isolati di porfiriti e tufi dell'Hindu Kush possano appartenere al Carbonico inferiore come quelli del Darvaz sud-occidentale.

2° La serie triassica è trasgressiva sui terreni del Paleozoico superiore sia nell'Hindu Kush, sia nella zona di Mintekin e la parte superiore è rappresentata da facies continentali con carbone fossile in ambedue le regioni.

3° Anche il Giurassico dell'Hindu Kush presenta facies analoghe, vulcaniche (porfiriti e tufi) inferiormente, a quelle della catena di Basardara; facies continentali con carbon fossile nelle parti media e superiore. Intercalazioni calcaree con faune marine in quest'ultima: condizioni analoghe si ritrovano nella zona di Kurteke.

4° La serie arenacea rossa (Red Grit) del Cretaceo inferiore dell'Hindu Kush trova un riscontro nelle formazioni rosse del Darvaz-Pamir occidentale e della depressione principale del Tagikistan. La facies argilloso-arenaceo-calcarea del Cretaceo superiore dei due territori presenta sicure affinità stratigrafiche: il Turoniano ad *Inoceramus labiatus* (Schloth.) è presente in ambedue.

5° Del Paleogene inferiore sono rappresentati gli orizzonti di Susak, di Alai e forse del Turkestan, della serie tagika, e probabilmente anche l'orizzonte di Bukhara, mentre mancano per ora elementi di giudizio per quanto riguarda l'Oligocene.

CITAZIONI BIBLIOGRAFICHE.

- BARKHATOV B. P., MIKLUKHO-MAKLAI A. D., ROMAN'KO E. F., TAIROV E. Z., *New data on the permian deposits of Northern Pamir*, «Doklady Akademii Nauk SSSR», vol. 125, n. 6, pp. 1303-1306, Moskva (1958). (Trad. A.G.I.).
- BRÜCKL K., *Ueber die Geologie von Badakhshan und Kataghan (Afghanistan)*, «N. J. Miner. Geol. u. Paläont.», Abh. 74, B. Bd., 3 H., pp. 360-401, 1 fig. con schizzo geol. 1 : 2 milioni, Stuttgart (1935).
- CIZANCOURT (DE) H., VAUTRIN H., *Remarques sur la structure de l'Hindou Kouch*, «Bull. Soc. Géol. France», sér. 5^e, t. VII, pp. 377-400, Paris (1937).
- COWPER REED F. R., *Devonian fossils from Chitral, Persia, Afghanistan and Himalayas*, «Rec. Geol. Survey of India», vol. XLI, pt. II, pp. 86-114, 2 tav., Calcutta (1911).
- *Upper Carboniferous Fossils from Afghanistan*, «Palaeont. Indica», n. 5, vol. XIX, pp. 1-39, 4 tav., Calcutta (1931).
- COX L. R., *Fossiles éocènes du Nord de l'Afghanistan*, «Mém. Soc. Géol. France», sér. 5^e, t. XVII, fasc. 1, pp. 29-44, 2 tav., Paris (1938).
- *Contributions on the Palaeontology of Afghanistan. Oligocene (?) Mollusca*, «Ann. e Mag. Nat. History», ser. 2, vol. V, pp. 362-371, London (1940).
- DESIO A., *Itinerari geologici nell'Afghanistan*, «Boll. Soc. Geol. Ital.», vol. LXXX (1960), fasc. 2, Roma (1961).
- DRONOV V. I., KARAPETOV S. S., LEVEN E. Y., *On the age of the coals in the Eastern Pamir*, «Doklady of the Academy of Sciences of the U.S.S.R. Earth Sciences Sections», vol. 127, n. 3, pp. 634-636, Moskva (1959). (Trad. A.G.I.).
- FURON R., *L'Hindou-Kouch et le Kaboulistan. Contribution à l'étude géologique et géomorphologique de l'Afghanistan*, pp. 169, 23 figg., 10 tav., carta geol. 1 : 1 milione, L. Heuriot, Paris (1927).
- *Sur les relations géologiques et géographiques de l'Hindou-Kouch et du Pamir*, «C. R. Acad. Sciences», t. 198, pp. 963-964, Paris (1934).
- *Sur la Géologie de l'Hindou Kouch et du Pamir*, «Bull. Soc. Géol. France», sér. 5^e, vol. IV, pp. 69-78, Paris (1934).
- FURON R., ROSSET L. F., *Contribution à l'étude du Trias en Afghanistan*, «Bull. Museum d'Hist. Natur.», 2^e sér., t. XXIII, n. 5, pp. 558-565, 1 tav., Paris (1951).
- — *Le Jurassique au Nord du Plateau Iranien*, «C. R. Acad. Sciences», t. 239, n. 3, pp. 296-298, Paris (1954).
- GRIESBACH C. L., *Field-notes from Afghanistan*, «Rec. Geol. Survey of India», vol. XVIII-XX, Calcutta (1885-1887).
- HAYDEN H. H., *The Geology of Northern Afghanistan*, «Mem. Geol. Survey of India», volume XXIX, 12 fig., 19 tav.: pp. 1-97, 1 cartina geol. alla scala 1:6,336.000, Calcutta (1911).
- HERBERT O., *Geographisch Geologisches aus dem Hindukuschrandgebiet im Afghanistan*, «Peterm. Mitteil.», vol. LXXVII, 1931, H. 11-12, pp. 289-292, cartina tettonica, 1 : 1.400.000, Gotha (1931).
- ILIN S. I., MEIER G. I., MIKHAILUKH, *Geologičeskoe stroenie i perspektivi neftenosnikh raionov srednei Asii. Injuno-Tadžikskaja Depressiia*, «Trudi Vsesoiusnii Neftianoi Naucno-Isspedovatelskii Geologo-Rasvedocnii Institut (Vnigri)», n. s., fasc. 25, Leningrad-Moskva (1947). (In russo).
- LEVEN E. A., *The Permian deposits of the Central Pamir*, «Doklady Akademii Nauk SSSR», vol. 128, n. 2, pp. 369-371, Moskva (1959). (Trad. A.G.I.).

- MARKOVSKII A. P., *Geologia S.S.S.R.*, T. XXIV, *Tadjikskaja S.S.R.*, 735 pp., 113 fig., Moskva (1959). (In russo).
- POPOL S. A., TROMP S. W., *The stratigraphy and main structural features of Afghanistan*, «Proceed. K. Nederl. Akad. Wetenschappen», ser. B, vol. 57, n. 3, pp. 370-394, 1 fig., 1 tav., Amsterdam (1954).
- THOMPSON M. L., *Permian Fusulinids from Afghanistan*, «Journ of Paleont.», vol. 20, n. 2, 2 tav., pp. 140-157, Menasha (1946).
- VJALOV O. S., *Bukharii iarus*. «Trudi Neftianogo Geologo-Rasvedoenogo Instituta». Serie A, fasc. 71, Leningrad-Moskva (1936). (In russo).
- *Stratigrafia paleogena Tadjikskoi Depressii*. Ibidem, ser. A, fasc. 129, Leningrad-Moskva (1939). (In russo).
- VLASOV N. G., MIKLUKHO-MACLAY A. D., *New data on the stratigraphy of the Permian deposits of South western Darvaz*, «Doklady Akademii Nauk SSSR», vol. 129, n. 1-6, Moskva (1959 a). (Trad. A.G.I.).
- — *New data on the stratigraphy of the Carboniferous deposits of Southwest Darvaz*, «Doklady Akademii Nauk SSSR», vol. 129, n. 1-6, Moskva (1959 b). (Trad. A.G.I.).

Biologia. — *Sul valore logico delle teorie darwiniane.* Nota (*) del Corrisp. GIUSEPPE COLOSI.

Attraversiamo un momento della storia della biologia in cui un esiguo gruppo di studiosi raccoglie tutte le proprie energie e cerca proseliti per tentare il salvataggio di quella teoria delle trasformazioni fortuite e disorientate, e dell'orientamento operato da eventuali contingenze esterne — proseguimento del caso — esercitanti con la selezione naturale: teoria che, sorta cento anni or sono sotto il nome di darwinismo, venne in seguito alquanto modificata e reiteratamente aggravata di nuovi elementi ipotetici, divenendo l'attuale iperdarwinismo ⁽¹⁾. Fanno essenzialmente parte di tal gruppo Fisher, Haldane, Huxley, Darlington, Waddington e Ford in Inghilterra, Simpson, Wright, Muller, Dobzhansky, Mayr, Dice e Stebbins negli Stati Uniti, Timoféeff-Ressovsky e Rensch in Germania, Scetverykov e Dubinin in Russia, Teissier in Francia e Buzzati-Traverso in Italia ⁽²⁾. La loro tattica è la medesima che già E. v. Hartmann rimproverava ai primi darwinisti: quella, cioè, di aggrovigliare constatazioni ed ipotesi in maniera tale che ciascun elemento, privo di una propria spiegazione sufficiente, fosse utilizzato per spiegare gli altri e sorreggere una teoria, la quale veniva presentata con tanto maggiore sfoggio di eloquenza ed in forma tanto più popolare, cioè tanto meno scientifica, per quanto più profano era il pubblico a cui essi si rivolgevano. Ma, nonostante gli sforzi dei darwinisti del primo cinquantennio, ed i ragionamenti di tipo schiettamente eristico con cui essi si adopravano di convincere il pubblico — e forse un poco anche se stessi ⁽³⁾ — il darwinismo era caduto quasi in discredito (i più lo accettavano per abitudine e in mancanza di meglio!): le critiche che gli erano state mosse da eminenti zoologi, botanici e paleontologi e il confronto con i fatti concreti —

(*) Presentata nella seduta del 13 maggio 1961.

(1) Fra le varie denominazioni della nuova corrente darwiniana adottò quella di Goldschmidt.

(2) Ritengo che Simpson, da cui riporto l'elenco, abbia posto la massima cura di includervi i nomi a suo giudizio più significativi. Il numero degli aderenti e dei divulgatori è maggiore; straordinariamente scarso è quello dei sistematici e dei paleontologi che accettino le premesse e le conclusioni fondamentali dell'iperdarwinismo.

(3) Uno dei procedimenti eristici più largamente usato dallo stesso Darwin era quello di immaginare esempi di sviluppo filogenetico in funzione della selezione naturale e, dopo avere accuratamente raccolto una ingente quantità di fatti reali che corrispondevano o sembravano corrispondere a singoli momenti del processo immaginato, assumere queste corrispondenze come prove del significato costruttivo della selezione naturale. Non mi si tacci di irriverenza, se — esagerando per far meglio risaltare il vizio logico — faccio osservare che singoli momenti di un qualsiasi romanzo fantastico o di un sogno possono benissimo corrispondere a singoli fatti reali, senza che da ciò possa dedursi la realtà obbiettiva del romanzo o del sogno.

– critiche ancora oggi in massima parte valide – avevano fatto dubitare del valore filogenetico delle diversità fortuite e disordinate che insorgevano fra gli individui di una specie, e soprattutto avevano intaccato fortemente il mito dell'onnipotenza della selezione naturale.

L'iperdarwinismo, sostituitosi nel secondo cinquantennio dalla pubblicazione de *L'origine delle specie* al darwinismo genuino e al neodarwinismo weismanniano, nacque dalla speranza di poter utilizzare, con l'aggiunta di nuove ipotesi, i risultati della genetica e degli studi sulle trasformazioni fortuite ereditarie, o mutazioni ⁽⁴⁾. Non si può affermare che simili tentativi, checché ne dicano i più ferventi iperdarwinisti, siano stati coronati da successo. Non pochi fra i più autorevoli zoologi e botanici, morfologi, sistematici, fisiologi e paleontologi, e perfino genetisti della forza di Bateson, Plate, Cuénot, Goldschmidt, Kühn, ecc. si sono opposti, spesso con vivaci reazioni, a certi metodi di viziato ragionamento ed alle abusive conclusioni.

Circa i cosiddetti modelli matematici dell'evoluzione, che gli iperdarwinisti volentieri elaborano, già Delage faceva notare che un errore iniziale di valutazione conduce alle più gravi conseguenze, per cui i risultati che si ottengono attraverso calcoli, della cui esattezza nessuno dubita, spesso contrastano con la realtà e, comunque, non aiutano molto nell'interpretazione dei fatti. Tale osservazione, che data dai primi tentativi di applicare i metodi matematici agli studi filogenetici, può oggi a maggior ragione essere rivolta agli iperdarwinisti, che con la massima disinvoltura parlano di pressione di mutazioni, di pressione e velocità di selezione, di massa e pressione di popolazione, ecc. ecc., attribuendo a questo o a quel fattore, già in sé e per sé di significato discutibile, valori più o meno arbitrari e facendo intervenire geni, ai quali – lo confessa Carter, aderente all'iperdarwinismo – vengono conferite volta per volta tutte le proprietà e le attività necessarie perché il gioco riesca ⁽⁵⁾. Sebbene con tali espedienti si possa dimostrare matematicamente tutto ciò che si vuole, pure, come facevo altra volta rilevare, gli ultradarwinisti, in definitiva, per spiegare il processo della filogenesi, sono costretti a ricorrere all'argomento della possibilità di realizzazione del supponibile, dell'attuazione dell'incontrollabile, e dell'effettuazione dell'altamente improbabile.

Ma quale significato, al confronto dei fatti reali, può avere la possibilità di attuazione dell'altamente improbabile? È intuitivo come, agli effetti pratici, l'improbabilità della realizzazione di un fenomeno può rag-

(4) Da non confondersi, come è noto, con le mutazioni di Waagen, che sono progressive ed orientate, cioè ortogenetiche. Waagen attribuisce le mutazioni filogenetiche ad una legge intrinseca degli organismi, né manca di far rilevare che la sua concezione differisce da quella di Darwin.

(5) « Gene sind heutzutage billig wie Brombeeren » aveva scritto nel 1931 Plate, insigne zoologo e genetista, protestando contro le posizioni assunte dai primi iperdarwinisti. Gli argomenti arbitrari che trent'anni or sono suscitavano proteste, vengono oggi considerati da questi come fatti di ordinaria amministrazione.

giungere così alti gradi da non poter nemmeno esser presa in considerazione.

È merito di Blandino ⁽⁶⁾ quello di avere dimostrato matematicamente e senza uso di elementi arbitrari quanto, nelle ipotesi filogenetiche casuali, sia alta l'improbabilità che si formino, permangano e si perpetuino per generazione corpi strutturalmente regolari. Si tratta del prodotto di tre fattori ciascuno dei quali esprime un così alto grado di improbabilità da rimanere inconcepibile o, per lo meno, da rasentare l'inverosimile, che per trasposizioni, aggiunte ed incastri fortuiti possano essersi realizzate forme viventi. In un mondo in cui avvengono e si ripetono sia nello spazio che nel tempo fenomeni tanto regolari da essere prevedibili e da giustificare estrapolazioni, è da escludersi che questi si verifichino fortuitamente sulla base del disordine. Come già faceva rilevare Aristotile, il caso non produce regolarità; le stesse regolarità statistiche, aggiunge Blandino, sono il risultato di positive regolarità. Né ad aumentare l'infima probabilità di realizzazione fortuita di meccanismi complicati, regolati, durevoli e riproducentisi gioverebbe ammettere leggi preferenziali per la loro formazione ed il loro mantenimento, perché in regime casuale è estremamente improbabile che tali leggi esistano e che siano significative: ammettere ciò, ad ogni modo, sarebbe già ripudiare i principi darwiniani.

E nemmeno, a diminuire l'improbabilità che in un universo casuale possano esistere, sia pure per un istante, esseri viventi, vale invocare la vastità dello spazio e del tempo. Dato — ragiona Blandino, esemplificando — che un corpo umano di 70 Kg contiene circa $8 \cdot 10^{28}$ corpuscoli elementari, ammettendo che l'universo noto ne contenga circa 10^{80} e supponendo che questi fossero tutti impegnati a dare corpi strutturalmente simili ad un organismo umano, non potrebbero realizzarsi contemporaneamente più di 10^{52} coacervati di forma esterna umana. Ma, siccome con la coacervazione casuale dei 70.000 cubetti di 1 cm^3 ciascuno in cui, per esempio, può idealmente venire scomposto, non si realizza che un solo corpo strutturalmente regolare

(6) G. BLANDINO, *Problemi e dottrine di Biologia teorica*. Ediz. Minerva medica. Bologna, 1960. Oltre ad una rivista critica delle principali correnti del pensiero biologico contemporaneo, questo saggio, elaborato con raro acume, contiene l'esposizione delle idee personali dell'autore, che, dopo aver posto in rilievo che in natura esistono con frequenza strutture regolari e costanti, prende in particolare esame i corpi viventi e le concezioni circa la loro possibilità di realizzazione e di perpetuazione, confrontando soprattutto ciò che dovrebbe verificarsi in regime casuale e ciò che non può verificarsi altro che in regime retto da leggi deterministiche preferenziali. Dal confronto si deduce che l'evoluzione dei viventi ha proceduto per cause interne ed è regolata, e che il meccanismo postulato dai darwinisti e loro epigoni non può quindi venire accettato. Ora, mentre i biologi positivisti possono concordare con le conclusioni di Blandino a tal riguardo, non tutti certamente si sentono in obbligo di concludere che i fenomeni di regolarità che si osservano in natura presuppongono l'esistenza di un'entità metafisica intelligente, che finalisticamente abbia posto le cosiddette leggi di natura, le quali, in verità, non sono altro che formule espressioni fenomeni di regolarità, e che meglio sarebbe chiamare leggi di constatazione, perché direttamente ricavate da generalizzazioni empiriche.

su 10^{308759} coacervati possibili, la probabilità che in un dato istante in tutto l'universo esista per caso un corpo strutturalmente ordinato è di 1 su 10^{308707} . Se poi ognuno di codesti coacervati durasse un solo minuto secondo, si richiederebbero circa 10^{308693} milioni di anni perché potessero comparire tutti e quindi potesse prima o dopo venire ad esistere anche quell'unica dotata di congruenza morfologica e funzionale. Si rifletta che ogni cm^3 di corpo umano è a sua volta strutturato e che l'improbabilità aumenta spaventosamente eseguendo l'operazione con cubi di 1 mm^3 . Comunque – osserva Blandino – se l'ipotesi casuale rispondesse alla realtà in tutto l'universo con enorme probabilità dovremmo non constatare alcun corpo strutturalmente di tipo umano. Ma la realtà non è così; sulla sola terra esistono moltissimi viventi che permangono a lungo e generano con regolarità. Dunque l'ipotesi casuale non concorda con la realtà. È anche ovvio che in un mondo in regime casuale la selezione naturale – anche supponendola provvista dei più squisiti poteri discriminatori – non potrebbe esercitare la sua opera per mancanza di materiale da preferire.

I darwinisti ed i loro epigoni potrebbero obiettare che, non essendo possibile la comparsa improvvisa di organismi complessi, si possa, anzi si debba ammettere che questi si siano realizzati a tappe successive per fortuite aggiunte e disparati incastri a partire da organismi di semplicità elementare, e sostenere che in queste numerose modificazioni disparatissime ed equiprobabili bisogna cercare la ragione prima dell'evoluzione del mondo vivente. Ma risponde Blandino che, a rigor di matematica, la improbabilità che in un mondo in regime casuale la realizzazione di un corpo strutturalmente regolare avvenga in un solo tempo non è maggiore di quella che sarebbe quando il medesimo risultato dovesse venir conseguito in più tempi. Egli perciò formula un « principio dell'invarianza delle probabilità », affermando che, variando le vie di formazione casuale, non variano le probabilità. Nell'ipotesi di equiprobabilità non esistono meccanismi o vie più facili di altre: la probabilità di formazione di una struttura regolare per graduale aumento di complessità o per generazione è uguale a quella di formazione diretta e immediata da sostanze inorganizzate. La discordanza che, invece, nella realtà intercede fra codeste due vie di realizzazione indica che vi sono cause interne che dirigono il processo secondo una via e che mancherebbero se questo seguisse l'altra via: lo svolgimento della filogenesi non è quindi fortuito.

Che il processo della filogenesi appartenga alla categoria dei fenomeni non casuali, risulta dalla constatazione che nel corso di poche centinaia di milioni di anni ha prodotto alcuni milioni di diversi meccanismi regolati, durevoli, perpetuanti e sempre efficienti nonostante le profonde modificazioni e complicazioni via via subite. L'affermazione di Muller, di cui De Beer si compiace, che l'unica proprietà dei corpi viventi atta ad offrire materia alla filogenesi è quella di presentare variazioni ereditarie « con cecità ed indeterminazione massiva », mi pare che non meriti nemmeno di esser presa in considerazione. Né sorte migliore ritengo che spetti all'aforisma di Fisher, applaudito da Huxley, che « la selezione naturale è un meccanismo per gene-

rare un'improbabilità di alto grado » (7). Anzitutto, accettando l'affermazione di Muller, il mondo vivente difficilmente avrebbe potuto prodursi e sussistere e quindi – ripetiamo – di regola non potrebbe aver luogo alcuna selezione naturale per mancanza di materiale da cui prescegliere; in secondo luogo, ammettendo che essa possa esercitarsi su materiale conveniente, cioè, come vogliono gli iperdarwinisti su micromutazioni disordinate e fortuite, bisognerebbe dimostrarne l'effettivo potere discriminatorio, e non accondiscendere irriflessivamente all'assicurazione di Muller che esso supera il potere di ogni umana discriminazione, perché ciò significherebbe evadere ad ogni obbligo di dimostrazione, assumendo per dimostrato ciò che vien dichiarato indimostrabile o quasi. D'altra parte – come esaurientemente risulta dalla recente analisi di Brough – lo sforzo di Simpson e di alcuni genetisti di spiegare i fatti della paleontologia a base di selezione naturale non sembra coronato da successo. Blandino non ha mancato di prendere in esame uno dei calcoli di Simpson e di porne in evidenza i vizi logici, in quanto esso è basato in parte su valori supposti ed utilizzati come reali, in parte su premesse non corrispondenti all'ipotesi casuale.

La ragione centrale per cui i calcoli degli iperdarwinisti non dimostrano la teoria da loro sostenuta è – secondo Blandino (e mi pare che egli colga nel segno) – che essi non calcolano mai per via teorica, sia pure approssimata, quali dovrebbero essere in un ipotetico universo senza leggi preferenziali le frequenze dei fatti biologici fondamentali (cioè la frequenza di formazione di una struttura regolare, la frequenza di riproduzione, la frequenza delle mutazioni geniche favorevoli, ecc.). Gli iperdarwinisti nei loro calcoli, da essi considerati conformi all'ipotesi casuale, attribuiscono sempre ai fatti biologici fondamentali le frequenze che di fatto si riscontrano nel nostro universo. In tal modo essi commettono l'evidente petizione di principio di supporre, in partenza, che tali fatti biologici abbiano nel nostro universo le stesse frequenze che dovrebbero avere in un ipotetico universo senza leggi preferenziali. In altri termini essi suppongono come già dimostrato ciò che dovrebbe proprio essere oggetto di dimostrazione, cioè che il nostro universo è senza leggi preferenziali. Da queste deficienze iniziali deriva l'errore principale delle varie dottrine darwiniane, cioè quello di ammettere che in un ipotetico universo senza leggi preferenziali sia possibile l'esistenza di un mondo vivente.

(7) In Italia Montalenti si è fatto tenace banditore sia dell'affermazione di Muller, sia dell'aforisma di Fisher, erigendoli a dogma.

Biologia. — *Istochimica della fosfatasi acida durante lo sviluppo embrionale della retina di pollo.* Nota (*) di ALBERTO STEFANELLI, EMILIA CATALDI e LUISA ANNA IERADI, presentata (**) dal Corrisp. A. STEFANELLI.

Nell'ambito delle ricerche di neuroembriologia che si stanno svolgendo nel nostro Istituto, abbiamo messe a punto alcune tecniche istochimiche applicate alla retina, in questo momento oggetto di nostre indagini sperimentali.

Interessante è apparsa la tecnica con i sali di diazonio per la fosfatasi acida (f. a.) che si è dimostrata assai più specifica di quella classica di Gomori⁽¹⁾. Si sono potute mettere così in evidenza delle localizzazioni, non descritte da altri autori, che riteniamo utile di illustrare. Ciò assume particolare valore se si tien conto che la f. a. è l'unico enzima che sinora è stato dimostrato variabile con l'eccitamento luminoso (Schimke, 1959)⁽²⁾.

La f. a. è tipicamente endocellulare (vedi Leduc e Wislocki, 1952)⁽³⁾, ed è diffusa, con diversa quantità, in tutte le cellule (vedi Moog, 1944, e Mulnard, 1955)⁽⁴⁾. Rimandiamo alla Memoria di Roche e Thoai (1950)⁽⁵⁾ per notizie sulla sua natura, classificazione e azione.

La sede tipica di questa fosfomonoesterasi è il citoplasma (Moog, Leduc e Wislocki, op. cit., e Wolff, Kabat e Newman, 1943; Dounce 1950)⁽⁶⁾, ma è stata descritta anche nel nucleo e nel nucleolo sebbene sia stata da altri negata in questa sede o considerata sempre di natura inizialmente citoplasmatica (vedi Gustafson, 1954)⁽⁷⁾. Anche la sede nell'ambito del citoplasma è discussa: chi la trova nei mitocondri (Mazia, 1949; Nobak e Paff, 1951; Goetsch e Reynold, 1951; Berthet e De Duve, 1951; Weinreb, 1955)⁽⁸⁾, chi anche, seppure in minore quantità, nei microsomi (Palade 1951; Vorbrodt, 1958)⁽⁹⁾, chi, infine (vedi Mulnard, op. cit., e Lehninger⁽¹⁰⁾), legata ai così detti mitocondri

(*) Lavoro eseguito nel Centro di Neuroembriologia del C.N.R., presso l'Istituto di Anatomia Comparata «G. B. Grassi» della Università di Roma.

(**) Nella seduta del 13 maggio 1961.

(1) G. GOMORI, «Int. Rev. Cytol.», 1, 323 (1952).

(2) R. T. SCHIMKE, «J. Biol. Chem.», 234, 700 (1959).

(3) E. H. LEDUC e G. B. WISLOCKI «J. Comp. Neurol.», 97, 241 (1952).

(4) F. MOOG, «Biol. Bull.», 86, 51 (1944); J. MULNARD, «J. Arch. Biol.», 66, 525 (1955).

(5) J. ROCHE e N. V. THOAI, «Adv. Enzym.», 10, 83 (1950).

(6) A. WOLFF, E. KABAT e W. NEWMAN, «Am. J. Path.», 19, 423 (1943); A. DOUNCE, «Ann. N. Y. Ac. Sc.», 50, 982 (1950).

(7) T. GUSTAFSON, «Int. Rev. Cyt.», 3, 277 (1954).

(8) D. MAZIA, «J. Cell. Comp. Physiol.», 34, 17 (1949); C. NOBAK e G. PAFF, «Anat. Rec.», 109, 71 (1951); J. GOETSCH e P. REYNOLD, «Stain Technol.», 26, 145 (1951); J. BERTHET e C. DE DUVE, «Bioch. J.», 50, 174 (1951); E. WEINREB, «Exp. Cell. Res.», 8, 159 (1955).

(9) G. E. PALADE, «J. Exp. Med.», 94, 535 (1951); A. VORBRDIT, «Exp. Cell. Res.», 15, 1 (1958).

(10) A. L. LEHNINGER, *Enzymes* «H. Ford. Hosp. symposium», Ac. Press N. Y. (1956).

leggeri o lisosomi. Tale localizzazione è appoggiata dalle osservazioni al microscopio elettronico di Novikoff, Beaufay e De Duve (1956⁽¹¹⁾). È stata trovata anche nell'area di Golgi da Deane (1945⁽¹²⁾) e Dempsey e, nel nostro Istituto, dalla Ruffilli (1960⁽¹²⁾) sia in quest'area che nell'acrosoma di spermatidi (col Gomori).

Per quanto riguarda le cellule nervose questa esterasi è stata descritta sia nei nuclei che a livello neurofibrillare dei prolungamenti assonici (col Gomori) da Wolff, Kabat e Newman (op. cit.) e da Shimizu (1950⁽¹³⁾), ma la presenza nei nuclei è considerata da Waked e Kerr (1955⁽¹⁴⁾) una contaminazione. Secondo le osservazioni della Moog e di Leduc e Wislocki (op. cit.), è evidente una diversa attività nei diversi tipi di neuroni e nei diversi stadi della neurogenesi. Secondo Flexner e Flexner (1948⁽¹⁵⁾) nel cervello embrionale ve ne è una quantità doppia che in quello adulto.

Per quanto riguarda la retina, la Moog (1946⁽¹⁶⁾), con la tecnica del Gomori, nota nel pollo una reazione positiva sino al 3° giorno di incubazione che poi diviene debole alla schiusa. Anche Wislocki e Sidman (1954⁽¹⁷⁾) notano nella rana una reazione debolissima nello strato plessiforme interno e De Vincentiis (1951⁽¹⁸⁾) non ne trova negli strati nucleari del coniglio; con la tecnica degli omogenati trova però la f. a. nella frazione mitocondriale di retina di bue. Nel pollo Lindeman (1949⁽¹⁹⁾) trova, in omogenati, più fosfatasi acida che alcalina dal 12° al 19° giorno; essa poi si riabbassa parallelamente alla attività ATPasica e glicolitica del tessuto.

Per la prima volta i sali di diazonio furono usati da Menten, Junge e Green (1944⁽²⁰⁾) e il metodo fu poi esteso e sviluppato da Seligman e Manheimer (1949), da Holt (1952), da Burton (1953) e da Burstone (1958)⁽²¹⁾; rimandiamo alla monografia di Pearse (1954⁽²²⁾) per la specificità della tecnica di azo-colorazione che, tra l'altro, ha il vantaggio di non presentare quegli artefatti di impregnazione dovuti ai sali di piombo contenuti nei mezzi di incubazione del Gomori. In queste ricerche abbiamo usato il metodo descritto

(11) A. B. NOVIKOFF, H. BEAUFAY e C. DE DUVE, « J. Bioph. Bioch. Cyt. », 2, 4 suppl., 179 (1956).

(12) H. W. DEANE e E. W. DEMPSEY, « Anat. Rec. » 93, 401 (1945); A. RUFFILLI, « Riv. Istoch. », 6, f. 1-2 (1960); A. RUFFILLI, « Ric. Scient. », 30, 145 (1960).

(13) N. SHIMIZU, « J. Comp. Neur. », 93, 701 (1950).

(14) N. WAKED e S. E. KERR, « J. Hist. Cytoch. », 3, 75 (1955).

(15) J. B. FLEXNER e L. B. FLEXNER, « J. Cell. Comp. Physiol. », 31, 311 (1948).

(16) F. MOOG, « Biol. Rev. », 21, 41 (1946).

(17) G. B. WISLOCKI e R. L. SIDMAN, « J. Comp. Neur. », 101, 53 (1954).

(18) M. DE VINCENTIIS, « Arch. d'Ott. », 55, 303 (1951); M. DE VINCENTIIS e M. TESTA, « J. Histoch. Cytoch. », 7, 393 (1959).

(19) V. F. LINDEMAN, « Proc. Soc. Exp. Biol. Med. », 71, 435 (1949).

(20) M. L. MENTEN, J. JUNGE e M. H. GREEN, « J. Biol. Chem. », 153, 471 (1944).

(21) A. M. SELIGMAN e L. H. MANHEIMER, « J. Natl. Cancer. Inst. », 9, 427, (1949); S. J. HOLT, « Nature », 169, 271 (1952); J. F. BURTON, « J. Istoc. Cytoch. », 2, 88 (1953); M. S. BURSTONE, « J. Nat. Cancer Inst. », 21, 523 (1958).

(22) E. A. G. PEARSE, « Int. Rev. Cytol. », 3, 329 (1954); A. G. E. PEARSE, *Histochemistry*, Little, Brown & Co. Boston (1960).

da Tibor Barka (1960⁽²³⁾) con un nuovo sale di diazonio: l'esazonio parosanilina. Le sedi della f. a. appaiono colorate in rosso bruno. La colorazione dura poco e i preparati devono essere studiati e fotografati in tempo.

Le figure raccolte nella Tavola riassumono l'andamento della reattività della f. a. in vari stadi di sviluppo della retina di pollo. Le figure indicate con la lettera minuscola si riferiscono a controlli colorati con Mallory-Azan e quelle maiuscole ai preparati istochimici.

La figura A è quella di un occhio completo di 4 giorni di incubazione (stadio 23 sec. Hamburger e Hamilton). La reazione positiva è diffusa in tutti i tessuti embrionali retinici e non retinici; è negativa nella parte centrale del cristallino dove è iniziato il differenziamento delle fibre. La f. a. continua ad apparire diffusa nella retina sino al 7° giorno quando ancora non è iniziato il differenziamento e non vi sono ancora gli strati plessiformi (fig. *b* e B). Al 9° giorno le zone positive cominciano a differenziarsi parallelamente al differenziamento istologico (fig. *c*, C) per raggiungere al 14° giorno una distribuzione negli strati che poi rimane, pur con diversa intensità, sino alla schiusa. Nella figura C si osserva già la positività dello strato delle cellule visive (str. 2) di cui però non è ancora distinto il segmento emergente dal segmento interno. Lo strato plessiforme esterno appare negativo. Lo strato nucleare medio (ganglio retinico) comincia ad essere distinto in due parti dalla diversa intensità della reazione: appare infatti più intensa la reazione nelle cellule più vicine allo strato plessiforme esterno (str. 4^a), quello che è composto essenzialmente dalle cellule orizzontali e dalle retiniche a dendrite corto. Questo strato e quello che si differenzia in stadi successivi (D-G) a carico della porzione interna delle cellule visive rimangono quelli di più intensa reattività positiva. A 9 giorni lo strato plessiforme interno non è istochimicamente nettamente distinto perché è ancora occupato da elementi ganglionari (fig. *c*). Una distinzione sempre più precisa della reattività per la f. a. dello strato nucleare medio, o strato del ganglio retinico, appare dal 16° giorno in poi: tra le due parti, quella delle cellule bipolari più esterno (str. 4^a) e quella delle cellule amacrine più interna (str. 4^b), si delinea una sottile zona di reattività negativa (fig. F, G).

Nelle fotografie non è ben distinguibile la zona reattiva del segmento interno dei coni e bastoncelli che è invece ben distinguibile nei preparati per la colorazione rossa, perché si confonde con il nero del pigmento del tapeto; ma il confronto con il controllo colorato con Mallory-Azan rende chiari questi limiti.

Nelle figure F e G, di pulcini immediatamente prima della schiusa e qualche ora dopo, si nota assai bene la completa negatività degli strati sinaptici, plessiforme esterno (str. 3) e interno (str. 5). Si nota invece la positività delle cellule ganglionari (ganglio cerebrale) particolarmente intensa per le cellule più grosse (str. 6). Anche nello strato delle cellule amacrine

dove, negli Uccelli, esistono molte cellule ganglionari cerebrali sparse (ganglionari retiniche) si notano zolle di più intensa reattività in relazione con le cellule più grosse. La differenza di intensità reattiva prima e dopo la nascita non è significativa e merita un più preciso esame.

Queste osservazioni dimostrano innanzi tutto come la f. a. sia presente nella retina di embrione di pollo e del pulcino alla nascita. La sua distribuzione omogenea nei primi 7 giorni di incubazione dimostra come questa fosfomonoesterasi sia legata al peculiare metabolismo di tutte le cellule embrionali; la sua distribuzione differenziata nei vari strati man mano che procede il differenziamento indica che successivamente è in rapporto con le varie condizioni metaboliche relative al differenziamento dei diversi tipi di neuroni. Col differenziamento la reazione rimane positiva solo negli strati cellulari della retina (negativa nei plessiformi), ma con diversa intensità: intensa è la reazione nello strato dei segmenti interni delle cellule visive, nello strato delle cellule orizzontali e nei grossi elementi dello strato delle cellule amacrine (forse a carico degli elementi ganglionari retinici, più grossi, ivi presenti) e dello strato delle cellule ganglionari. Quest'ultima localizzazione conferma la osservazione di Wolff (op. cit.) che le cellule nervose più grosse sono più ricche di questa esterasi.

La differente modalità di distribuzione della f. a., diffusa omogeneamente nei primi 7 giorni e variamente localizzata dopo il 7° giorno, è in accordo con il concetto della Moog (op. cit.) di una azione difasica della f. a.; ma, anziché dividere con l'autrice questa azione in una prima fase collegata con la differenziazione e in una seconda fase legata con la funzione, riteniamo che la prima fase si debba considerare legata al peculiare metabolismo delle cellule embrionali caratterizzato da elevata sintesi proteica, e la seconda col differenziamento specifico dei diversi tipi di neuroni, precorrendo la loro specifica attività funzionale.

Questo concetto si accorda con l'ipotesi di Lindeman (1949⁽²⁴⁾), desunta da ricerche su omogenati, che la f. a. sia associata alla biochimica del differenziamento. Ghiretti (1950)⁽²⁵⁾ vede infatti un aumento della f. a. nei fenomeni rigenerativi e differenziativi dei Tritoni. La constatazione che anche nella retina la reazione sia più accentuata a carico delle cellule di maggiori dimensioni prova che anche la grandezza cellulare è un fattore che condiziona il metabolismo specifico.

Secondo La Velle (1954)⁽²⁶⁾, nei fenomeni di rigenerazione delle fibre nervose la f. a. varia nelle cellule in rapporto con la quantità di acido ribonucleico (RNA). In effetti nelle cellule nervose di maggiori dimensioni vi è una maggiore quantità di RNA. L'idea di Shimizu (op. cit.) che il rapporto tra f. a. e sintesi proteica si manifesti come azione regolatrice della f. a. sulla sintesi di RNA è suggestiva. Sono in appoggio ad essa le osservazioni di Bo-

(24) V. F. LINDEMAN, «Anat. Rec.», 105, 583 (1949).

(25) F. GHIRETTI, «Experientia», 6, 98 (1950).

(26) A. LA VELLE e C. N. LIU, «Anat. Rec.», 119, 305 (1954).

dian e Mellors (1945)⁽²⁷⁾ che notano un aumento di f. a. con la cromatolisi in seguito ad amputazione delle fibre.

Dai nostri preparati eseguiti per la localizzazione istologica del RNA risulta effettivamente che gli strati positivi alla reazione della f. a. corrispondono grosso modo a quelli ricchi di RNA, ma le due immagini non sono esattamente sovrapponibili, sia per la diversa intensità delle due reazioni in alcuni strati, sia per la presenza di una zona negativa alla f. a. tra lo strato delle cellule bipolari (str. 4^a) e lo strato delle cellule amacrine (str. 4^b).

Come abbiamo accennato nella introduzione, sono assai scarsi i rilevamenti di una differenza enzimatica nelle retine al buio ed eccitate dalla luce. Ci risulta dal lavoro di Schimke (op. cit.) una variazione nei conigli allevati al buio e alla luce per l'acido malico, l'acido lattico, la deidrogenasi e la f. a. Anche nei recentissimi lavori di Pearse (1960 op. cit.) sulle esterasi e di Eranko, Niemi e Merensmies (1960)⁽²⁸⁾ sulle esterasi e molti enzimi ossidativi, non sono fatti accenni in proposito. Le leggere differenze da noi riscontrate non sono, a nostro avviso, significative. Tuttavia il problema merita di essere riconsiderato con una più adatta sperimentazione; risulta che McConnel [nel libro: *The structure of the eye* (1960) di Smelser], ha osservato una diversa e graduabile colorabilità delle retine con blu di metilene in proporzione con la durata della illuminazione.

In conclusione, con la tecnica istochimica di azo-colorazione particolarmente specifica per la fosfatasi acida, si è potuto accertare la positività della reazione nella retina durante lo sviluppo embrionale di pollo e nel pulcino alla schiusa. Si è potuto distinguere un primo periodo di reattività diffusa che si è collegato al peculiare metabolismo delle cellule embrionali e un secondo periodo a reattività localizzata che si è messo in rapporto con le condizioni specifiche del differenziamento dei diversi tipi cellulari retinici.

La reattività è sempre a carico delle cellule mentre i plessi sinaptici appaiono negativi. La localizzazione, a livello istologico, della fosfatasi acida e del RNA non coincide completamente e ciò limita la concezione di una azione stretta dell'enzima sulla sintesi di RNA.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA I

Retine di embrioni di pollo e di pulcino (razza livornese).

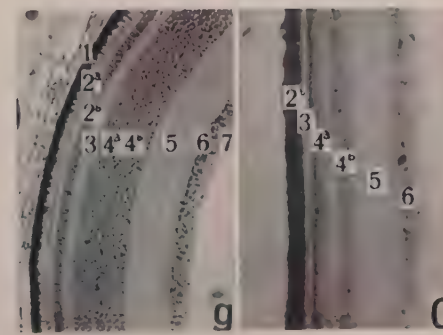
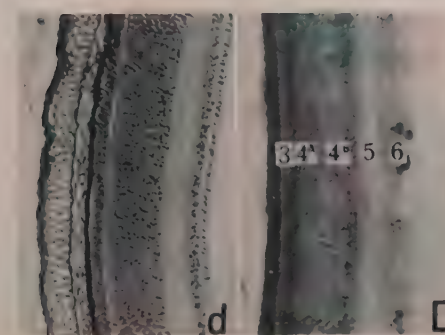
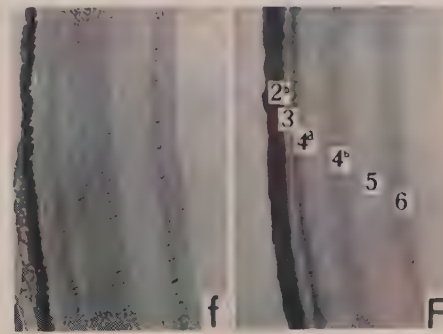
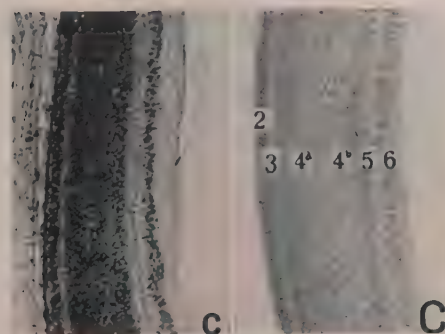
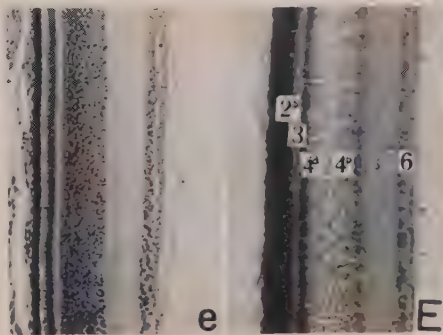
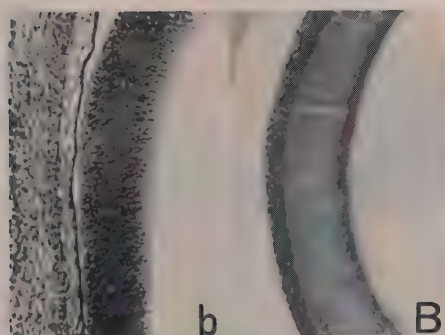
Con lettere minuscole retine di controllo fissate in Bouin e colorate con Mallory-Azan; con lettere maiuscole retine corrispondenti trattate con il metodo ai sali di diazonio per la fosfatasi acida.

A, 4 giorni di incubazione (g.i.) (stadio 23 di Hamburger e Hamilton); B, b, 7 g.i. (29-30); C, c, 9 g.i. (35); D, d, 14 g.i. (39); E, e, 16 g.i. (43); F, f, 21 g.i. (prima della schiusa); G, g, 21 g.i. (dopo qualche ora dalla schiusa, alla luce).

1 tappeto; 2^a strato emergente delle cellule visive; 2^b strato dei segmenti interni delle cellule visive; 3, strato plessiforme esterno; 4^a strato delle cellule bipolari del ganglio retinico; 4^b strato delle cellule amacrine del ganglio retinico; 5 strato plessiforme interno; 6 strato ganglionare (ganglio cerebrale); 7 fibre ottiche.

(27) D. BODIAN e R. G. MELLORS, « J. Exp. Med. », 1, 469 (1945).

(28) Nel libro di Smelser citato nel testo.



NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Un criterio sufficiente per il minimo assoluto nel caso di estremi variabili.* Nota di ANDRÁS KÓSA, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

In una Memoria di M. Picone ⁽¹⁾ si trovano criteri sufficienti di tipo nuovo per il *minimo assoluto*. Questi criteri hanno molte conseguenze importanti. In tale Memoria gli estremi delle curve ammissibili sono fissi. Nella Nota presente ci occuperemo invece del problema nel caso in cui gli estremi delle curve ammissibili non sono fissi, ma devono appartenere a curve prescritte. Per ragioni di semplicità, ci limiteremo solamente al caso di una funzione, e prenderemo, come curve prescritte, due curve di forma $y = y(x)$.

Si abbiano:

1° quattro curve di classe uno:

$$y = y_i(x) \quad \text{per } a^i \leq x \leq b^i, \quad i = 1, 2;$$

$$y = l_i(x) \quad \text{per } c^i \leq x \leq d^i, \quad i = 1, 2,$$

dove né le curve $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, né le curve $y = l_1(x)$, $y = l_2(x)$ hanno punti in comune; gli estremi della curva $y = y_1(x)$ [$y = y_2(x)$] coincidono, invece, con gli estremi sinistri [destri] delle curve $y = l_1(x)$, $y = l_2(x)$.

Indichiamo con T il dominio limitato da queste quattro curve e poniamo inoltre:

$$A = \min \{a^1, a^2, c^1, c^2\}, \quad B = \max \{b^1, b^2, d^1, d^2\},$$

$$A_1 = \max \{a^1, a^2, c^1, c^2\}, \quad B_1 = \min \{b^1, b^2, d^1, d^2\};$$

2° un insieme G di numeri reali p ;

3° una funzione reale $f(x, y, p)$, continua in $T \times G$;

4° una funzione $y_0(x)$ di classe uno, definita in un certo intervallo chiuso $[a, b]$, verificante le condizioni:

$$(x, y_0(x), y'_0(x)) \in T \times G \quad \text{per } a \leq x \leq b,$$

$$(a, y_0(a)) \text{ deve trovarsi sulla curva } y = y_1(x),$$

$$(b, y_0(b)) \text{ deve trovarsi sulla curva } y = y_2(x);$$

(*) Nella seduta del 13 maggio 1961.

(1) Ved. M. PICONE, *Criteri sufficienti per il minimo assoluto di un integrale unidimensionale del primo ordine nel vettore minimante*, «Atti della Acc. Naz. dei Lincei, Memorie», 1961, vol. VI - Sez. 1^a.

5° una classe $E(T \times G)$ di funzioni $y(x)$, ciascuna definita in un intervallo $[x_1, x_2] \subseteq [A, B]$, soddisfacenti le condizioni seguenti:

1° $y(x)$ è di classe uno,

2° i punti $(x_1, y(x_1)), (x_2, y(x_2))$ devono trovarsi sulle curve $y = y_1(x), y = y_2(x)$,

3° $(x, y(x), y'(x)) \in T \times G$ per $x_1 \leq x \leq x_2$ (2).

Evidentemente il funzionale

$$(1) \quad I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x)) dx$$

è definito per tutte le funzioni $y(x) \in E(T \times G)$.

Diciamo che la funzione $y_0(x)$ minimizza il funzionale $I[y]$ in $E(T \times G)$, se per tutte le funzioni $y(x) \in E(T \times G)$ vale la disuguaglianza $I[y(x)] \geq I[y_0(x)]$.

Per arrivare ad una condizione sufficiente relativamente al nostro problema, prendiamo, in primo luogo, una funzione $B(x, y)$, definita in T , ivi continua, con la derivata parziale:

$$(2) \quad B_x(x, y)$$

e supponiamo, che valgano le seguenti identità:

$$(3) \quad f(x, y_0(x), y'_0(x)) - B(x, y_0(x)) y'_0(x) + \int_{y_0(x)}^{y_1(x)} B_x(x, t) dt \\ + B(x, y_1(x)) y'_1(x) = 0 \quad \text{per } a \leq x \leq A_1,$$

$$(4) \quad f(x, y_0(x), y'_0(x)) - B(x, y_0(x)) y'_0(x) + \int_{y_0(x)}^{y_2(x)} B_x(x, t) dt \\ + B(x, y_2(x)) y'_2(x) = 0 \quad \text{per } B_1 \leq x \leq b.$$

Preso

$$(5) \quad \bar{y}(x) = \begin{cases} y_0(x), & \text{per } a \leq x \leq b \\ y_1(x), & \text{per } A \leq x \leq a \\ y_2(x), & \text{per } b \leq x \leq B, \end{cases}$$

definiamo, in Γ , la funzione $A(x, y)$ nel modo seguente:

$$(6) \quad A(x, y) = \alpha(x) + \int_{\bar{y}(x)}^y B_x(x, t) dt,$$

(2) Naturalmente: $y_0(x) \in E(T \times G)$.

con

$$(7) \quad \alpha(x) = \begin{cases} f(x, y_0(x), y'_0(x)) - B(x, y_0(x)) y'_0(x), & \text{per } a \leq x \leq b \\ -B(x, y_1(x)) y'_1(x) & , \text{ per } A \leq x \leq a \\ -B(x, y_2(x)) y'_2(x) & , \text{ per } b \leq x \leq B. \end{cases}$$

Tenuto conto delle (3), (4), si vede subito, che la funzione $\alpha(x)$ è continua in tutto l'intervallo $[A, B]$.

Si può dimostrare facilmente, in virtù della (6), che esiste in T una funzione reale $g(x, y)$, di classe uno, per la quale risulta:

$$g_x = A \quad , \quad g_y = B \quad \text{in } T.$$

Si ottiene, che per ogni funzione dell'insieme $E(T \times G)$, l'integrale

$$(8) \quad \int_{x_1}^{x_2} \{A(x, y(x)) + B(x, y(x)) y'(x)\} dx$$

ha lo stesso valore che ha per la funzione $y_0(x)$, quindi, tenuto conto della (7), ha il valore $I[y_0(x)]$. Questo segue dal fatto che l'integrale

$$(9) \quad \int \{A + B y'\} dx = \int dg$$

calcolato su un qualsiasi arco delle curve $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, in virtù delle (3), (4), (7), ha sempre il valore zero.

Prendiamo ora la differenza:

$$(10) \quad I[y(x)] - I[y_0(x)] = \\ \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x)) dx - \int_a^b f(x, y_0(x), y'_0(x)) dx = \\ \int_{x_1}^{x_2} \{f(x, y(x), y'(x)) - [A(x, y(x)) + B(x, y(x)) y'(x)]\} dx = \\ \int_{x_1}^{x_2} \left\{ f(x, y(x), y'(x)) - \alpha(x) - \int_{y(x)}^{y(x)} B_x(x, t) dt - B(x, y(x)) y'(x) \right\} dx.$$

Possiamo quindi enunciare il seguente

TEOREMA: *La funzione $y_0(x)$ minimizza $I[y]$ in $E(T \times G)$, se si può definire, in T , una funzione $B(x, y)$, continua con la derivata parziale B_x , che verifica le identità (3), (4), in modo che si abbia, per ogni punto (x, y, p) di $T \times G$,*

$$(11) \quad \Omega(x, y, p) = f(x, y, p) - \alpha(x) - B(x, y) p - \int_{y(x)}^y B_x(x, t) dt \geq 0,$$

dove la funzione $\alpha(x)$ è data dalla formula (7).

Infine facciamo le seguenti osservazioni:

Dalle (3) e (11) si ottengono nel punto a queste relazioni:

$$(12) \quad f(a, y_0(a), y'_0(a)) - B(a, y_0(a)) (y'_1(a) - y'_0(a)) = 0;$$

$$(13) \quad f(a, y_0(a), p) - f(a, y_0(a), y'_0(a)) + B(a, y_0(a)) y'_0(a) - B(a, y_0(a)) p \geq 0.$$

Supponiamo adesso che anche un certo intorno del valore $p = y'_0(a)$ appartenga all'insieme G , e la funzione $f(a, y_0(a), p)$ abbia una derivata rispetto a p , nel punto $p = y'_0(a)$. Sotto queste ipotesi dalla (13) segue subito:

$$(14) \quad f_p(a, y_0(a), y'_0(a)) = B(a, y_0(a)),$$

e sostituendo questa nella (12), si ottiene la seguente uguaglianza:

$$(15) \quad f(a, y_0(a), y'_0(a)) - (y'_1(a) - y'_0(a)) f_p(a, y_0(a), y'_0(a)) = 0,$$

che è la ben nota *condizione di trasversalità* ⁽³⁾.

Tutte le considerazioni che abbiamo fatto, si possono estendere anche al caso in cui invece di curve di forma speciale $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ si prendono curve prescritte, in forma parametrica. Si ottiene un risultato particolarmente semplice, nel caso in cui queste sono due tratti di ordinata. Si può estendere la trattazione, con facilità, anche al caso di funzioni vettoriali e si possono fare ricerche analoghe a quelle che si trovano nella Memoria citata di M. Picone.

(3) Si può, naturalmente, procedere proprio così anche nel punto b .

Analisi matematica. — *Maggiorazione del gradiente delle soluzioni delle equazioni $\Delta u = f$ e $\Delta u - au' = g$.* Nota di GIORGIO ADLER, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

Nei lavori precedenti [1] e [2] abbiamo stabilito delle maggiorazioni per il gradiente delle soluzioni dell'equazione omogenea di Laplace $\Delta u = 0$ e dell'equazione omogenea del calore $\Delta u - au' = 0$. In questa Nota ci occuperemo della maggiorazione delle soluzioni delle relative equazioni inomogenee.

In virtù della linearità delle equazioni e delle condizioni al contorno ed iniziali considerate nel presente lavoro — essendo il problema relativo alle equazioni omogenee con condizioni inomogenee già risoluto —, basta limitarci al caso delle condizioni al contorno ed iniziali omogenee.

I Teoremi 5 e 6 contengono delle maggiorazioni asintotiche per il massimo di $|\text{grad } u|$ per $t \rightarrow \infty$. Specializzando le funzioni $G_0(t)$, $G_x(t)$, $H(t)$ e $K(t)$ che figurano in essi, si possono facilmente ottenere delle semplici maggiorazioni che contengono in forma esplicita i dati geometrici del dominio.

2. — DEFINIZIONI.

Siano Ω un campo (insieme aperto e connesso) dello spazio (x_1, \dots, x_n) ($n = 1, 2, \dots$), Σ la sua frontiera, e poniamo $r^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$.

Chiameremo Ω ρ -convesso, se esiste un numero $\rho > 0$ tale che per ogni punto $P \in \Sigma$ esiste una ipersfera di raggio ρ , che contiene P sulla sua frontiera, e la cui parte interna non contiene nessun punto comune con Ω . Indichi d il diametro di Ω . (Per ipotesi sia $d < \infty$).

Ci occuperemo delle equazioni

$$(1) \quad \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = f(x_1, \dots, x_n),$$

$$(2) \quad \Delta u - au' \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} - a \frac{\partial u}{\partial t} = g(x_1, \dots, x_n; t)$$

($a > 0$ costante),

dove f è una funzione derivabile in Ω , mentre g è una funzione continua rispetto alla variabile t e derivabile rispetto alle coordinate x_1, \dots, x_n in $\Omega \times (0 \leq t \leq T)$.

(*) Nella seduta del 13 maggio 1961.

Introduciamo le notazioni seguenti:

$$\begin{aligned} \sup_{P \in \Omega} |f(P)| &= M_0, & \sup_{P \in \Omega} |\operatorname{grad} f(P)| &= M_1, \\ \sup_{P \in \Omega} |g(P, t)| &\leq G_0(t), & \sup_{P \in \Omega} |\operatorname{grad}_P g(P, t)| &\leq G_1(t), \\ \sup_{0 \leq t \leq T} G_0(t) &= N_0, & \sup_{0 \leq t \leq T} G_1(t) &= N_1, \end{aligned}$$

dove le funzioni $G_0(t)$ e $G_1(t)$ sono supposte integrabili.

Infine indichino $^{(1)} H(t)$ risp. $K(t)$ delle funzioni maggioranti non crescenti, ammettenti derivate continue, delle funzioni

$$\left| \int_0^t \frac{\partial^2 W_d(0, t-\tau)}{\partial x \partial t} G_0(\tau) d\tau \right|, \quad \left| \int_0^t \frac{\partial^2 W_{e,d}(\rho, t-\tau)}{\partial r \partial t} G_0(\tau) d\tau \right|,$$

rispettivamente, e poniamo

$$A_d(t) = Z_d(0, t), \quad B_d(t) = -\frac{\partial Y_d(0, t)}{\partial t}.$$

3. - FUNZIONI AUSILIARI.

Definiremo le funzioni ausiliari qui sotto mediante le equazioni e le condizioni da esse soddisfatte.

$$(I) \quad \frac{\partial^2 W_d}{\partial x^2} - a \frac{\partial W_d}{\partial t} = 1 \quad (0 < x < d, t > 0),$$

$$W_d(x, 0) = 0 \quad (0 \leq x \leq d),$$

$$W_d(0, t) = W_d(d, t) = 0 \quad (t \geq 0).$$

$$(II) \quad \Delta W_{e,d} - a \frac{\partial W_{e,d}}{\partial t} = 1 \quad (\rho < r < \rho + d, t > 0),$$

$$W_{e,d}(r, 0) = 0 \quad (\rho \leq r \leq \rho + d),$$

$$W_{e,d}(\rho, t) = W_{e,d}(\rho + d, t) = 0 \quad (t \geq 0).$$

$$(III) \quad \Delta Z_d - a \frac{\partial Z_d}{\partial t} = 0 \quad (0 \leq r < d/2, t > 0),$$

$$Z_d(r, 0) = 0 \quad (0 \leq r < d/2),$$

$$Z_d(d/2, t) = 1 \quad (t > 0).$$

$$(IV) \quad \Delta Y_d - a \frac{\partial Y_d}{\partial t} = 1 \quad (0 \leq r < d/2, t > 0),$$

$$Y_d(r, 0) = 0 \quad (0 \leq r \leq d/2),$$

$$Y_d(d/2, t) = 0 \quad (t \geq 0).$$

(1) Le funzioni ausiliari $W_d, W_{e,d}, Z_d$ e Y_d si trovano nel punto 3.

4. - TEOREMI.

TEOREMA 1. - *Supponiamo che*1° *il campo Ω sia convesso;*2° *la funzione $u(P)$* (i) *soddisfi l'equazione (1) in Ω ,*(ii) *ammetta prime derivate continue in $\Omega + \Sigma$,*(iii) *$u(P) = 0$ per $P \in \Sigma$.*

Allora

$$|\text{grad } u(P)| \leq M_0 \frac{d}{2} + M_1 \frac{d^2}{8} \quad \text{per } P \in \Omega + \Sigma.$$

TEOREMA 2. - *Supponiamo che*1° *il campo Ω sia convesso;*2° *la funzione $u(P, t)$* (i) *soddisfi l'equazione (2) in $\Omega \times (0 < t \leq T)$,*(ii) *ammetta prime derivate continue in $(\Omega + \Sigma) \times (0 \leq t \leq T)$,*(iii) *$u(P, 0) = 0$ per $P \in \Omega + \Sigma$,* *$u(P, t) = 0$ per $(P, t) \in \Sigma \times (0 \leq t \leq T)$.*

Allora

$$|\text{grad}_P u(P, t)| \leq N_0 \frac{d}{2} + N_1 \frac{d^2}{8} \quad \text{per } (P, t) \in (\Omega + \Sigma) \times (0 \leq t \leq T).$$

TEOREMA 3⁽²⁾. - *Supponiamo che*1° *il campo Ω sia ρ -convesso;*2° *la condizione 2° del Teorema 1 sia soddisfatta.*

Allora

$$|\text{grad } u(P)| \leq M_0 C(\rho, d) + M_1 \frac{d^2}{8} \quad \text{per } P \in \Omega + \Sigma,$$

dove

$$C(\rho, d) = \begin{cases} \frac{\rho}{2} \left(-1 + \frac{(1+d/\rho)^2 - 1}{2 \ln(1+d/\rho)} \right) & (n=2) \\ \frac{\rho}{n} \left(-1 + \frac{n-2}{2} \frac{(1+d/\rho)^2 - 1}{1 - (1+d/\rho)^{2-n}} \right) & (n \geq 3). \end{cases}$$

TEOREMA 4⁽³⁾. - *Supponiamo che*1° *il campo Ω sia ρ -convesso;*2° *la condizione 2° del Teorema 2 sia soddisfatta.*

Allora

$$|\text{grad}_P u(P, t)| \leq N_0 C(\rho, d) + N_1 \frac{d^2}{8} \quad \text{per } (P, t) \in (\Omega + \Sigma) \times (0 \leq t \leq T),$$

dove $C(\rho, d)$ è la costante che compare nel Teorema 3.(2) Per $\rho \rightarrow \infty$ il Teorema 3 fornisce come caso limite il Teorema 1.(3) Per $\rho \rightarrow \infty$ il Teorema 4 fornisce come caso limite il Teorema 2.

TEOREMA 5. - *Supponiamo che le condizioni del Teorema 2 siano soddisfatte. Allora*

$$|\operatorname{grad}_P u(P, T)| \leq \int_0^T A_d(T-\tau) H'(\tau) d\tau + H(0) + \int_0^T B_d(T-\tau) G_1(\tau) d\tau$$

per $P \in \Omega + \Sigma$.

TEOREMA 6. - *Supponiamo che le condizioni del Teorema 4 siano soddisfatte. Allora*

$$|\operatorname{grad}_P u(P, t)| \leq \int_0^t A_d(T-\tau) K'(\tau) d\tau + K(0) + \int_0^t B_d(T-\tau) G_1(\tau) d\tau$$

per $P \in \Omega + \Sigma$.

Dai Teoremi 5 e 6 risulta il corollario seguente:

COROLLARIO. - *Supponiamo che, scegliendo $T = \infty$, le condizioni del Teorema 2 oppure del Teorema 4 siano soddisfatte, e che*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G_0(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} G_1(t) = 0.$$

Allora

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \max_{P \in \Omega + \Sigma} |\operatorname{grad}_P u(P, t)| = 0.$$

BIBLIOGRAFIA.

- [1] G. ADLER, *Maggiorazione del gradiente delle funzioni armoniche mediante i loro valori al contorno*, «Memorie dell'Accad. Naz. dei Lincei» (presentata nella seduta dell'11 marzo 1961).
- [2] G. ADLER, *Maggiorazione del gradiente delle funzioni del calore*. «Rend. dell'Accad. Naz. dei Lincei» vol. XXX, fasc. 3 (marzo 1961), pp. 357-361.

Analisi matematica. — *Solutions presque-périodiques dans le problème de Cauchy, pour l'équation non-homogène des ondes.* Nota I di S. ZAJDMAN, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

§ 1. Dans un travail paru dans trois Notes des « Rend. Acc. Naz. dei Lincei » [1], Amerio démontra la presque-périodicité des solutions à énergie bornée, $u(X, t)$, $X = (x_1 \dots x_n) \in \Omega$ — borné de \mathbb{R}^n , $t \in J = [-\infty, +\infty]$, de l'équation

$$(1) \quad u_{tt}(X, t) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(X) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - a(X) u(X, t) + f(X, t),$$

telles que $u(X, t)|_S = 0$, $S = \text{Fr} \cdot \Omega$, $f(X, t)$ — étant presque-périodique (p.p.) de $t \in J$ à $L^2(\Omega)$.

On généralisait ainsi un résultat antérieur de l'auteur [5]. La méthode utilisée dans [1] faisait un appel essentiel à la structure hilbertienne des espaces fonctionnels qui interviennent, et au caractère presque périodique de toutes les solutions de l'équation homogène (th. de Bochner von Neumann Sobolev).

Dans les travaux ultérieurs [2] et [3, 4], Amerio élaborait une méthode nouvelle qui lui donna la possibilité de retrouver et puis de généraliser ce résultat au cas des équations abstraites

$$(2) \quad \frac{du(t)}{dt} = A(t)u(t) + f(t),$$

A(t) étant une famille d'opérations non bornées presque périodique dans un certain sens, et $f(t)$ une fonction vectorielle presque-périodique.

Maintenant les espaces fonctionnels peuvent être des espaces de Banach uniformément convexes, et on a renoncé au caractère presque-périodique des solutions de l'équation homogène. Bien entendu, dans ce cas très général (2), on n'obtient plus que toute solution bornée est presque périodique, ce qui n'est pas vrai en général, comme on voit sur des exemples simples. Le résultat qu'on obtient maintenant est que

si (2) a une solution bornée, elle a aussi une solution presque périodique.

Dans le cas de (1), ce résultat donne immédiatement la p.p. de toute solution bornée, comme on le voit immédiatement, en utilisant la p.p. des solutions de l'équation homogène.

Dans ce travail, nous donnons une application de cette méthode nouvelle de Amerio au problème de Cauchy pour l'équation des ondes non homogène dans tout l'espace, avec partie droite presque périodique. C'est exactement un cas où l'équation homogène a des solutions bornées qui ne sont pas presque-périodiques, donc une application effectivement nouvelle des méthodes de Amerio.

(*) Nella seduta del 13 maggio 1961.

§ 2. Considérons l'équation des ondes homogène

$$(3) \quad u_{tt}(X, t) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(X) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - u(X, t) = Lu(X, t)$$

$$X = (x_1, \dots, x_n) \quad , \quad t \in J \quad , \quad a_{ij} > 0 \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(X) \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2, \alpha > 0 \right),$$

$$a_{ij}(X) \in C^1(\mathbb{R}^n).$$

Soit $C_c^2(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions $\varphi(X)$ deux fois continûment différentiables et à support compact dans \mathbb{R}^n .

Il est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. L'opération $-L$ est définie sur cet ensemble et y est sémi-bornée inférieurement.

En effet, on a:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (-L\varphi) \cdot \bar{\varphi} \, dX = \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(X) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_j} + |\varphi(X)|^2 \right\} dX$$

$$\geq \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \alpha \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right|^2 + |\varphi(X)|^2 \right\} dX \geq \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(X)|^2 dX.$$

Alors, d'après le théorème bien connu de Friedrichs, l'opération $-L$ admet un prolongement auto-adjoint A , tel que pour $\varphi \in D_A$ (domaine de A), on a $(A\varphi, \varphi) \geq (\varphi, \varphi)$, $(,)$ étant le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^n) = H$. Si l'on désigne encore par $((\varphi, \psi))$ le produit scalaire

$$((\varphi, \psi)) = \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(X) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_j} + \varphi(X) \bar{\psi}(X) \right\} dX = (A\varphi, \psi)$$

(pour $\varphi, \psi \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$), et si H_A est l'espace de Hilbert obtenu de $C_c^2(\mathbb{R}^n)$ par complétion dans la métrique $((\varphi, \varphi))$, on peut démontrer que $D_A \subset H_A$ et que pour $\varphi \in D_A$ et $\psi \in H_A$ on a $(A\varphi, \psi) = ((\varphi, \psi))$.

Considérons maintenant l'opération

$$\mathfrak{A} = \left(\begin{pmatrix} 0 & I \\ -A & 0 \end{pmatrix} \right)$$

définie, dans l'espace produit $\mathcal{H} = H_A \times H_A$, sur l'ensemble $D_{\mathfrak{A}} = D_A \times H_A$. On voit, exactement comme dans notre travail [5], que \mathfrak{A} est le générateur infinitésimal dans le sens de Hille-Yosida-Stone, d'un groupe à un paramètre $G(t)$ de transformations linéaires et bornées de \mathcal{H} en \mathcal{H} tel que

$$G(t)x \rightarrow x \quad \text{avec } t \rightarrow 0 \quad , \quad x \in \mathcal{H}$$

et

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\eta} [G(\eta)x - x] = \mathfrak{A}x, \quad \text{pour } x \in D_{\mathfrak{A}}.$$

Vu que $i\mathfrak{A}$ est auto-adjoint dans \mathfrak{H} , il résulte aussi que $G(t)$ est un groupe de transformations unitaires de \mathfrak{H} en soi-même; $\langle G(t)x, G(t)x \rangle = \langle x, x \rangle$, $\langle x, x \rangle$ étant le produit scalaire dans l'espace produit \mathfrak{H} , donc, si

$$x = \{x_1, x_2\}, x_1 \in H_A, x_2 \in H,$$

alors

$$\langle x, x \rangle = (\langle x_1, x_1 \rangle) + \langle x_2, x_2 \rangle.$$

On a obtenu ainsi l'intégration de l'équation (3), pour les données de Cauchy dans $D_A \times H_A$. Précisément, si $\{\varphi(X), \psi(X)\} \in D_A \times H_A$, la fonction vectorielle

$$u(t) = G(t)u_0, \quad u_0 = \{\varphi, \varphi\},$$

représente une solution forte de (3), telle que $u(t) \rightarrow u_0$ dans \mathfrak{H} si $t \rightarrow 0$. On voit puis facilement que cette solution forte est l'unique ayant cette propriété.

Le caractère unitaire du groupe $G(t)$ exprime la conservation de l'énergie, mais ce groupe n'est pas en général fortement p.p.; c'est à dire, on n'a pas la presque-périodicité de $G(t)x$ pour chaque $x \in \mathfrak{H}$.

§ 3. Considérons maintenant l'équation non-homogène des ondes

$$(4) \quad u_{tt}(X, t) = Lu(X, t) + f(X, t)$$

$f(X, t)$ étant continue de $t \in J$ à $L^2(\Omega) = H$.

Comme on sait, d'après un résultat de Phillips, si en plus $f(X, t)$ est fortement dérivable de J à H , les solutions de (4) avec conditions initiales données dans $D_{\mathfrak{A}}$, sont obtenues par la formule «des variations des constantes»

$$(5) \quad u(t) = G(t)u(0) + \int_0^t G(t-s)f(s)ds$$

$f(s) = \{0, f(X, s)\}$, fortement dérivable de \mathfrak{J} à \mathfrak{H} , $u(0) \in D_{\mathfrak{A}}$. Pour abrégé nous dirons, dans le cas où $u(0) \in \mathfrak{H}$ (mais non nécessairement dans $D_{\mathfrak{A}}$), et $f(s)$ est continue de J à \mathfrak{H} (mais non nécessairement dérivable), que (5) représente une «solution faible» de (4).

(Elle est limite dans \mathfrak{H} fort, uniformément sur chaque compact de J , d'une suite de solutions fortes de (4); on peut aussi donner une définition intrinsèque de solution faible, et voir que (5) est une telle solution faible).

Nous démontrons premièrement, en suivant de très proche le Mémoire de Amerio [3], mais avec des différences de détail, le

THÉORÈME I (de Minimax) Si (4) a une «solution faible» bornée sur $t \in J$, alors il existe une «solution faible» $u^*(t)$ de (4), bornée, et minimale, c'est à dire que

$$\sup_{t \in J} \|u(t)\|_{\mathfrak{H}} \geq \sup_{t \in J} \|u^*(t)\|$$

pour toute autre «solution faible» bornée $u(t)$ de (4).

Cette solution minimale est unique:

Démonstration de l'existence. - Soit M l'ensemble des nombres $k > 0$, tels qu'il existe une « solution faible » de (4), $u_k(t)$, avec

$$\sup_{t \in J} \|u_k(t)\|_{\mathcal{H}} = k.$$

Soit $k^* = \inf. M$, et $(k_n)_i^\infty$, une suite de M , convergente vers k^* avec $n \rightarrow \infty$. Considérons les « solutions faibles » correspondantes $u_n(t)$, telles que

$$\sup_{t \in J} \|u_n(t)\|_{\mathcal{H}} = k_n.$$

La suite $u_n(t)$ est uniformément convergente sur $t \in J$, dans \mathcal{H} fort. En effet, on a

$$u_n(t) = G(t) u_n(0) + \int_0^t G(t-s) f(s) ds$$

et

$$\|u_n(t) - u_m(t)\| = \|u_n(0) - u_m(0)\|.$$

Il suffit donc de montrer que la suite $(u_n(0))_i^\infty$, est convergente dans \mathcal{H} fort. Si non, il existe un $\rho > 0$, et deux suites (n'_i) , (n''_i) , telles que

$$\|u_{n'_i}(0) - u_{n''_i}(0)\| \geq \rho, \quad i = 1, 2, \dots$$

Puis on a que

$$\|u_{n'_i}(t) - u_{n''_i}(t)\|^2 = \|u_{n'_i}(0) - u_{n''_i}(0)\|^2 \geq \rho^2.$$

D'après la règle du parallélogramme dans un espace de Hilbert, on a que:

$$\left\| \frac{u_{n'_i}(t) + u_{n''_i}(t)}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{u_{n'_i}(t) - u_{n''_i}(t)}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} (\|u_{n'_i}(t)\|^2 + \|u_{n''_i}(t)\|^2).$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{\rho^2}{4} + \left\| \frac{u_{n'_i}(t) + u_{n''_i}(t)}{2} \right\|^2 &\leq \frac{1}{2} (k_{n'_i}^2 + k_{n''_i}^2) \\ \left\| \frac{u_{n'_i}(t) + u_{n''_i}(t)}{2} \right\|^2 &\leq \frac{1}{2} (k_{n'_i}^2 + k_{n''_i}^2) - \frac{\rho^2}{4} < \frac{1}{2} (k^{*2} + k^{*2}) - \frac{\rho^2}{4} + \varepsilon \end{aligned}$$

pour i assez grand. En prenant ε assez petit et i assez grand, on a que

$$\left\| \frac{u_{n'_i}(t) + u_{n''_i}(t)}{2} \right\|^2 \leq k^{*2} - \delta, \Rightarrow \left\| \frac{u_{n'_i}(t) + u_{n''_i}(t)}{2} \right\| < k^* - \delta'.$$

Mais $\frac{1}{2}[u_{n'_i}(t) + u_{n''_i}(t)]$ est une solution faible de (4) plus petite que la solution minimale, ce qui est absurde.

L'unicité de cette solution minimale résulte comme dans [4].

LITTERATURE CITEE.

- [1] L. AMERIO, *Quasi-periodicità degli integrali ad energia limitata dell'equazione delle onde con termine noto quasi-periodico*, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », ser. VII, vol. XXVIII, 1960 (I, II, III).
- [2] L. AMERIO, *Sull'equazione delle onde con termine noto quasi-periodico*, « Rendiconti di Matematica » (3-4), vol. 19 (1960).
- [3] L. AMERIO, *Sulle equazioni differenziali quasi-periodiche astratte*, « Ricerche di Matematica », vol. IX (1960).
- [4] L. AMERIO, *Ancora sulle equazioni differenziali quasi-periodiche astratte*, « Ricerche di Matematica », vol. X (1961).
- [5] S. ZAIDMAN, *Sur la presque-périodicité des solutions de l'équation des ondes non-homogène*, « Journ. of Math. and Mech. », 8 [n° 3], (1959).

Analisi matematica. — *Costruzione di successioni approssimanti gli autovalori di una trasformazione lineare e compatta.* Nota di LUCILLA BASSOTTI, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

Al prof. Mauro Picone è dovuto un metodo per il calcolo di autovalori di trasformazioni lineari, non necessariamente hermitiane. Tale metodo, applicato a particolari trasformazioni da M. Nasta⁽¹⁾, W. Gröbner⁽²⁾, T. Viola⁽³⁾, A. Ghizzetti⁽⁴⁾, ha dato risultati numerici soddisfacenti.

Il prof. Gaetano Fichera, in una Memoria pubblicata nel 1955⁽⁵⁾, ha preso in esame il metodo del prof. Picone ed, impostando la questione dal punto di vista dell'Analisi Funzionale, ha mostrato sotto quali condizioni il metodo stesso è valido, pervenendo ad una soluzione del problema concernente l'approssimazione degli autovalori e delle autosoluzioni di una trasformazione lineare, definita in una varietà lineare di uno spazio di Hilbert completo e separabile, dotata di inversa compatta⁽⁶⁾.

Nella presente Nota ed in una successiva ci proponiamo di studiare il procedimento del prof. Picone quando applicato ad una trasformazione che sia essa stessa compatta. In effetti il caso studiato dal prof. Fichera trova le sue più cospicue esemplificazioni nei problemi al contorno per le equazioni differenziali lineari, laddove il caso che verrà da noi studiato corrisponde sostanzialmente a quello delle equazioni integrali. Occorre dire che i due casi (trasformazioni con inversa compatta e trasformazioni compatte) presentano situazioni concettuali diverse. Ciò rende impossibile l'immediata applicazione dei procedimenti del prof. Fichera al caso da noi studiato, pur traendo partito l'impostazione della nostra trattazione da quella di questo Autore.

Nella presente Nota si costruisce, in accordo al procedimento del prof. Picone, una successione di funzioni reali $\mu_n(\lambda)$ definite nel piano della variabile

(*) Nella seduta del 13 maggio 1961.

(1) M. NASTA, *Contributo al calcolo delle velocità critiche degli alberi motore*, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (6), XII (1930).

(2) W. GRÖBNER, *Ueber praktische Methoden zur Auflösung von Differentialgleichungen*, « Jahresber. d. Deut. Mathem. Vereinigung », 48, II Abteilung (1938).

(3) T. VIOLA, *Calcolo approssimato di autovalori*, « Rend. di Mat. e delle sue Applic. » (5), vol. II (1941).

(4) A. GHIZZETTI, *Su un metodo di Picone per il calcolo degli autovalori e delle autofunzioni e su un'applicazione all'equazione di Schrödinger*, Atti del Congresso di Meccanica teorica e applicata, Istanbul 1952.

(5) G. FICHERA, *Su un metodo del Picone per il calcolo degli autovalori e delle autosoluzioni*, « Ann. Matem. » (4), XL (1955).

(6) Una trasformazione lineare fra spazi di Banach si dice *compatta* se muta insiemi limitati in insiemi compatti. Si verifica facilmente che ogni trasformazione lineare compatta è continua.

complessa λ e si dimostra che essa, in opportuni insiemi del piano contenenti gli autovalori della trasformazione data T , converge uniformemente verso una funzione $\mu(\lambda)$ i cui zeri rappresentano tutti e soli gli autovalori della trasformazione T . Si mostra che ogni autovalore λ della T è limite di una successione di numeri $\lambda^{(n)}$ ciascuno dei quali rappresenta un punto di minimo relativo per la funzione $\mu_n(\lambda)$; inoltre in corrispondenza ad ogni $\lambda^{(n)}$ si costruisce un vettore $u_{\lambda^{(n)}}^{(n)}$ in modo che ogni elemento di compattezza della successione $\{u_{\lambda^{(n)}}^{(n)}\}$ rappresenti un'autosoluzione relativa all'autovalore λ .

Sia S uno spazio di Hilbert complesso, completo e separabile ⁽⁷⁾. Consideriamo una trasformazione lineare e compatta $T(u)$ definita in S e avente codominio contenuto in S . Fissato in S un sistema completo $\{u_k\}$ di vettori linearmente indipendenti ⁽⁸⁾, sia \mathcal{A}_n la varietà involuppo lineare dei primi n vettori u_1, \dots, u_n , cioè la totalità dei vettori combinazione lineare di u_1, \dots, u_n .

Consideriamo, per ogni numero complesso λ , il funzionale

$$(I) \quad F(u, \lambda) = \frac{\|\lambda T u - u\|^2}{\|u\|^2}.$$

Sussiste il seguente teorema:

I. — Per ogni fissato λ , il funzionale $F(u, \lambda)$ è dotato di minimo in $\mathcal{A}_n - \omega$ ⁽⁹⁾. Indicato tale minimo con $\mu_n(\lambda)$, si ha:

$$\mu_n(\lambda) \geq \mu_{n+1}(\lambda) \geq 0.$$

La funzione $\mu_n(\lambda)$ è funzione continua di λ in tutto il piano complesso

La funzione reale:

$$f(c_1, \dots, c_n; \lambda) = \frac{\left\| \lambda T \left(\sum_{k=1}^n c_k u_k \right) - \sum_{k=1}^n c_k u_k \right\|^2}{\left\| \sum_{k=1}^n c_k u_k \right\|^2}$$

è il quoziente di due forme quadratiche hermitiane nelle variabili c_1, \dots, c_n a coefficienti funzioni continue di λ in tutto il piano, riuscendo la forma quadratica a denominatore definita positiva. Ne segue che, per un fissato λ , esiste il minimo $\mu_n(\lambda)$ della funzione $f(c_1, \dots, c_n; \lambda)$ nell'insieme $\sum_{k=1}^n |c_k|^2 = 1$ e tale minimo è funzione continua di λ .

Indichiamo con T^* la trasformazione aggiunta di T e poniamo:

$$(2) \quad \mathcal{G}(u, \lambda) = \lambda T u + \bar{\lambda} T^* u - |\lambda|^2 T^* T u.$$

(7) I concetti ed i simboli usati in questo lavoro sono conformi a quelli del testo: G. FICHERA, *Lezioni sulle trasformazioni lineari*, vol. I, *Introduzione all'Analisi lineare*. Ist. Mat. Univ., Trieste 1954. Tale volume sarà citato in seguito con la sigla *T. L.*

(8) Con ciò intendiamo che, per ogni n , i vettori u_1, \dots, u_n siano linearmente indipendenti.

(9) ω denota l'origine dello spazio.

$\mathfrak{S}(u, \lambda)$ è, per ogni λ , una trasformazione lineare hermitiana e compatta. Essa permette la seguente rappresentazione del funzionale:

$$(3) \quad F(u, \lambda) = 1 - \frac{(\mathfrak{S}(u, \lambda), u)}{\|u\|^2}.$$

Si ha il seguente teorema, di immediata dimostrazione⁽¹⁰⁾:

II. - Ogni vettore $u_\lambda^{(n)}$ minimante il funzionale $F(u, \lambda)$ in $\mathfrak{M}_n - \omega$, è un vettore massimante il funzionale

$$\frac{(\mathfrak{S}(u, \lambda), u)}{\|u\|^2}$$

in $\mathfrak{M}_n - \omega$ e pertanto esso verifica l'equazione:

$$(4) \quad P_n \mathfrak{S}(u_\lambda^{(n)}, \lambda) = [1 - \mu_n(\lambda)] u_\lambda^{(n)}.$$

Osserviamo il seguente lemma:

III. - Fissato arbitrariamente un numero $\rho > 0$, la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(u_\lambda^{(n)}, u_k)|^2 |1 - \mu_n(\lambda)|^2$$

converge uniformemente al variare di $u_\lambda^{(n)}$ nell'insieme $\mathfrak{M}^{(a)}$ di tutti i vettori di norma unitaria minimanti $F(u, \lambda)$ in $\mathfrak{M}_n - \omega$ relativi a λ tali che $|\lambda| \leq \rho$.

Supponiamo il sistema $\{u_k\}$ ortonormale. Ciò non è restrittivo in quanto da ogni sistema completo si può ottenere un sistema ortonormale che lasci invariate le varietà \mathfrak{M}_n .

Dalla (4) segue:

$$\lambda (P_n T u_\lambda^{(n)}, u_k) + \bar{\lambda} (P_n T^* u_\lambda^{(n)}, u_k) - |\lambda|^2 (P_n T T^* u_\lambda^{(n)}, u_k) = [1 - \mu_n(\lambda)] (u_\lambda^{(n)}, u_k).$$

Essendo il sistema $\{u_k\}$ ortonormale, riesce:

$$(u_\lambda^{(n)}, u_k) = 0 \quad \text{se } k > n,$$

oppure, se $k \leq n$:

$$[1 - \mu_n(\lambda)] (u_\lambda^{(n)}, u_k) = \lambda (T u_\lambda^{(n)}, u_k) + \bar{\lambda} (T^* u_\lambda^{(n)}, u_k) - |\lambda|^2 (T^* T u_\lambda^{(n)}, u_k).$$

Ne segue, se $|\lambda| \leq \rho$, per ogni k :

$$|1 - \mu_n(\lambda)|^2 |(u_\lambda^{(n)}, u_k)|^2 \leq 3\rho^2 |(T u_\lambda^{(n)}, u_k)|^2 + 3\rho^2 |(T^* u_\lambda^{(n)}, u_k)|^2 + 3\rho^4 |(T^* T u_\lambda^{(n)}, u_k)|^2.$$

(10) Cfr. *T. L.*, p. 219 teor. XXXVII. Dalla relazione

$$(\mathfrak{S}(u_\lambda^{(n)}, \lambda), v) = [1 - \mu_n(\lambda)] (u_\lambda^{(n)}, v)$$

valida per ogni $v \in \mathfrak{M}_n$, segue $P_n \mathfrak{S}(u_\lambda^{(n)}, \lambda) = [1 - \mu_n(\lambda)] u_\lambda^{(n)}$. P_n indica l'operatore proiezione sulla varietà \mathfrak{M}_n .

Essendo compatti gli insiemi $T(\mathfrak{A}^{(0)})$, $T^*(\mathfrak{A}^{(0)})$, $T^*T(\mathfrak{A}^{(0)})$, la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} |1 - \mu_n(\lambda)|^2 |(\mathfrak{u}_\lambda^{(n)}, \mathfrak{u}_k)|^2$$

è uniformemente convergente al variare di $\mathfrak{u}_\lambda^{(n)}$ in $\mathfrak{A}^{(0)(11)}$.

Indichiamo ora con $L_n^{(\phi)}$ l'insieme dei punti del piano complesso λ ove riesce

$$\mu_n(\lambda) \leq \phi,$$

ϕ denotando un arbitrario numero reale positivo minore di uno. L'insieme $L_n^{(\phi)}$ può esser vuoto.

Dal teorema III segue immediatamente il seguente:

IV. — Se l'insieme $L_{n_0}^{(\phi)}$ è non vuoto, l'insieme dei vettori di $\mathfrak{A}^{(0)}$ relativi a λ contenuti in $L_{n_0}^{(\phi)}$ è compatto.

Infatti, se $\lambda \in L_{n_0}^{(\phi)}$, per $n \geq n_0$ riesce $\mu_n(\lambda) \leq \phi$ e quindi

$$|1 - \mu_n(\lambda)|^2 |(\mathfrak{u}_\lambda^{(n)}, \mathfrak{u}_k)|^2 \geq (1 - \phi)^2 |(\mathfrak{u}_\lambda^{(n)}, \mathfrak{u}_k)|^2.$$

Ne segue la convergenza uniforme della serie $\sum_k |(\mathfrak{u}_\lambda^{(n)}, \mathfrak{u}_k)|^2$ nell'insieme dei vettori $\mathfrak{u}_\lambda^{(n)}$ appartenenti ad $\mathfrak{A}^{(0)}$ e relativi a λ contenuti in $L_{n_0}^{(\phi)}$.

Per ogni fissato λ , indichiamo con $\mu(\lambda)$ l'estremo inferiore del funzionale $F(u, \lambda)$ in $S - \omega$. Sussiste il seguente teorema:

V. — Riesce, per ogni λ , $0 \leq \mu(\lambda) \leq 1$. Se $\mu(\lambda) < 1$, allora esiste un vettore \mathfrak{u}_λ minimante il funzionale ed esso verifica l'equazione:

$$(6) \quad \mathfrak{S}(\mathfrak{u}_\lambda, \lambda) = [1 - \mu(\lambda)] \mathfrak{u}_\lambda;$$

se in particolare $\mu(\lambda) = 0$, λ è autovalore e \mathfrak{u}_λ è un'autosoluzione per l'equazione:

$$\lambda T u - u = \omega.$$

Qualsiasi sia λ , si ha: $\lim \mu_n(\lambda) = \mu(\lambda)$.

Per ogni $u \in S - \omega$ riesce:

$$0 \leq \frac{\| \lambda T u - u \|}{\| u \|} \leq |\lambda| \frac{\| T u \|}{\| u \|} + 1$$

ed essendo $\text{estr. inf}_{S-\omega} \frac{\| T u \|}{\| u \|} = 0$, ne segue $0 \leq \mu(\lambda) \leq 1$.

Fissato λ , il funzionale $F(u, \lambda)$ è un funzionale continuo di u : possiamo allora, in corrispondenza ad ogni intero k , determinare un indice $n_k(\lambda)$ tale che per $n > n_k(\lambda)$ riesca:

$$\mu(\lambda) \leq F(w_n^{(k)}, \lambda) \leq \mu(\lambda) + \frac{1}{k}$$

essendo $w_n^{(k)}$ un elemento di \mathfrak{A}_n .

Se $u_\lambda^{(n)}$ è un vettore minimante $F(u, \lambda)$ in $\mathcal{M}_n - \omega$, si ha:

$$\mu(\lambda) \leq F(u_\lambda^{(n)}, \lambda) \leq F(u_n^{(k)}, \lambda) < \mu(\lambda) + \frac{1}{k}$$

e quindi

$$\lim \mu_n(\lambda) = \mu(\lambda).$$

Supponiamo ora che in corrispondenza ad un fissato λ riesca $\mu(\lambda) < 1$. Sia $n_0(\lambda)$ il primo indice a partire dal quale si abbia $\mu_n(\lambda) < 1$. Per il teorema IV, la successione $\{u_\lambda^{(n)}\}$ ($n = 1, 2, \dots$) è compatta e, detto u_λ un elemento di compattezza, riesce: $F(u_\lambda, \lambda) = \mu(\lambda)$. Inoltre il vettore u_λ , essendo un vettore massimante la forma quadratica $\frac{(\mathfrak{S}(u, \lambda), u)}{\|u\|^2}$, verifica l'equazione (6).

Se $\mu(\lambda) = 0$, si ha $\|\lambda T u_\lambda - u_\lambda\| = 0$; ne segue che $\mu(\lambda)$ è nullo quando e soltanto quando λ è autovalore.

Osservazione. - Nel teorema precedente è stata dimostrata l'esistenza di un vettore minimante il funzionale $F(u, \lambda)$ in $S - \omega$, nell'ipotesi $\mu(\lambda) \neq 1$. Mostriamo ora, con un esempio, che il funzionale $F(u, \lambda)$ può non avere minimo in $S - \omega$ quando $\mu(\lambda) = 1$.

Consideriamo una trasformazione lineare, hermitiana e compatta, tale che la forma quadratica (Tu, u) ad essa associata riesca definita positiva in S . Si ha, in tal caso:

$$F(u, \lambda) = |\lambda|^2 \frac{\|Tu\|^2}{\|u\|^2} - 2 \Re \lambda \frac{(Tu, u)}{\|u\|^2} + 1.$$

Se si sceglie un numero complesso λ avente la parte reale negativa, riesce, per ogni $u \in S - \omega$:

$$F(u, \lambda) > 1.$$

Ne segue allora che il funzionale $F(u, \lambda)$ non ha minimo in $S - \omega$.

Fissato arbitrariamente $\rho < 0$, indichiamo con \mathcal{C}_ρ la totalità dei numeri λ tali che $|\lambda| < \rho$. Sussiste il seguente teorema:

VI. - La successione $\mu_n(\lambda)$ converge uniformemente a $\mu(\lambda)$ in ogni insieme $L_n^{(\rho)} \cap \mathcal{C}_\rho$ non vuoto. La funzione $\mu(\lambda)$ è continua nell'insieme dei punti del piano complesso ove $\mu(\lambda) < 1$.

Ricordiamo che la serie $\sum_k |(u_\lambda^{(n)}, u_k)|^2$ è uniformemente convergente nell'insieme dei vettori appartenenti ad $\mathcal{M}^{(a)}$ e relativi a $\lambda \in L_{n_0}^{(\rho)}$ (cfr. teorema IV). Fissato allora un $\varepsilon > 0$, è possibile determinare un indice m_ε tale che per $m > m_\varepsilon$ riesca:

$$\|u_\lambda^{(n)} - P_m u_\lambda^{(n)}\|^2 = \sum_{k=m+1}^{\infty} |(u_\lambda^{(n)}, u_k)|^2 < \varepsilon \quad \text{per ogni } \lambda \in L_{n_0}^{(\rho)} \cap \mathcal{C}_\rho.$$

Se u_λ è un qualsiasi elemento di compattezza dell'insieme dei vettori unitarii $\{u_\lambda^{(n)}\}$ relativi a $\lambda \in L_{n_0}^{(\rho)} \cap \mathcal{C}_\rho$, riesce ovviamente:

$$\|u_\lambda - P_m u_\lambda\|^2 \leq \varepsilon, \quad \|P_m u_\lambda\|^2 \geq 1 - \varepsilon, \quad \text{per } m > m_\varepsilon.$$

D'altra parte esistono due indici m'_ε e m''_ε tali che:

$$\|T - P_m T P_m\| < \varepsilon \quad \text{per } m > m'_\varepsilon, \quad \|T^* T - P_m T^* T P_m\| < \varepsilon \quad \text{per } m > m''_\varepsilon \quad (12).$$

Sia allora \bar{m}_ε il maggiore dei numeri $m_\varepsilon, m'_\varepsilon, m''_\varepsilon$. Per $m > \bar{m}_\varepsilon$ e $\lambda \in L_{n_0}^{(\beta)} \cap \mathcal{C}_0$, consideriamo la differenza $\mu_m(\lambda) - \mu(\lambda)$. Si ha:

$$\begin{aligned} \mu_m(\lambda) - \mu(\lambda) &= F(u_\lambda^{(m)}, \lambda) - F(u_\lambda, \lambda) \leq F(P_m u_\lambda, \lambda) - F(u_\lambda, \lambda) = \\ &= 2 \operatorname{Re} \left[\frac{\lambda (T u_\lambda, u_\lambda)}{\|u_\lambda\|^2} - \frac{\lambda (T P_m u_\lambda, P_m u_\lambda)}{\|P_m u_\lambda\|^2} \right] + |\lambda|^2 \left[\frac{\|T P_m u_\lambda\|^2}{\|P_m u_\lambda\|^2} - \frac{\|T u_\lambda\|^2}{\|u_\lambda\|^2} \right] \\ &\leq 2 \rho \left| \frac{(T u_\lambda, u_\lambda)}{\|u_\lambda\|^2} - \frac{(P_m T P_m u_\lambda, u_\lambda)}{\|P_m u_\lambda\|^2} \right| + \rho^2 \left| \frac{\|T P_m u_\lambda\|^2}{\|P_m u_\lambda\|^2} - \frac{\|T u_\lambda\|^2}{\|u_\lambda\|^2} \right|. \end{aligned}$$

Inoltre riesce:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\|T P_m u_\lambda\|^2}{\|P_m u_\lambda\|^2} - \frac{\|T u_\lambda\|^2}{\|u_\lambda\|^2} \right| &\leq \left| \frac{\|T u_\lambda\|^2 - \|T P_m u_\lambda\|^2}{\|u_\lambda\|^2} \right| + \left| \frac{\|T P_m u_\lambda\|^2}{\|u_\lambda\|^2} - \frac{\|T P_m u_\lambda\|^2}{\|P_m u_\lambda\|^2} \right| \\ &\leq \|T^* T - P_m T^* T P_m\| + |T|^2 (\|u_\lambda\|^2 - \|P_m u_\lambda\|^2) < (1 + \|T\|^2) \varepsilon; \\ \left| \frac{(T u_\lambda, u_\lambda)}{\|u_\lambda\|^2} - \frac{(P_m T P_m u_\lambda, u_\lambda)}{\|P_m u_\lambda\|^2} \right| &\leq \left| \frac{(T u_\lambda, u_\lambda) - (P_m T P_m u_\lambda, u_\lambda)}{\|u_\lambda\|^2} \right| \\ &+ \left| \frac{(P_m T P_m u_\lambda, u_\lambda)}{\|u_\lambda\|^2} - \frac{(P_m T P_m u_\lambda, u_\lambda)}{\|P_m u_\lambda\|^2} \right| \leq \|T - P_m T P_m\| \\ &+ \|T\| (\|u_\lambda\|^2 - \|P_m u_\lambda\|^2) < (1 + \|T\|) \varepsilon. \end{aligned}$$

Ne segue la convergenza uniforme di $\{\mu_m(\lambda)\}$ a $\mu(\lambda)$ in $L_{n_0}^{(\beta)} \cap \mathcal{C}_0$. Sia infine λ tale che $\mu(\lambda) < 1$. Esistono in tal caso un numero positivo ρ e un indice n_0 tali che: $\mu_{n_0}(\lambda) < \rho < 1$ in un intorno di λ . Ne segue allora che $\mu(\lambda)$, in quanto limite uniforme di $\{\mu_m(\lambda)\}$, è funzione continua di λ in $L_{n_0}^{(\beta)}$.

Dimostriamo ora il seguente teorema:

VII. — Sia $\{n_k\}$ una successione di indici crescente e sia $\lambda^{(n_k)}$ un punto di minimo relativo per la funzione $\mu_{n_k}(\lambda)$. La successione $\{\lambda^{(n_k)}\}$ sia convergente ad un autovalore λ^* della T . Detto $u_{\lambda^{(n_k)}}^{(n_k)}$ un vettore unitario che minimizza $F(u, \lambda^{(n_k)})$ in $\mathcal{M}_{n_k} - \omega$, la successione $\{u_{\lambda^{(n_k)}}^{(n_k)}\}$ è compatta ed ogni suo elemento di compattezza è un'autosoluzione dell'equazione:

$$\lambda^* T u - u = \omega.$$

Essendo λ^* un autovalore, possiamo determinare un indice n_0 tale che riesca $\mu_{n_0}(\lambda) \leq \rho < 1$ in un intorno I_{λ^*} di λ^* . Per il teorema IV, l'insieme

(12) Se T è una trasformazione lineare continua, si pone:

$$\|T\| = \operatorname{estr} \sup |Tu| \quad \text{per} \quad \|u\| = 1.$$

Se T è inoltre compatta si dimostra che $\lim \|T - P_m T P_m\| = 0$ (cfr. G. FICHERA, loc. cit. (5), p. 249, nota a piè pagina).

dei vettori $u_{\lambda}^{(n)}$ unitarii e relativi a $\lambda \in I_{\lambda^*}$ è compatto. Consideriamo allora la successione $\{u_{\lambda^{(n_k)}}^{(n_k)}\}$: riuscendo

$$\|\lambda^{(n_k)} T(u_{\lambda^{(n_k)}}^{(n_k)}) - u_{\lambda^{(n_k)}}^{(n_k)}\|^2 = \mu_{n_k}(\lambda^{(n_k)}),$$

ogni suo elemento di compattezza u verifica l'equazione:

$$\|\lambda^* T u - u\|^2 = \mu(\lambda^*),$$

e pertanto è un'autosoluzione relativa all'autovalore λ^* .

Indichiamo con Λ l'insieme (eventualmente vuoto) degli autovalori della trasformazione T , con $\Lambda^{(n)}$ l'insieme dei punti di minimo relativo della funzione $\mu_n(\lambda)$. Sussiste il seguente teorema:

VIII. - *Se Λ non è vuoto, $\Lambda^{(n)}$ è definitivamente non vuoto e per ogni $\lambda^* \in \Lambda$, esiste una successione $\{\lambda^{(n)}\}$, con $\lambda^{(n)} \in \Lambda^{(n)}$, tale che $\lim \lambda^{(n)} = \lambda^*$. Se $u_{\lambda^{(n)}}^{(n)}$ è un vettore unitario che minimizza $F(u, \lambda^{(n)})$ in $\mathfrak{M} - \omega$, la successione $\{u_{\lambda^{(n)}}^{(n)}\}$ è compatta e ogni suo elemento di compattezza è un'autosoluzione dell'equazione*

$$\lambda^* T u - u = \omega.$$

Sia λ^* un autovalore e indichiamo con $\mathcal{C}_k(\lambda^*)$ l'intorno circolare chiuso di centro λ^* e raggio $1/k$. Possiamo pensare k tanto grande che in $\mathcal{C}_k(\lambda^*)$ non cada alcun autovalore della T distinto da λ^* e in $\mathcal{C}_k(\lambda^*)$ riesca almeno per un \bar{n} , $\mu_{\bar{n}}(\lambda) < 1$; Sia m_k il minimo di $\mu(\lambda)$ su $\mathfrak{F}\mathcal{C}_k(\lambda^*)$ ⁽¹³⁾. Riesce $m_k > 0$. Per la convergenza di $\mu_n(\lambda^*)$ a $\mu(\lambda^*)$, posso determinare un indice ν_k tale che, per $n > \nu_k$, riesca $\mu_n(\lambda^*) < 1/2 m_k$, mentre per $\lambda \in \mathfrak{F}\mathcal{C}_k(\lambda^*)$ si abbia $\mu_n(\lambda) \geq \mu(\lambda) \geq m_k$. La funzione $\mu_n(\lambda)$ presenta allora un punto di minimo relativo interno a $\mathcal{C}_k(\lambda^*)$. Ciò prova intanto che $\Lambda^{(n)}$ è definitivamente non vuoto se Λ è tale. Facendo ora variare k , due casi possono presentarsi:

1° per $k = k_0 + s$ riesce, per ogni s , $\nu_{k_0+s} = \nu_{k_0}$. Possiamo allora costruire una successione $\lambda^{(n)}$ convergente a λ^* scegliendo $\lambda^{(n)}$ fra i punti di minimo assoluto della funzione $\mu_n(\lambda)$ in $\mathcal{C}_n(\lambda^*)$;

2° la successione $\{\nu_k\}$ non è limitata. In tal caso si può considerare una successione crescente e divergente di indici $\nu_{k_1}, \dots, \nu_{k_s}, \dots$

Sia $n = \nu_{k_s} + h$ ($h = 1, \dots, \nu_{k_{s+1}} - \nu_{k_s}$). La funzione $\mu_{\nu_{k_s}+h}(\lambda)$ è dotata di minimo assoluto in $\mathcal{C}_{k_s}(\lambda^*)$: sia $\lambda^{(\nu_{k_s}+h)}$ un punto di minimo. L'insieme dei punti $\lambda^{(\nu_{k_s}+h)}$ così ottenuto è l'insieme $\{\lambda^{(n)}\}$ convergente a λ^* . Per l'ultima parte del teorema si confronti quello precedente, dopo aver osservato che la successione $\lambda^{(n)}$ appartiene definitivamente ad un insieme $L_{\frac{\delta}{n}}^{(\delta)}$.

Possiamo infine enunciare il seguente teorema:

IX. - *Se l'insieme $\Lambda \cap \mathcal{C}_\epsilon$ non è vuoto, esso è definitivamente contenuto nell'involucro di raggio $\epsilon > 0$ di $\Lambda^{(n)} \cap \mathcal{C}_\epsilon$.*

(13) Con $\mathfrak{F}\mathcal{C}_k(\lambda)$ si indica la frontiera dell'insieme $\mathcal{C}_k(\lambda)$.

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ gli autovalori costituenti $\Lambda \cap \mathcal{C}_0$. Indichiamo con $m_{\varepsilon, s}$ il minimo di $\mu(\lambda)$ sulla frontiera dell'intorno di raggio ε di λ_s ⁽¹⁴⁾ ($s = 1, \dots, p$). Possiamo allora determinare un indice n_ε tale che, per $n > n_\varepsilon$, riesca:

$$\mu_n(\lambda_s) < \frac{1}{2} m_{\varepsilon, s} \quad (s = 1, 2, \dots, p)$$

Per il teorema precedente, la funzione $\mu_n(\lambda)$, per $n > n_\varepsilon$, presenta un punto di minimo relativo nell'intorno di raggio ε di ogni autovalore contenuto in \mathcal{C}_0 ; ciò prova la tesi.

(14) Naturalmente possiamo supporre ε così piccolo che riesca nell'intorno chiuso di raggio ε di ogni λ_s ($s = 1, \dots, p$) $\mu(\lambda) < 1$ e che detti intorni siano a due a due disgiunti e tutti contenuti in \mathcal{C}_0 .

Analisi matematica. — *Un'osservazione sul teorema di Severini-Egoroff.* Nota (*) di GIORGIO LETTA, presentata (**) dal Corrisp. C. MIRANDA.

Scopo della presente Nota è di mostrare come nel teorema di Severini-Egoroff, riguardante l'equivalenza tra convergenza quasi ovunque e convergenza quasi uniforme di una successione di funzioni misurabili in uno spazio misurale finito, non intervenga in modo essenziale la misura, ma soltanto la famiglia degli insiemi di misura nulla, o, più precisamente, l'algebra quoziente dell'algebra degli insiemi misurabili, modulo l'ideale degli insiemi di misura nulla. È, precisamente, ad un'opportuna condizione di distributività, cui tale algebra soddisfa, che si deve la conclusione del teorema.

Siano: X un insieme, \mathfrak{F} un σ -campo di sottoinsiemi di X , con $X \in \mathfrak{F}$, \mathfrak{I} un σ -ideale in \mathfrak{F} . Denoteremo con \mathfrak{A} l'algebra quoziente $\mathfrak{F}/\mathfrak{I}$, e con φ l'omomorfismo naturale di \mathfrak{F} su \mathfrak{A} (*). Nell'algebra \mathfrak{A} , denoteremo l'unione e l'intersezione con i simboli \vee , \wedge rispettivamente: riservando i simboli \cup , \cap per l'unione e l'intersezione in senso insiemistico.

Sia (f_n) una successione di funzioni numeriche, misurabili in (X, \mathfrak{F}) , ossia definite in X e misurabili rispetto ad \mathfrak{F} . Si dirà che la successione (f_n) converge (\mathfrak{I}) quasi ovunque, se esiste un insieme $I \in \mathfrak{I}$, tale che la successione converga in ogni punto di $X - I$: o — ciò ch'è lo stesso — se l'insieme (appartenente ad \mathfrak{F}), costituito dai punti di X in cui (f_n) non converge, appartiene ad \mathfrak{I} .

Si dirà che la successione (f_n) converge (\mathfrak{I}) quasi uniformemente, se esiste una successione $\{I_k\}$ di insiemi di \mathfrak{F} , tale che $\bigcap_k I_k \in \mathfrak{I}$ e che, per ogni k , la successione (f_n) converga uniformemente in $X - I_k$.

Evidentemente, ogni successione convergente (\mathfrak{I}) quasi uniformemente converge (\mathfrak{I}) quasi ovunque.

Si supponga, in particolare, che esista nell'algebra \mathfrak{A} una misura esterna continua e strettamente positiva, o — ciò ch'è lo stesso — che esista in \mathfrak{F} una misura esterna continua μ (**), tale che \mathfrak{I} coincida con il σ -ideale degli insiemi di misura μ nulla. Allora è facile vedere che le definizioni di convergenza

(*) Questo lavoro fa parte della realizzazione del programma di ricerca del gruppo n. 20 del C.N.R. (1965-61).

(**) Nella seduta del 13 maggio 1961.

(1) Per notazioni e nomenclatura cfr. [2].

(2) Ossia una funzione numerica μ definita in \mathfrak{F} e soddisfacente alle seguenti condizioni: (a) $\mu(\emptyset) = 0$; (b) $\mu(E) \leq \mu(F)$ se $E \subseteq F$; (c) $\mu(E \cup F) \leq \mu(E) + \mu(F)$; (d) $\mu(\lim_n E_n) = \lim_n \mu(E_n)$ per ogni successione convergente (E_n) di elementi di \mathfrak{F} .

(\mathfrak{J}) quasi ovunque e di convergenza (\mathfrak{J}) quasi uniforme si riducono, rispettivamente, a quelle di convergenza (μ) quasi ovunque e di convergenza (μ) quasi uniforme.

Tornando alle ipotesi generali, sia (f_n) una successione di funzioni misurabili in (X, \mathfrak{F}) , che per semplicità supporremo finite, e si ponga, per ogni coppia m, n d'interi:

$$(1) \quad I_{mn} = \bigcup_{p, q \geq n} \{x : |f_p(x) - f_q(x)| \geq 1/m\}.$$

Si ha evidentemente

$$(2) \quad I_{m, n+1} \subseteq I_{m, n} \subseteq I_{m+1, n}.$$

Inoltre:

1. Le seguenti proposizioni sono fra di loro equivalenti:

- (a) la successione (f_n) converge (\mathfrak{J}) quasi ovunque;
- (b) per ogni intero m , risulta

$$\bigcap_n I_{m, n} \in \mathfrak{J}, \quad \text{ossia} \quad \bigcap_n \varphi(I_{m, n}) = 0.$$

DIM. — Detto I l'insieme dei punti di X in cui (f_n) non converge, si ha

$$I = \bigcup_m \bigcap_n I_{m, n}.$$

Pertanto, affinché sia $I \in \mathfrak{J}$, occorre e basta che si abbia $\bigvee_m \bigwedge_n \varphi(I_{m, n}) = 0$, cioè $\bigwedge_n \varphi(I_{m, n}) = 0$ per ogni m .

2. Le seguenti proposizioni sono fra di loro equivalenti:

- (a) la successione (f_n) converge (\mathfrak{J}) quasi uniformemente;
- (b) esiste una successione doppia $(n(m, k))$ d'interi, tale che sia

$$\bigcap_k \bigcup_m I_{m, n(m, k)} \in \mathfrak{J}, \quad \text{cioè} \quad \bigwedge_k \bigvee_m \varphi(I_{m, n(m, k)}) = 0.$$

DIM. — Infatti un insieme $I \in \mathfrak{F}$ è tale che (f_n) converga uniformemente in $X - I$ se e solo se esiste una successione $(n(m))$ d'interi, tale che sia $I \supseteq \bigcup_m I_{m, n(m)}$.

Dalle proposizioni precedenti discende immediatamente la seguente:

3. L'algebra $\mathfrak{A} = \mathfrak{F}/\mathfrak{J}$ verifichi la seguente condizione di distributività:

- (d) per ogni successione doppia $(x_{m, n})$ di elementi di \mathfrak{A} , con

$$x_{m, n} \geq x_{m, n+1}, \quad \bigwedge x_{m, n} = 0,$$

esiste una successione doppia $(n(m, k))$ d'interi, tale che sia

$$\bigwedge_k \bigvee_m x_{m, n(m, k)} = 0.$$

Allora ogni successione di funzioni misurabili in (X, \mathcal{F}) , convergente (\mathfrak{D}) quasi ovunque, converge anche (\mathfrak{I}) quasi uniformemente.

Si osservi che, nella condizione (d), si può senza aumentare la generalità, assumere la successione $(x_{m,n})$ soddisfacente all'ulteriore condizione:

$$x_{m,n} \leq x_{m+1,n}.$$

Poiché la condizione (d) è in particolare verificata quando l'algebra \mathcal{A} sia supporto di una misura esterna continua e strettamente positiva, ne segue, come corollario, il teorema di Severini-Egoroff:

4. Se μ è una misura esterna continua in \mathcal{F} , allora ogni successione di funzioni misurabili in (X, \mathcal{F}) , convergente (μ) quasi ovunque, converge anche (μ) quasi uniformemente.

Vogliamo ora mostrare che la condizione di distributività (d), per l'algebra \mathcal{A} , è, oltre che sufficiente, anche necessaria affinché ogni successione, convergente (\mathfrak{D}) quasi ovunque, converga (\mathfrak{D}) quasi uniformemente.

Basta, per questo, far vedere che, assegnata una qualunque successione doppia $(I_{m,n})$ di insiemi di \mathcal{F} , verificante le (2), e tale che, per ogni intero m , risulti $\bigcap_n I_{m,n} = \emptyset$, esiste sempre una successione (f_n) di funzioni misurabili in (X, \mathcal{F}) , per cui valga la (1).

A tale scopo, detta (a_m) una successione di numeri reali, con

$$a_m > \frac{1}{m} > a_{m+1},$$

si definisca la successione (f_n) ponendo: $f_n = \sup_m a_m \chi_{I_{m,n}}$, ossia

$$f_n(x) = \begin{cases} a_1 & \text{se } x \in I_{1,n}, \\ a_m & \text{se } x \in I_{m,n} - I_{m-1,n} \\ 0 & \text{se } x \in X - \bigcup_m I_{m,n}. \end{cases} \quad (m > 1),$$

È facile vedere che è verificata la (1). Invero, sia $x \in I_{m,n}$. Allora risulta $f_n(x) \geq a_m > 1/m$. Poiché $\lim_m a_m = 0$, esiste un intero m' tale che $a_m - a_{m'} > 1/m$.

Poiché $\bigcap_n I_{m',n} = \emptyset$, esiste un intero n' tale che $x \notin I_{m',n'}$. Risulta $f_{n'}(x) < a_{m'}$, e quindi

$$f_n(x) - f_{n'}(x) > a_m - a_{m'} > 1/m.$$

Inversamente, sia $x \in I_{m,n}$. Se $p, q \geq n$, allora $x \in I_{m,p}$, $x \in I_{m,q}$, e quindi

$$0 \leq f_p(x) \leq a_{m+1}, \quad 0 \leq f_q(x) \leq a_{m+1} \\ |f_p(x) - f_q(x)| \leq a_{m+1} < 1/m.$$

Possiamo concludere con il seguente enunciato:

5. Affinché ogni successione di funzioni misurabili in (X, \mathcal{F}) , convergente (\mathfrak{A}) quasi ovunque, converga (\mathfrak{A}) quasi uniformemente, occorre e basta che l'algebra quoziente $\mathfrak{A} = \mathcal{F}/\mathfrak{A}$ verifichi la condizione di distributività (d).

Vogliamo da ultimo osservare che, come risulta da [1], la condizione (d) è necessaria, ma non sufficiente, affinché l'algebra \mathfrak{A} sia supporto di una misura esterna continua è strettamente positiva.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] D. MAHARAM, *An algebraic characterization of measure algebras*, « Annals of Math. », 48, 154-167 (1947).
- [2] R. SIKORSKI, *Boolean algebras*. « Ergebnisse der Mathematik », Springer (1960).

Analisi funzionale. — *Sul teorema dell'alternativa per talune equazioni funzionali.* Nota di BENEDETTO PETTINEO, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

Sia S uno spazio lineare di Hilbert, complesso, completo e separabile ⁽¹⁾ e sia $G(u)$ una trasformazione lineare definita in S , col codominio contenuto in S . Inoltre $G(u)$ sia continua, vale a dire esista una costante $c > 0$ tale che, al variare di u in S , si abbia

$$(I) \quad \|G(u)\| \leq c \|u\|.$$

Sia $G^*(u)$ la trasformazione aggiunta di $G(u)$, la quale — com'è noto — risulta pure lineare e continua. Anzi si ha (al variare di u in S)

$$(I') \quad \|G^*(u)\| \leq c \|u\|$$

e, per ogni $v \in S$,

$$(2) \quad (u, G^*(v)) = (G(u), v).$$

Posto

$$(3) \quad \Gamma(u) = G(u) + G^*(u),$$

supporrò che si verifichi la seguente circostanza:

F) *la trasformazione $\Gamma(u)$ sia totalmente continua, per la qual cosa occorre e basta che ad ogni numero $\varepsilon > 0$ corrispondano ν costanti reali: $\lambda_1, \dots, \lambda_\nu$ e ν elementi di $S: \varphi_1, \dots, \varphi_\nu$, ortogonali e normali, tali che la trasformazione $\Gamma(u)$ si possa così decomporre*

$$(4) \quad \Gamma(u) = \Gamma_\varepsilon(u) + \sum_{h=1}^{\nu} \lambda_h (u, \varphi_h) \varphi_h,$$

risultando, al variare di u in S ,

$$(5) \quad \|\Gamma_\varepsilon(u)\| \leq \varepsilon \|u\|.$$

In queste ipotesi, utilizzando fondamentalmente una condizione esistenziale dovuta al Fichera (loc. cit. ⁽²⁾, b, p. 30), perverrò al seguente risultato:

I) *Per l'equazione*

$$(6) \quad E(u) \equiv u + G(u) = f \quad (f \in S)$$

sussiste (nello spazio S) il teorema dell'alternativa, ed il rango è finito.

(*) Nella seduta del 13 maggio 1961.

(1) Per la terminologia, le notazioni ed i richiami cfr. G. FICHERA, a) *Lezioni sulle trasformazioni lineari*, Istituto Matematico - Università di Trieste 1954; b) *Premesse ad una teoria generale dei problemi al contorno per le equazioni differenziali*, Libreria Veschi, Roma 1958.

1. Si consideri l'equazione aggiunta (o trasposta) della (6):

$$(7) \quad E^*(v) \equiv v + G^*(v) = \omega,$$

dove ω è l'elemento nullo di S ; si consideri poscia l'equazione così composta

$$(8) \quad E_0(u) \equiv E^* E(u) \equiv u + \Gamma(u) + G^* G(u) = q \quad (q \in S)$$

– dove si è scritto $G^* G(u)$ in luogo di $G^*(G(u))$ ed $E^* E(u)$ in luogo di $E^*(E(u))$ – e si osservi che essa coincide con la sua aggiunta (cioè si ha $E_0^* = E_0$). Ciò in quanto, in forza della (2) (e dell'analogia con G^* al posto di G), risulta

$$(9) \quad (u, \Gamma(v)) = (\Gamma(u), v) = (u, G(v)) + (G(u), v),$$

$$(10) \quad (u, G^* G(v)) = (G^* G(u), v) = (G(u), G(v)).$$

Mostrerò che l'equazione

$$(11) \quad E_0(u) = E^*(f)$$

si può sempre risolvere, se per la (8) sussiste il teorema dell'alternativa. Basterà provare che

$$(12) \quad (E^*(f), u_0) = 0, \quad \text{se} \quad E_0(u_0) = \omega.$$

Infatti, dalla $E_0(u_0) \equiv E^* E(u_0) = \omega$ si ricava $E(u_0) = v$, dove $E^*(v) = \omega$; ma allora – necessariamente – $(v, v) = 0$ e quindi $v = \omega$. Dunque $E(u_0) = \omega$ ed in virtù della (2), con E^* al posto di G , si ottiene

$$(E^*(f), u_0) = (f, E(u_0)) = 0.$$

Mostrerò in più che per l'equazione (6) vale pure il teorema dell'alternativa, cioè che essa si può risolvere qualora si abbia

$$(13) \quad (f, v) = 0, \quad \text{dove} \quad E^*(v) = \omega.$$

Infatti, se u è una soluzione della (11), risulta $E(u) = f + v$, dove $E^*(v) = \omega$; ma allora – necessariamente – $(f + v, v) = 0$ e per la (13), $v = \omega$. Dunque risulta $E(u) = f$, sicché u è pure soluzione della (6).

Riassumendo:

II) *Se si verifica la condizione (13) (necessaria in ogni caso), l'equazione (6) e la (11) sono equivalenti. In particolare le autosoluzioni della (6) sono tutte e solo quelle della (11). Per di più, se per l'equazione (8) sussiste il teorema dell'alternativa, lo stesso avviene per la (6).*

2. Si supponga che la trasformazione $\Gamma(u)$ verifichi la condizione F. Posto

$$(14) \quad \mathcal{E}(u) = u + G^* G(u),$$

in virtù delle (1) e (1') si ha, al variare di u ,

$$(15) \quad \|\mathcal{E}(u)\| \leq (1 + c^2) \|u\|.$$

Sceglierò allora

$$(16) \quad \varepsilon < 1/4 (1 + \varepsilon^2)$$

e porrò

$$(17) \quad \mathcal{E}_\varepsilon(u) = \mathcal{E}(u) + \Gamma_\varepsilon(u) = u + G^* G(u) + \Gamma_\varepsilon(u).$$

Si ha, in forza delle (5), (15) e (16),

$$\|\mathcal{E}_\varepsilon(u)\|^2 \geq \|\mathcal{E}(u)\|^2 - 2\|\mathcal{E}(u)\| \cdot \|\Gamma_\varepsilon(u)\| \geq \|\mathcal{E}(u)\|^2 - \frac{1}{2}\|u\|^2$$

ed in forza della (14) e della (10) (con u al posto di v),

$$\begin{aligned} \|\mathcal{E}(u)\|^2 &= (u, u) + (u, G^* G(u)) + (G^* G(u), u) + (G^* G(u), G^* G(u)) = \\ &= \|u\|^2 + 2\|G(u)\|^2 + \|G^* G(u)\|^2 \geq \|u\|^2; \end{aligned}$$

pertanto

$$(18) \quad \|\mathcal{E}_\varepsilon(u)\|^2 \geq \frac{1}{2}\|u\|^2.$$

Ne segue, in virtù della condizione esistenziale del Fichera (loc. cit.⁽¹⁾; b, p. 30), che l'equazione

$$(19) \quad \mathcal{E}_\varepsilon(u) = f_0 \quad (f_0 \in S)$$

si può sempre risolvere (in S).

Ricordando che $(u, v) = \overline{(v, u)}$ e, se λ è costante, che $(\lambda u, v) = \lambda(u, v)$, $(u, \lambda v) = \overline{\lambda}(u, v)$, si ottiene (tenuto presente che le costanti λ_h della (4) sono reali)

$$(20) \quad \left(u, \sum_{h=1}^v \lambda_h(v, \varphi_h) \varphi_h\right) = \left(\sum_{h=1}^v \lambda_h(u, \varphi_h) \varphi_h, v\right);$$

dopo di che, in forza di quest'ultima, della (9) e della (10), si trova

$$(21) \quad \mathcal{E}_\varepsilon^* = \mathcal{E}_\varepsilon.$$

Dunque l'equazione (19) non ha autosoluzioni (la cui presenza implicherebbe delle condizioni - di compatibilità - per il termine noto f_0). Alla soluzione della (19) si può dare quindi il seguente aspetto

$$(22) \quad u = \mathcal{E}_\varepsilon^{-1}(f_0),$$

dove $\mathcal{E}_\varepsilon^{-1}$ è la trasformazione inversa della \mathcal{E}_ε .

È appena il caso di accennare che $\mathcal{E}_\varepsilon^{-1}$ è pure lineare e continua (com'è ben noto); si ha inoltre

$$(23) \quad (u, \mathcal{E}_\varepsilon^{-1}(v)) = (\mathcal{E}_\varepsilon^{-1}(u), v).$$

Ed infatti, poiché $\mathcal{E}_\varepsilon \mathcal{E}_\varepsilon^{-1}(u) = u$, tenuta presente la (21), si può scrivere successivamente

$$(u, \mathcal{E}_\varepsilon^{-1}(v)) = (\mathcal{E}_\varepsilon \mathcal{E}_\varepsilon^{-1}(u), \mathcal{E}_\varepsilon^{-1}(v)) = (\mathcal{E}_\varepsilon^{-1}(u), \mathcal{E}_\varepsilon \mathcal{E}_\varepsilon^{-1}(v)) = (\mathcal{E}_\varepsilon^{-1}(u), v).$$

Ciò posto, l'equazione (8) si può scrivere così

$$(8') \quad \mathcal{E}_e(u) = q - \sum_{h=1}^v \lambda_h(u, \varphi_h) \varphi_h,$$

sicché la (22) fornisce

$$(24) \quad u = \mathcal{E}_e^{-1}(q) - \sum_{h=1}^v \lambda_h(u, \varphi_h) \mathcal{E}_e^{-1}(\varphi_h).$$

La soluzione più generale della (8) è dunque questa

$$(25) \quad u = \mathcal{E}_e^{-1}(q) - \sum_{h=1}^v \lambda_h \gamma_h \mathcal{E}_e^{-1}(\varphi_h),$$

dove le costanti γ_h risolvono il sistema di equazioni lineari

$$\gamma_i + \sum_{h=1}^v \lambda_h(\mathcal{E}_e^{-1}(\varphi_h), \varphi_i) \gamma_h = (\mathcal{E}_e^{-1}(q), \varphi_i) \quad (i = 1, \dots, v),$$

o - se si vuole - ricordando la (23),

$$(26) \quad \gamma_i + \sum_{h=1}^v \lambda_h(\mathcal{E}_e^{-1}(\varphi_h), \varphi_i) \gamma_h = (q, \mathcal{E}_e^{-1}(\varphi_i)) \quad (i = 1, \dots, v).$$

Se ne deduce senz'altro il teorema dell'alternativa per l'equazione (8), unitamente alla circostanza che il rango (numero delle eventuali autosoluzioni linearmente indipendenti (in S)) è finito.

Dal teorema II segue allora il teorema I.

3. Tra le applicazioni del teorema I, accennerò qui a qualcuna nel campo delle equazioni integrali singolari.

In un campo limitato T dello spazio euclideo ad $r+1$ (≥ 2) dimensioni sia assegnata un'equazione differenziale lineare di tipo ellittico (anzi ellittico-positiva)

$$(27) \quad \mathcal{E}[\varphi] \equiv \sum_{h,i} a_{hi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_h \partial x_i} + \sum_h b_h \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} + c\varphi = 0,$$

con la regolarità ormai consueta (in campo classico) pei coefficienti a_{hi} , b_h , c e per la frontiera D del campo T; il determinante dei coefficienti a_{hi} sia inoltre eguale ad 1. Designero con A_{hi} il complemento algebrico dell'elemento a_{hi} nel determinante di tali coefficienti e porrò

$$(28) \quad H(x, y) = \begin{cases} \left[\sum_{h,i} A_{hi}(y) (y_h - x_h) (y_i - x_i) \right]^{(1-r)/2} & \text{per } r > 1 \\ \log \left[\sum_{h,i} A_{hi}(y) (y_h - x_h) (y_i - x_i) \right]^{-1/2} & \text{per } r = 1. \end{cases}$$

Sulla frontiera D di T sia definito l'operatore

$$(29) \quad \mathfrak{L}[\varphi] \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial l} + \beta \varphi,$$

con l'asse (obliquo) l sempre penetrante nell'interno di T ; i coseni direttori di l e la funzione β siano pure convenientemente regolari in D .

Considero il problema (della derivata obliqua regolare) ⁽²⁾ ⁽³⁾.

$$(30) \quad \mathfrak{E}[\varphi] = 0 \quad \text{in } T, \quad L[\varphi] = q \quad \text{in } D.$$

Supposto, per brevità, che esista la soluzione fondamentale principale (loc. cit. ⁽³⁾, pp. 53-59) $W(x, y)$ per l'equazione $\mathfrak{E}[\varphi] = 0$, alla soluzione φ incognita del problema (30) si può dare il seguente aspetto

$$(31) \quad \varphi(x) = \int_D W(x, y) u(y) dy$$

ed il problema (30) si traduce nell'equazione integrale singolare

$$(32) \quad \alpha(x) u(x) + \int_D \mathfrak{L}_x[W(x, y)] u(y) dy = q(x) \quad (x \in D),$$

con $\alpha(x) \neq 0$ e $1/\alpha$ limitata (cfr. Miranda, loc. cit. ⁽³⁾, pp. 67-75).

Posto, brevemente.

$$(33) \quad G(x, y) = \frac{1}{\alpha(x)} \mathfrak{L}_x[W(x, y)] \quad , \quad f = \frac{q}{\alpha} \quad , \quad G*u = \int_D G(x, y) u(y) dy,$$

la (32) diviene

$$(34) \quad u + G*u = f.$$

Se u varia nella classe C delle funzioni hölderiane in D , l'integrale $G*u$ è preso in valore principale e $G*u$, considerata come trasformazione (lineare) definita in C , è in questa classe continua ⁽⁴⁾. Ma allora $G*u$ è prolungabile per continuità in tutta la classe S delle funzioni u (reali) di quadrato sommabile in D ed il teorema I sarà applicabile alla (34) non appena si prova che $G + G^*$ gode della proprietà F , anzi - più precisamente - che

$$(35) \quad G(x, y) + G(y, x) = O(\overline{xy}^{\lambda-r}) \quad (\text{con } \lambda > 0).$$

(2) In campo classico la trattazione di tali problemi è dovuta al GIRAUD. Cfr. particolarmente: a) *Équations à intégrales principales, étude suivie d'une application*, « Ann. Éc. Norm. Sup. », t. 51, 1934; b) *Équations à intégrales principales d'ordre quelconque*, « Ann. Éc. Norm. Sup. », t. 53, 1936; c) *Nouvelle méthode pour traiter certains problèmes relatifs aux équations du type elliptique*, « Journal de Math. », t. 18, 1939.

(3) Cfr. pure C. MIRANDA, *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*, Springer-Verlag, Berlin 1955.

(4) S. G. MIHLIN, *Singular integral equations*, « Uspehi Mat. Nauk » (N. S.), 1948. (Trad. inglese nelle « Translations » dell'Amer. Mat. Soc., n. 24).

Utilizzando la teoria dei potenziali (cfr. pure Miranda, loc. cit. ⁽³⁾, pp. 13-18), si riconosce che la (35) si può ricondurre al caso in cui il nucleo G sia questo

$$(36) \quad G(x, y) = \sum_h q_h(x) \frac{\partial}{\partial x_h} H(x, y) + O(\overline{xy}^{\lambda-r}),$$

dove H è definito dalle (28) e le q_h sono hölderiane in D . Ma allora la (35) è ovviamente vera.

4. Per fissare le idee, sia $r+1=3$. La (32) viene allora schematizzata da un'equazione (34), dove il dominio D dell'integrale (33) è piano e la parte principale G_0 del nucleo G è questa (loc. cit. ⁽²⁾, a)

$$(37) \quad G_0(x, y) = a_1(x) \frac{y_1 - x_1}{\overline{xy}^3} + b_1(x) \frac{y_2 - x_2}{\overline{xy}^3}.$$

Posto

$$y_1 - x_1 = \rho \cos \vartheta, \quad y_2 - x_2 = \rho \sin \vartheta,$$

si può scrivere

$$(37') \quad G_0(x, y) = a_1(x) \frac{\cos \vartheta}{\rho^2} + b_1(x) \frac{\sin \vartheta}{\rho^2}.$$

In quest'ordine di idee, è già più generale il seguente nucleo singolare

$$(38) \quad G_0(x, y) = \sum_{h=1}^n \left[a_{2h-1}(x) \frac{\cos(2h-1)\vartheta}{\rho^2} + b_{2h-1}(x) \frac{\sin(2h-1)\vartheta}{\rho^2} \right]$$

(e la (35) è pure verificata non appena le funzioni a_{2h-1} , b_{2h-1} sono hölderiane).

Geometria. — *Alcune generalizzazioni del teorema di Segre-Mahler.*

Nota di JÓZSEF MOLNÁR, presentata ^(*) dal Socio B. SEGRE.

Intendiamo per densità dei cerchi $\{C_i\}$, collocati in un dominio D , rispetto al dominio, il quoziente fra la somma delle aree dei cerchi e l'area del dominio ⁽¹⁾, cioè: $\Sigma C_i/D$ ⁽²⁾.

Nella geometria discreta ⁽³⁾, è noto il seguente

TEOREMA DI SEGRE-MAHLER ⁽⁴⁾: Se in un poligono del piano euclideo, i cui angoli misurino al più $2\pi/3$, sono comunque collocati cerchi disgiunti ⁽⁵⁾ e congruenti, allora la densità dei cerchi rispetto al poligono è sempre $\leq \pi/12 = 0,9069 \dots$

Fra le varie generalizzazioni e estensioni di questo teorema, finora fatte (Fejes Tóth [1], [2], [3], [4], [5], Molnár [8], [9], [10]), segnaliamo solamente la seguente ⁽⁶⁾: la densità dei cerchi (in numero ≥ 2) disgiunti congruenti e collocati comunque in un dominio convesso del piano euclideo o della superficie sferica è minore di $\pi/12$.

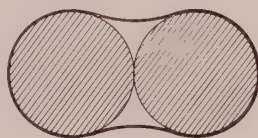


Fig. 1.

Così, si può dare un estremo superiore minore di 1 per la densità dei sistemi di cerchi ⁽⁷⁾ disgiunti e congruenti, comunque collocati in un qualsiasi dominio convesso del piano euclideo o della sfera; mentre non si può fare lo stesso sul piano iperbolico ⁽⁸⁾.

(*) Nella seduta del 13 maggio 1961.

(1) Ved. per esempio FEJES TÓTH [4], p. 73.

(2) Per un dominio e per la sua area usiamo lo stesso simbolo.

(3) La denominazione *geometria discreta* viene usata dai matematici sovietici per il ramo di geometria che si occupa degli insiemi costituiti da elementi discreti. Questa geometria contiene, per esempio, la teoria dei gruppi discontinui, la teoria delle suddivisioni regolari e dei reticoli; essa è dunque in stretta connessione con la teoria dei gruppi, con la teoria dei numeri, con l'algebra e con altri rami della matematica (ved. FEJES TÓTH [7]).

(4) SEGRE-MAHLER [12].

(5) Più precisamente, si suppone che i cerchi non abbiano punti interni comuni.

(6) FEJES TÓTH [1], MOLNÁR [8].

(7) Si tratta dei sistemi aventi almeno due cerchi.

(8) *Controesempio*: Preso il piano iperbolico, la densità di due cerchi tangenti e congruenti di raggio r , riferita all'involucro convesso di questi cerchi, tende ad 1 per $r \rightarrow \infty$ (fig. 1).

Nel presente lavoro diamo un'altra generalizzazione del teorema di Segre-Mahler, valida anche nel piano iperbolico. Quale dominio, dove sono collocati i cerchi, si considera un poligono S del piano euclideo, o del piano iperbolico, o della superficie sferica, ogni angolo del quale sia $\leq 2\pi/3$. Noi daremo, nei teoremi 1-4, estremi superiori per la densità dei cerchi, rispetto al poligono S , nei seguenti casi: 1° i cerchi siano congruenti; 2° i raggi dei cerchi siano uguali a r_1, r_2, \dots, r_n ; 3° i raggi dei cerchi appartengano all'intervallo (a, b) ; 4° vi siano n specie di cerchi con raggi r_1, r_2, \dots, r_n .

In questa Nota per «superficie sferica» intenderemo, oltre l'ordinaria superficie sferica, il piano euclideo od iperbolico. Per essa ha importanza significativa il

LEMMA DI HAJÓS. — Siano c e C ($c < C$) due cerchi concentrici sulla «superficie sferica». Prendiamo un numero finite di corde che non si taglino internamente e che non taglino il cerchio c . Allora la somma delle aree dei segmenti circolari tagliati dalle corde su C ha un massimo, raggiunto nel caso in cui le corde formino un poligono inscritto nel cerchio C avente i lati, eccetto al più uno, tangenti a c .

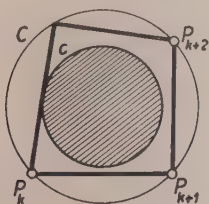


Fig. 2.

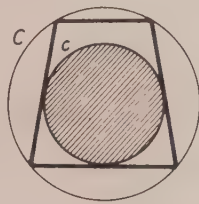


Fig. 3.

DIMOSTRAZIONE. — Ovviamente possiamo limitarci al caso in cui le corde di C formano un poligono inscritto in C (fig. 2). È evidente che la somma Σ delle aree dei segmenti circolari determinati dai lati del poligono non varia, se i lati vengono ordinati in una serie non crescente. Così, se i vertici del poligono sono P_1, P_2, \dots, P_n , possiamo supporre $P_1 P_2 \geq P_2 P_3 \geq \dots \geq P_n P_1$. Sia $P_k P_{k+1}$ ($k \leq n-1$) il primo lato che non risulti tangente a c . Se muoviamo il vertice P_{k+1} verso P_{k+2} , l'area del triangolo $P_k P_{k+1} P_{k+2}$ diminuisce, cioè Σ cresce. Muoviamo il vertice P_{k+1} verso P_{k+2} finché il lato $P_k P_{k+1}$ diventi tangente a c oppure risulti $P_{k+1} = P_{k+2}$. Nell'ultimo caso muoviamo il vertice $P_{k+1} = P_{k+2}$ verso P_{k+3} finché $P_k P_{k+1}$ diventi tangente a c oppure risulti $P_{k+1} = P_{k+3}$. Così proseguendo, si può portare il lato $P_k P_{k+1}$ in una posizione in cui sia tangente a c , e nel frattempo Σ cresce. Se durante il procedimento si fosse alterata la proprietà della successione dei lati di essere non crescente, allora ordiniamo i lati di nuovo e continuiamo il procedimento. In questo modo, dopo un numero finito di passi, si arriva manifestamente al poligono che dà il minimo indicato nel lemma di Hajós (fig. 3). Con ciò il lemma è dimostrato.

Nel seguito - onde ottenere una formulazione più semplice - il piano euclideo od iperbolico verrà designato quale sfera rispettivamente di curvatura nulla o di curvatura negativa.

TEOREMA 1. - *Se, in un poligono di una superficie sferica di curvatura k , di cui ogni angolo sia $\leq 2\pi/3$, sono comunque collocati cerchi disgiunti e congruenti di raggio r , allora la densità δ di questi cerchi rispetto al poligono soddisfa alla*

$$\delta \leq d(a) = \frac{3 \operatorname{cosec} \frac{\pi}{a} - 6}{[a] - 3 - \frac{6}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left\{ \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\pi}{a} \cotg \left(1 - \frac{[a]}{a} \right) \pi \right\}},$$

dove

$$\operatorname{cosec} \frac{\pi}{a} = 2 \cos \sqrt{k} r.$$

$d(a)$ ha il seguente significato intuitivo. Sia C il cerchio che passa per i centri di tre cerchi di raggio r , tangenti fra loro (fig. 4). Indichiamo con H il poligono di estremo di Hajós appartenente ai cerchi concentrici C, C_i , dove C_i sia un

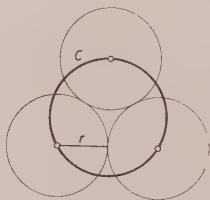


Fig. 4.

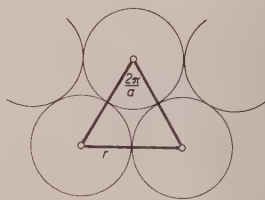


Fig. 5.

cerchio di raggio r . In questo caso risulta $d(a) = C_i/H$. Un angolo del triangolo equilatero determinato dai centri dei tre cerchi congruenti tangenti di raggio r è $2\pi/a$ (fig. 5); si può dunque dire che a è il numero dei cerchi di raggio r che si possono collocare attorno ad un cerchio di raggio r .

DIMOSTRAZIONE. - Sia S un poligono di cui ogni angolo risulti $\leq 2\pi/3$ ed in cui si siano collocati i cerchi disgiunti di raggio r . Indichiamo con D_i il luogo dei punti le cui distanze dal centro del cerchio C_i non siano maggiori delle distanze dai centri degli altri cerchi. Si vede facilmente che D_i è un poligono convesso ⁽⁹⁾. I poligoni $\{D_i\}$ associati ai cerchi $\{C_i\}$ ricoprono interamente e semplicemente il poligono S ad eccezione delle frontiere dei poligoni $\{D_i\}$ (fig. 6).

Per dimostrare il nostro teorema basta provare che, nel caso di un qualsiasi poligono D_i , abbiamo $C_i/D_i \leq d(a)$. Le notazioni già introdotte per il poligono H di Hajós e per il cerchio C saranno utilizzate anche nel seguito. Vediamo anzitutto che un vertice P qualsiasi di D_i non è mai interno al cerchio C concentrico a c . Ciò è ovvio nel caso in cui P sia anche vertice del po-

(9) Si può individuare D_i come intersezione dei semipiani contenenti C_i determinati dalle rette assi radicali del cerchio C_i e degli altri cerchi.

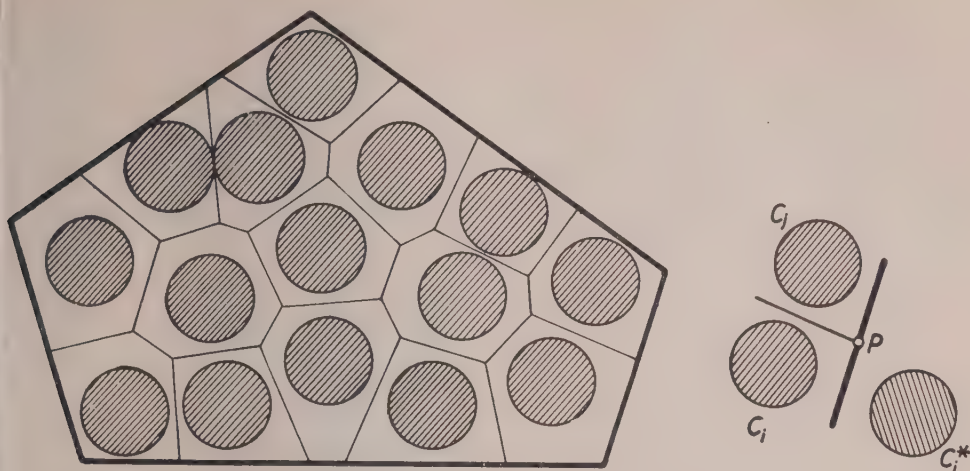


Fig. 6.

ligono S o centro radicale dei cerchi C_i, C_j, C_k appartenenti al sistema $\{C_i\}$. Può però accadere che P sia l'intersezione d'un lato del poligono S e dell'asse radicale dei cerchi C_i e C_j (fig. 6). In questo caso, prendendo il cerchio C_i^* simmetrico di C_i rispetto a quel lato di S , si può considerare P come il centro radicale dei cerchi disgiunti C_i, C_i^*, C_j , onde P non è interno a C . Evidentemente $D_i \supseteq D_i \cap C$. D'altra parte, in virtù del lemma di Hajós, $D_i \cap C \supseteq H$, e così $C_i/D_i \leq C_i/H = d(a)$. Con ciò il teorema è dimostrato.

OSSERVAZIONE. — L'estremo superiore $d(a)$ non è monotono (fig. 7). La linea punteggiata in figura dà un estremo superiore di Fejes Tóth [6] per

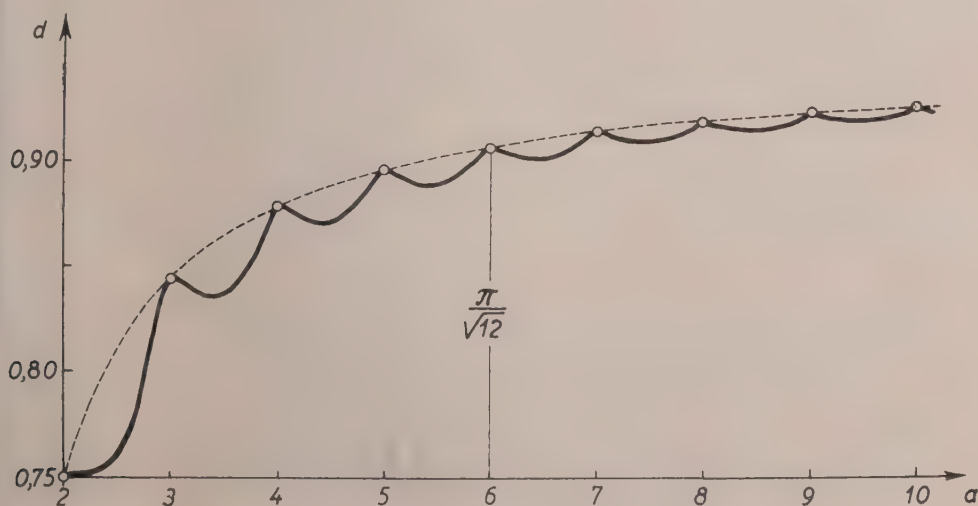


Fig. 7.

la densità di cerchi disgiunti e congruenti, nel caso di collocazioni di cerchi su tutta la superficie sferica.

Si possono dimostrare, in modo analogo al precedente, i due seguenti teoremi:

TEOREMA 2 ⁽¹⁰⁾. - *Se in un poligono d'una superficie sferica di curvatura k , di cui ogni angolo sia $\leq 2\pi/3$, vengono comunque collocati cerchi disgiunti, di raggi r_1, r_2, \dots, r_n , allora la densità δ di questi rispetto al poligono soddisfa alla*

$$\delta \leq \frac{2\pi \sum_{i=1}^n (1 - \cos \sqrt{k} r_i)}{\sum_{i=1}^n \left(2 \left[\frac{\pi}{a} \right] \beta + \left(1 - \left[\frac{2\pi}{a} \right] \right) \pi + 2 \arctg \left\{ \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \cotg \left(\pi - \left[\frac{2\pi}{\alpha} \right] \alpha \right) \right\} \right)},$$

dove

$$\sin \alpha = \frac{\sin \sqrt{k} r_1}{\sin \sqrt{k} (r_1 + r_i)}, \quad \cos \beta = \frac{\sin \sqrt{k} r_1 \cos \sqrt{k} r_i}{\sin \sqrt{k} (r_1 + r_i)}$$

e

$$r_1 \leq r_i \quad (i = 2, 3, \dots, n).$$

TEOREMA 3. - *Se, in un poligono d'una superficie sferica di curvatura k , di cui ogni angolo sia $\leq 2\pi/3$, vengono comunque collocati dei cerchi disgiunti i cui raggi appartengono all'intervallo (a, b) , allora la densità δ di tali cerchi rispetto al poligono soddisfa alla*

$$\delta \leq \sup \frac{2\pi (1 - \cos \sqrt{k} r)}{2 \left[\frac{2\pi}{\alpha} \right] \beta + \left(1 - \left[\frac{2\pi}{\alpha} \right] \right) \pi + 2 \arctg \left\{ \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \cotg \left(\pi - \left[\frac{2\pi}{\alpha} \right] \alpha \right) \right\}},$$

dove

$$\sin \alpha = \frac{\sin \sqrt{k} a}{\sin \sqrt{k} (r + a)}, \quad \cos \beta = \frac{\sin \sqrt{k} a \cos \sqrt{k} r}{\sin \sqrt{k} (r + a)} \quad \text{e} \quad r \in (a, b).$$

Tenuto conto del teorema 1, e con un ragionamento analogo ad altro indicato da Fejes Tóth ⁽¹¹⁾, si può anche facilmente dimostrare il

TEOREMA 4. - *Se, in un poligono d'una superficie sferica di curvatura k , di cui ogni angolo sia $\leq 2\pi/3$, sono collocati n sistemi finiti di cerchi disgiunti,*

(10) In connessione con la dimostrazione del teorema 2, osserviamo che la decomposizione del poligono S in celle D_i racchiudenti i cerchi C_i si fa anche in questo caso, con l'aiuto degli assi radicali. Consideriamo tre cerchi tangenti disgiunti C_i, C_j, C_k , di raggi r_i, r_j, r_k , e indichiamo con C il cerchio concentrico al cerchio C_i , che passa per il centro radicale dei cerchi C_i, C_j, C_k . Sia H il poligono di Hajós rispetto ai cerchi C_i, C_j, C_k ; allora la densità δ_i del cerchio C_i rispetto al dominio D_i soddisfa alla $\delta_i \leq C_i/H$, e la densità dei cerchi $\{C_i\}$ rispetto al poligono S risulta $\leq \sum C_i / \sum (C_i / \delta_i)$. Quest'ultima espressione è appunto il valore dell'estremo superiore dato dal teorema 2.

(11) Ved. FEJES TÓTH [4], pp. 72-73.

con raggi rispettivi r_1, r_2, \dots, r_n , allora la densità δ di tali cerchi rispetto al poligono soddisfa alla

$$\delta \leq 1 - \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{3 \operatorname{cosec} \frac{\pi}{a} - 6}{[a] - 3 - \frac{6}{\pi} \arctg \left\{ \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\pi}{a} \operatorname{ctg} \left(1 - \frac{[a]}{a} \right) \pi \right\}} \right)$$

dove

$$\operatorname{cosec} \frac{\pi}{a} = 2 \cos \sqrt{k} r_i.$$

BIBLIOGRAFIA.

- [1] L. FEJES TÓTH, *Über dichteste Kreislagerung und dünnste Kreisüberdeckung*, «Comment. Math. Helvetici», 23, 342-349 (1949).
- [2] — *Some packing and covering theorems*, «Acta Univ. Szeged, Acta Sci. Math.», 12/1 62-67 (1950).
- [3] — *Ausfüllung eines konvexen Bereiches durch Kreise*, «Publ. Math. Debrecen», 1, 92-94 (1949).
- [4] — *Lagerungen in der Eben auf der Kugel und im Raum*, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1953.
- [5] — *Collocazioni nel piano, nella sfera e nello spazio* (in russo), Mosca 1958.
- [6] — *Kreisausfüllungen der hyperbolischen Ebene*, «Acta Math. Acad. Hungaricae», 4 103-110 (1953).
- [7] — *Neuere Ergebnisse in der discreten Geometrie*, «Elemente der Mathematik», 15, 25-36 (1960).
- [8] J. MOLNÁR, *Ausfüllung und Überdeckung eines konvexen sphärischen Gebietes durch Kreise*, «Publ. Math. Debrecen», 2, 266-275 (1952).
- [9] — *Über q -Konvexität*, «II. Magyar Mat. Kongresszus», Előadás kivonatok I, Budapest 1960, II, p. 56.
- [10] — *Kreisunterdeckungen in q -konvexen Gebiete*, V. Österreichischer Mat. Kongress, Innsbruck 1960, 53.
- [11] — *Collocazioni di cerchi sulla superficie di curvatura costante*. «Atti delle celebrazioni archimedee del secolo XX», Siracusa (in corso di stampa).
- [12] B. SEGRE-K. MAHLER, *On the densest packing of circles*, «Amer. Math. Monthly», 51, 261-270 (1944).

Geometria. — *Le ipersuperficie irriducibili d'ordine minimo che invadono uno spazio di Galois* (*). Nota di GIUSEPPE TALLINI, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

Consideriamo uno spazio di Galois $S_{r,q}$, cioè uno spazio lineare di dimensione r costruito su un campo di Galois γ_q d'ordine q (con $q = p^h$, ove p è un numero primo uguale alla caratteristica del campo e h un intero positivo). Ai punti di $S_{r,q}$ noi penseremo associati anche quelli a coordinate nella chiusura algebrica Γ di γ_q (1). Quando però in seguito parleremo di punti (o di enti geometrici) di $S_{r,q}$, senza alcun'altra specificazione, intenderemo sempre riferirci a quelli a coordinate (o a coefficienti) in γ_q , mentre sarà esplicitamente avvertito se ci si riferisce a punti (o enti) a coordinate (o a coefficienti) non in γ_q , ma in Γ .

In $S_{r,q}$ una ipersuperficie algebrica è per definizione il luogo dei punti le cui coordinate in Γ , e cioè in γ_q o in una sua qualsiasi estensione algebrica, annullano una forma a coefficienti in γ_q , in $r+1$ variabili. In relazione ad esse si pongono svariati interessanti problemi, come quello della determinazione del numero dei punti che possiedono in γ_q . Un'altra questione (collegata tra l'altro con la classificazione dei quasicorpi distributivi (2)) concerne l'esame delle ipersuperficie prive di punti in γ_q e la determinazione di quelle irriducibili d'ordine minimo.

Un problema, in un certo senso complementare del precedente, consiste nello studio delle ipersuperficie di $S_{r,q}$ che contengono il massimo numero di punti, ossia tutti i punti di $S_{r,q}$; e più propriamente di quelle tra esse che sono irriducibili. Queste ultime, per il fatto stesso di contenere tutti i punti di $S_{r,q}$, godranno di particolarità geometriche interessanti, che merita mettere in luce. Di ciò appunto ci siamo occupati, con speciale riguardo a quelle, tra le suddette ipersuperficie irriducibili, che sono di ordine minimo. Riassumeremo qui i risultati ottenuti, con qualche cenno dimostrativo, rimandando per una esposizione particolareggiata ad un successivo lavoro.

1. In $S_{r,q}$ sia data una ipersuperficie F^n che contenga tutti i punti di $S_{r,q}$. Deve allora essere $n \geq q+1$; la proprietà è infatti manifestamente vera per $r=1$, e la si può quindi stabilire per induzione rispetto ad r : due casi sono possibili, o la F^n contiene, come componenti, tutti i $q^r + q^{r-1} + \dots + q + 1$ iperpiani di $S_{r,q}$, ed allora ovviamente è $n \geq q+1$, oppure esiste

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di Ricerca del C.N.R. n. 35.

(**) Nella seduta del 13 maggio 1961.

(1) Per le nozioni di campo di Galois, chiusura algebrica di un campo, spazio di Galois, e maggiori dettagli, confronta per esempio B. SEGRE [2].

(2) Cfr. L. E. DICKSON [1].

un iperpiano S_{r-1} che non è una componente di F^n ; allora $F^n = S_{r-1} \cap F^n$ è una ipersuperficie di S_{r-1} che invade l' S_{r-1} , dunque, per l'induzione ammessa, segue ancora $n \geq q + 1$.

Usufruendo opportunamente del Lemma I, p. 272 di B. Segre [3], si prova che la più generale F^n invadente l' $S_{r,q}(\kappa_0, \kappa_1, \dots, \kappa_r)$ ha un'equazione del tipo

$$(1) \quad F^n \equiv \sum_{i < j}^{0, r} A_{ij} \varphi_{ij} = 0 \quad , \quad \text{con} \quad \varphi_{ij} = \kappa_i^q \kappa_j - \kappa_i \kappa_j^q,$$

ove le A_{ij} sono forme di grado $n - q - 1$, dipendenti soltanto da $\kappa_i, \dots, \kappa_r$.

Si pone ora il problema di indagare se tra le (1) vi siano ipersuperficie irriducibili (in Γ); determinare quelle di ordine minimo e studiarle.

Il caso del piano si presenta diversamente da quello degli spazi di dimensione superiore. Ed infatti, posto nella (1): $r = 2$ e $n = q + 1$ (e quindi le A_{ij} costanti), si verifica facilmente che la (1) si spezza nelle $q + 1$ rette del fascio con centro nel punto $(A_{12}, -A_{02}, A_{01})$ dunque *tutte le curve \mathcal{C}^{q+1} , invadenti un $S_{2,q}$, sono spezzate in $q + 1$ rette di un fascio*. Posto invece nella

(1), $r \geq 3$, $n = q + 1$, $A_{i2i+1} = 1 \left(i = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{r-1}{2} \right\rfloor \right)$ e tutte le altre A_{ij} uguali a zero, si constata immediatamente che la (1) viene a rappresentare una ipersuperficie priva di singolarità in Γ , se r è dispari, un cono proiettante da un punto una ipersuperficie del tipo precedente di un S_{r-1} , se r è pari. Quindi in ogni caso *per $r \geq 3$ vi sono F^{q+1} irriducibili (in Γ) invadenti l' $S_{r,q}$* .

Nel successivo n. 2 mostreremo che esistono \mathcal{C}^{q+2} irriducibili (in Γ) invadenti l' $S_{2,q}$ e ne daremo la completa classificazione dal punto di vista proiettivo, poggiando su alcune particolarità che esse presentano. Nel n. 3 infine riassumeremo notevoli proprietà delle F^{q+1} irriducibili (in Γ) invadenti l' $S_{r,q}$, ne distingueremo i vari tipi proiettivamente distinti e ne daremo interessanti caratterizzazioni geometriche.

2. Supposta esistente una curva \mathcal{C}^{q+2} di un $S_{2,q}$, irriducibile (in Γ) e che contenga i $q^2 + q + 1$ punti di $S_{2,q}$, ogni retta del piano deve evidentemente avere molteplicità d'intersezione due in un unico punto (in γ_q) della curva e quindi, a priori, o la retta è tangente in quel punto alla curva, oppure ivi questa possiede un punto doppio. Ma si prova facilmente, con considerazioni di carattere aritmetico-geometriche, che la \mathcal{C}^{q+2} non può avere punti multipli in γ_q . Nasce così una corrispondenza biunivoca tra punti e rette di $S_{2,q}$, se si associa ad ogni punto la tangente in esso alla \mathcal{C}^{q+2} . Sia P un punto di $S_{2,q}$; ogni retta, distinta dalla tangente t in P, è tangente alla curva in un punto fuori di P. Si vengono così a determinare, con P, $q + 1$ punti di tangenza; ebbene, si dimostra che essi costituiscono i punti in γ_q di una conica non degenerare. Ne segue che: *la polare di un punto P rispetto alla \mathcal{C}^{q+2} è una \mathcal{C}^{q+1} che in γ_q si riduce ad una conica non degenerare per P*.

L'equazione della \mathcal{C}^{q+2} si desume da (1) qualora ivi si ponga $r = 2$, $n = q + 2$ (le A_{ij} risultano allora forme lineari). Se scegliamo il riferimento proiettivo in $S_{2,q}$, in modo che i punti $O_1(0, 1, 0)$, $U(1, 1, 1)$ stiano sulla conica \mathcal{C} , a cui si riduce la polare di $O_2(0, 0, 1)$ rispetto alla \mathcal{C}^{q+2} , ed il punto $O_0(1, 0, 0)$ sia il polo della retta O_1O_2 rispetto a \mathcal{C} , l'equazione della \mathcal{C}^{q+2} diventa:

$$(2) \quad (a x_0 + b x_1 + c x_2) \varphi_{01} + x_0 \varphi_{20} + x_2 \varphi_{12} = 0.$$

Si tratta ora di vedere se tra le curve (2) ve ne sono di irriducibili (in Γ). All'uopo, con considerazioni aritmetico-geometriche, si prova la seguente proposizione, che ci permette di dare una risposta alla questione:

Se una \mathcal{C}^{q+2} , invadente l' $S_{2,q}$, è riducibile (in Γ), essa deve necessariamente contenere come componente una retta di $S_{2,q}$ (cioè a coefficienti in γ_q).

Da ciò segue allora facilmente che la curva (2) è irriducibile (in Γ) se, e soltanto se, l'equazione in X :

$$(3) \quad X^3 - c X^2 - a X - b = 0$$

è irriducibile in γ_q .

La (3), al variare di a, b, c in γ_q , descrive tutte le possibili equazioni di terzo grado a coefficienti in γ_q . Poiché, come è noto (cfr. B. Segre [2] p. 64 e sg.), tra tali equazioni ve ne sono di irriducibili in γ_q , se ne deduce che esistono \mathcal{C}^{q+2} irriducibili (in Γ), anzi siffatte \mathcal{C}^{q+2} si ottengono tutte - a meno di una trasformazione proiettiva - dalla (2) al variare di a, b, c in γ_q , in modo che la (3) sia irriducibile in γ_q .

La rete delle polari di una fissata \mathcal{C}^{q+2} irriducibile di equazione (2), si riduce in γ_q ad una rete di coniche (cfr. la prima proposizione del presente n. 2), che - come si verifica facilmente - risulta omaloidica, i tre punti base essendo dati da $A_0(\alpha_0, 1, \alpha_0^2)$, $A_1(\alpha_1, 1, \alpha_1^2)$, $A_2(\alpha_2, 1, \alpha_2^2)$, ove $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ sono le tre radici (in γ_q^3) della (3). I punti A_i sono dunque coniugati nella estensione cubica di γ_q , si prova inoltre che essi appartengono alla \mathcal{C}^{q+2} , risultando punti semplici di essa.

Evidentemente la conica \mathcal{C} a cui si riduce la polare di un punto P di $S_{2,q}$ è precisamente la conica per A_0, A_1, A_2 e tangente in P alla retta t , data dalla tangente in P alla \mathcal{C}^{q+2} . Possiamo allora considerare i sei birapporti

$$\theta_{ijk} = (PA_i PA_j PA_k t),$$

(ove i, j, k è una permutazione degli indici $0, 1, 2$). Ebbene essi rimangono costanti al variare di P in $S_{2,q}$. Infatti, se Q è un altro punto di $S_{2,q}$ e \mathcal{C}' la conica, a cui si riduce la polare di Q ; la \mathcal{C}' incontrerà la conica \mathcal{C} in un punto R , oltre che nei tre punti A , che è il punto di tangenza della PQ con la \mathcal{C}^{q+2} . Per il teorema di Steiner applicato alla conica \mathcal{C} si ha allora

$$\theta_{ijk} = (PA_i PA_j PA_k t) = (RA_i RA_j RA_k PQ),$$

ma, sempre per il teorema di Steiner, applicato a \mathcal{C}' , si ha

$$(\mathrm{RA}_i \mathrm{RA}_j \mathrm{RA}_k \mathrm{PQ}) = (\mathrm{QA}_i \mathrm{QA}_j \mathrm{QA}_k \ell') = \theta'_{ijk},$$

con ovvio significato dei simboli, onde l'asserto.

I sei birapporti θ_{ijk} sono dunque degli invarianti della \mathcal{C}^{g+2} rispetto alle omografie e coefficienti in γ_g . Tali quantità evidentemente si distribuiscono in due terne (a seconda che la permutazione i, j, k è di classe pari o dispari) ciascuna costituita di elementi tra loro coniugati nell'estensione cubica di γ_g , e quindi soddisfano una ben determinata equazione di sesto grado $f(\theta) = 0$, a coefficienti in γ_g ; funzioni razionali di a, b, c . La $f(\theta) = 0$ risulta allora invariantivamente collegata alla curva. Ebbene si prova che:

se a due curve irriducibili (2) è associata la stessa equazione $f(\theta) = 0$, esse sono proiettivamente equivalenti in γ_g , cioè esiste una proiettività a coefficienti in γ_g che muta l'una nell'altra.

Si può ulteriormente fissare il riferimento proiettivo, di cui nel secondo capoverso di questo numero, scegliendo opportunamente i punti O_1 e U sulla conica $\tilde{\mathcal{C}}$, in modo che la (2) si riduca ulteriormente, se è $p \neq 3$ alla forma:

$$(4) \quad K(x_0 + x_1) \varphi_{01} + x_0 \varphi_{20} + x_2 \varphi_{12} = 0,$$

oppure

$$(5) \quad Kx_1 \varphi_{01} + x_0 \varphi_{20} + x_2 \varphi_{12} = 0;$$

se invece è $p = 3$, alla forma (4) oppure:

$$(6) \quad (x_1 + Kx_2) \varphi_{01} - x_0 \varphi_{20} - x_2 \varphi_{12} = 0.$$

L'equazione (3) corrispondente, diventa allora nei tre casi rispettivamente:

$$(4') \quad X^3 - KX - K = 0,$$

$$(5') \quad X^3 = K,$$

$$(6') \quad X^3 + KX + 1 = 0,$$

le curve (4), (5), (6) risultando irriducibili se, e soltanto se, la costante K che in esse compare è tale che le equazioni (4'), (5'), (6') risultino irriducibili in γ_g . Quindi esistono curve (5) irriducibili soltanto se $g \equiv 1 \pmod{3}$, in quanto, in caso contrario, la (5') è sempre riducibile (cfr. B. Segre [2] n. 79).

Ebbene, in forza della precedente proposizione, si prova — determinando nei vari casi la $f(\theta) = 0$ — che le curve irriducibili (4), se $p \neq 3$ sono tutte proiettivamente distinte, mentre se $p = 3$, sono tutte proiettivamente equivalenti; se $p = 3$, le curve irriducibili (6) sono tutte proiettivamente distinte; se $g \equiv 1 \pmod{3}$ le curve irriducibili (5) sono tutte proiettivamente equivalenti. D'altra parte si dimostra che esistono $(g+1)/3$ valori di K per cui la (4') risulta irriducibile in γ_g , se $g \equiv -1 \pmod{3}$, ne esistono

Data una qualsiasi ipersuperficie invadente tutto $S_{r,q}$ ($r \geq 3$), di ordine $n < 2q$, ad essa rimane associata una corrispondenza punto-iperpiano tangente; se tale corrispondenza è una polarità nulla, allora o è $n = q + 1$ e l'ipersuperficie risulta del tipo (8), oppure essa è riducibile e si spezza in una ipersuperficie del tipo (8) ed in un'altra.

Soffermiamoci a considerare l'ipersuperficie (7). Essa come si è detto è non singolare in Γ , contiene evidentemente tutte le rette (a coefficienti in γ_q) del complesso lineare associato alla polarità nulla Ω , ed ammette come spazi massimi gli S_n (a coefficienti in γ_q) autoconiugati rispetto ad Ω (in quanto ogni retta di tale S_n appartiene al complesso lineare, e quindi, se è a coefficienti in γ_q , fa parte di F^{q+1}), ma essi non sono i soli S_n di F^{q+1} , come si desume dalla seguente proposizione, di cui omettiamo per brevità la dimostrazione.

Fissato un \bar{S}_n autoconiugato rispetto ad Ω e quindi appartenente ad F^{q+1} , gli S_{n+1} per \bar{S}_n intersecano la F^{q+1} nei tre seguenti modi:

1° *Se S_{n+1} appartiene a γ_q , esso sega la F^{q+1} , oltre che in \bar{S}_n , in altri q S_n (autoconiugati rispetto ad Ω) formanti fascio con \bar{S}_n , anzi esiste una corrispondenza proiettiva tra gli S_{n-1} ($\in \bar{S}_n$) a coefficienti in γ_q , assi di tali fasci, e gli S_{n+1} a coefficienti in γ_q della stella di asse \bar{S}_n .*

2° *Se S_{n+1} è in $\gamma_q^2 - \gamma_q$, esso interseca la F^{q+1} , oltre che in \bar{S}_n , in q S_n di $\gamma_q^2 - \gamma_q$, formanti fascio con \bar{S}_n e vi è ancora una corrispondenza algebrica, ma non proiettiva, tra gli S_{n-1} ($\in \bar{S}_n$) di γ_q^2 , assi di tali fasci, e gli S_{n+1} a coefficienti in γ_q^2 della stella di asse \bar{S}_n .*

3° *Se S_{n+1} non è né in γ_q^2 , né in γ_q , esso interseca la F^{q+1} , oltre che in \bar{S}_n , in un cono d'ordine q , con vertice un S_{n-2} di \bar{S}_n , e che proietta dallo S_{n-2} un monoide piano (con vertice su \bar{S}_n), se $n > 1$, mentre se $n = 1$ ($r = 3$), l' $S_{n+1} = S_2$ interseca la F^{q+1} in un monoide.*

Dunque la F^{q+1} , oltre a contenere gli S_n (a coefficienti in γ_q) autoconiugati rispetto ad Ω , possiede anche altri S_n (per esempio quelli di cui al caso 2° della proposizione precedente): però si dimostra che essi sono tutti a coefficienti in γ_q^2 . La F^{q+1} quindi contiene in Γ un numero finito di S_n , costituenti un'interessante configurazione. Dalla proposizione precedente segue anche che la F^{q+1} , contenendo un sistema ∞^n di coni V_n^q razionali, è un'ipersuperficie razionale.

Si osservi infine che, se $n > 1$, cioè $r \geq 5$, la F^{q+1} è rigata in Γ , anzi è luogo di ∞^{n+1} S_{n-1} ; mentre se $n = 1$, ossia $r = 3$, la F^{q+1} non è rigata.

Dunque il caso $r = 3$ si presenta in modo eccezionale rispetto ai precedenti. Esaminiamolo perciò separatamente. La F^{q+1} contiene le $q^3 + q^2 + q + 1$ rette in γ_q del complesso lineare associato ad Ω , ed inoltre altre $q^4 - q^2$ rette in γ_q^2 (le quali però non appartengono al complesso lineare); in tutto possiede $(q + 1)(q^3 + 1)$ rette distinte. Tali rette sono distribuite in modo che, fissatane una, sia r , esistono esattamente $q(q^2 + 1)$ rette di F^{q+1} incidenti r , e q^4 sghembe con essa. Siffatta configurazione ricorda quella delle 27 rette di una superficie cubica generale, ed infatti per $q = 2$, la F^{q+1} risulta una superficie cubica generale di $S_{3,2}$.

Per finire accenneremo ad un'ultima questione, da noi risolta, da cui si desume un'interessante caratterizzazione della superficie F^{q+1} , invadente l' $S_{3,q}$ di cui sopra.

Tra tutte le possibili superficie irriducibili di $S_{3,q}$, non singolari in γ_q , si considerino quelle che contengono il maggior numero di rette in γ_q . Ebbene si dimostra che: tali rette sono in numero di $q^3 + q^2 + q + 1$, esse debbono costituire un complesso lineare, ed inoltre, se l'ordine della superficie è $< 2q$, questa deve coincidere con una F^{q+1} irriducibile invadente l' $S_{3,q}$. Dunque le superficie F^{q+1} suddette possono caratterizzarsi come quelle superficie irriducibili, non singolari in γ_q , di $S_{3,q}$, d'ordine $< 2q$, che contengono il maggior numero di rette in γ_q .

BIBLIOGRAFIA.

- [1] L. E. DICKSON, *Linear Algebras*, Cambridge, Univ. Press, 1914.
- [2] B. SEGRE, *Lezioni di geometria moderna*, vol. I (Bologna, Zanichelli, 1948).
- [3] B. SEGRE, *Sul numero delle soluzioni di un qualsiasi sistema di equazione algebriche sopra un campo finito*, « Acc. Naz. Lincei » (8), 28, pp. 271-277 (1960).
- [4] B. SEGRE, *Lectures on modern geometry* (Roma, Cremonese, 1961).

Geometria. — *Frammenti piani autoduali e relative sostituzioni.* Nota di KARL MENDER, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

Il presente lavoro riassume una comunicazione da me tenuta al Colloquio matematico svoltosi nel maggio 1960 presso l'« Illinois Institute of Technology » di Chicago; comunicazione che ha già provocato interessanti ricerche da parte dei miei colleghi G. Pall e R. Seall.

1. FRAMMENTI AUTODUALI DEL PIANO AFFINE. — Nel piano affine, mentre due punti qualsiasi sono congiunti da una (ed una sola) retta, vi sono rette — fra loro parallele — che non si incontrano; assegnata una qualsiasi retta, r , per ogni punto P che non giaccia su essa passa una ed una sola retta parallela alla r .

Dal piano affine può dedursi un piano *autoduale*, nel quale cioè punti e rette hanno uffici scambievoli, in due modi diversi: od *aggregando* una nuova retta (la retta « all'infinito ») ed i suoi punti, oppure *omettendo* un punto e le rette per esso od un fascio di rette parallele (per esempio quello delle rette verticali). Il primo procedimento conduce al piano proiettivo tradizionale, autoduale in quanto su esso due rette qualunque si tagliano: L'omissione, come ebbi a rilevare anni addietro, conduce invece ad un *frammento autoduale* di piano nel quale — accanto a rette che non si tagliano — trovansi coppie di punti non congiunti da rette, e che possono dirsi fra loro « paralleli »; vale in esso manifestamente l'analogo del postulato di Euclide sulle parallele: assegnato un qualunque punto, P , su ogni retta non passante per P v'è uno ed un sol punto « parallelo » a P .

È chiaro che il suddetto frammento del piano affine può anche ottenersi omettendo da un piano proiettivo tanto una retta u ed i suoi punti quanto un punto V e tutte le rette per esso. Supporrò in seguito che V appartenga ad u (il che corrisponde ad omettere dal piano affine un fascio di rette parallele); V sarà quindi detto il « punto di verticalità » e le rette per V saranno denominate « verticali ».

Dal punto di vista analitico, gli elementi del frammento — ossia i punti (al finito) e le rette (non verticali) — possono venire rappresentati mediante coppie ordinate di numeri reali, in guisa tale che il punto (x, y) e la retta (a, b) vengano ad appartenersi se e soltanto se

$$a \cdot x = b + y.$$

Vedremo ora come, nel suddetto frammento, possano definirsi due tipi di sostituzioni: sostituzioni rispetto a rette e sostituzioni rispetto a punti.

(*) Nella seduta del 13 maggio 1961.

2. SOSTITUZIONE DI PUNTI RISPETTO A RETTE. - La *sostituzione rispetto ad una retta* non è che un'applicazione della sostituzione grafica⁽¹⁾ di una funzione g in una funzione f , nel caso speciale in cui f sia una funzione lineare, avente appunto per grafico una retta non verticale.

Denoterò con j la classe di tutti i punti (x, x) di un piano cartesiano, e la chiamerò la retta « identità ». In generale, per sostituire il punto $P = (x, y)$ rispetto alla curva f si procederà nel modo seguente (ved. fig. 1):

1° si tracci l'orizzontale per P ; 2° si intersechi questa retta colla j ; 3° si tracci la verticale per il punto (y, y) così ottenuto; 4° si intersechi questa retta con f ; 5° si tracci la retta orizzontale per il punto $(y, f(y))$ così ottenuto; 6° si intersechi questa retta colla verticale per P .

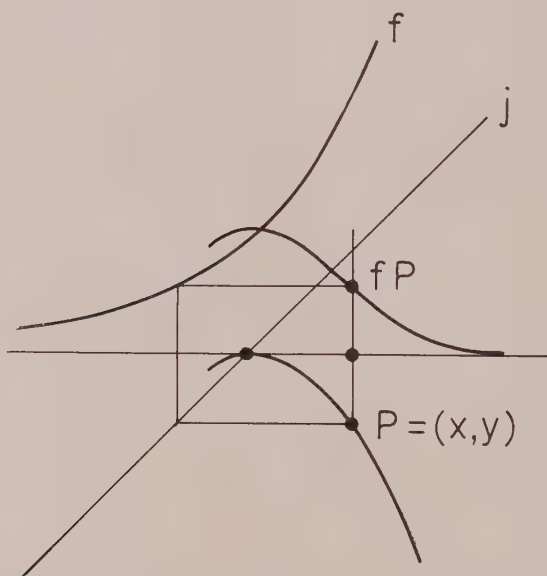


Fig. 1.

Il punto $(x, f(y))$ a cui così si perviene sarà denotato con fP e si dirà ch'esso è il risultato della sostituzione di P in f (o rispetto ad f). Così, ad esempio, se f è la curva esponenziale luogo dei punti (y, e^y) , e se P descrive la parabola luogo dei punti $(x, -x^2)$, fP descrive la curva della probabilità luogo dei punti (x, e^{-x^2}) .

Una *sostituzione proiettiva rispetto ad una retta* fa intervenire un punto U di u ed una retta j non passante né per U né per V ; il punto U era pre-

(1) Cfr. il mio libro: *Calculus, A Modern Approach* (Boston 1955), cap. IV, e l'articolo: *An Axiomatic Theory of Functions and Fluents* nel volume *The Axiomatic Method*, ed. da HENKINS ed al. (Amsterdam 1959), specialmente a p. 460. Un'esposizione dell'algebra delle funzioni a ciò collegata apparirà presto nei « Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni ».

cedentemente quello della direzione orizzontale, onde le rette per U verranno dette « orizzontali », mentre la retta j , non essendo né orizzontale né verticale, si chiamerà « obliqua ». Per sostituire il punto P rispetto alla retta r non verticale, in relazione ad U e j , si procederà nel modo seguente (ved. fig. 2):

1° si congiunga P ad U; 2° si intersechi la retta così ottenuta colla j ; 3° si congiunga quest'intersezione con V; 4° si intersechi la retta così ottenuta colla r ; 5° si congiunga quest'intersezione con U; 6° si intersechi la retta così ottenuta con la retta congiungente P e V.

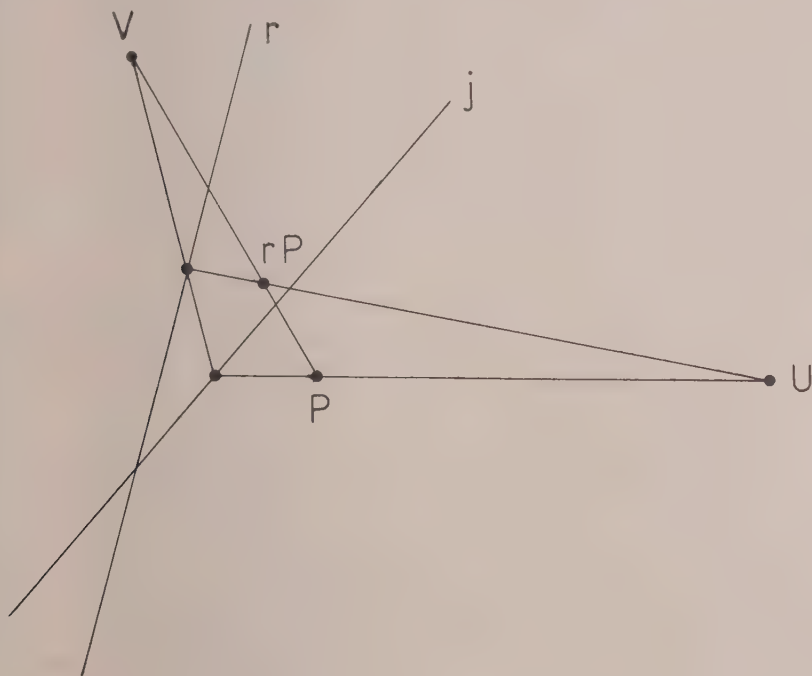


Fig. 2.

Il punto a cui in tal guisa si perviene sarà denotato con rP . Mediante simbolismo di chiaro significato, si ha dunque

$$rP = ((PUjVrU)(PV))$$

ove si sottintendono le operazioni del congiungere ed intersecare.

3. SOSTITUZIONE DI RETTE RISPETTO A PUNTI. — Il procedimento del n. 2 può manifestamente venire dualizzato. In relazione ad una retta v per V e ad un punto identità, J, che non stia né su v né su u , la sostituzione di una retta r rispetto ad un punto P fornisce la retta

$$Pr = ((rvJuPv)(ru)).$$

Allo scopo di coordinare fra loro le due sostituzioni, si sceglieranno v , U , j e J in guisa che il punto (vj) stia sulla retta (UJ) .

4. r -RAPPRESENTAZIONI. - Ad ogni retta r non verticale resta associata una rappresentazione del frammento in sé - quella che muta un qualunque punto P nel punto rP - e la chiameremo la r -rappresentazione.

Se il piano proiettivo iniziale è desarguesiano, allora - per ogni V , U , j ed una qualunque retta obliqua r - la r -rappresentazione è una *collineazione*, e più precisamente un'omologia di centro V che trasforma rette orizzontali in rette orizzontali, avendo come asse la retta (rjU) . Invece, in ogni piano non-desarguesiano vi sono elementi V , U , j e rette oblique r tali che la r -rappresentazione non sia una collineazione. In ogni caso, la j -rappresentazione è l'identità (e cioè lascia fissi i singoli punti del frammento). Se h è un'orizzontale qualsiasi, la h -rappresentazione riducesi alla proiezione dal centro V sulla retta h . Se (P, P') e (Q, Q') sono due coppie ordinate di punti «paralleli» tali che $P \perp Q$, esiste esattamente una retta r non verticale tale che $rP = P'$ ed $rQ = Q'$.

5. SOSTITUZIONE DI RETTE IN RETTE. - Prese due qualsiasi rette r, s non verticali, denoteremo con rs il luogo dei punti rP al variare del punto P su s . È chiaro che, in un piano desarguesiano, rs è una retta non verticale; e si costata che:

La composizione fra rette non verticali, così definita, risulta associativa.

Pertanto, in un piano desarguesiano le rette non verticali formano un semigruppato, dotato dell'elemento neutro j . Ogni retta r obliqua definisce univocamente un'opposta, ossia una retta r' (pure obliqua) tale che $rr' = j$; e le rette r, r' e j concorrono in un punto. Le rette oblique costituiscono dunque un sottogruppo del suddetto semigruppato. Le rette orizzontali costituiscono in questo un sottogruppo abeliano, ove la composizione corrisponde all'addizione nel campo base. Per ogni punto P di j , le rette oblique per P costituiscono pure un sottogruppo, ove la composizione corrisponde alla moltiplicazione nel campo base.

Mentre in un piano di Pappo questi due ultimi sottogruppi risultano isomorfi, e quindi entrambi commutativi, in un piano non di Pappo vi sono elementi V , U , j tali che il gruppo delle rette oblique per un punto P di j non sia commutativo.

6. COMPITI ULTERIORI. - Va da sé che i punti di un frammento autoduale costituiscono pure un semigruppato. E varie questioni possono porsi circa la connessione fra i due tipi di sostituzioni.

D'altro canto, le rette di un frammento autoduale, e quindi pure la geometria di un piano proiettivo, possono venire caratterizzate mediante uno solo di quei gruppi: quello delle sostituzioni di rette in rette

oppure di punti in punti. Sarebbe interessante studiare tale gruppo, per esempio nel caso dei piani finiti.

Resterebbe inoltre da estendere ciò che precede agli spazi a tre o più dimensioni. All'uopo converrà porre sotto forma proiettiva la costruzione da me data ⁽²⁾ per la sostituzione di una coppia di funzioni in una funzione di due variabili, deducendone una sostituzione di una coppia ordinata di piani in un piano, e generalizzare poi i risultati agli spazi superiori.

(2) Ved. l'edizione litogr. del mio libro: *Calculus. A Modern Approach* (Chicago 1952) p. 224, ed i prossimi lavori di S. Penner e W. Jaffe.

Meccanica. — *Sulla dinamica dei solidi tubolari: equazioni non linearizzate*^(*). Nota di GIORGIO FERRARESE, presentata^(**) dal Socio A. SIGNORINI.

Nella presente Nota si dà forma esplicita alle equazioni non linearizzate della dinamica delle sbarre; si vuol dire, dei solidi tubolari schematizzabili in una linea a quattro parametri⁽¹⁾ perfettamente elastica.

Riesce naturalmente essenziale, per la scrittura di dette equazioni, una conveniente scelta dei quattro parametri lagrangiani del sistema, nonché l'uso di una certa espressione della velocità angolare⁽²⁾ valida in un qualunque moto rigido. Ciò specialmente per quanto riguarda l'espressione lagrangiana del momento risultante specifico delle forze d'inerzia e quella, particolarmente semplice, che viene data alle ordinarie caratteristiche di deformazione; caratteristiche che nella forma usuale, come è noto⁽³⁾, fanno intervenire come parametri, certo non adatti allo scopo, la curvatura, la torsione e il twist, insieme al coefficiente di dilatazione lineare secondo la tangente.

Per brevità si suppone che, nella configurazione di riferimento, la direttrice del solido tubolare (cioè il luogo dei baricentri delle sezioni normali pensate come omogenee) sia rettilinea. Il caso più generale non presenta però alcuna difficoltà. Del resto i primi quattro numeri, che non presuppongono alcune limitazioni per la scelta della configurazione di riferimento, da soli bastano ad impostare il problema completo.

I. — PREMESSE.

Prendo in considerazione un solido tubolare, T , schematizzato in una linea a quattro parametri indicando con:

C_* e C due configurazioni di T comunque prefissate, l_* ed l le relative direttrici;

K_* e K la generica coppia di punti corrispondenti di l_* ed l , s_* ed s le rispettive ascisse curvilinee contate a partire da un estremo;

$\mathcal{C}^* \equiv K_* i_1^* i_2^* i_3^*$ la cosiddetta terna principale relativa a K_* , costituita dagli assi centrali di inerzia della sezione normale del solido tubolare in K_* (i_3^* tangente ad l_*);

$\mathcal{C} \equiv K i_1 i_2 i_3$ la terna principale relativa a K .

(*) Lavoro eseguito nel gruppo di ricerca n. 39 del C.N.R.

(**) Nella seduta del 13 maggio 1961.

(1) Cfr. ad esempio G. CAPRIZ, *Sopra le deformazioni elastiche finite di un solido tubolare*, « Rendiconti di Matem. », serie V, volume XV, 1-2, pp. 231-32.

(2) Cfr. G. FERRARESE, *Sulla velocità angolare nei moti rigidi e la rotazione locale nelle deformazioni finite*, « Rendiconti di Matem. », serie V, volume XVIII, 1-2.

(3) Cfr. ad esempio loc. cit. nota (1), p. 236.

Siano inoltre:

$$(1) \quad \delta = \frac{ds}{ds_*} - 1 = (1 + 2E)^{1/2} - 1$$

il coefficiente di dilatazione lineare in K_* nella direzione di \mathbf{i}_3^* ;

$$(2) \quad \mathbf{W} = K_* K = \sum_h^3 u_h \mathbf{i}_h^*$$

lo spostamento del punto K_* ; $\mathcal{R}(s_*)$ il rotore definito con le condizioni

$$(3) \quad \mathbf{i}_h = \mathcal{R} \mathbf{i}_h^*;$$

$\mathbf{q}(s_*)$ il vettore caratteristico ⁽⁴⁾ di \mathcal{R} .

La restrizione che il vettore infinitesimo $dK_* = \mathbf{i}_3^* ds_*$ si trasformi in un vettore tangente ad l (vincolo interno per il solido tubolare) ha, come è noto ⁽⁵⁾, per conseguenza la circostanza che lo sforzo di taglio in C assume il carattere di reazione vincolare. In ogni modo, essendo

$$(4) \quad \mathbf{i}_3 = \mathcal{R} \mathbf{i}_3^* = \mathbf{i}_3^* + \frac{2}{1 + q^2} (\mathbf{q} \wedge \mathbf{i}_3^* - q^2 \mathbf{i}_3^* + \mathbf{i}_3^* \times \mathbf{q} \cdot \mathbf{q})$$

e insieme [cfr. (2)]

$$(5) \quad \frac{d\mathbf{W}}{ds_*} = (1 + \delta) \mathbf{i}_3 - \mathbf{i}_3^*,$$

il vincolo prima detto si esprime con la limitazione

$$(5') \quad \frac{d\mathbf{W}}{ds_*} = \delta \mathbf{i}_3^* + 2 \frac{1 + \delta}{1 + q^2} (\mathbf{q} \wedge \mathbf{i}_3^* - q^2 \mathbf{i}_3^* + \mathbf{i}_3^* \times \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}).$$

È chiaro che, assegnati δ e \mathbf{q} in funzione di s_* , la (5') dà quanto basta per determinare, con una quadratura, lo spostamento \mathbf{W} dei punti di l_* , non appena si conosca lo spostamento di un punto della direttrice, ad esempio di uno degli estremi. I parametrici δ e \mathbf{q} sono quindi sufficienti a determinare, nello schema supposto per T , lo spostamento $C_* \rightarrow C$. Di solito invece, almeno per piccole trasformazioni, si pensano indipendenti lo spostamento \mathbf{W} e la componente di \mathbf{q} secondo la tangente \mathbf{i}_3^* ; ciò che è lecito perché la (5) dà luogo a

$$(1') \quad (1 + \delta)^2 = \left(\mathbf{i}_3^* + \frac{d\mathbf{W}}{ds_*} \right)^2$$

e permette di determinare, noto \mathbf{W} , il coefficiente di dilatazione lineare δ nonché [cfr. (5)] il vettore \mathbf{i}_3 . La (4) poi che, come equazione in \mathcal{R} non può

(4) Cfr. A. SIGNORINI, *Trasformazioni termoelastiche finite*, Memoria I^a, «Ann. Matem. Pura e Appl.», ser. IV, tomo XXII, p. 56 (1943).

(5) Cfr. loc. cit. nota ⁽¹⁾, p. 235.

che ammettere ∞^1 soluzioni ⁽⁶⁾, dà quanto basta per determinare il componente di \mathbf{q} normale a \mathbf{i}_3^* . Per riconoscerlo, si decompongano i due vettori, \mathbf{q} e \mathbf{i}_3 rispettivamente, secondo la direzione di \mathbf{i}_3^* e la giacitura normale:

$$(6) \quad \mathbf{q} = \mathbf{p} + q_3 \mathbf{i}_3^* \quad , \quad \mathbf{i}_3 = \mathbf{n} + r \mathbf{i}_3^* .$$

La (4) si scrive allora

$$\mathbf{n} + r \mathbf{i}_3^* = \frac{2}{1+q^2} (\mathbf{p} \wedge \mathbf{i}_3^* + q_3 \mathbf{p}) + \left(1 + 2 \frac{q_3^2 - q^2}{1+q^2} \right) \mathbf{i}_3^*$$

nonché

$$\mathbf{n} = \frac{2}{1+q^2} (\mathbf{p} \wedge \mathbf{i}_3^* + q_3 \mathbf{p}) + \left(1 + 2 \frac{q_3^2 + 1 - 1 - q^2}{1+q^2} - r \right) \mathbf{i}_3^* .$$

Di qui, moltiplicando scalarmente per \mathbf{i}_3^* , si ricava

$$\frac{2}{1+q^2} = \frac{1+r}{1+q_3^2}$$

e quindi in definitiva

$$\mathbf{n} = \frac{1+r}{1+q_3^2} (\mathbf{p} \wedge \mathbf{i}_3^* + q_3 \mathbf{p}) .$$

La relazione ora scritta, equivalente alla (4), è ovviamente una equazione per il solo componente di \mathbf{q} normale a \mathbf{i}_3^* ; equazione del tipo ⁽⁷⁾

$$(4') \quad \rho \mathbf{p} = \mathbf{h} \quad \left(\mathbf{h} = \frac{1+q_3^2}{1+r} \cdot \frac{\mathbf{n}}{q_3} \right) ,$$

essendo ρ l'omografia definita con la posizione

$$\rho = 1 - \frac{\mathbf{i}_3^*}{q_3} \wedge .$$

Per accertare la univoca determinazione di \mathbf{p} basterà poi osservare che la (4') è univocamente risolubile rispetto a \mathbf{p} , risultando ρ una omografia a invariante terzo positivo:

$$I_3 \rho = 1 + \frac{1}{q_3^2} .$$

Precisamente, essendo ⁽⁸⁾

$$\rho^{-1} = \frac{1}{I_3 \rho} \left(1 + \frac{\mathbf{i}_3^*}{q_3} \wedge + \mathbf{i}_3^* \cdot \frac{\mathbf{i}_3^*}{q_3^2} \times \right) ,$$

(6) Si osservi come gli spostamenti rotatori attorno ad un punto che ammettono una prefissata coppia di punti corrispondenti si possono porre in corrispondenza biunivoca con un parametro.

(7) Il caso $q_3 = 0$ si esaurisce immediatamente: $\mathbf{p} = \frac{1}{1+r} \mathbf{i}_3^* \wedge \mathbf{n}$.

(8) Cfr. ad esempio A. SIGNORINI, *Lezioni di Fisica Matematica*, 1952-53, 2^a ed. (Roma, Veschi), p. 16.

la (4') esattamente si traduce in

$$\mathbf{p} = \frac{1}{1 + q_3^2} (q_3^2 \mathbf{h} + q_3 \mathbf{i}_3^* \wedge \mathbf{h} + \mathbf{i}_3^* \times \mathbf{h} \cdot \mathbf{i}_3^*),$$

cioè in definitiva

$$(4'') \quad \mathbf{p} = \frac{1}{1 + r} (q_3 \mathbf{n} + \mathbf{i}_3^* \wedge \mathbf{n}).$$

Si noti che *condizione necessaria e sufficiente perché lo spostamento* $C_* \rightarrow C$ *di* T *si riduca ad uno spostamento rigido è che risulti*

$$\delta = 0 \quad , \quad \frac{d\mathbf{q}}{ds_*} = 0 \dots l_*.$$

La sola condizione $\delta = 0$ implica infatti [cfr. (5)]

$$\frac{d\mathbf{W}}{ds_*} + \mathbf{i}_3^* = \mathcal{R} \mathbf{i}_3^*$$

ovvero

$$\frac{dOK}{ds_*} = \mathcal{R} \frac{dOK_*}{ds_*},$$

essendo O un punto fisso.

Se, in aggiunta a $\delta = 0$, si suppone $d\mathbf{q}/ds_* = 0$, cioè $\mathcal{R} = \text{cost.}$, per i singoli punti della direttrice nella configurazione deformata C , insieme a $\mathbf{i}_h = \mathcal{R} \mathbf{i}_h^*$, risulta

$$OK = \mathcal{R} OK_* + \mathbf{t},$$

essendo \mathbf{t} un vettore arbitrario, indipendentemente da s_* . Lo spostamento $C_* \rightarrow C$ si ottiene quindi componendo la rotazione (costante) \mathcal{R} di centro O con la traslazione di vettore \mathbf{t} e si riduce pertanto ad uno spostamento rigido.

Per quanto ora detto è completamente giustificata, per le quattro quantità scalari, δ ed $\varepsilon = 2 d\mathbf{q}/ds_*$, la denominazione di *caratteristiche di deformazione* del solido tubolare T .

Per trasformazioni finite, l'uso delle componenti secondo \mathcal{E}^* del vettore ε è forse più comodo delle differenze $\kappa_i - \kappa_o$, $\kappa'_i - \kappa'_o$, $\tau_i - \tau_o$ che sistematicamente intervengono nella teoria dei solidi tubolari⁽⁹⁾; per piccole trasformazioni, come vedremo alla fine del prossimo numero si ha coincidenza perfetta.

2. — LEGAMI FRA ε E LE ORDINARIE CARATTERISTICHE DI DEFORMAZIONE DI UN SOLIDO TUBOLARE.

Di regola, nella teoria dei solidi T si considerano i due vettori

$$(7) \quad \mathbf{G} = \frac{1}{2} \sum_h \mathbf{i}_h \wedge \frac{d\mathbf{i}_h}{ds_*} \quad , \quad \mathbf{G}_* = \frac{1}{2} \sum_h \mathbf{i}_h^* \wedge \frac{d\mathbf{i}_h^*}{ds_*}$$

(9) Cfr. A. E. H. LOVE, *A Treatise on the mathematical Theory of Elasticity*, IV ed. pp. 396-397.

e si assumono come caratteristiche di deformazione, insieme a δ , le quantità

$$\psi_h = \mathbf{G} \times \mathbf{i}_h - \mathbf{G}_* \times \mathbf{i}_h^* \quad (h = 1, 2, 3),$$

che ordinatamente coincidono con le differenze $\kappa_1 - \kappa_0, \kappa'_1 - \kappa'_0, \tau_1 - \tau_0$ già menzionate.

È manifesto il significato dei due vettori \mathbf{G} e \mathbf{G}_* , rappresentando entrambi delle velocità angolari ($s_* = t$). Ad esempio \mathbf{G}_* assume il ruolo di velocità angolare istantanea nel moto fittizio del triedro \mathcal{C}_* , ottenuto facendo descrivere al punto K_* la curva \mathcal{L}_* con velocità scalare unitaria.

Per precisare il legame fra le ψ_h e il vettore ε , cominciamo con l'osservare che dalla (7)₁ segue [cfr. (3)]

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2} \sum_1^3 \mathcal{R} \mathbf{i}_h^* \wedge \mathcal{R} \frac{d\mathbf{i}_h^*}{ds_*} + \frac{1}{2} \sum_1^3 \mathbf{i}_h \wedge \frac{d\mathcal{R}}{ds_*} \mathcal{R}^{-1} \mathbf{i}_h$$

ovvero ⁽¹⁰⁾

$$\mathbf{G} = \mathcal{R} \mathbf{G}_* + \psi,$$

avendo posto per semplicità

$$(8) \quad \psi = \mathbf{V} \left[\frac{d\mathcal{R}}{ds_*} \mathcal{R}^{-1} \right]$$

($\mathbf{V} [\]$ simbolo di vettore di una omografia).

Si ha pertanto ⁽¹¹⁾

$$(9) \quad \psi_h = \mathcal{R} \mathbf{G}_* \times \mathcal{R} \mathbf{i}_h^* + \psi \times \mathbf{i}_h - \mathbf{G}_* \times \mathbf{i}_h^* = \psi \times \mathbf{i}_h:$$

le ψ_h danno cioè le componenti, secondo \mathcal{C} , del vettore dell'omografia assiale $(d\mathcal{R}/ds_*) \mathcal{R}^{-1}$.

D'altra parte è ⁽¹²⁾

$$(10) \quad \mathbf{V} \left[\frac{d\mathcal{R}}{ds_*} \mathcal{R}^{-1} \right] = \frac{2}{1+q^2} \left(\frac{d\mathbf{q}}{ds_*} + \mathbf{q} \wedge \frac{d\mathbf{q}}{ds_*} \right)$$

e quindi in definitiva la (8) si precisa in

$$(8') \quad \psi = \frac{1}{1+q^2} (\varepsilon + \mathbf{q} \wedge \varepsilon).$$

Si vede bene che, per piccole trasformazioni, si deve intendere $\psi = \varepsilon$, nonché [cfr. (9)]

$$(11) \quad \psi_h = \varepsilon \times \mathbf{i}_h^*,$$

mentre in generale è

$$(9') \quad \psi_h = \psi \times \mathbf{i}_h = \mathcal{R}^{-1} \psi \times \mathbf{i}_h^*.$$

(10) Si noti che un rotore coincide col complementare e quindi $\mathcal{R}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}') = \mathcal{R}\mathbf{v} \wedge \mathcal{R}\mathbf{v}'$.

(11) Per un rotore il coniugato coincide con l'inverso e quindi il teorema di commutazione si scrive $\mathbf{v} \times \mathcal{R}\mathbf{v}' = \mathcal{R}^{-1} \mathbf{v} \times \mathbf{v}'$.

(12) Cfr. loc. cit. nota (2) pp. 170 e 171, formule (1) e (2).

In ogni caso però, come è naturale, l'annullarsi identico di ε implica quello delle ψ_h e viceversa.

Osservazione. — Sia γ una omografia qualunque e $\gamma_{\mathcal{R}} = \mathcal{R}\gamma\mathcal{R}^{-1}$ la sua trasformata mediante il rotore \mathcal{R} . La proprietà ben nota ⁽¹³⁾ che i coefficienti di γ secondo una terna prefissata τ ordinatamente coincidono con quelli di $\gamma_{\mathcal{R}}$ rispetto alla terna trasformata di τ mediante \mathcal{R} , ha come ovvia conseguenza l'uguaglianza

$$(12) \quad \mathbf{V}[\gamma_{\mathcal{R}}] = \mathcal{R}\mathbf{V}[\gamma]$$

nonché

$$(12') \quad \mathcal{R}^{-1}\mathbf{V}[\gamma_{\mathcal{R}}] = \mathbf{V}[\gamma].$$

Per $\gamma = \mathcal{R}^{-1} \frac{d\mathcal{R}}{ds_*} = - \frac{d\mathcal{R}^{-1}}{ds_*} \mathcal{R}$ la (12') dà subito luogo a [cfr. (8)]

$$\mathcal{R}^{-1}\psi = -\mathbf{V}\left[\frac{d\mathcal{R}^{-1}}{ds_*}\mathcal{R}\right];$$

ciò che basta per ricavare, scambiando nella (10) \mathcal{R} con \mathcal{R}^{-1} (e quindi \mathbf{q} con $-\mathbf{q}$),

$$(8'') \quad \mathcal{R}^{-1}\psi = \frac{1}{1+q^2}(\varepsilon - \mathbf{q} \wedge \varepsilon).$$

3. — MODO DI VARIARE DELLE ψ_h IN UN CAMBIAMENTO DEL RIFERIMENTO.

Facciamo intervenire, accanto a C_* e C , un'altra configurazione \bar{C} del solido tubolare, indicando col soprasssegno tutti gli elementi relativi a \bar{C} .

Poniamo quindi, con referenza agli spostamenti $\bar{C} \rightarrow C$ e $\bar{C} \rightarrow C_*$ rispettivamente,

$$\bar{\mathbf{i}}_h = \mathcal{R}\bar{\mathbf{i}}_h^*, \quad \bar{\mathbf{i}}_h^* = \mathcal{R}^*\bar{\mathbf{i}}_h$$

e insieme [cfr. (8)]

$$(13) \quad \bar{\psi} = \mathbf{V}\left[\frac{d\bar{\mathcal{R}}}{d\bar{s}}\bar{\mathcal{R}}^{-1}\right],$$

$$(14) \quad \psi^* = \mathbf{V}\left[\frac{d\mathcal{R}^*}{d\bar{s}}\mathcal{R}^{*-1}\right].$$

Poiché risulta

$$\bar{\mathcal{R}} = \mathcal{R}\mathcal{R}^*,$$

dalla (13) segue ⁽¹⁴⁾

$$\bar{\psi} = \mathbf{V}\left[\frac{d\mathcal{R}}{d\bar{s}}\mathcal{R}^*\mathcal{R}^{*-1}\mathcal{R}^{-1} + \mathcal{R}\frac{d\mathcal{R}^*}{d\bar{s}}\mathcal{R}^{*-1}\mathcal{R}^{-1}\right]$$

(13) Cfr. ad esempio loc. cit. nota ⁽⁸⁾, p. 124.

(14) L'inverso di un prodotto coincide col prodotto degli inversi in ordine inverso.

cioè

$$\bar{\Psi} = \frac{ds_*}{d\bar{s}} \mathbf{V} \left[\frac{d\mathcal{R}}{ds_*} \mathcal{R}^{-1} \right] + \mathbf{V} \left[\mathcal{R} \frac{d\mathcal{R}^*}{d\bar{s}} \mathcal{R}^{*-1} \mathcal{R}^{-1} \right]$$

e quindi in definitiva [cfr. (8), (12) e (14)]

$$(15) \quad \bar{\Psi} = \frac{ds_*}{d\bar{s}} \Psi + \mathcal{R} \Psi^*.$$

La (15) esprime la legge con cui varia Ψ in un generico cambiamento della configurazione di riferimento e mette bene in evidenza che risulta semplicemente

$$\bar{\Psi} \times \mathbf{i}_h = \frac{ds_*}{d\bar{s}} \Psi \times \mathbf{i}_h + \Psi^* \times \mathbf{i}_h^*$$

ovvero [cfr. (9')]

$$(15') \quad \bar{\Psi}_h = \frac{ds_*}{d\bar{s}} \Psi_h + \Psi_h^* \quad (h = 1, 2, 3).$$

Naturalmente l'identità

$$(16) \quad \frac{ds}{d\bar{s}} = \frac{ds}{ds_*} \frac{ds_*}{d\bar{s}}$$

dà poi luogo alla relazione fra i coefficienti di dilatazione lineare:

$$1 + \bar{\delta} = (1 + \delta)(1 + \delta_*),$$

ovvero

$$(16') \quad \bar{\delta} = \delta + \delta_*(1 + \delta).$$

4. - LA TEORIA DI BERNOULLI-EULERO.

Penso ad una generica trasformazione del solido tubolare T che involga anche il tempo con l'intesa che siano:

C la configurazione attuale; A e B gli estremi di l ; T' la parte di T compresa fra la base α_A e la sezione normale generica α ; \mathbf{R}_α e \mathbf{M}_α il risultante e il momento risultante, rispetto al baricentro K, delle forze intime che il tratto di solido tubolare T' esplica sulla parte rimanente; μ_* la densità lineare di T nella configurazione di riferimento C_* ; \mathbf{a} l'accelerazione (rispetto a C_*) del punto generico di l ; $\mathbf{M}^{(m)}$ il momento risultante, rispetto a K, delle forze d'inerzia di T, riferito all'unità di lunghezza di l_* ; \mathbf{R} ed \mathbf{M} rispettivamente il risultante e il momento risultante, rispetto a K, delle forze esterne a T, pur essi riferiti all'unità di lunghezza di l_* .

Le equazioni indefinite della meccanica dei solidi tubolari si scrivono ⁽¹⁵⁾

$$(17) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{R}_\alpha}{\partial s_*} + \mu_* \mathbf{a} = \mathbf{R} \\ \frac{\partial \mathbf{M}_\alpha}{\partial s_*} + (1 + \delta) \mathbf{i}_3 \wedge \mathbf{R}_\alpha - \mathbf{M}^{(m)} = \mathbf{M} \end{cases}$$

(15) Cfr. ad esempio loc. cit. nota (1) pp. 229-230.

e ad esse vanno associate le condizioni agli estremi

$$(18) \quad \begin{cases} \mathbf{R}_\alpha = \mathbf{F}_A, \mathbf{M}_\alpha = \mathbf{M}_A & \text{in } A (s_* = 0) \\ \mathbf{R}_\alpha = -\mathbf{F}_B, \mathbf{M}_\alpha = -\mathbf{M}_B & \text{in } B (s_* = L_*) \end{cases}$$

Indichiamo ora con \bar{C} uno stato *naturale* di T , supponendo che in \bar{C} il solido tubolare sia *omogeneo* ed *isotropo*. Posto

$$(19) \quad \begin{cases} \mathbf{R}_\alpha = -\tau \mathbf{i}_3 + \mathbf{T}_\alpha \\ \mathbf{M}_\alpha = \sum_i^3 m_h \mathbf{i}_h \end{cases}$$

l'ipotesi di perfetta elasticità si intende tradotta nelle condizioni

$$(20) \quad \tau = a \bar{\delta}, \quad m_h = -a_h \bar{\psi}_h \quad (h = 1, 2, 3).$$

Le quantità positive a ed a_h che compaiono nelle (20) dipendono naturalmente, oltre che dalle proprietà elastiche del materiale di cui è costituito T , dalla forma e dalle dimensioni della sezione normale. Nello schema considerato esse saranno al più funzioni della variabile s_* ⁽¹⁶⁾.

5. - EQUAZIONI DI MOTO.

Per una qualunque scelta della configurazione di riferimento C_* le (20) danno luogo a [cfr. (15') e (16')]]

$$(21) \quad \begin{cases} \tau = a [\delta + \delta_* (1 + \delta)] \\ m_h = -a_h [(1 + \delta_*) \psi_h + \psi_h^*] \end{cases} \quad (h = 1, 2, 3),$$

ove si intendono preventivamente determinate le quantità δ_* e ψ_h^* subordinatamente alla specificazione fatta di C_* . Si comprende allora come, eliminando nelle (17) la reazione vincolare \mathbf{T}_α che dà lo sforzo di taglio, si ottengono in definitiva quattro equazioni scalari quante ne occorrono per determinare la configurazione attuale C .

Per semplicità mi limito a considerare il caso che C_* sia uno *stato normale*, voglio dire uno stato di quiete a direttrice *rettilinea* sotto l'azione di due sole trazioni \mathbf{f} e $-\mathbf{f}$ applicate agli estremi. Ciò implica

$$\delta_* = \frac{f}{a}, \quad \psi_h^* = 0, \quad (f > 0)$$

nonché [cfr. (21)]

$$(22) \quad \begin{cases} \tau = f + (a + f) \delta \\ m_h = -a_h \left(1 + \frac{f}{a} \right) \psi_h \end{cases}$$

(16) L'ipotesi di omogeneità non esclude che la sezione sia variabile.

e quindi in definitiva [cfr. (19)]

$$(19') \quad \begin{cases} \mathbf{R}_\alpha = -[f + (a + f)\delta] \mathbf{i}_3 + \mathbf{T}_\alpha \\ \mathbf{M}_\alpha = -\left(1 + \frac{f}{a}\right) \sum_h^3 a_h \mathbf{E}_h \mathbf{i}_h \end{cases}$$

avendo posto, per semplicità di scrittura [cfr. (8'') e (9')]

$$(8''') \quad \mathbf{E}_h = \frac{2}{1 + q^2} \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial s_*} - \mathbf{q} \wedge \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial s_*} \right) \times \mathbf{i}_h^* \quad (h = 1, 2, 3).$$

Per dare ormai alle (17) forma esplicita occorre esprimere, in funzione di $\mathbf{q}(s_*, t)$, il momento (ripartito) delle forze d'inerzia $\mathbf{M}^{(m)}$ finora rimasto completamente ignorato. Consideriamo allo scopo la velocità angolare istantanea $\boldsymbol{\omega}(s_*, t)$ della terna \mathcal{T} rispetto a C_* . Per essa risulta, come già per $\psi^{(17)}$,

$$(23) \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{V} \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t} \mathcal{R}^{-1} \right] = \frac{2}{1 + q^2} \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{q} \wedge \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \right)$$

nonché [cfr. l'osservazione del n. 2]

$$(23') \quad \boldsymbol{\Omega} = \mathcal{R}^{-1} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{V} \left[\mathcal{R}^{-1} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t} \right] = \frac{2}{1 + q^2} \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} - \mathbf{q} \wedge \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \right);$$

ciò che permette di scrivere

$$(24) \quad \mathbf{M}^{(m)} = -\mu_* \sum_h^3 \left[\rho_h^2 \frac{\partial \Omega_h}{\partial t} - (\rho_{h+1}^2 - \rho_{h+2}^2) \Omega_{h+1} \Omega_{h+2} \right] \mathbf{i}_h,$$

essendo ρ_h ($h = 1, 2, 3$) i raggi d'inerzia della sezione normale rispetto agli assi della terna \mathcal{T}^* ed Ω_h le componenti, secondo la stessa terna, del vettore $\boldsymbol{\Omega}$.

Passando infine al sistema (17), comincio con l'osservare che, con la notazione già introdotta [cfr. (22)₁]

$$(25) \quad \tau = f(1 + \delta) + a\delta,$$

la (17)₁ si scrive [cfr. (2) e (19')₁]

$$-\frac{\partial(\tau \mathbf{i}_3)}{\partial s_*} + \frac{\partial \mathbf{T}_\alpha}{\partial s_*} + \mu_* \frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial t^2} = \mathbf{R}$$

mentre la (17)₂, moltiplicata per \mathbf{i}_3 , dà luogo a ⁽¹⁸⁾

$$(26) \quad (1 + \delta) \mathbf{T}_\alpha = \mathbf{i}_3 \wedge \left(\frac{\partial \mathbf{M}_\alpha}{\partial s_*} - \mathbf{M}^{(m)} - \mathbf{M} \right).$$

L'eliminazione di \mathbf{T}_α porta così alla equazione vettoriale

$$(27) \quad \mu_* \frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s_*} \left[\tau \mathbf{i}_3 + \frac{\mathbf{i}_3}{1 + \delta} \wedge \left(\mathbf{M}^{(m)} - \frac{\partial \mathbf{M}_\alpha}{\partial s_*} + \mathbf{M} \right) \right] = \mathbf{R}$$

(17) Cfr. loc. loc. nota (2), pp. 170-171.

(18) Si noti che nella (17)₂ \mathbf{R}_α può essere sostituito con \mathbf{T}_α .

che va naturalmente completata con l'altra, scalare, [cfr. (24)]

$$(28) \quad \dot{\mathbf{i}}_3 \times \left(\frac{\partial \mathbf{M}_a}{\partial s_*} - \mathbf{M} \right) + \mu_* \left[\rho_3^2 \frac{\partial \Omega_3}{\partial t} - (\rho_1^2 - \rho_2^2) \Omega_1 \Omega_2 \right] = 0.$$

La (27), contrariamente alla (28), fa intervenire, insieme a \mathbf{q} e δ , il vettore spostamento \mathbf{W} . Quest'ultimo compare però solo nel termine $\mu_* (\partial^2 \mathbf{W} / \partial t^2)$, onde basta una derivazione rispetto a s_* per permetterne l'eliminazione in base alla (5').

Complessivamente le (27) e (28) costituiscono quindi un sistema di quattro equazioni scalari nelle quattro incognite δ e \mathbf{q} . Si tratta di un sistema alle derivate parziali che ovviamente non è troppo maneggevole. In ogni modo esso da solo non può individuare alcun particolare movimento del sistema: occorre precisare i vincoli, cioè in definitiva il moto delle basi del solido tubolare T; di più bisogna dare le condizioni iniziali, cioè posizione e velocità dei vari punti di T all'istante assunto come origine dei tempi. Mi riservo di ritornare su tali condizioni in altra Nota ⁽¹⁹⁾, passando al problema linearizzato.

(19) Cfr. G. FERRARESE, *Sulla dinamica dei solidi tubolari: equazioni linearizzate ed unicità della soluzione*, in corso di stampa nei « Rendiconti di Matem. ».

Meccanica. — *Spostamento del perielio nell'orbita descritta da una particella materiale elettrizzata nella prima approssimazione dell'ultima teoria unitaria einsteiniana.* Nota di CARLO VENINI, presentata (*) dal Socio F. ZAGAR.

Nella prima approssimazione della più recente teoria relativistica unitaria einsteiniana (1953) le equazioni di moto di particelle materiali elettrizzate si identificano con quelle della fisica classica riferite a un osservatore inerziale, nelle quali però, accanto alla forza gravitazionale newtoniana ed alla forza elettrostatica coulombiana, interviene una debole forza centrale perturbatrice di intensità costante; quest'ultima traduce l'interazione fra il campo gravitazionale e il campo elettromagnetico [1].

Nell'ipotesi che l'orbita del moto imperturbato sia una ellisse, in questa Nota studio l'influenza della forza perturbatrice sulla traiettoria di un corpuscolo fornito di massa e di carica elettrica, sottoposto all'azione di un secondo corpuscolo ritenuto in quiete rispetto a un osservatore inerziale. Ne risulta uno spostamento del perielio proporzionale all'intensità della forza perturbatrice stessa ed al numero di rivoluzioni compiute dalla particella.

Se poi, in particolare, la traiettoria del moto imperturbato è circolare, il corpuscolo descrive invece una ellisse fissa di eccentricità molto piccola ed il perielio non subisce pertanto spostamento alcuno.

Se il sistema è costituito da due corpuscoli $\overset{1}{P}$ e $\overset{2}{P}$ l'equazione vettoriale di moto del corpuscolo $\overset{1}{P}$ è la seguente:

$$(1) \quad \overset{1}{m}\overset{1}{a} = -\frac{\hbar\overset{1}{m}\overset{2}{m}}{r^2} \text{vers}(\overset{1}{P} - \overset{2}{P}) + \frac{\overset{1}{e}\overset{2}{e}}{r^2} \text{vers}(\overset{1}{P} - \overset{2}{P}) - \frac{1}{2} \frac{\hbar\overset{1}{e}\overset{2}{e}}{\beta^4 K^2} \text{vers}(\overset{1}{P} - \overset{2}{P}).$$

In essa gli indici sovrapposti 1 e 2 indicano la particella alla quale è riferita la quantità così denotata; $\overset{1}{a}$ è il vettore accelerazione, \hbar la costante di Cavendish, r la distanza istantanea fra i due corpuscoli; $\overset{1}{m}$ ed $\overset{2}{m}$ rappresentano rispettivamente la massa (invariabile in questa equazione di prima approssimazione) e la carica elettrica; β e K sono infine costanti introdotte a scopo dimensionale [1]. Il moto di $\overset{1}{P}$ è centrale, quindi avviene in un piano al quale appartiene il centro $\overset{2}{P}$ e la velocità areolare si mantiene costante. Assunto in questo piano un sistema di coordinate polari con il polo in $\overset{2}{P}$, indicata con

(*) Nella seduta del 13 maggio 1961.

φ l'anomalia, quest'ultima proprietà è tradotta notoriamente dalla seguente relazione:

$$(2) \quad r^2 \dot{\varphi} = c,$$

nella quale il punto sovrapposto è simbolo di derivazione rispetto al tempo e la costante c , individuata dalle condizioni iniziali, rappresenta il doppio della velocità areolare. È ben noto che tale costante si annulla solo se il moto è rettilineo. Applicando la formula di Binet, in virtù della (1), si ottiene:

$$(3) \quad \frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{\frac{1}{2} \frac{h^2}{m^2} - \frac{1}{2} \frac{e^2}{mc^2}}{\frac{1}{mc^2}} + \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{2} \frac{h^2}{m^2}}{\frac{1}{mc^2} \beta^4 K^2} r^2.$$

Con le posizioni:

$$(4) \quad \frac{1}{r} = u \quad ; \quad \frac{\frac{1}{2} \frac{h^2}{m^2} - \frac{1}{2} \frac{e^2}{mc^2}}{\frac{1}{mc^2}} = A \quad ; \quad \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{2} \frac{h^2}{m^2}}{\frac{1}{mc^2} \beta^4 K^2} = B,$$

la (3) diventa:

$$(5) \quad \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = A + \frac{B}{u^2}.$$

La costante B è proporzionale alla intensità $\frac{1}{2} \frac{h^2 |e^2|}{\beta^4 K^2}$ della debole forza di interazione e può quindi essere trattata come una quantità del primo ordine; nei calcoli successivi trascureremo i termini nei quali compaiono potenze di B di grado superiore al primo.

Dalla (5), integrando, si ricava:

$$(6) \quad \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = -u^2 + 2Au + 2H - \frac{2B}{u},$$

con H costante di integrazione. È opportuno, per il seguito, stabilire il legame che intercede fra H e l'energia totale E del corpuscolo (calcolabile in base alle condizioni iniziali). A tal fine, dal principio di conservazione dell'energia, si trae:

$$(7) \quad \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{\frac{1}{2} \frac{h^2}{m^2} - \frac{1}{2} \frac{e^2}{mc^2}}{r} + \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{2} \frac{h^2}{m^2}}{\beta^4 K^2} r = E.$$

Tenendo conto della (2) e delle posizioni (4), la (7) diventa:

$$(8) \quad \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = -u^2 + 2Au + \frac{2E}{mc^2} - \frac{2B}{u}.$$

Confrontando la (6) con la (8) si ottiene:

$$(9) \quad H = \frac{E}{mc^2}.$$

Supponiamo che, in assenza della forza perturbatrice, il corpuscolo elettrizzato $\overset{1}{P}$ descriva una ellisse, della quale $\overset{2}{P}$ è un fuoco. L'energia totale E_0 del moto imperturbato è allora negativa; affinché ciò sia possibile deve essere

$\hbar m \dot{m} > e \dot{e}$. La costante A è quindi positiva. Ritenendo identiche le condizioni iniziali del moto imperturbato e di quello perturbato, l'energia totale.

E di quest'ultimo si presenta come somma di $E_0 \equiv \frac{1}{2} \dot{m} \dot{V}^2 - \frac{\hbar m \dot{m} - e \dot{e}}{R}$

e del termine correttivo $\bar{E} \equiv \frac{1}{2} \frac{\hbar e \dot{e}}{\beta^4 K^2} R \equiv B m c^2 R$, essendo V e R rispettivamente la velocità e la distanza fra le due particelle all'istante iniziale. La (6), grazie alla (9), diventa:

$$(10) \quad \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = (-u^2 + 2Au + 2H_0) + 2B \left(R - \frac{1}{u} \right) \equiv (u-a)(b-u) + 2B \left(R - \frac{1}{u} \right),$$

avendo posto:

$$(11) \quad \frac{E_0}{mc^2} = H_0 \quad ; \quad A = \sqrt{A^2 + 2H_0} = a \quad ; \quad A + \sqrt{A^2 + 2H_0} = b.$$

Le costanti a e b ($a < b$), radici del trinomio di secondo grado al secondo membro della (10), sono reali ⁽¹⁾ e positive (poiché H_0 è negativo); supponiamo per ora tali radici distinte, ossia $A^2 > -2H_0$. Trascurando le potenze di B di grado superiore al primo, la (10) si può scrivere nel modo seguente:

$$(12) \quad \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = (u - \overset{*}{a})(\overset{*}{b} - u) \left(1 + \frac{2B}{ab} \frac{1}{u} \right),$$

con

$$\overset{*}{a} \equiv a - \frac{2B(aR-1)}{a(b-a)} \quad ; \quad \overset{*}{b} \equiv b + \frac{2B(bR-1)}{b(b-a)}.$$

Poiché B è in valore assoluto molto piccolo, $\overset{*}{a}$, $\overset{*}{b}$ ed il terzo fattore al secondo membro della (12) risultano positivi ed è inoltre $\overset{*}{a} < \overset{*}{b}$. Il secondo membro della (12) si mantiene dunque maggiore di zero per valori di u compresi tra $\overset{*}{a}$ e $\overset{*}{b}$; pure a tale intervallo (estremi inclusi) deve appartenere il valore iniziale $1/R$ di u . Un noto teorema di Weierstrass ci assicura che ogni soluzione della (12) è rappresentata da una funzione periodica. L'orbita si svolge pertanto nella corona circolare compresa fra le due circonferenze concentriche in $\overset{*}{P}$, di raggio $1/\overset{*}{b}$ e $1/\overset{*}{a}$; i punti di contatto dell'orbita con la prima e la seconda circonferenza sono rispettivamente i perielio e gli afeli.

Per il calcolo del periodo Φ (angolo del quale deve ruotare la particella per passare da un perielio al successivo) possiamo servirci di una relazione dovuta a Levi-Civita [2], nella forma data da Cartovitch [3]. Questo au-

(1) Se queste radici non fossero reali il trinomio $-u^2 + 2Au + 2H_0$ sarebbe negativo per qualunque valore reale di u ; pure negativo risulterebbe il secondo membro della (10) poiché l'addendo $2B \left(R - \frac{1}{u} \right)$ (supposto positivo) possiede ordine di grandezza inferiore al valore assoluto del trinomio precedente.

tore considera un generico moto perturbato, la cui traiettoria sia retta dall'equazione:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = (u - a)(b - u) + Bg(u)$$

(con $g(u)$ funzione continua e dotata di derivata prima e seconda nell'intervallo (a, b)) e perviene alla seguente formula:

$$(13) \quad \Phi = 2\pi + \frac{4B}{(b-a)^2} \int_a^b \frac{d^2 g(u)}{du^2} \sqrt{(u-a)(b-u)} du.$$

Nel presente problema $g(u)$ si identifica, in virtù della (10), con $2\left(R - \frac{1}{u}\right)$; la (13), per le posizioni (11), diventa allora:

$$(13') \quad \Phi = 2\pi - \frac{16B}{(b-a)^2} \int_a^b \frac{1}{u^3} \sqrt{(u-a)(b-u)} du = 2\pi - \\ - \frac{2\pi B}{a^2 b \sqrt{b}} \equiv 2\pi + \frac{\pi B}{H_0 \sqrt{-2H_0}},$$

dove la costante negativa H_0 è definita dalla prima delle (11).

Il precedente integrale è stato calcolato rigorosamente per sostituzione, ponendo $\sqrt{\frac{b-u}{u-a}} = z$.

Il perielio dell'orbita, dopo una rivoluzione, risulta pertanto spostato dell'angolo

$$\sigma = \Phi - 2\pi = \frac{\pi B}{H_0 \sqrt{-2H_0}}.$$

Se i due corpuscoli posseggono cariche di segno opposto (la forza perturbatrice è quindi repulsiva) B è negativo, quindi σ è positivo; in tal caso il perielio dell'orbita avanza lentamente nel verso del moto.

Se invece i corpuscoli sono forniti da cariche dello stesso segno (la forza perturbatrice è quindi attrattiva), σ è negativo; in questo secondo caso il perielio retrocede lentamente. Lo spostamento del perielio risulta proporzionale al numero di rivoluzioni compiute dalla particella ed il suo valore assoluto, anche se piccolo dopo una sola rivoluzione, può raggiungere, dopo molte, valori considerevoli.

Se $A^2 = -2H_0$ la (10) assume la seguente forma:

$$(10') \quad \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = -(u - A)^2 + 2B\left(R - \frac{1}{u}\right).$$

Il corpuscolo, in assenza della forza perturbatrice, descrive una circonferenza, poichè per $B = 0$ la (10), nel campo reale, ammette la sola soluzione

$$u = A = \frac{\hbar^2 m^2}{mc^2} - \frac{1}{2} \frac{e^2}{mc^2}.$$

Identifichiamo questo valore costante di u con il suo valore iniziale $1/R$. Essendo nel moto circolare $c^2 = R^2 v^2$, risulta $v = \sqrt{\frac{1^2 - e^2}{hmm - ee}} \frac{1}{mR}$; il moto imperturbato, come è ben naturale, è uniforme.

Sostituiamo ora [4] il valore approssimato $1/R$ di u nel termine correttivo B/u^2 che compare al secondo membro della (5); essa diventa:

$$(5') \quad \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{R} + BR^2.$$

L'integrale generale della (5') è il seguente:

$$(14) \quad u = \frac{1}{R} + BR^2 + BD \cos(\varphi - \gamma),$$

con D e γ costanti di integrazione calcolabili in base alle condizioni iniziali.

Detto φ_0 il valore iniziale di φ , osservando che inizialmente è nullo il valore di $du/d\varphi$ ⁽²⁾, si ottiene: $D = -R^2$, $\gamma = \varphi_0$ e la (14) diventa:

$$(14') \quad u = \frac{1}{R} + BR^2 - BR^2 \cos(\varphi - \varphi_0) = \\ = \left(\frac{1}{R} + BR^2 \right) \left[1 - \frac{BR^3}{1 + BR^3} \cos(\varphi - \varphi_0) \right].$$

Poiché $\frac{|B|R^3}{1 + BR^3} \ll 1$ (essendo il numeratore di ordine di grandezza inferiore al denominatore), la (14') è l'equazione in coordinate polari di una ellisse fissa, avente un fuoco in \bar{P} , di eccentricità $\frac{|B|R^3}{1 + BR^3} \simeq |B|R^3$ molto piccola. La posizione iniziale del punto mobile coincide con un vertice dell'asse maggiore. Si constata facilmente che, se $B < 0$, ossia se i corpuscoli sono forniti di cariche elettriche di segno opposto, tale vertice è il perielio; se invece $B > 0$, ossia se i corpuscoli hanno cariche dello stesso segno, tale vertice è l'afelio.

Nel caso in cui il moto imperturbato sia circolare, la particella, sotto l'azione della forza perturbatrice, descrive dunque una linea chiusa ed il perielio non subisce pertanto alcun spostamento.

(2) Con un facile calcolo, tenendo conto della (2), si ricava: $\frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{c} \dot{r}$; come è noto, \dot{r} si identifica con la componente radiale della velocità. Tale componente risulta nulla

all'istante iniziale, poiché in tale istante la velocità $\left(\text{la cui intensità è } \sqrt{\frac{1^2 - e^2}{hmm - ee}} \frac{1}{mR} \right)$

ha direzione normale al raggio vettore. Dall'ipotesi che le condizioni iniziali del moto perturbato non differiscano da quelle del moto non perturbato segue inoltre che, anche nel moto perturbato, A si identifica con $1/R$; di questa identificazione si è tenuto conto nel passaggio dalla (5) alla (5').

INDICAZIONI BIBLIOGRAFICHE.

- [1] E. CLAUSER, *Legge di moto nell'ultima teoria unitaria einsteiniana*, « Il Nuovo Cimento », vol. VII, p. 764 (1958).
- [2] T. LEVI-CIVITA, *Sul calcolo effettivo del periodo in un caso tipico di prima approssimazione*, « Revista de Ciencias », vol. 38, p. 71 (1937).
- [3] N. CARTOVITCH, *Sul calcolo effettivo del periodo del moto perturbato in un caso tipico di prima approssimazione*, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », vol. XXVII, p. 65 (1938).
- [4] Cfr. A. S. EDDINGTON, *The mathematical theory of relativity* (Cambridge 1954), p. 88.

Meccanica. — *Interpretazione teorica del principio di reversibilità di MacHenry.* Nota di FRANCO LEVI, presentata (*) dal Socio G. COLONNETTI.

A seguito di una estesa serie di studi sperimentali, il dott. D. MacHenry enunciava nel 1943 un « principio di reversibilità » applicabile al conglomerato cementizio [1]. Tale principio, di cui la fig. 1 illustra l'applicazione a un caso concreto, si può esprimere come segue. Sia A la curva di fluage di una provetta caricata all'età t_0 , B la curva di fluage di una seconda provetta identica, conservata in identiche condizioni e caricata allo stesso tasso al tempo t_1 . Sia infine C la curva rappresentativa del ritorno elastico, istantaneo e ritardato, della provetta A supposta scaricata al tempo t_1 . Secondo MacHenry, si può ottenere la curva C sottraendo le ordinate della curva B da quelle della curva A (*).

Ci proponiamo ora di mostrare come il legame sforzi-deformazioni da noi proposto nel 1948 [2] per rappresentare il comportamento sotto carico di solidi elastico-viscosi, considerati come localmente eterogenei ma statisticamente omogenei, sia in perfetto accordo con tale « principio di reversibilità ».

Osserviamo, in primo luogo, che nell'ambito dei tassi di lavoro per i quali valgono le ipotesi del fluage lineare del conglomerato cementizio, si può sempre ammettere, con ottima approssimazione, che, ad un istante qualsiasi, la deformazione elastica di andata e di ritorno siano eguali. Ciò si traduce, nella fig. 1, nella eguaglianza:

$$\alpha\beta = \gamma\delta$$

e ciò indipendentemente dalle variazioni che il modulo elastico può aver subito fra l'istante t_0 e l'istante t_1 . In tali condizioni, il principio di MacHenry conduce a scrivere che, ad un istante t qualsiasi, si verifica l'eguaglianza (cfr. fig. 1).

$$\overline{nm} + \overline{p0} = \overline{qr}.$$

Supponiamo peraltro, in un primo tempo, che il modulo elastico del calcestruzzo sia indipendente dal tempo. Con questa ipotesi i segmenti \overline{nm} , $\overline{p0}$, \overline{qr} rappresentano i valori veri del fluage e dell'elasticità ritardata.

(*) Nella seduta del 13 maggio 1961.

(1) In conformità con le convenzioni linguistiche della R.I.L.E.M. (Simposio di Monaco di Baviera, novembre 1958) noi denominiamo « fluage » la deformazione lenta data da un carico permanente (ordinate \overline{nm} , \overline{qr} delle curve A e C della figura). Il fluage comprende la « plasticità ritardata » (frazione non reversibile) e la « elasticità ritardata » (ordinate \overline{op} della Curva B).

Ammettiamo ora che la deformabilità del calcestruzzo sia caratterizzata dalla citata legge sforzi-deformazioni che, con notazioni semplificate e per una sollecitazione esterna di valore unitario, si può scrivere:

$$(1) \quad \frac{d\bar{\epsilon}}{dt} + R \bar{\epsilon}' - Q \cdot \bar{\epsilon}' = 0$$

dove si è posto:

$\bar{\epsilon}$: deformazione di fluage della fibra eterogenea presa nel suo insieme;

$\bar{\epsilon}'$: fluage specifico della frazione visco-elastica della sezione;

R, Q : costanti il cui valore dipende dalla composizione geometrica della fibra elementare e dalle proprietà meccaniche dei due materiali asso-

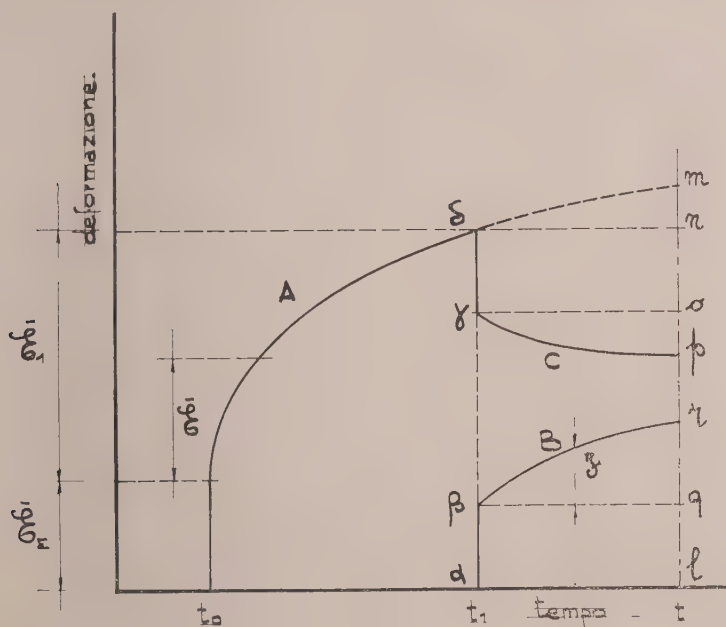


Fig. 1.

ciati (R caratterizza l'«elasticità ritardata», Q la «plasticità ritardata»). E riportiamoci ai grafici della fig. 1. L'adozione della (1) conduce ad ammettere che l'evoluzione della curva \mathfrak{Dm} sia caratterizzata dalla relazione differenziale:

$$(2) \quad \frac{d\bar{\epsilon}_A}{dt} = Q \bar{\epsilon}' - R \bar{\epsilon}_A \cdot \bar{\epsilon}'(t)$$

associata alla condizione:

$$t = t_1 \quad \bar{\epsilon}_A = \bar{\epsilon}_1,$$

(dove $\bar{\epsilon}_1$ è la deformazione viscosa della fibra raggiunta al tempo t_1). Analogamente, adottando la stessa legge sforzi-deformazioni, si avrà lungo la

curva γp (che corrisponde ad una provetta scarica per la quale scompare il termine di plasticità ritardata):

$$(3) \quad \frac{d\bar{\epsilon}_c}{dt} = -R \cdot \bar{\epsilon}_c \cdot \bar{\epsilon}_0'(t)$$

associata alla condizione:

$$t = t_1 \quad \bar{\epsilon}_c = \bar{\epsilon}_1.$$

Immaginiamo ora di traslare verticalmente la curva C fino a far coincidere il punto γ col punto ϑ^* (e pertanto il punto o col punto n) ed indichiamo con $\bar{\vartheta}$ lo scarto fra le curve ϑm e γp , sia:

$$\bar{\vartheta} = \overline{nm} + \overline{po}.$$

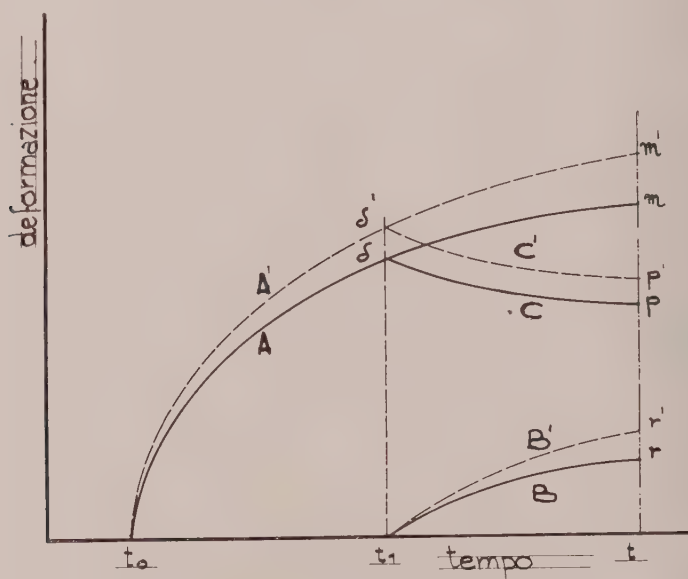


Fig. 2.

Si vede allora che, per $t = t_1$, si ha:

$$(4) \quad \bar{\vartheta} = 0 \quad \frac{d\bar{\vartheta}}{dt} = Q \bar{\epsilon}_0'(t_1)$$

mentre, per un istante qualsiasi, viene:

$$(5) \quad \frac{d\bar{\vartheta}}{dt} = Q \cdot \bar{\epsilon}_0'(t) - \bar{\vartheta} \cdot R \bar{\epsilon}_0'(t).$$

Ora tali relazioni valgono anche a rappresentare la curva di deformazione B se si suppone che anche per la provetta caricata al tempo t_1 sia valida una relazione sforzi-deformazioni del tipo (1). Risulta così dimostrato che la legge (1) rispetta il principio di reversibilità di MacHenry.

Poche parole bastano per dimostrare che il ragionamento rimane valido se si abbandona l'ipotesi dell'invarianza del modulo elastico del calcestruzzo.

Se tale modulo varia, i valori effettivi del fluage si ottengono sommando alle ordinate delle curve A e C una quantità pari alla diminuzione subita dalla deformazione elastica:

$$\bar{\varepsilon}_{\text{reale}}(t) = \bar{\varepsilon}_{\text{apparente}}(t) + \left(\frac{1}{E(t=0)} - \frac{1}{E(t)} \right).$$

La modifica subita in tali condizioni dalle curve di fluage è rappresentata nella fig. 2. Poiché, per ipotesi, la curva C subisce una semplice traslazione, si avrà nella figura:

$$\overline{pp'} = \overline{\vartheta\vartheta'}$$

e pertanto:

$$\overline{mm'} = \overline{rr'} + \overline{pp'}$$

Ne risulta che, anche in questo caso, si può ottenere la curva C' deducendo le ordinate della curva B' da quelle della curva A'.

* * *

Sulla dimostrazione testé riportata, crediamo peraltro opportuno formulare le seguenti osservazioni conclusive:

a) i ragionamenti svolti sono validi qualunque sia la legge adottata per rappresentare il fluage specifico della frazione visco-elastica della fibra di conglomerato;

b) la dimostrazione non fa intervenire i valori dei coefficienti Q ed R. Ciò significa che sarà possibile, in sede pratica, ritoccare i coefficienti dell'equazione (1) in conformità con i risultati sperimentali pur rispettando sempre il principio di reversibilità;

c) il principio di MacHenry rimane valido se si suppone che gli elementi collegati in parallelo considerati per impostare la relazione (1) siano associati in serie con elementi visco-elastici a fluage interamente permanente (elementi non reattivi);

d) le considerazioni che precedono, unitamente a quelle illustrate in altri lavori [3], dimostrano che la relazione sforzi-deformazioni rappresentata dall'equazione (1) costituisce una interpretazione corretta delle principali proprietà reologiche del conglomerato cementizio. Sembra quindi lecito asserire che essa possa costituire un valido strumento d'indagine nel campo delle applicazioni tecniche.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] D. MACHENRY, *A new aspect of creep in concrete and its application to design*, « Proc. Amer. Soc. », Testing Materials 1943.
- [2] F. LEVI, *Viscosità ed elasticità ritardata*, « La Ricerca Scientifica », Anno 18°, - n. 10 - ott. 1948; F. LEVI, *Generalizzazione del legame sforzi-deformazioni nei solidi elastico-viscosi*, « Acc. Naz. Lincei », fasc. 3, serie VIII, vol. VI (1949).
- [3] F. LEVI, *Sulla schematizzazione della legge di deformazione del calcestruzzo*, « Ric. Scient. », Anno 29°, n. 6, giugno 1959.

Magneto-fluidodinamica. — *Sulla instabilità magneto-gravitazionale di un mezzo stratificato.* Nota di ANDRZEJ G. PACHOLCZYK^(*), presentata^(**) dal Corrisp. C. AGOSTINELLI.

L'instabilità gravitazionale di un mezzo uniforme rotante e avente la simmetria assiale, nel quale esiste il campo magnetico trasversale è stata studiata da Pacholczyk e Stodółkiewicz⁽¹⁾ sotto il punto di vista dell'applicazione cosmogonica al problema della generazione dei bracci spirali in una protogalassia. La condizione di instabilità, ottenuta da questi Autori, ha nelle coordinate cilindriche r, φ, z la forma

$$(1) \quad \lambda > \lambda_* = \pi \sqrt{\frac{V_s^2 + V_a^2}{\pi G \rho - \frac{1}{2} \Omega [(r\Omega), r + \Omega]}} ,$$

dove λ è la lunghezza d'onda della perturbazione nella direzione di r , Ω è la velocità angolare di rotazione, parallela all'asse di rotazione (z), le altre notazioni sono usuali (vedi per esempio⁽¹⁾).

L'autore ha mostrato⁽²⁾ che questa condizione di instabilità rimane valida nel caso di un mezzo non uniforme, nel quale le variazioni di densità sono date dall'equazione seguente

$$(2) \quad \rho = \beta r^{-\nu} ,$$

dove $\nu > 0$.

La presente Nota contiene lo studio del problema di instabilità magneto-gravitazionale di un mezzo stratificato, cioè di un mezzo con densità variabile rispetto alla coordinata $z = x_3$. Siccome la soluzione di questo problema nella forma generale è piuttosto complicata, ci limiteremo qui al caso di un mezzo non rotante, considerando il problema di instabilità nelle coordinate rettangolari x_1, x_2, x_3 , supponendo che il campo magnetico, avente solo la componente H_2 , sia proporzionale alla densità del mezzo

$$(3) \quad H = \mathfrak{R} \rho ,$$

e che la perturbazione si propaghi nella direzione di x_1 .

I risultati del lavoro⁽¹⁾ permettono di ammettere, che il mezzo considerato abbia la conduttività elettrica infinita e che i coefficienti di viscosità siano nulli.

(*) Università di Varsavia, Osservatorio Astronomico e Accademia Polacca delle Scienze, Istituto di Astronomia.

(**) Nella seduta del 13 maggio 1961.

(1) A. G. PACHOLCZYK, J. S. STODÓŁKIEWICZ, «Acta Astronomica», 10, 1, (1960).

(2) A. G. PACHOLCZYK, «Atti della Accad. Naz. dei Lincei», 28, 357 (1960).

Le equazioni che reggono il fenomeno considerato nella Nota presente sono quelle relative ai valori stazionari nell'equilibrio isotermale

$$(4) \quad V_s^2 \text{grad } \rho + (4\pi)^{-1} \vec{H} \wedge \text{rot } \vec{H} - \rho \text{grad } \psi = 0,$$

$$(5) \quad \text{div grad } \psi = -4\pi G\rho,$$

(questi valori dipendono solo dalla coordinata x_3), come pure le equazioni per i valori perturbati

$$(6) \quad \vec{u} = -V_s^2 \rho^{-1} \text{grad } \delta\rho + V_s^2 \rho^{-2} \delta\rho \text{grad } \rho - (4\pi\rho)^{-1} \vec{H} \wedge \text{rot } \vec{h} - \\ - (4\pi\rho)^{-1} \vec{h} \wedge \text{rot } \vec{H} + \delta\rho (4\pi\rho^2)^{-1} \vec{H} \wedge \text{rot } \vec{H} + \text{grad } \delta\psi,$$

$$(7) \quad \vec{h} = \text{rot } (\vec{u} \wedge \vec{H}),$$

$$(8) \quad \delta\dot{\rho} = -\text{div } \rho \vec{u},$$

$$(9) \quad \text{div grad } \delta\psi = -4\pi G \delta\rho.$$

Le equazioni (4) e (5) sotto l'ipotesi (3) si sintetizzano nell'unica equazione

$$(10) \quad \rho\rho_{,33} V_s^2 (1 + \kappa^2 \rho_0^{-1} \rho) - V_s^2 \rho_{,3}^2 + 4\pi G\rho^3 = 0,$$

dove

$$(11) \quad \kappa = V_a(0) V_s^{-1},$$

il cui integrale, soddisfacente alla condizione

$$(12) \quad \rho_{,3}(0) = 0,$$

può essere scritto nella forma, valida per i valori $\kappa_3 > 0$

$$(13) \quad x_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \Phi^{(1)}(\tilde{\omega}; \kappa) \pm \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \Phi^{(2)}(\tilde{\omega}; \kappa) = \pm \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \Psi(\tilde{\omega}; \kappa),$$

dove

$$(14) \quad \Phi^{(1)}(\tilde{\omega}; \kappa) = \left(1 + \frac{1}{2}\kappa^2\right)^{-1/2} \ln \left\{ 2\tilde{\omega}^{-1} (1 + \kappa^2)^{-1} \cdot \right. \\ \cdot \left. \left[\left(1 + \frac{1}{2}\kappa^2 - \tilde{\omega} - \frac{1}{2}\kappa^2 \tilde{\omega}^2\right)^{1/2} \left(1 + \frac{1}{2}\kappa^2\right)^{1/2} + 1 + \frac{1}{2}\kappa^2 - \frac{1}{2}\tilde{\omega} \right] \right\},$$

$$(15) \quad \Phi^{(2)}(\tilde{\omega}; \kappa) = \sqrt{2} \kappa \arccos \left[(1 + \kappa^2 \tilde{\omega}) (1 + \kappa^2)^{-1} \right],$$

e

$$(16) \quad \tilde{\omega} = \rho(x_3) \rho^{-1}(0),$$

$$(17) \quad \tilde{\gamma}^2 = 8\pi G\rho(0) V_s^{-2}.$$

Si può facilmente dimostrare, che

$$(18) \quad \Psi(1; \kappa) = 0,$$

$$(19) \quad \Psi(0; \kappa) = \infty,$$

$$(20) \quad \Psi(\tilde{\omega}; 0) = 2 \ln \{ \tilde{\omega}^{-1/2} [1 + (1 - \tilde{\omega})^{1/2}] \}$$

$$(21) \quad \Psi(\tilde{\omega}; \infty) \cong \sqrt{2} \kappa \arccos \tilde{\omega}.$$

Tenendo conto dalla (3) si può ricavare dalle equazioni (7) e (8)

$$(22) \quad \hbar = \mathcal{R} \delta \rho.$$

Sostituendo (22) nella (6) e ricordando (9), se ne deduce che

$$(23) \quad \vec{u} = \text{grad} \{ \delta \psi - \Theta \},$$

dove

$$(24) \quad \Theta = \rho^{-1} (V_a^2 + V_s^2) \delta \rho.$$

Assumendo, che \vec{u} dipenda dal tempo per mezzo del fattore $\exp \omega t$ e seguendo fino ad un certo punto il procedimento applicato da Ledoux ⁽³⁾ nel caso di assenza del campo magnetico, osservando che si tratta di una lunghezza d'onde critica, si può porre $\omega = 0$, e

$$(25) \quad \text{grad} \delta \psi = \text{grad} \Theta.$$

Allora dalla (9) si ricava subito

$$(26) \quad \Theta_{,33} + \left\{ \frac{4 \pi G \rho}{V_s^2 + V_a^2} - k^2 \right\} \Theta = 0,$$

dove k è il numero ondoso di una perturbazione propagantesi nella direzione di x_1 . Nell'equazioni (26) i valori V_a e ρ debbono essere considerati come funzioni della coordinate x_3 .

Trattando ρ come una variabile indipendente e tenendo conto dalla (13) si può scrivere

$$(27) \quad \Theta_{,\tilde{\omega}\tilde{\omega}} \left[1 + \frac{1}{2} \kappa^2 - \tilde{\omega} - \frac{1}{2} \kappa^2 \tilde{\omega}^2 \right] \frac{\tilde{\omega}^2}{(1 + \kappa^2 \tilde{\omega})^2} + \\ + \Theta_{,\tilde{\omega}} \left[\tilde{\omega}^{-1} (1 + \kappa^2 \tilde{\omega})^{-1} \left(1 + \frac{1}{2} \kappa^2 - \tilde{\omega} - \frac{1}{2} \kappa^2 \tilde{\omega}^2 \right) - \frac{1}{2} (1 + \kappa^2 \tilde{\omega}) \right] \frac{\tilde{\omega}^2}{(1 + \kappa^2 \tilde{\omega})^2} + \\ + \Theta \left[\frac{1}{2} \tilde{\omega} (1 + \kappa^2 \tilde{\omega}) - \frac{1}{4} \Xi^2 \right] = 0,$$

dove

$$(28) \quad \Xi^2 = \frac{k^2 V_s^2}{2 \pi G \rho(0)}.$$

Questa equazione insieme con la condizione di simmetria rispetto al piano $x_3 = 0$ della soluzione limitata permette di calcolare gli autovalori $\Xi(x)$, i quali insieme con (28) costituiscono la condizione di instabilità.

Siccome però la soluzione esatta dell'equazione (27) è piuttosto complicata, cercheremo una soluzione approssimata dell'equazione (26), dividendo l'asse x_3 in due regioni: la prima (I), caratterizzata dalla disuguaglianza $0 \leq x_3 < \tilde{x}_3$, dove la velocità del suono V_s è trascurabile rispetto alla velocità di Alfvén V_a , e la seconda (II) determinata dalla $x_3 > \tilde{x}_3$, dove $V_s \gg V_a$ (4). Il punto $x_3 > \tilde{x}_3$ viene caratterizzato dall'equazione

$$(29) \quad V_s = V_a(\tilde{x}_3).$$

Nella regione I la soluzione dell'equazione di equilibrio ha la forma (21).

$$(30) \quad \rho = \rho(0) \cos 2 \zeta \vartheta,$$

l'equazione per la perturbazione si riduce alla seguente

$$(31) \quad \Theta_{,\vartheta\vartheta} + \{4\zeta^2 - \eta^2 \xi^2\} \Theta = 0,$$

dalla quale segue l'integrale

$$(32) \quad \Theta = A \cos \{4\zeta^2 - \eta^2 \xi^2\}^{1/2} \vartheta.$$

Nella regione II lo stato di equilibrio è determinato dalla

$$(33) \quad \rho = \rho(0) \xi^2 \operatorname{ch}^{-2} \xi(\vartheta - \delta),$$

l'equazione per la perturbazione è invece (3)

$$(34) \quad \Theta_{,\vartheta\vartheta} - \frac{2\dot{\rho}}{1-\rho^2} \Theta_{,\vartheta} + \Theta \left\{ \frac{2}{1-\rho^2} - \frac{\eta^2}{(1-\rho^2)^2} \right\} = 0,$$

la quale per la supposta limitazione della soluzione richiede che sia

$$(35) \quad \Theta = B \left(\frac{1-\rho}{1+\rho} \right)^{\eta/2} \cdot (\eta + \rho \cdot).$$

Le variabili ϑ, ρ sono determinate dalle

$$(36) \quad \vartheta = \frac{\sqrt{2} \pi G \rho(0)}{V_s} x_3,$$

$$(37) \quad \rho^2 = 1 - \rho \rho^{-1}(0) \xi^{-2}.$$

Le quantità $A, B, \rho(0), \xi, \delta, \eta, \zeta$ sono costanti, tali che

$$(38) \quad \eta^2 = \xi^{-2} \Xi^2 = \xi^{-2} \frac{4k^2}{v^2},$$

$$(39) \quad \zeta^2 = \frac{1}{2} x^{-2}.$$

(4) Questo metodo è valido per i valori del coefficiente κ abbastanza grandi (praticamente basta che sia $\kappa \geq 2$).

La condizione di continuità delle soluzioni (30) e (33) in $x_3 = \tilde{x}_3$ come pure la condizione di continuità delle loro derivate prime conducono alle relazioni

$$(40) \quad \xi^2 = \zeta^2 \omega^{-2} + \omega - \zeta^2,$$

$$(41) \quad \omega = \xi^2 \cos h^{-2} \xi [\vartheta(\tilde{x}_3) - \delta],$$

dove si è posto per brevità

$$(42) \quad \omega = \cos 2 \zeta \vartheta(\tilde{x}_3).$$

Da questo sistema di equazioni è possibile ricavare le costanti ξ , δ della (33). Resta da considerare la condizione di continuità delle soluzioni (32), (35) e delle loro derivate prime in $x_3 = \tilde{x}_3$. Si ha quindi la relazione

$$(43) \quad \xi \{4 \zeta^2 - \Xi^2\}^{1/2} \tan \{4 \zeta^2 - \Xi^2\}^{1/2} \vartheta(\tilde{x}_3) = \Xi - \frac{\omega}{\Xi + \{\xi - \omega\}^{1/2}}.$$

L'equazione qui sopra permette di calcolare i valori Ξ per ogni valore dell'argomento κ . I risultati di questo calcolo sono dati nella Tabella I.

TABELLA I.

Valori della funzione $\Xi(\kappa)$.

κ^2	Ξ
0	1,00
1,4	0,88
2	0,80
3,3	0,66
5	0,55
10	0,40
100	0,14

Così la condizione d'instabilità del mezzo considerato, che ha la forma (28), risulta

$$[44] \quad \frac{k^2 V_s^2}{2 \pi G \rho(0)} = \Xi^2(\kappa)$$

dove la funzione $\Xi(\kappa)$ è data nella Tabella I. Introducendo la funzione $\Theta(\kappa)$ determinata dalla

$$(45) \quad \kappa^2 \Theta(\kappa) = \Xi^{-2}(\kappa) - 1,$$

si può riscrivere la condizione d'instabilità nella forma

$$(46) \quad \lambda > \lambda_* = \pi \sqrt{\frac{V_s^2 + \Theta(\kappa) V_a^2}{\pi G \rho(0)/2}},$$

essendo la lunghezza d'onde critica $\lambda_* = \frac{2\pi}{k}$.

I valori della funzione $\Theta(\kappa)$ sono dati nella Tabella II ⁽⁵⁾.

TABELLA II.
Valori della funzione $\Theta(\kappa)$.

κ^2	$\Theta(\kappa)$
0	0,00
1,4	0,21
2	0,26
3,3	0,40
5	0,47
10	0,50
100	0,50

L'applicazione della condizione di instabilità (45) ad un modello di proto-galassia permette, sotto alcune supposizioni, di determinare il limite superiore della intensità del campo magnetico della galassia. La determinazione di questo campo magnetico sarà fatta in una Nota successiva.

(5) Siccome nel caso in cui κ è molto grande l'equazione per la perturbazione diventa

$$\delta\rho_{,33} + \left\{ \frac{4\pi G\rho(0)}{V_a^2(0)} - k^2 \right\} \delta\rho = 0,$$

la funzione $\Theta(\kappa)$ tende a 0,5 per grandi valori di κ .

Astrofisica. — *Sull'altezza dei brillamenti cromosferici in radiazione di idrogeno.* Nota di MARIA CRISTINA BALLARIO, presentata (*) dal Corrisp. G. RIGHINI.

Da uno studio statistico [1] [2] eseguito con un complesso di più di 3000 brillamenti in radiazione di idrogeno, i cui dati sono stati desunti dai Bollettini pubblicati dall'Osservatorio di Boulder [3], si è dedotta la variazione dell'area apparente A_p dei brillamenti in radiazione di idrogeno, in funzione della posizione del brillamento sulla superficie solare. Tale andamento è riportato in fig. 1 a tratto pieno: in ascisse sono dati i valori dell'angolo elio-

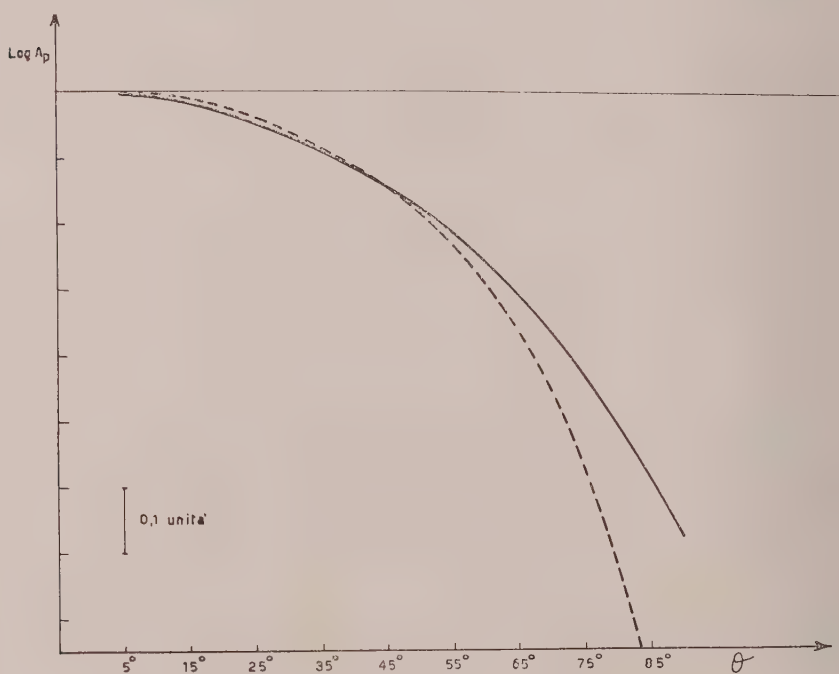


Fig. 1.

centrico ϑ , che definisce la posizione del brillamento, e in ordinate il logaritmo dell'area apparente media dei brillamenti compresi entro prefissati intervalli di ϑ . Il materiale è stato infatti suddiviso in nove sottogruppi aventi rispettivamente ϑ compreso tra 0° e 10 gradi, tra 11° e 20° ecc.

Da questa curva media è stata dedotta la correzione $C(\vartheta)$ [1] per la quale debbono essere moltiplicate le aree apparenti dei brillamenti con $\vartheta > 50^\circ$ per ottenere l'area corretta A_c . Quando $\vartheta < 50^\circ$ vale la correzione $\sec \vartheta$.

(*) Nella seduta del 13 maggio 1961.

L'area corretta media dei brillamenti compresi nei nove sottogruppi risulta allora con buona approssimazione costante per qualunque valore di ϑ .

Scopo di questa Nota è di dedurre dalla curva di fig. 1 le caratteristiche geometriche del brillamento tipo che possano dar ragione, da un punto di vista statistico, dei fenomeni che vengono osservati. Naturalmente si suppone che le suddette caratteristiche siano funzione soltanto della classe del brillamento, ma non della posizione sul disco. Con questo si postula che tutti i brillamenti della medesima classe, ovunque essi si verificchino, abbiano le stesse dimensioni e la stessa inclinazione e possano quindi essere rappresentati geometricamente dal brillamento tipo (fig. 2).

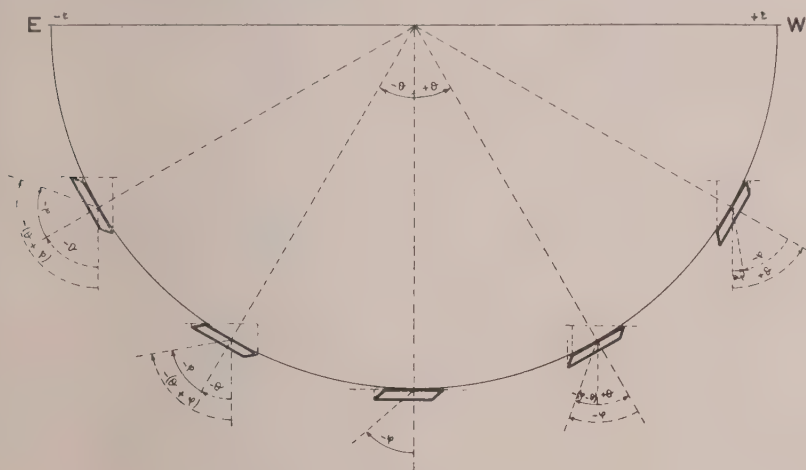


Fig. 2.

Nel grafico di fig. 1 è pure riportata, a tratteggio, la curva $\text{Log } \cos \vartheta$ e l'esame del grafico suggerisce la seguente considerazione: *per ϑ variabile tra 0° e 50° la curva $\text{Log } A_p$ coincide, con buona approssimazione, con la curva $\text{Log } \cos \vartheta$; ciò vuol dire che i brillamenti appartenenti ai primi cinque sottogruppi hanno un'area apparente media uguale a quella che si potrebbe misurare se il fenomeno fosse a due dimensioni.* Ma, come è stato provato, i brillamenti sono fenomeni a tre dimensioni, quindi essi debbono avere caratteristiche geometriche tali da soddisfare ugualmente alla relazione:

$$(a) \quad \frac{\Sigma A_p(\vartheta)}{n} : A(O) = \cos \vartheta_n$$

per i primi cinque sottogruppi. $A(O)$ indica l'area apparente media misurata al centro del disco, n in numero di br. appartenenti a ciascun sottogruppo e ϑ_n l'angolo eliocentrico medio del sottogruppo considerato.

Supponiamo ora che il brillamento tipo abbia la forma di un parallelepipedo obliquo a base quadrata a , altezza h , e sia inclinato di un angolo costante φ rispetto alla normale alla superficie solare. Poniamo che l'angolo

di inclinazione sia $+\varphi$ quando il br. è inclinato verso W e $-\varphi$ quando è inclinato verso E. Poniamo inoltre che l'angolo eliocentrico del br. sia $+\vartheta$ quando il br. si trova a W del meridiano centrale e $-\vartheta$ quando invece si trova a E.

Con le convenzioni ora poste si possono presentare i sei casi seguenti:

$$\begin{array}{ll}
 (1) & \left\{ \begin{array}{l} \vartheta > 0, \varphi > 0 \\ \vartheta < 0, \varphi < 0 \end{array} \right. & A_p(\vartheta) = a^2 \left[\cos \vartheta + \frac{h}{a \cos \varphi} \sin(\vartheta + \varphi) \right] \\
 (2) & & \\
 (3) & \left\{ \begin{array}{l} \vartheta > 0, \varphi < 0, \quad |\vartheta| > |\varphi| \\ \vartheta < 0, \varphi > 0, \quad |\vartheta| > |\varphi| \end{array} \right. & A_p(\vartheta) = a^2 \left[\cos \vartheta + \frac{h}{a \cos \varphi} \sin(\vartheta - \varphi) \right] \\
 (4) & & \\
 (5) & \left\{ \begin{array}{l} \vartheta > 0, \varphi < 0, \quad |\vartheta| < |\varphi| \\ \vartheta < 0, \varphi > 0, \quad |\vartheta| < |\varphi| \end{array} \right. & A_p(\vartheta) = a^2 \left[\cos \vartheta + \frac{h}{a \cos \varphi} \sin(\varphi - \vartheta) \right] \\
 (6) & &
 \end{array}$$

Al centro avremo ovviamente:

$$(7) \quad A(O) = a^2 \left(1 + \frac{h}{a} \tan \varphi \right).$$

La condizione (a) può essere verificata con le seguenti ipotesi:

A) *Il brillamento tipo è inclinato di un angolo costante $+\varphi$ (oppure $-\varphi$) rispetto alla normale alla superficie solare.*

Consideriamo i seguenti casi:

I) Sia $|\vartheta| < |\varphi|$. Poiché le medie A_p dalle quali è stato dedotto il grafico di fig. 1 sono state ottenute considerando insieme br. situati a est e a ovest del meridiano centrale, tali valori dovrebbero essere uguali alla semisomma delle (1) e (6) [oppure delle (2) e (5)].

Si ottiene cioè:

$$(8) \quad A_p(\vartheta) = a^2 \cos \vartheta \left(1 + \frac{h}{a} \tan \varphi \right).$$

Sottolineiamo che la (6) e la (5) e quindi la (8) non hanno significato per $\varphi = 0$ in quanto sono state ottenute nell'ipotesi che $|\vartheta| < |\varphi|$.

Tenuto conto della (7) si ha:

$$(9) \quad \frac{A_p(\vartheta)}{A(O)} = \cos \vartheta.$$

Nell'ipotesi dunque che tutti i br. siano inclinati rispetto alla normale alla superficie solare di un angolo costante in valore e segno, il rapporto tra l'area apparente media dei br. compresi in prestabiliti intervalli di ϑ , quando $0^\circ \leq \vartheta \leq \varphi^\circ$, e l'area misurata al centro del disco è uguale all'analogo rapporto per fenomeni a due dimensioni.

Poiché dai dati di osservazione risulta che la (9) è valida per ϑ compreso tra 0° e circa 50° , si deduce che l'inclinazione φ deve essere di circa 50° .

II) Sia $|\vartheta| > |\varphi|$. Le aree apparenti medie si ottengono in questo caso dalla semisomma delle (1) e (4) [oppure delle (2) e (3)] e precisamente si ha:

$$(10) \quad A_p(\vartheta) = a^2 \left(\cos \vartheta + \frac{h}{a} \sin \vartheta \right)$$

da cui

$$(11) \quad \frac{A_p(\vartheta)}{A(O)} = \frac{\cos \vartheta + \frac{h}{a} \sin \vartheta}{1 + \frac{h}{a} \tan \varphi}$$

B) il brillamento tipo sia sempre inclinato rispetto alla normale alla superficie solare di un angolo costante, ma ammettiamo che, per ogni intervallo di ϑ , ci siano tanti br. inclinati verso ovest e altrettanti br. inclinati verso est.

In questo caso avremo:

I) Se $|\vartheta| < |\varphi|$, le aree apparenti medie si ottengono dalla media delle (1) (2) (5) (6) e precisamente ancora la (8) e quindi la (9), cioè anche questa ipotesi soddisfa ai dati osservati.

II) Se $|\vartheta| > |\varphi|$ le aree apparenti medie sono date dalla media delle (1) (2) (3) (4). Si ottiene ancora la (10) e quindi la (11).

Prendiamo ora in considerazione la (11). Poiché $A_p(\vartheta)/A(O)$ è noto ed è precisamente uguale all'inverso della correzione $C(\vartheta)$ data in Tabella IX della Nota citata [1], è possibile ricavare il valore di φ e di h/a , cioè l'inclinazione del brillamento e il rapporto tra le dimensioni del brillamento stesso.

Ponendo:

$$x = h/a$$

$$y = \tan \varphi$$

si ottiene il sistema di equazioni:

$$\frac{1 + xy}{\cos \vartheta_i + x \sin \vartheta_i} = C_i$$

dove C_i è dato nella sopracitata Tabella IX e ϑ_i è variabile tra 50° e 90° .

I valori più probabili risultano:

$$x = 0,22$$

$$\varphi = 49^\circ$$

Se con questi valori si ricalcolano i $C(\vartheta)$ si ottengono i valori dati nella seguente Tabella I dalla quale risulta che i nuovi C differiscono da quelli della detta Tabella per quantità in complesso trascurabili per ϑ compreso tra 50° e 85° . Per $\vartheta > 85^\circ$ le differenze sono più forti, come del resto era da aspettarsi in quanto l'ultimo tratto della curva di fig. 1 era stato estrapolato.

Dalle Note già citate [1] [2] risulta che i br. delle varie classi di importanza hanno, al centro del disco, le aree medie $A(O)$ date in Tabella II (colonna prima). Per i br. di importanza 3 consideriamo due $A(O)$ rispettivamente di 20 e 40 gradi quadrati. Dalla (7) è possibile dedurre il valore del lato di base a e quindi il valore dell'altezza h .

Le altezze dei brillamenti così ottenute sono in buon accordo con le misure di altezza della cromosfera.

TABELLA I.

ϑ	C	ϑ	C
50°	1.537	70°	2.279
51	1.563	71	2.344
52	1.585	72	2.414
53	1.609	73	2.488
54	1.633	74	2.568
55	1.659	75	2.654
56	1.687	76	2.746
57	1.715	77	2.847
58	1.746	78	2.956
59	1.778	79	3.075
60	1.811	80	3.205
61	1.847	81	3.347
62	1.884	82	3.503
63	1.924	83	3.677
64	1.966	84	3.869
65	2.011	85	4.082
66	2.058	86	4.323
67	2.108	87	4.519
68	2.162	88	4.909
69	2.218	89	5.266
		90	5.685

TABELLA II.

A (O) in gradi quadrati	Importanza	a in gradi	a in km	h in km
1,33	— 1	1,03	12.500	2.750
3,07	1	1,57	19.100	4.200
7,25	2	2,41	29.300	6.500
20	3	4,00	48.700	10.700
40	3	5,67	68.900	15.200

CONCLUSIONE.

Nell'ipotesi che i brillamenti siano inclinati rispetto alla normale alla superficie solare di un angolo costante φ , le aree medie apparenti di un numero sufficientemente grande di brillamenti, compresi in prefissate corone circolari, variano con $\cos \vartheta$ quando l'angolo eliocentrico ϑ varia tra 0° e φ° . Vale cioè la relazione:

$$A_e = A_p(\vartheta) \sec \vartheta$$

mentre per $\vartheta > \varphi$ vale la:

$$A_e = A_p(\vartheta) \frac{1 + \frac{h}{a} \tan \varphi}{\cos \vartheta + \frac{h}{a} \sin \vartheta}$$

dove:

$$\frac{h}{a} = 0,22$$

$$\varphi = 49^\circ$$

cioè

$$A_e = A_p(\vartheta) \frac{1,25}{\cos \vartheta + 0,22 \sin \vartheta}.$$

Le altezze dei brillamenti sono comprese tra circa 2500 km per i sub-brillamenti e 15000 km e più per i brillamenti di importanza 3.

Nel corso di questo lavoro sono state poste due ipotesi entrambe atte ad interpretare i dati sperimentali. L'esame di quale di queste due ipotesi risponde meglio ai dati stessi formerà oggetto di una prossima Nota. Da ricerche preliminari appare senz'altro più probabile che i brillamenti siano indifferentemente inclinati verso est e verso ovest rispetto alla normale alla superficie solare.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] *Studio statistico sulle dimensioni dei brillamenti cromosferici in radiazione di idrogeno osservati ad Arcetri, Capri Svezia, Hawaii, MacMath, Mitaka, USNRL*, «Memorie S.A.I.», vol. XXXI, fasc. 2-3 (1960).
- [2] *Sui fattori di correzione per il passaggio da area apparente ad area corretta dei brillamenti cromosferici in radiazione di idrogeno*, «Rend. Acc. Lincei», serie VIII, fasc. 5, novembre 1960.
- [3] *Compilations of Solar-Geophysical Data* - Osservatorio di Boulder (Colorado).

Chimica. — *Sulla relazione tra fotoconducibilità e fotodesorbimento dell'ossigeno nell'ossido di zinco.* Nota (*) di ALESSANDRO CIMINO, ETTORE MOLINARI, FRANCESCO CRAMAROSSA, GIOVANNI GHERSINI, presentata (**) dal Socio V. CAGLIOTI.

È noto che l'irraggiamento dell'ossido di zinco con radiazione u.v., raggi γ o elettroni provoca un aumento della conducibilità elettrica dell'ossido, fino a un valore limite raggiunto in tempi dell'ordine dell'ora e dipendente dalla pressione di ossigeno sovrastante [1]. L'aumento di conducibilità sotto irraggiamento è stato attribuito ad un processo di fotodesorbimento dell'ossigeno adsorbito sulla superficie. Come è noto l'ossigeno adsorbito agisce da accettore di elettroni, e pertanto la concentrazione di questi nella banda di conducibilità dell'ossido risulta funzione del grado di copertura della superficie. L'interpretazione della fotoconducibilità come processo causato dal fotodesorbimento aveva ricevuto recentemente conferma diretta, essendosi potuto osservare un desorbimento di ossigeno, rivelabile manometricamente, contemporaneo all'aumento della conducibilità [2, 3, 4].

Recentemente Stone e collaboratori [5, 6], Barry [7] e Fujita e Kwan [8] hanno mostrato che in dipendenza del trattamento subito dalla superficie, e della pressione di ossigeno, si possono osservare non solo fenomeni di fotodesorbimento ma anche di fotoadsorbimento di ossigeno su ossido di zinco. Era pertanto da attendersi che nelle condizioni nelle quali si aveva fotoadsorbimento, si sarebbe dovuto osservare una diminuzione di conducibilità in seguito ad irraggiamento (fotoresistenza). Siamo stati così indotti a cercare una verifica della previsione di un effetto di fotoresistenza, data l'importanza dei fenomeni descritti, sia in relazione allo studio della natura delle specie adsorbite e degli equilibri tra queste, sia in relazione allo studio dell'interazione tra radiazione e superficie di un semiconduttore.

I risultati ottenuti nel corso della nostra ricerca hanno viceversa mostrato le difficoltà di interpretazione sulla base degli schemi finora generalmente accettati e la necessità quindi di riesaminare il problema e modificare le spiegazioni avanzate. In questa Nota desideriamo comunicare alcune osservazioni sperimentali di maggiore importanza rimandando la descrizione più dettagliata dei risultati nonché dell'apparecchiatura usata a una pubblicazione successiva.

L'ossido di zinco [9] sotto forma di pasticca sinterizzata a 900°C veniva irradiato con luce u.v. (Lampada Hanau Q 81) su una faccia della pasticca

(*) Lavoro eseguito presso il Laboratorio di Chimica delle Radiazioni del C.N.E.N., il Centro per la Chimica Generale del C.N.R. e l'Istituto di Chimica Generale dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta del 13 maggio 1961.

stessa; la pasticca era contenuta in un recipiente di quarzo collegato a un sistema di vuoto. Gli effetti fotoconduttivi sono stati studiati in corrente alternata (1592 c/s) tra i 24° e i 400°C e a pressione di ossigeno tra 2×10^{-6} e 100 torr., sia su pasticche fresche che su pasticche pretrattate in modo differente. I pretrattamenti eseguiti sono i seguenti: 1° Attivazione sotto vuoto ($P_{O_2} = 2 \times 10^{-6}$ torr) a 450°C per 4 ore; 2° Attivazione come sopra, e successivamente immissione di idrogeno a 1 torr a 500°, o a 100 torr a 400°C seguita da evacuazione a 24°C; 3° Attivazione come in 1° e successiva immissione di ossigeno a 100 torr a 480°C per 5 min, seguita da evacuazione a 24°C. I campioni con pretrattamento 1° e 3° dovrebbero corri-

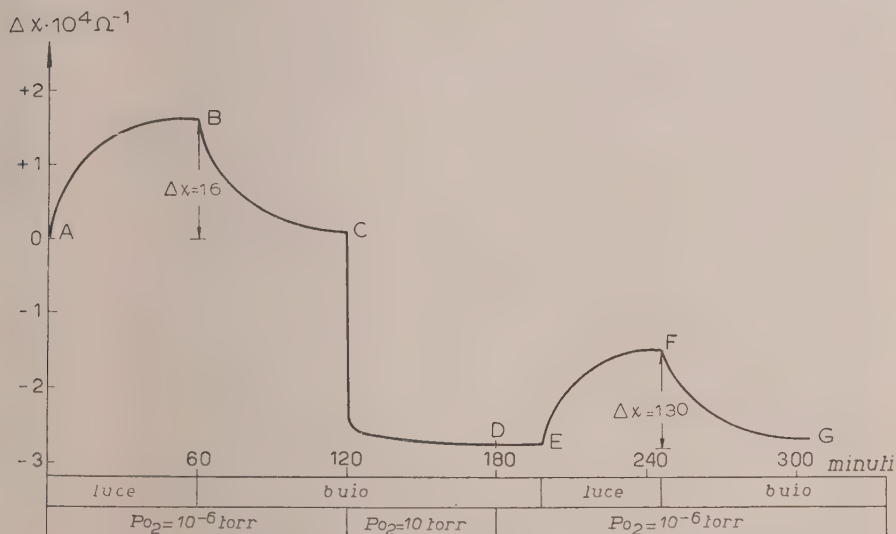


Fig. 1. - Influenza dell'irraggiamento u.v. e della pressione di ossigeno sulla conducibilità elettrica di un campione di ossido di zinco, pretrattato sotto alto vuoto a 450°C. Temperatura 24°C.

spondere ai campioni studiati da Barry e Stone [5] che fotodesorbono, quelli con pretrattamento 2° ai campioni che fotoadsorbono. Mentre rimandiamo a una successiva e più dettagliata esposizione la descrizione dei risultati ottenuti, e che mostrano la dipendenza dell'effetto fotoconduttivo dal tipo di pretrattamento, dalla pressione e dalla temperatura, si desidera qui far notare che non è stato possibile mettere in evidenza gli effetti di fotoresistenza prevedibili sulla base degli effetti di fotoadsorbimento descritti. Questo risultato imprevisto poteva significare due cose: *a)* o lo stato della superficie dei nostri campioni non corrispondeva a quello dei campioni di Stone e Barry, o *b)* i fenomeni di adsorbimento e desorbimento osservati da questi e da altri autori non erano in realtà direttamente in relazione con i fenomeni di fotoconducibilità, come era stato supposto fino ad ora. Contro la possibilità indicata in *a)* era però il fatto che non solo gli esperimenti di Stone e Barry

mostravano la facilità con cui si poteva ottenere una superficie avente le caratteristiche richieste, ma anche che i casi di fotoadsorbimento citati da altri autori potevano essere ricondotti a uno stato della superficie simile a quello realizzato da Stone e Barry. Abbiamo pertanto eseguito la sequenza di esperimenti riportati nella figura, che illustra un caso particolare, peraltro perfettamente riprodotto più volte con risultati identici. Un campione, dopo pretrattamento 1°, irradiato sotto vuoto $P_{O_2} = 2 \times 10^{-6}$ torr a 24°C mostra un aumento di conducibilità $\Delta\chi = 1,60 \cdot 10^{-4} \Omega^{-1}$ (tratto A-B della figura). La conducibilità, dopo spegnimento della luce, torna al valore iniziale in circa 60 min. (tratto B-C). In queste condizioni la quantità di ossigeno desorbito è sicuramente molto piccola come mostrato da Romero-Rossi e Stone (fig. 4 della referenza [6]) e più recentemente e direttamente da Barry e Klier [4]. L'immissione di 10 torr di ossigeno (punto C) provoca una netta caduta della conducibilità conseguente all'adsorbimento dell'ossigeno stesso (tratto C-D). Il pompaggio successivo in alto vuoto non ha effetto apprezzabile sulla conducibilità (tratto D-E). La susseguente illuminazione in alto vuoto (tratto E-F) provoca un aumento di conducibilità ($\Delta\chi = 1,30 \cdot 10^{-4} \Omega^{-1}$) inferiore a quello osservato con superficie scoperta. È tuttavia da notare che in queste condizioni il desorbimento di ossigeno è certamente molto notevole, ed è stato in queste condizioni rilevato manometricamente da altri Autori. Ciò che però è ancora più in disaccordo con quanto ci si poteva aspettare è il fenomeno che si osserva allo spegnimento della luce al punto F: si ha infatti una caduta della conducibilità, che ritorna al valore iniziale (tratto F-G). Deve essere sottolineato il fatto che in queste condizioni di vuoto la quantità di ossigeno che può essere riadsorbita non può essere altro che una frazione assai piccola della quantità desorbita sotto irraggiamento. L'immissione di ossigeno al punto F, seguito dallo spegnimento della luce, provoca entro i limiti degli errori, la stessa diminuzione di conducibilità osservata sotto vuoto.

L'insieme delle osservazioni esposte costituisce a nostro avviso una importante indicazione del fatto che l'ossigeno desorbito *in quantità notevoli* a seguito di irraggiamento non può essere ritenuto responsabile degli effetti fotoconduttivi osservati.

A questa stessa conclusione sono indipendentemente pervenuti Barry e Klier [4] sulla base della osservazione simultanea delle variazioni di conducibilità e di pressione sotto irraggiamento γ su polveri di ZnO.

Allo stato attuale si deve pertanto concludere che l'aumento di conducibilità che si osserva sotto irraggiamento in particolari condizioni della superficie contemporaneamente a un desorbimento di ossigeno, non costituisce una prova sufficiente per trarre la conclusione che l'effetto fotoconduttivo debba essere ricondotto al desorbimento di quantità apprezzabili di ossigeno. Possiamo inoltre aggiungere che abbiamo potuto confermare come l'effetto fotoconduttivo dipenda dalla pressione di ossigeno, il che implica che l'equilibrio elettronico che si stabilisce sotto irraggiamento è condizionato da qualche tipo di interazione della superficie con la fase gassosa. I fatti esposti

possono essere interpretati sulla base dell'esistenza di diversi tipi di ossigeno adsorbito, ipotesi questa già suggerita da diversi Autori [4-8]. Se pertanto si ammette che l'ossigeno che viene desorbito sotto irraggiamento *in quantità notevoli* abbia sulla conducibilità elettrica una influenza limitata (vedi ref. [4]) la fotoconducibilità osservata potrebbe essere ricondotta al fotodesorbimento di un diverso tipo di ossigeno la cui influenza sarebbe invece tanto grande da modificare la conducibilità anche con piccole variazioni della quantità adsorbita (vedi ref. [1]). Va notato al riguardo che questo secondo tipo di ossigeno potrebbe in realtà identificarsi con l'ossigeno di posizioni reticolari della superficie dell'ossido; in tal caso la fotoconducibilità sarebbe provocata da una fotolisi superficiale, come suggerito da Collins e Thomas [10].

In questa ipotesi, la neutralizzazione di uno ione ossigeno da parte dei buchi positivi ne permetterebbe il desorbimento, con la conseguente formazione di un eccesso di zinco che agirebbe da donatore. Il decadimento della conducibilità quando l'irraggiamento cessa corrisponderebbe al riadsorbimento dell'ossigeno e alla distruzione dell'eccesso di zinco. È ovvio come tale processo debba dipendere dalla pressione di ossigeno, e che anche una pressione dell'ordine di 10^{-6} torr possa essere sufficiente a ripristinare le condizioni iniziali della superficie una volta cessato l'irraggiamento. In favore di questa ipotesi fotolitica sta probabilmente anche il fatto che gli effetti fotoconduttivi sono presenti e addirittura di entità maggiore, sui campioni trattati con idrogeno a 500°C , i quali non dovrebbero avere ossigeno adsorbito, o comunque dovrebbero averne in quantità notevolmente minore.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] G. HEILAND, E. MOLLWO, F. STÖCKMANN, in *Solid State Physics*, vol. 8, p. 191, New York 1959.
- [2] D. B. MEDVED, « J. Chem. Phys. », 28, 870 (1958).
- [3] I. A. MYASNIKOV e S. Ya. PSHEZHETSKII, « Dokl. Akad. Nauk. U.S.S.R. », 99, 125 (1954).
- [4] T. I. BARRY e K. KLIER, Comunicazione presentata alla Discussion of the Faraday Society, Saclay (1961).
- [5] T. I. BARRY e F. S. STONE, « Proc. Roy. Soc. », A 255, 124 (1960).
- [6] F. ROMERO-ROSSI e F. S. STONE, Secondo Congresso Internazionale di Catalisi, Comunicazione n. 72 - Parigi 1960.
- [7] T. I. BARRY, Secondo Congresso Internazionale di Catalisi, Comunicaz. n. 70 - Parigi 1960.
- [8] Y. FUJITA e T. KWAN, « Bull. Chem. Soc. Japan », 31, 379 (1958).
- [9] Per la preparazione di ZnO vedere A. CIMINO, E. CIPOLLINI, E. MOLINARI, « Gazz. Chim. Ital. », 90, 91 (1960).
- [10] R. J. COLLINS e D. G. THOMAS, « Phys. Rev. », 112, 388 (1958).

Neurochimica. — *Sugli isoenzimi della latticodeidrogenasi di tessuto nervoso.* — I. *Reazione con analoghi piridinici del difosfopiridin-nucleotide ed affinità per l'acido piruvico* (*). Nota di VINCENZO BONAVITA e ROSA GUARNERI, presentata (**) dal Socio L. CALIFANO.

Nel 1957 Wieland e Pfeiderer [1] hanno dimostrato l'esistenza in uno stesso tessuto di forme multiple della latticodeidrogenasi (LDH). Per tali proteine, catalizzanti la stessa funzione, Markert e Møller [2] hanno proposto più recentemente il nome di *isoenzima* (*isozyme*).

Mentre la più ampia dimostrazione di proprietà cinetiche differenziali fra le latticodeidrogenasi di specie e di tessuti diversi è dovuta a Kaplan et al. [3], gli stessi Wieland e Pfeiderer [1] sono stati i primi ad osservare differenze nelle proprietà cinetiche degli isoenzimi di LDH.

Le poche osservazioni sperimentali compiute finora inducono certamente a concludere che tra gli isoenzimi di latticodeidrogenasi esistono differenze cinetiche, ma non consentono di stabilire quale sia la caratteristica strutturale che distingue gli isoenzimi tra loro e condiziona le differenze cinetiche. I risultati che vengono descritti in questa comunicazione ed in altre che seguiranno permettono di formulare un'ipotesi e di trarre alcune conclusioni.

Questa Nota riassume anche alcuni dati riguardanti l'alterazione strutturale che si verifica negli isoenzimi di latticodeidrogenasi durante la migrazione elettroforetica su gel di agar. Proprio questa alterazione ha consentito indirettamente di fare luce sul meccanismo della inibizione da eccesso di piruvato.

Il tessuto nervoso rappresenta, per le sue caratteristiche strutturali e per la presenza di forme cellulari multiple, un materiale particolarmente complesso e poco adatto per uno studio cinetico degli isoenzimi. La conoscenza di alcune proprietà strutturali e funzionali di questi ultimi è, tuttavia, indispensabile per l'indagine ulteriore, già in corso, sugli isoenzimi della latticodeidrogenasi in strutture centrali diverse di una stessa specie e nell'encefalo di specie differenti.

MATERIALE E METODI.

La latticodeidrogenasi di encefalo di bue è stata parzialmente purificata secondo un procedimento essenzialmente simile a quello suggerito da Neilands [4] per l'enzima da cuore di bue. Un encefalo intero veniva, infatti,

(*) Lavoro eseguito nella Clinica neurologica e nell'Istituto di Anatomia comparata dell'Università di Palermo, con un contributo (Grant B-2917) del National Institute of Neurological Diseases and Blindness, e con un contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 13 maggio 1961.

omogeneizzato in due volumi di H_2O distillata e centrifugato per 30 minuti a 30.000 g. Al supernatante veniva aggiunto gel di fosfato di calcio (15 %, v/v), preparato secondo Keilin ed Hartree [5] e, dopo agitazione per 30 minuti, la soluzione veniva centrifugata di nuovo, ed il gel estratto con un tampone di fosfati, 0,2 M, pH 7,4. A tale estratto (1/5 circa del volume dell'omogenato iniziale) si aggiungeva solfato d'ammonio fino ad una saturazione del 60 %, ed il precipitato, raccolto per centrifugazione, era disciolto in un volume di H_2O distillata uguale a circa 1/40 del volume dell'estratto grezzo.

Tale soluzione veniva centrifugata ancora una volta e quindi dializzata con agitazione per 24 ore, dopo aggiunta di DPNH 2×10^{-4} M, piruvato di sodio 1×10^{-3} M e cisteina 1×10^{-4} M. Tutto il procedimento era svolto a $+4^\circ C$. La purificazione che ne risultava era di 12-14 volte.

Poiché esperimenti preliminari hanno dimostrato che la purificazione non altera sensibilmente il quadro elettroforetico su gel di agar, molte separazioni su tale supporto sono state eseguite con enzima parzialmente purificato.

Elettroforesi su gel di agar. - Venivano usate piastre dello spessore di 0,4 cm preparate secondo Grabar e Williams [6], con un tampone di veronal - HCl, 0,05 M, pH 7,6. La migrazione elettroforetica durava 3,5 h e la differenza di potenziale, applicata alle piastre di 18×12 cm, era di 5,6 Volts/cm. Tutte le piastre erano preparate con Bacto-Agar Difco.

Determinazione dell'attività latticodeidrogenasica. - Sono stati usati piruvato di sodio ed acido lattico (*purum*) 40 % della ditta Fluka. Il DPN ed il DPNH erano prodotti della ditta Pabst. Il 3-acetil-piridina-DPN (APDPN), il piridin-3-aldeide-DPN (Py 3 ALDPN) e la tionicotinamide-DPN (TNDPN) erano un dono del dott. Nathan O. Kaplan (Brandeis University, Waltham, Mass., U.S.A.). Tutti gli altri composti usati erano prodotti puri per analisi. La riduzione dei dinucleotidi ossidati e la ossidazione del DPNH, sono state misurate con uno spettrofotometro Beckman mod. DU, seguendo l'incremento e il decremento della estinzione a diverse lunghezze d'onda [7], a seconda del coenzima presente nella miscela di reazione.

Dei dinucleotidi ossidati venivano usate $0,7 \mu M$ in un volume finale di 3 ml, mentre del DPNH venivano usate solo $0,2 \mu M$. Le altre condizioni sperimentali erano quelle suggerite da Kornberg [8] per la riduzione del piruvato e quelle proposte da Neilands [4] per la deidrogenazione del lattato.

RISULTATI.

Elettroforesi su gel di agar della latticodeidrogenasi di tessuto nervoso. - La latticodeidrogenasi, parzialmente purificata dall'encefalo di specie diverse, è stata sottoposta ad elettroforesi su gel di agar. I quadri elettroforetici sono risultati ben riproducibili sia per la localizzazione delle singole frazioni che per i rapporti percentuali fra essi, e si sono osservate trascurabili differenze tra separazioni elettroforetiche successive. L'enzima da encefalo di buco,

che è stato sottoposto ad indagine più dettagliata, si risolve, a pH 7,6, in quattro frazioni, di cui due migrano verso il polo negativo (A e B) e due verso il polo positivo (C e D) (fig. 1). Tuttavia, poiché la frazione D è presente in piccole quantità, l'analisi cinetica è stata limitata a tre soli isoenzimi (A, B e C).

È interessante sottolineare che il *pattern* elettroforetico della latticodeidrogenasi di encefalo di bue è nettamente diverso da quello di altre specie animali. Differenze molto cospicue sono state osservate anche tra specie che vengono considerate sistematicamente non molto lontane. Di particolare rilievo, a tale proposito, sono le differenze tra i quadri elettroforetici di *DiscoGLOSSUS pictus* (un anfibio anurio) e di *Triturus cristatus carnifex* (un an-

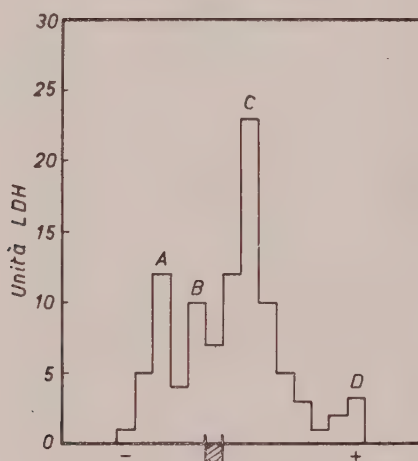


Fig. 1. - Separazione su gel di agar degli isoenzimi di latticodeidrogenasi dell'encefalo di bue. Unità di attività latticodeidrogenasica (unità LDH) è la quantità di enzima che determina un decremento di estinzione di 0,001 in 1 minuto a 340 m μ .

fibio urodelo). Queste differenze saranno oggetto di descrizione particolareggiata in una nota successiva.

La reazione della latticodeidrogenasi non risolta e di tre isoenzimi con analoghi piridinici del DPN. - I dati riportati nella Tabella I dimostrano che gli isoenzimi A, B e C reagiscono diversamente con il coenzima naturale ed i suoi analoghi piridinici. Se si prendono in esame i rapporti tra le velocità iniziali degli isoenzimi in presenza di DPN, APDPN e TNDPN, si può rilevare che i rapporti variano gradualmente da A verso C. Quando si usi come coenzima il Py 3 ALDPN non si osserva una tale gradualità. La fig. 2 dimostra, tuttavia, che, anche nei riguardi del Py 3 ALDPN, i tre isoenzimi sono diversi tra loro.

I risultati della Tabella I sono di qualche interesse, perché dimostrano inoltre, che i rapporti calcolabili con i tre isoenzimi non danno ragione di quelli ottenuti con la latticodeidrogenasi non risolta.

TABELLA I.

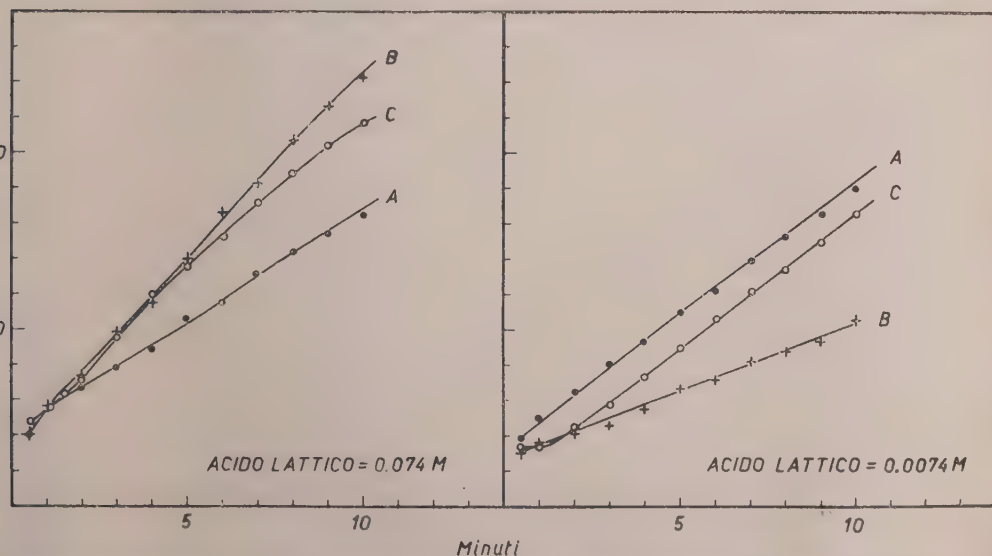
Rapporti tra le velocità di riduzione di alcuni dinucleotidi in presenza di due concentrazioni di lattato.

Enzima	$\frac{\text{DPN(L)}}{\text{DPN(H)}}$	$\frac{\text{APDPN(L)}}{\text{APDPN(H)}}$	$\frac{\text{Py 3 AIDPN(L)}}{\text{Py 3 AIDPN(H)}}$	$\frac{\text{TNDPN(L)}}{\text{TNDPN(H)}}$
LDH non risolta .	0,86	0,95	0,395	0,53
Isoenzima A . . .	0,54	0,83	0,60	0,33
Isoenzima B . . .	0,75	1,40	0,42	0,38
Isoenzima C . . .	0,90	1,5	0,8	0,5

I dati riportati in questa tabella sono stati ottenuti con due concentrazioni di lattato (0,074 e 0,0074 M, rispettivamente, che sono state indicate con i simboli (H) e (L). Di conseguenza, DPN(L) rappresenta la velocità di deidrogenazione del lattato, quando il DPN è il coenzima e la concentrazione del lattato è 0,0074 M. Allo stesso modo, APDPN(H) indica la velocità di reazione con lattato 0,074 M ed in presenza di APDPN.

Le prove di attività con APDPN sono state eseguite usando una quantità di enzima otto volte maggiore di quella usata con DPN, e le prove con Py 3 AIDPN usando una quantità quattro volte maggiore.

La conclusione più ovvia è che la migrazione elettroforetica sia stata causa di un'alterazione strutturale delle proteine enzimatiche. L'analisi cinetica della affinità dell'acido piruvico per i singoli isoenzimi e per l'enzima non risolto ha consentito una definizione migliore di tale fenomeno.



2. - Velocità di riduzione del Py 3 AIDPN con tre isoenzimi di latticodeidrogenasi di encefalo di bua. Le concentrazioni finali del lattato erano quelle indicate nella figura. Per gli altri dettagli sperimentali, si veda il testo.

TABELLA II.

Costanti di Michaelis per il piruvato.

Enzima	« Protetto »	« Non protetto »
LDH non risolta	$1,31 \times 10^{-5} \text{ M}$	$3,3 \times 10^{-5} \text{ M}$
Isoenzima A	$7,15 \times 10^{-5} \text{ M}$	$2,0 \times 10^{-4} \text{ M}$
Isoenzima B	$3,25 \times 10^{-5} \text{ M}$	$4,4 \times 10^{-4} \text{ M}$
Isoenzima C	$1,95 \times 10^{-5} \text{ M}$	$7,8 \times 10^{-4} \text{ M}$

Le costanti di Michaelis per l'acido piruvico della latticodeidrogenasi non risolta e dei singoli isoenzimi. - Nella Tabella II sono riportati i valori di K_m per l'acido piruvico dell'enzima non risolto e di tre isoenzimi (A, B, C). Tali valori sono stati determinati a pH 7,4 ed in presenza di DPNH $7 \times 10^{-4} \text{ M}$. Si può rilevare dalla Tabella II che il K_m per l'enzima non risolto è nettamente inferiore a tutti quelli calcolati con le tre frazioni separate mediante elettroforesi. Inoltre, con una miscela artificiale dei tre isoenzimi è possibile calcolare un valore di K_m molto vicino al valore medio teorico ($K_m = 3,65 \times 10^{-5} \text{ M}$).

Le figure 3 e 4 consentono di richiamare l'attenzione su di un altro fenomeno, e cioè la riduzione e rispettivamente la scomparsa della inibizione da

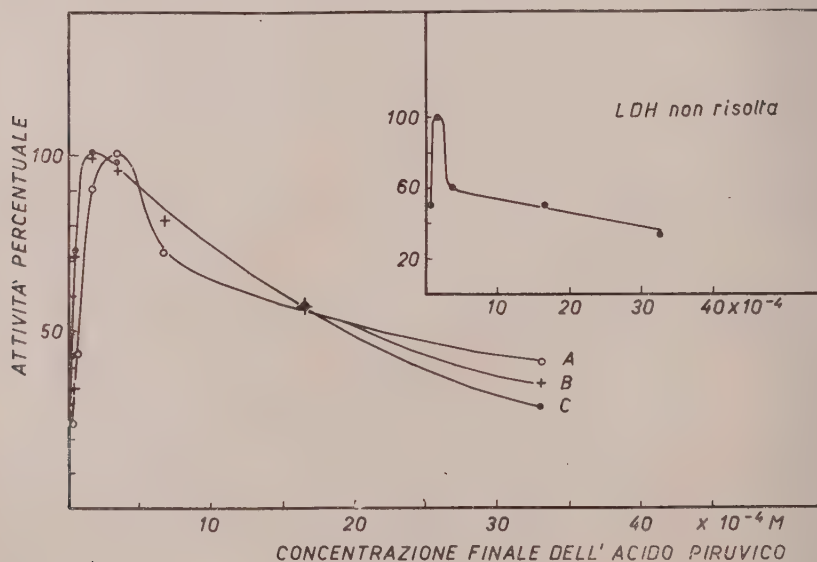


Fig. 3. - Effetto della concentrazione del piruvato sulla velocità di reazione, con tre isoenzimi di latticodeidrogenasi e con l'enzima non risolto di encefalo di bue.

eccesso di piruvato con i tre isoenzimi. L'inibizione da eccesso di substrato scompare completamente solo se l'enzima che viene sottoposto ad elettroforesi su gel di agar non è stato protetto mediante l'aggiunta di DPNH e piruvato (vedi prima). Come risulta dalla Tabella II, la mancanza di protezione dell'enzima durante la migrazione elettroforetica determina un netto incremento dei K_m per il piruvato.

Sulla base dei risultati ottenuti con gli analoghi strutturali del DPN e sulla base delle osservazioni circa l'affinità differenziale degli isoenzimi e dell'enzima non risolto per l'acido piruvico, sembra lecito affermare che l'elettroforesi su gel di agar determina realmente una alterazione strutturale della latticodeidrogenasi.

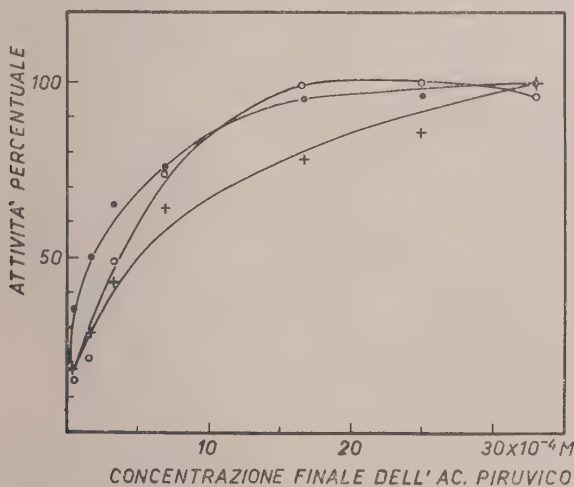


Fig. 4. - Effetto della concentrazione del piruvato sulla velocità di reazione, con gli isoenzimi « non protetti ».

DISCUSSIONE.

I risultati descritti in questa Nota dimostrano la esistenza di differenze nella reattività dei singoli isoenzimi con gli analoghi piridinici del DPN. Gli esperimenti con tali coenzimi artificiali hanno dimostrato, peraltro, anche una sostanziale discordanza tra le proprietà cinetiche dei singoli isoenzimi e quelle della latticodeidrogenasi non risolta. Se ne è tratta la conclusione che l'elettroforesi su gel di agar determina un'alterazione strutturale delle proteine enzimatiche e che tale alterazione modifica le proprietà cinetiche delle proteine stesse. Si è portati a chiedersi se le frazioni di latticodeidrogenasi isolate su dietilaminoetil-cellulosa da Flexner et al. [9] siano strutturalmente modificate in qualche modo, e se anche l'elettroforesi su gel di amido alteri le proteine separabili.

Gli esperimenti sull'affinità dell'acido piruvico per i singoli isoenzimi e per l'enzima non risolto sembrano degni di particolare menzione. La ridu-

zione e rispettivamente la scomparsa della inibizione da eccesso di piruvato spingono a considerare la modificazione strutturale come fenomeno di *unfolding*. Plagemann et al. [10] hanno osservato un decremento della inibizione da piruvato con la latticodeidrogenasi lasciata invecchiare o trattata con tripsina.

L'esistenza di una tale modificazione strutturale limita notevolmente il valore dell'analisi cinetica degli isoenzimi risolti. Sulla base di tutte le osservazioni descritte in questa Nota, sembra possibile, tuttavia, concludere che la maggiore differenza tra gli isoenzimi, separati su gel di agar, riguarda il gruppo molecolare implicato nel legame con il DPN o i suoi analoghi strutturali, e con il substrato. Su questo punto uno studio con metabisolfito di sodio [11] ha consentito conclusioni più definite.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] TH. WIELAND e G. PFLEIDERER, « Biochem. Z. », 329, 112 (1957).
- [2] C. L. MARKERT e F. MØLLER, « Proc. Nat. Acad. Sci. », 45, 753 (1959).
- [3] N. O. KAPLAN, M. M. CIOTTI, R. BIEBER e M. HAMOLSKY, « Science », 131, 392 (1960).
- [4] J. B. NEILANDS, in *Methods in Enzymology* (a cura di S. P. Colowick e N. O. Kaplan). Vol. I, p. 449, Academic Press Inc., New York 1955.
- [5] D. KEILIN e E. F. HARTREE, « Proc. Roy. Soc. (London) », B 124, 397 (1938).
- [6] P. GRABAR e C. A. WILLIAMS, Jr., « Biochim. Biophys. Acta », 17, 67 (1955).
- [7] N. O. KAPLAN, in *The Enzymes* (a cura di P. D. Boyer, H. Lardy e K. Myrbäck). Vol. 3, parte B, p. 105. Academic Press Inc., New York 1960.
- [8] A. KORNBERG, in *Methods in Enzymology* (a cura di S. P. Colowick e N. O. Kaplan). Vol. I, p. 441. Academic Press Inc., New York 1955.
- [9] L. B. FLEXNER, J. B. FLEXNER, R. B. ROBERTS e G. DE LA HARA, *Developmental Biology*, 2, 313 (1960).
- [10] P. G. W. PLAGEMANN, K. F. GREGORY e F. WROBLEWKI, « J. Biol. Chem. », 235, 2288 (1960).
- [11] V. BONAVITA e R. GUARNERI, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », in corso di stampa.

Spettroscopia molecolare. — *Su alcune semplificazioni formali nel calcolo delle intensità delle bande di vibro-rotazione* (*). Nota di ORIANO SALVETTI, presentata (**) dal Socio G. B. BONINO.

La spettroscopia u. r. e Raman è stata per lungo tempo utilizzata allo scopo di ricavare la funzione potenziale nelle singole molecole. Una più raffinata tecnica costruttiva degli apparecchi permette oggi attraverso la misura delle intensità delle bande di vibro-rotazione di ricavare per via spettroscopica altri dati interessanti della struttura molecolare come le proprietà elettriche vettoriali (momenti di legame) e tensoriali (polarizzabilità) dei legami.

La teoria delle intensità delle bande u. r. e Raman fu svolta nelle linee generali fino dai primi anni della meccanica quantistica, ma la successiva applicazione ha richiesto continui affinamenti formali aventi lo scopo di facilitare e razionalizzare i calcoli.

Il legame fra le proprietà elettriche vettoriali e l'intensità delle bande u. r. fa capo alla formula già stabilita da Mulliken [1] e successivamente sviluppata da Thorndike, Wells e Wilson [2]

$$(1) \quad I_s = \int_{\text{banda}} \alpha(\nu) d\nu = \frac{\pi N}{3c} \left[\left(\frac{\partial P_x}{\partial Q_s} \right)^2 + \left(\frac{\partial P_y}{\partial Q_s} \right)^2 + \left(\frac{\partial P_z}{\partial Q_s} \right)^2 \right]$$

dove I_s è l'intensità integrata della banda s.ma di vibro-rotazione, \vec{P} è il momento dipolare della molecola, Q_s è la s.ma coordinata normale ed N il numero di molecole per cm^3 . La (1) richiede essenzialmente l'approssimazione che i livelli rotazionali della molecola siano di ordine inferiore a quello vibrazionale considerato. Viene inoltre ammessa l'approssimazione armonica nel potenziale mentre lo sviluppo in serie del momento dipolare in funzione delle coordinate normali è troncato alla prima approssimazione.

L'intensità delle righe Raman è legata alle derivate delle componenti del tensore di polarizzabilità. Partendo dalla ben nota teoria di Placzek dell'effetto Raman [3] si ottiene la relazione [4]:

$$(2) \quad I_s = P_\alpha (\tilde{\alpha}_s)^2 + P_\beta (\tilde{\beta}_s^2)$$

dove I_s è l'intensità integrata della banda s.ma P_α e P_β sono costanti dipendenti in forma nota dalla frequenza eccitatrice e dalle condizioni di osserva-

(*) Lavoro eseguito presso il Nucleo di Ricerche di Strutturistica e Spettroscopia Molecolare organizzato dal Centro Studi di Chimica Applicata del Consiglio Nazionale delle Ricerche diretto dal prof. G. B. Bonino.

(**) Nella seduta del 13 maggio 1961.

zioni, $\bar{\alpha}_s$, $\bar{\beta}_s^2$ sono correlate alle derivate delle componenti del tensore di polarizzabilità dalle seguenti relazioni:

$$(3) \left\{ \begin{aligned} \bar{\alpha}_s &= \frac{1}{3} (\alpha_{s,xx} + \alpha_{s,yy} + \alpha_{s,zz}) \\ \bar{\beta}_s^2 &= \frac{1}{2} [(\alpha_{s,xx} - \alpha_{s,yy})^2 + (\alpha_{s,xx} - \alpha_{s,zz})^2 + (\alpha_{s,yy} - \alpha_{s,zz})^2 + 6(\alpha_{s,xy}^2 + \alpha_{s,xz}^2 + \alpha_{s,yz}^2)] \\ \alpha_{s,pq} &= \frac{I_{\alpha_{pq}}}{\partial Q_s} \quad (p, q = x, y, z). \end{aligned} \right.$$

Le intensità u. r. o Raman sono direttamente legate alle derivate delle componenti del momento dipolare o di quelle del tensore di polarizzabilità rispetto alle coordinate normali. Sembra però molto più significativa la conoscenza di queste grandezze in relazione ad altri parametri che definiscono la struttura molecolare. Le relazioni fra le derivate delle componenti del momento dipolare rispetto alle coordinate interne di simmetria e le analoghe derivate rispetto alle coordinate normali sono state discusse da Thorndike, Wells e Wilson [2] che stabilirono la relazione:

$$(4) \quad \frac{\partial P_x}{\partial \sigma_j} = \sum_i \frac{\partial P_x}{\partial Q_i} (\mathbf{L}^{-1})_{ij}$$

con \mathbf{L} matrice di trasformazione dalle coordinate normali alle coordinate interne di simmetria σ_i [5]. Partendo dalla (4) Crawford [4] per primo dimostrò la importante relazione:

$$(5) \quad \sum_i I_i = \sum_{x,k,j} \frac{\partial P_x}{\partial \sigma_k} \cdot \frac{\partial P_x}{\partial \sigma_j} G_{i,kj}$$

dove $G_{i,kj}$ è l'elemento di indici k e j della matrice \mathbf{G}_i di Wilson relativa alla i.ma rappresentazione irriducibile. La (5) è di notevole interesse in quanto può essere riguardata come l'analogia, per le intensità della regola di Teller e Redlich relativa alle frequenze. Essa esprime infatti che la somma delle intensità delle bande di uno stesso tipo di simmetria è indipendente dalla funzione potenziale. Poiché le coordinate interne devono rispettare le condizioni di annullamento dei momenti, la generica derivata $\partial P_a / \partial \sigma_j$ ($a = x, y, z$) non è, in generale, un invariante isotopico, contrariamente a quanto a prima vista potrebbe apparire. Ciò induce non indifferenti complicazioni, che si manifestano sia nel caso di una singola specie isotopica, sia nel passaggio da una specie ad un'altra. Quest'ultimo problema, del passaggio da una specie isotopica ad un'altra, fu affrontato da Crawford stesso [4], prendendo direttamente in considerazione, oltre alle coordinate interne di simmetria anche le coordinate di rotazione della molecola. Morcillo, Biarge e Herranz [6] cercarono di aggirare il problema, ai fini di una utilizzazione della (5), introducendo direttamente le derivate rispetto agli spostamenti cartesiani dei singoli atomi. Queste ultime derivate sono sicuramente invarianti isotopiche, però presentano lo svantaggio di una meno immediata interpretazione fisica che può facilmente condurre a diversi errori. Rianalizzando il problema

sembra di poter affermare che le difficoltà nascono sostanzialmente dal fatto che, mentre il potenziale dipende esclusivamente da certe coordinate che chiamiamo coordinate interne, e a partire da queste vengono svolti i calcoli delle frequenze, altre grandezze, ad esempio le componenti del momento dipolare, sono più propriamente espresse mediante altri parametri che non quelli più adatti per il potenziale. Così nella molecola triatomica simmetrica il potenziale è funzione delle due distanze e dell'angolo di legame mentre una componente del momento elettrico dipende oltre che da questi tre parametri anche dall'angolo che la bisettrice forma con una direzione fissa con le posizioni di equilibrio dei tre atomi; e mentre nelle oscillazioni totalsimmetriche questo ultimo angolo non varia, nella oscillazione B_1 varia inducendo ulteriori termini nel computo delle componenti del momento dipolare. Anche nelle molecole poliatomiche l'energia potenziale può essere espressa in funzione delle distanze e degli angoli di legame, mentre una generica componente del momento dipolare o del tensore di polarizzabilità viene più appropriatamente espressa, nelle ipotesi dei momenti e dei tensori di legame, mediante le distanze di legame e i coseni che le direzioni dei legami formano con una terna cartesiana fissa con le posizioni di equilibrio. Qualora si tenga conto delle opportune coordinate, le derivate delle componenti del momento dipolare e del tensore di polarizzabilità diventano invarianti isotopiche, ed il calcolo delle intensità risulta semplificato. Per queste ragioni è stato considerato non privo di interesse sviluppare le formule di trasformazione nel caso generale, tenendo presente uno schema di calcolo nel quale le frequenze (o nel calcolo inverso le costanti di forza) vengono studiate a partire dalle coordinate interne, mentre le intensità vengono messe in relazione con le derivate dei momenti o del tensore di polarizzabilità calcolate rispetto ad altre generiche coordinate.

Indichiamo con \mathbf{x} la matrice colonna dei $3n$ spostamenti cartesiani dei singoli atomi, con μ la matrice diagonale degli inversi delle masse dei singoli atomi (ciascuna ripetuta tre volte), con σ_i la matrice colonna delle coordinate di simmetria della i -ma rappresentazione irriducibile, con \mathbf{r} la matrice colonna delle coordinate interne, con \mathbf{Q}_i la matrice colonna delle coordinate normali di vibrazione della i -ma rappresentazione irriducibile, con \mathbf{Q}_0 la matrice colonna delle coordinate normali di traslazione e rotazione. Le matrici, generalmente rettangolari, \mathbf{q} , β , \mathbf{B}_i , \mathbf{C}_i , \mathbf{D}_i sono definite dalla relazioni

$$(6) \quad \mathbf{q} = \mu^{-1/2} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \mu^{1/2} \mathbf{q}, \quad \mathbf{r} = \beta \mathbf{x}, \quad \sigma_i = \mathbf{B}_i \mathbf{r} = \mathbf{B}_i \beta \mathbf{x} = \mathbf{C}_i \mu^{1/2} \mathbf{q} = \mathbf{D}_i \mathbf{q}$$

e sono tutte dati iniziali immediati del problema, dipendendo soltanto dalla geometria, dalle masse e dalle coordinate scelte.

Indicando con l'apice la trasposta di ogni matrice, l'energia potenziale si scrive:

$$(7) \quad 2V = \sum_i \sigma_i' \mathbf{F}_i \sigma_i$$

mentre l'energia cinetica è espressa dalla relazione

$$(8) \quad 2T = \sum_i \dot{\sigma}_i' \mathbf{G}_i^{-1} \dot{\sigma}_i$$

con

$$(9) \quad \mathbf{G}_i = \mathbf{D}_i \mathbf{D}_i'.$$

Posto $\lambda_i = 4\pi^2 c^2 \nu_i^2$ (ν in cm^{-1}) sappiamo che le λ_i sono le radici dell'equazione

$$(10) \quad |\mathbf{G}_i \mathbf{F}_i - \mathbf{E}\lambda| = 0$$

dove \mathbf{E} è la matrice identità. È noto inoltre come si possa ottenere dalla (10) la matrice \mathbf{L}_i che soddisfa le relazioni:

$$(11) \quad \sigma_i = \mathbf{L}_i \mathbf{Q}_i \quad \mathbf{Q}_i = \mathbf{L}_i^{-1} \sigma_i \quad \mathbf{L}_i \mathbf{L}_i' = \mathbf{G}_i.$$

Indicando con \mathbf{S}_i l'insieme delle coordinate di simmetria (interne traslazione e rotazione) della i -ma rappresentazione irriducibile, abbiamo:

$$(12) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{S}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{S}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_k \end{pmatrix} \mathbf{q} = \mathbf{A} \mathbf{q}.$$

La matrice \mathbf{A} è quadrata ed ammette una inversa data da

$$(13) \quad \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}' (\mathbf{A} \mathbf{A}')^{-1} = \mathbf{A}' \mathbf{g}^{-1}.$$

L'ortogonalità delle coordinate di diversa simmetria fa sì che la matrice \mathbf{g} sia diagonalizzata, cioè del tipo:

$$(14) \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_1' & & \\ & \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_2' & \\ & & \ddots \\ & & & \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1 & & \\ & \mathbf{g}_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \mathbf{g}_k \end{pmatrix}.$$

Dalla (12) ricaviamo allora

$$(15) \quad \mathbf{q} = (\mathbf{A}_1' \mathbf{g}_1^{-1} \dots \mathbf{A}_k' \mathbf{g}_k^{-1}) \begin{pmatrix} \mathbf{S}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{S}_k \end{pmatrix}.$$

La dipendenza delle coordinate generalizzate \mathbf{q} dalle \mathbf{S}_i risulta quindi:

$$(16) \quad \mathbf{q} = \mathbf{A}_i' \mathbf{g}_i^{-1} \mathbf{S}_i.$$

Indicando con \mathbf{T}_i e \mathbf{R}_i le matrici colonna delle coordinate di traslazione e rotazione della i -ma rappresentazione irriducibile, abbiamo:

$$(17) \quad \mathbf{S}_i = \begin{pmatrix} \sigma_i \\ \mathbf{T}_i \\ \mathbf{R}_i \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_i \\ \mathbf{D}_{\mathbf{T}_i} \\ \mathbf{D}_{\mathbf{R}_i} \end{pmatrix}.$$

Tenendo conto che le coordinate interne sono ortogonali a quelle che esprimono le condizioni dei momenti [5] si ha:

$$(18) \quad \mathbf{g}_i = \mathbf{A}_i \mathbf{A}_i' = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_i \\ \mathbf{g}_{Ti} \\ \mathbf{g}_{Ri} \end{pmatrix}$$

da cui si deduce che la dipendenza della \mathbf{q} dalle σ_i è:

$$(19) \quad \mathbf{q} = \mathbf{D}_i' \mathbf{G}_i^{-1} \sigma_i$$

od anche

$$(20) \quad \mathbf{x} = \mu^{1/2} \mathbf{D}_i' \mathbf{G}_i^{-1} \sigma_i.$$

L'importanza della (20) deriva dal fatto che essa esprime direttamente gli spostamenti cartesiani in funzione di ciascuna delle coordinate di simmetria, in una relazione nella quale è tenuto automaticamente conto delle condizioni dei momenti. Se si indicano con \mathbf{q} delle generiche coordinate atte ad esprimere nella forma più appropriata altre grandezze, come ad esempio le componenti dei momenti dipolari, e se queste sono legate agli spostamenti cartesiani \mathbf{x} da una relazione del tipo:

$$(21) \quad \mathbf{q} = \mathbf{A} \mathbf{x}$$

abbiamo subito, per la (20), la (11) e la (6).

$$(22) \quad \begin{cases} \mathbf{q} = \mathbf{A} \mu^{1/2} \mathbf{D}_i' \mathbf{G}_i^{-1} \sigma_i = \mathbf{A} \mu \mathbf{C}_i' \mathbf{G}_i^{-1} \sigma_i \\ \mathbf{q} = \mathbf{A} \mu^{1/2} \mathbf{D}_i' \mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{L}_i \mathbf{Q}_i = \mathbf{A} \mu \mathbf{C}_i' \mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{L}_i \mathbf{Q}_i = \mathbf{A}_i \mathbf{Q}_i. \end{cases}$$

Siamo così pervenuti ad una relazione che esprime direttamente i valori dei nuovi parametri ρ_s nei vari stati di oscillazione descritti o dalle coordinate di simmetria $\sigma_{i,j}$ o dalle coordinate normali $Q_{i,j}$ in una forma nella quale è tenuto conto delle condizioni dei momenti.

Nelle formule delle intensità compaiono le derivate parziali rispetto alle coordinate normali. Dalle (22) abbiamo:

$$(23) \quad \left(\frac{\partial}{\partial Q_i} \right) = \mathbf{A}_i' \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right).$$

Indicando con $(\mathbf{A}_{i,j})$ la j -ma colonna della matrice \mathbf{A}_i , con $(\partial \mathbf{P} / \partial Q_{i,j})$ la matrice a una riga e tre colonne delle derivate delle tre componenti del momento dipolare rispetto alla coordinata normale j -ma della i -ma rappresentazione irriducibile, con $(\partial \mathbf{P} / \partial \rho)$ la analoga matrice a tre colonne e tante righe quante sono le coordinate ρ_s , l'intensità della j -ma banda infrarossa della i -ma rappresentazione irriducibile diventa:

$$(24) \quad I_{i,j} = \frac{\pi N}{3c} \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial Q_{i,j}} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial Q_{i,j}} \right)' = \frac{\pi N}{3c} \text{tr.} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial Q_{i,j}} \right)' \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial Q_{i,j}} \right) \right] = \\ = \frac{\pi N}{3c} \text{tr.} \left[(\mathbf{A}_{i,j}) (\mathbf{A}_{i,j})' \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \rho} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \rho} \right)' \right] = \frac{\pi N}{3c} \text{tr.} \left[(\mathbf{A}_{i,j}) (\mathbf{A}_{i,j})' \mathbf{c} \right]$$

dove $\mathbf{c} = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right) \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)'$ è una matrice caratteristica delle proprietà elettriche dei legami.

La relazione di Crawford sulla somma delle intensità delle bande ultrasuone di un medesimo tipo di simmetria può essere messa allora nella forma

$$(25) \quad \sum_j I_{i,j} = \frac{\pi N}{3c} \operatorname{tr} \left[\left(\frac{\partial P}{\partial Q_i} \right) \left(\frac{\partial P}{\partial Q_i} \right)' \right] = \frac{\pi N}{3c} \operatorname{tr} [(\mathbf{A}_i) (\mathbf{A}_i)' \mathbf{c}] = \\ = \frac{\pi N}{3c} \operatorname{tr} [\mathbf{A} \boldsymbol{\mu} \mathbf{C}_i \mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{C}_i' \boldsymbol{\mu} \mathbf{A}' \mathbf{c}]$$

dove la matrice \mathbf{c} , scelte opportunamente le coordinate ρ_s , è invariante isotopica.

Tenuto conto delle (2) e (3) si ricavano immediatamente, a partire dalla (23), formule analoghe alle (24) e (25) per le intensità delle bande Raman.

Le (20), (22) e (23) sono le formule generali cercate. Caratteristica principale è che non utilizzano se non quelle matrici che sono necessarie al calcolo delle frequenze e quella che definisce il nuovo sistema di coordinate.

Ringrazio il prof. G. B. Bonino per l'interesse prestato alla presente ricerca.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] R. S. MULLIKEN, « J. Chem. Phys. », 7, 14 (1939).
- [2] A. M. THORNDIKE, A. J. WELLS, E. BRIGHT WILSON, Jr., « J. Chem. Phys. », 15, 157 (1947).
- [3] G. PLACZEK, « Z. f. Phys. », 70, 84 (1931); G. PLACZEK, E. TELLER, « Z. f. Phys. », 81, 209 (1933).
- [4] BRYCE CRAWFORD, Jr., « J. Chem. Phys. », 20, 977 (1952); per le (2) e (3) ved. anche G. HERZBERG, *Infrared and Raman Spectra* (D. van Nostrand Company, Inc., New York, 1945) pp. 243 ecc.
- [5] E. BRIGHT WILSON, Jr., « J. Chem. Phys. », 7, 1047 (1939); « J. Chem. Phys. », 9, 76 (1941).
- [6] J. MORCILLO, J. FERNÁNDEZ BIARGE, J. HERRANZ, « Anales de Física y Química », Tomo LV-A, 267 (1959).

Petrografia. — *Ricerche chimico-petrografiche su alcune vulcaniti del Monte Vulture (Lucania)* (*). Nota di OPLINIA HIEKE MERLIN, presentata (**) dal Socio A. BIANCHI.

Le ricerche qui esposte rappresentano un contributo allo studio della differenziazione magmatica del gruppo vulcanico quaternario del Vulture e si inquadrano nel programma delle indagini petrografiche che vengono attuate presso l'Istituto di Mineralogia e Petrografia dell'Università di Bari sotto gli auspici del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

I primi lavori relativi a questo programma, promosso nel 1953 da G. Schiavinato per la conoscenza petrografica di questo centro eruttivo alla luce dei moderni indirizzi di ricerca, sono rivolti allo studio delle tefriti [1], nefeliniti e melilititi [5] e dei tufi di rimpasto [12].

Essi fanno seguito alla ben nota memoria geologica del De Lorenzo [4], ad alcuni contributi di altri Autori [10, 13], ad analisi e riferimenti isolati [14, 18].

Sempre nel quadro del sopradetto programma, ho intrapreso dal 1959 lo studio chimico-petrografico delle vulcaniti di questo interessante gruppo. Come anticipazione di più completi e dettagliati risultati, conseguenti allo sviluppo delle ricerche di campagna e delle indagini di laboratorio, riferisco qui i primi risultati ottenuti dallo studio di un gruppo di *facies basaltiche a feldspatoidi*, che integrano il quadro dei tipi femici finora studiati e che ritengo significativi per la storia della differenziazione magmatica di questo vulcano (*).

Le lave studiate provengono dalle seguenti località:

q. 1100, a nord della cima del Vulture nella valle di « Il Novelletto », colata;

q. 1200, a nord della cima del Vulture nella valle di « Il Novelletto », colata;

nelle immediate vicinanze della cima del Vulture, a sud, colata;

q. 1030, lungo la strada Rionero-Toppo Capraro, colata;

q. 1050, lungo la strada Rionero-Toppo Capraro, blocco negli agglomerati tefritico-basanitici;

q. 1170, lungo la strada Rionero-Toppo Capraro, colata;

(*) Lavoro eseguito, con il contributo finanziario del Consiglio Nazionale delle Ricerche, nell'Istituto di Mineralogia e Petrografia dell'Università di Bari.

(**) Nella seduta del 13 maggio 1961.

(1) Ho il piacere di ringraziare qui i proff. A. Bianchi, G. Schiavinato e U. Ventriglia per le utili discussioni sull'argomento.

Sono grata inoltre al prof. G. Schiavinato per aver messo a mia disposizione l'abbondante materiale da lui raccolto.

- q. 1180, lungo la strada Rionero-Toppo Capraro, colata;
 q. 1200, valico fra Toppo Capraro e Fontana Piloni;
 q. 700, a sud del Convento di San Michele, colata;
 inclusi nel tufo lungo la strada Rapolla-Barile, a 600-700 m. da Barile.

Sono rocce di colore grigio-scuro, sulla cui massa talora compatta, ma generalmente costellata da numerosi piccoli vacuoli, spiccano in prevalenza cristalli neri variamente sviluppati di augite, piccoli granuli di feldspatoidi e qualche raro minuto elemento verdastro di olivina.

Al microscopio la struttura si dimostra chiaramente porfirica ipocristallina con masse di fondo vetrofiriche più o meno cribrose, nelle quali granuli di componenti colorati ed incolori sono cementati da vetro, in quantità sempre piuttosto scarsa.

Le rocce in questione sono caratterizzate da notevole inomogeneità mineralogica, che per lo stesso tipo petrografico si riscontra non solo fra masse laviche diverse, ma anche in una stessa massa. Attraverso graduali e continue variazioni, frequenti sono i passaggi verso tipi petrografici collaterali; la loro posizione sistematica pertanto risulta talora incerta.

Il grande sviluppo inoltre assunto nelle rocce esaminate dalle masse di fondo, a struttura ipocristallina molto minuta, richiede per esse una classificazione basata su dati chimici oltre che mineralogici. L'analisi volumetrica infatti esprime solamente i rapporti quantitativi che intercorrono fra gli elementi idiomorfi e fra questi ed il fondo, non la reale composizione mineralogica totale (schema N. 1). Per la classificazione delle rocce prese in esame, oltre a determinate caratteristiche petrochimiche, ho ritenuto essenziali la presenza di fenocristalli di pirosseni, olivina e feldspatoidi e la scarsità di microliti plagioclasici nel fondo.

SCHEMA N. 1.

(La provenienza delle rocce 1, 2, 3 e 4 è indicata nella Tabella I).

		1	2	3	4
Elementi idiomorfi	Pirosseni	28,3	26,9	40,2	27,0
	Olivina	2,2	1,8	—	—
	Biotite	1,4	2,1	—	1,2
	Hauyna	10,8	8,8	1,7	8,6
	Leucite	—	1,2	14,5	13,2
Fondo		57,3	59,2	43,6	50,0

Lo studio mineralogico quantitativo (schema N. 1) delle lave più rappresentative, analizzate anche per via chimica, mette in luce, per i diversi rapporti esistenti fra i loro fenocristalli feldspatoidici, l'esistenza di tre gruppi

di facies mineralogicamente distinti, nei quali possono rientrare per analogia le facies rimanenti.

Questi gruppi sono caratterizzati dal prevalere della hauyna (lave: delle quote 1100 e 1200 a nord della cima del Vulture; delle quote 1030, 1050, 1170, 1180 lungo la strada Rionero-Toppo Capraro; della colata immediatamente a sud della cima del Vulture) o dal prevalere della leucite (lave a sud del Convento di San Michele a quota 700 ed al valico tra Toppo Capraro-Fontana Piloni) od infine dall'associazione hauyna-leucite (inclusi nel tufo lungo la strada Rapolla-Barile).

I pirosseni sono i termini mineralogici prevalenti: idiomorfi, di color giallo-verdognolo più o meno intenso, privi di pleocroismo, e di composizione variabile a zonature ritmiche. In tutti i tipi studiati essi si rivelano miscele augitiche.

Nella sola lava a nord della cima del Vulture (q. 1100), i loro cristalli presentano un estremo bordo di composizione augitico-egirina, con debole pleocroismo dal giallo al giallo-verdognolo. L'angolo di estinzione $\epsilon : \gamma$, misurato al T.U., risulta al centro di 48° per il verde e 46° per il rosso, mentre alla periferia è di 55° , con dispersione delle bisettrici non apprezzabile data la sottiliezza del bordo. Il $2V_\gamma$ al nucleo è di 58° .

Nella lava del Convento di San Michele invece il valore dell'angolo di estinzione $\epsilon : \gamma$ è di 47° per il rosso e 49° per il verde.

L'olivina è presente, sotto forma di rari individui di prima generazione ben sviluppati incolori e freschi, solo nelle lave della cima del Vulture. Si tratta di miscele magnesifere, come precisano il valore del $2V$ prossimo a 90° ed il segno ottico positivo.

In quasi tutte le vulcaniti si rinviene biotite, per lo più in lamine poco sviluppate e notevolmente riassorbite, con segregazione di ossidi di ferro che bordano o sostituiscono integralmente i pacchetti micacei.

I feldspatoidi sono rappresentati da hauyna e leucite. L'hauyna è generalmente in cristalli ben sviluppati a contorni spesso arrotondati per riassorbimento magmatico. In alcuni tipi è limpida, di colore azzurrognolo con bordi bruno-neri che racchiudono piccoli fasci paralleli di lamelle opache, in altri invece è rosata, torbida per dispersioni ematitiche e per inclusioni di lamelline sottilissime o di goccioline infinitesime, disposte lungo il bordo oppure diffuse per tutto il cristallo.

La leucite si trova in elementi idiomorfi a sviluppo vario con geminazione polisintetica, ricchi di inclusioni. Per lo più questi due minerali sono freschi. Fa eccezione la roccia campionata sotto forma di incluso nei tufi lungo la strada Rapolla-Barile. L'hauyna in questa lava presenta un incipiente intorbidamento per alterazione di tipo caolinico e la leucite sembra tutta trasformata in analcime, benché la roccia nel suo complesso appaia fresca. Gli elementi leucitici assumono aspetto bianco opaco; al microscopio rimangono trasparenti, ma la geminazione polisintetica è scomparsa e l'individuo risulta costituito da un intimo aggregato criptocristallino pressoché isotropo.

L'origine primaria dell'analcime è stata ammessa da alcuni Autori⁽²⁾. Nella lava del Vulture, data l'alterazione riscontrata per l'hauyina, è più probabile invece che l'analcime sia di origine secondaria. In tal caso i dati chimici, che commenterò più oltre, daranno indicazioni sulle possibili modalità di questo processo.

Sono numerosi gli esempi citati in letteratura di trasformazione della leucite in analcime, fra cui tipici quelli della regione laziale [6, 7, 8, 9, 15, 16, 17].

Il fondo è costituito in tutte le facies da un intimo aggregato di granuli di pirosseni augitici e feldspatoidi, a struttura ipocristallina con scarso vetro. Fra questi prevale la leucite. In alcune vulcaniti, come ad esempio nella lava di quota 1170 della strada Rionero-Toppo Capraro, è possibile riconoscere qualche piccola tavoletta di nefelina.

I plagioclasti sono presenti sempre in cristallini molto minuti per lo più non determinabili; raramente infatti è stata riscontrata per essi una composizione labradoritica.

Quali accessori troviamo: magnetite, pirite, ilmenite, apatite. In alcune rocce quest'ultimo minerale è in cristalli particolarmente vistosi, talora di colore rosato uniforme, talaltra a chiazze bruno-rossastre.

Delle lave più distanziate fra loro per composizione mineralogica sono state eseguite le analisi chimiche⁽³⁾, i cui dati sono riferiti nella Tabella I. Prendendo in esame dapprima le tre lave (nn. 1, 2, 3) della cima del Vulture e del Convento di San Michele, risulta evidente il loro carattere poco silicico e notevolmente alcalino. La lava della strada Rapolla-Barile presenta la leucite analcimizzata e richiede quindi un commento a parte.

I valori dei coefficienti magmatici secondo Niggli precisano che esse sono derivate da magmi a basso grado di silicizzazione (qz ha valori negativi elevati) con carattere femico non marcato, ricchi di calcio e di alcali (le differenze $al-alc$ sono sempre molto piccole).

Le formule magmatiche delle due lave della cima del Vulture si accostano maggiormente alla melteigite dei magmi ijolitici e quella della roccia del Convento di San Michele alla teralite gabbrica normale dei magmi teralitico-gabbriici, di serie sodica. Va notato però che i valori dei coefficienti k ed mg sono notevolmente più elevati di quelli dei tipi sodici corrispondenti, rivelando un carattere sensibilmente più potassico e magnesifero per tutte e tre le facies, ma in particolare per quella di San Michele.

(2) C. W. KNIGHT, *Analcite-trachyte tuffs and breccias from southwest Alberta, Canada*, «Canadian Record Sci.», IX, 266-275 (1905); J. D. MACKENZIE, *The Crownest volcanics*, «Canada Geol. Surv. Mus. Bull.», N. 4, 19-28 (1914); M. DERIU, *Contributo alla conoscenza delle manifestazioni vulcaniche della Sardegna centro e nord-occidentale. Le lave post-mioceniche*. Nota I: *Le formazioni della Collina di Santa Vittoria (Sennariolo)*, «Rendiconti Seminario Facoltà Scienze Univ. Cagliari», 19 (1949); Nota II: *Le rocce vulcaniche del Settore di Santa Caterina di Pittinuri*, «Periodico Mineralogia», 21 (1952).

(3) Si ringrazia il dr. D. Santoro che ha collaborato alla determinazione dei componenti chimici più rari.

TABELLA I.

	1	2	3	4	<i>a</i>	<i>b</i>
SiO ₂	41,10	42,70	43,91	44,17	43,82	44,13
TiO ₂	0,43	1,51	2,19	1,12	1,00	1,55
P ₂ O ₅	2,07	2,25	0,51	1,92	0,97	1,03
Al ₂ O ₃	15,93	16,43	14,31	18,32	16,62	17,21
Fe ₂ O ₃	6,39	5,37	5,92	2,22	4,73	4,90
FeO	3,17	2,60	3,32	3,80	3,32	3,47
MnO	0,17	0,19	0,04	0,04	0,19	0,19
MgO	7,26	4,95	7,20	4,66	4,75	6,16
CaO	12,99	13,27	12,97	11,79	11,35	12,68
Na ₂ O	4,40	4,29	3,38	5,46	4,88	4,17
K ₂ O	4,03	4,08	4,25	1,91	2,65	3,46
H ₂ O ⁻	0,29	0,32	0,44	0,46	1,27	0,21
H ₂ O ⁺	0,37	1,28	0,84	2,47	3,16	0,61
SO ₃	1,06	0,53	0,21	1,29	0,71	tr.
BaO	0,31	tr.	0,02	tr.		
ZrO ₂	tr.	tr.	tr.	tr.		
Cr ₂ O ₃	tr.	—	tr.	tr.		
CO ₂	0,04	tr.	0,19	0,07		
Cl	0,09	0,10	0,04	0,04	0,61	0,14
	100,10	99,87	99,74	99,74	100,03	99,91

Analisi: 1, 2, 3, 4, di O. Hieke-Merlin; *a* e *b* di E. Narici [10].

Località:

- 1 Valle del Novelletto, sul fianco nord del Vulture a q. 1100;
- 2 nelle immediate vicinanze della cima del Vulture, verso sud;
- 3 a sud del Convento di San Michele, a q. 700;
- 4 lungo la strada Rapolla-Barile, a 600-700 m da Barile;
- a* Serr'Alto;
- b* dalla cima nord-ovest del Vulture.

Formule magmatiche secondo Niggli.

	<i>si</i>	<i>al</i>	<i>fm</i>	<i>c</i>	<i>alc</i>	<i>k</i>	<i>mg</i>	<i>ti</i>	<i>p</i>	<i>c/fm</i>	<i>qz</i>
1	87	19,8	36,4	29,4	14,4	0,38	0,63	0,69	1,85	0,79	— 71
2	96	21,8	31,0	32,0	15,2	0,38	0,54	2,56	2,14	1,03	— 65
3	95	18,2	38,9	30,0	12,9	0,45	0,60	3,56	0,47	0,77	— 57
4	107	26,2	28,8	29,2	15,8	0,19	0,59	2,04	1,97	1,01	— 56
<i>a</i>	109	24,4	29,3	30,3	16,0	0,26	0,60	1,87	1,02	1,03	— 55
<i>b</i>	101	22,4	32,2	31,1	14,3	0,35	0,65	2,67	1,00	0,96	— 56

Ciò mette in evidenza un carattere di transizione per il magma originario fra le serie sodica e potassica. La missurite sonkinitica dei magmi alnoitici-missuritici potassici risulta il tipo magmatico di più appropriato accostamento (schema N. 2).

SCHEMA N. 2.

<i>Serie sodica</i>	<i>si</i>	<i>al</i>	<i>fm</i>	<i>c</i>	<i>alc</i>	<i>k</i>	<i>mg</i>
melteigite (magmi ijolitici)	100	20	32,5	30	17,5	0,25	0,40
melteigite gabbrica (magmi gabbro-teralitici)	110	27	31	27	15	0,25	0,40
teralite gabbrica normale (magmi teralitico-gabbri)	100	17	43	27,5	12,5	0,20	0,45
<i>Serie potassica</i>							
missurite-sonkinitica (magmi alnoitici-missuritici)	110	18	34	34	14	0,60	0,55

La lava compresa nei tufi della strada Rapolla-Barile (N. 4) ha carattere alcalino-sodico in quanto, come già fatto presente, l'analcime ha sostituito pseudomorficamente la leucite. Volendo procedere, nonostante questa trasformazione, ad un confronto con i tipi magmatici Niggli la formula di questa vulcanite risulterebbe accostabile alla melteigite gabbrica dei magmi gabbro-teralitici sodici. Essa però è caratterizzata, come quelle delle facies considerate in precedenza, da carattere più magnesifero, precisato dall'elevato valore del coefficiente *mg*.

Il rapporto che intercorre fra *al* e *c + alc*, di molto inferiore all'unità (0,58), precisa che non deve esservi stata alterazione sensibile di tipo argilloso. Ho messo già in evidenza infatti come la roccia nel suo complesso non sia alterata: i pirosseni sono freschi e non si rinvergono, se non in tracce, calcite e altri prodotti di alterazione secondaria. La sola hauyna presenta un incipiente processo di caolinizzazione.

Il più alto contenuto in allumina rivelato dall'analisi chimica trova giustificazione, almeno in parte, nella composizione mineralogica della roccia, e precisamente nel maggior contenuto di microliti plagioclasici presenti nell'aggregato di fondo rispetto agli altri tipi lavici.

Queste considerazioni portano a ritenere che l'analcimizzazione della leucite sia da riferire ad un processo di carattere idrotermale, con reazioni di tipo metasomatico, piuttosto che ad un processo di degradazione argillosa.

Riprendendo in esame le caratteristiche petrochimiche di tutte le vulcaniti analizzate, riporto nella Tabella II i valori della « base » e della « norma », calcolati secondo Niggli.

I raggruppamenti basali Q—L—M localizzano i punti rappresentativi delle rocce in questione nel settore dei tipi petrografici di bassa silicizzazione caratterizzati dalla presenza di molecole alcaline a scarso contenuto in silice, cioè nel settore dei basalti alcalini a feldspatoidi (Diagramma N. 1).

Ad analoga localizzazione si perviene anche nel diagramma *si-alc*.

TABELLA II.

« Base »							
	1	2	3	4	a	b	
Q	13,4	17,3	16,8	21,8	21,2	18,4	Q
Kp	14,3	14,5	15,1	6,7	9,6	12,1	
Ne	22,8	22,8	18,0	29,2	23,8	21,5	
Cal	7,1	8,4	7,0	12,1	11,2	11,2	L
Hl	0,3	0,3	0,2	0,2	1,9	0,3	
A	2,9	1,4	0,6	3,6	2,0	—	
Cs	9,7	10,6	14,2	5,3	8,5	11,4	
Fs	6,5	5,6	6,2	2,3	5,1	5,1	
Fo	14,8	10,2	15,0	9,7	10,0	12,7	M
Fa	3,8	3,3	3,9	4,5	4,1	4,2	
Ru	0,3	1,1	1,5	0,8	0,7	1,1	
Cp	4,0	4,5	1,0	3,6	1,9	2,0	
Cc	0,1	—	0,5	0,2	—	—	

	Q	L	M	π	γ	μ	α
1	13,4	47,4	35,1	0,15	0,28	0,42	— 1,6
2	17,3	47,4	30,8	0,18	0,36	0,34	— 1,4
3	16,8	40,9	40,8	0,17	0,36	0,38	— 0,8
4	21,8	51,8	22,6	0,23	0,24	0,44	— 1,7
a	21,2	48,5	28,4	0,23	0,31	0,36	— 1,2
b	18,4	45,1	34,5	0,24	0,34	0,38	— 1,0

« Norma »

	1	2	3	4	a	b
Or	23,8	24,1	25,1	11,3	16,0	20,2
Ab	1,5	3,5	1,5	21,1	17,5	3,7
An	10,4	14,0	11,6	20,1	18,7	18,7
Ne	21,9	20,7	17,1	16,6	13,3	19,3
Hl	0,3	0,3	0,2	0,2	1,9	0,3
A	2,9	1,5	0,6	3,6	2,0	—
Wo	12,9	14,1	18,9	7,1	11,3	15,2
Fo	14,8	10,2	15,0	9,7	10,0	12,7
Fa	0,6	0,4	0,8	3,4	1,6	1,7
Ru	0,3	1,1	1,5	0,8	0,7	1,1
Cp	4,0	4,5	1,0	3,6	1,9	2,0
Mt	6,5	5,6	6,2	2,3	5,1	5,1
Cc	0,1	—	0,5	0,2	—	—

Dalle caratteristiche petrochimiche or ora messe in evidenza e dalle considerazioni sulla composizione mineralogica che esporrò, risulterà definito il tipo petrografico delle vulcaniti in esame.

Secondo definizioni ormai classiche [11, 14] rocce a giacitura effusiva costituite da pirosseni, feldspatoidi, olivina sono da definire basalti a feldspatoidi. I plagioclasti possono eventualmente comparire nel fondo sotto forma di microliti in limitata quantità. Rispondono a queste caratteristiche mineralogiche le lave campionate a nord e a sud della cima del Vulture che pertanto si classificano come basalti hauynici.

Più difficile riesce la classificazione della lava raccolta presso il Convento di San Michele. Per la posizione da essa assunta nel diagramma Q—L—M sarebbe da definire basalto alcalino; per la mancanza di olivina e per la quantità non eccessiva di leucite presente in essa, si sposta invece dal gruppo

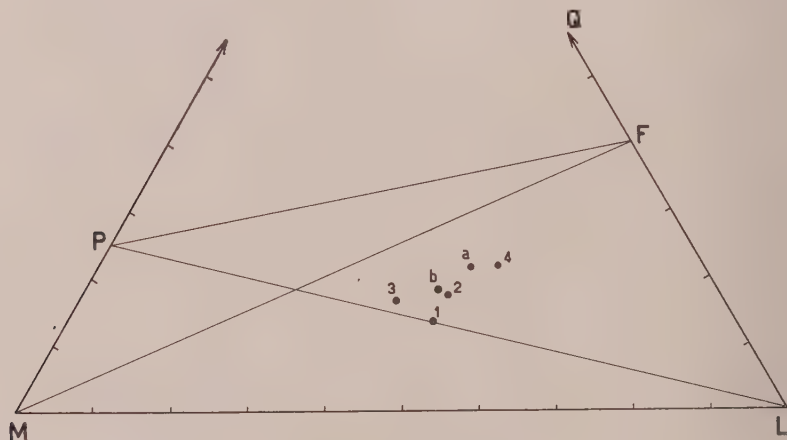


Diagramma N. 1.

delle rocce ultrafemiche alcaline verso il gruppo femico delle tefriti. Va considerata pertanto un basalto leucitico passante a tefrite.

Per analogia con quest'ultima anche la lava campionata al valico fra Toppo Capraro e Fontana Piloni si può definire in ugual maniera.

La lava (N. 4) inclusa nei tufi lungo la strada Rapolla-Barile, per la sua posizione nel diagramma Q—L—M— spostata verso un settore caratterizzato da minerali meno femici, per la mancanza di olivina, per il rapporto hauyna/leucite ed infine per il maggior contenuto di plagioclasti nel fondo a scapito di pirosseni, si può considerare basalto-tefritico a leucite ed hauyna.

Le rimanenti vulcaniti (vedi elenco a p. 767) per la mancanza di olivina, per il prevalere dell'hauyna e per una sensibile quantità di plagioclasti nel fondo, sono tutte da classificare come basalti-tefritici ad hauyna.

Fra le poche analisi di rocce del Vulture riferite in letteratura, due sole studiate da Narici [10] si avvicinano per caratteri petrochimici alle vulcaniti qui prese in considerazione. I dati analitici e le formule magmatiche, da me calcolate, sono riportati nelle Tabelle I e II.

Si nota poca rispondenza fra il chimismo, le composizioni mineralogiche e le classificazioni petrografiche date dall'Autore per queste rocce.

Dai dati analitici risulta che la lava della cima nord-ovest (*b*) è analoga alla roccia della cima sud (N. 2), mentre quella di Serr'Alto (*a*) per il suo minor contenuto in potassio a vantaggio del sodio e per la notevole percentuale in acqua, che fanno pensare a processi di trasformazione di tipo zeolitico, sembra accostarsi alla roccia analcimizzata (N. 4).

Le formule magmatiche permettono inoltre di precisare che la lava di Serr'Alto si può considerare una melteigite gabbrica, come la lava N. 4, e la roccia della cima nord-ovest una melteigite, come la roccia N. 2. Anche le posizioni assunte nel diagramma Q—L—M sono molto vicine a quelle di queste due vulcaniti.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] AMENDOLAGINE M. G., *Sulle tefriti del Monte Vulture (Lucania) (Studio chimico-petrografico)*, « Rend. SMI », Anno XIII (1957).
- [2] BURRI C., *Die Petrographischen Provinzen Mittelitaliens*, « Festschrift Paul Niggli », Verlag A. G. Gelr. Leemann a C. Zurich (1948).
- [3] BURRI C., *Petrochemische Berechnungs methoden auf äquivalenter Grundlage*, Birkhäuser Verlag Basel-Struttgart (1959).
- [4] DE LORENZO G., *Studio geologico del Monte Vulture*, « Atti Acc. Sc. Fis. Mat. », Napoli, X sez. (1900).
- [5] DI LECCE MININNI M., *Su alcune rocce nefelinitiche e melilititiche del M. Vulture*, « Rendiconti SMI », Anno XII (1956).
- [6] FEDERICO M., *Un particolare proietto ad analcime*, « Periodico Mineralogia », Anno XXVIII, 1 (1959).
- [7] FORNASERI M., *Ricerche petrografiche sul vulcano laziale. La zona Osa-Saponara-Valle di Castiglione*, « Periodico Mineralogia », XVI, 141-193 (1959).
- [8] FORNASERI M., *Ricerche petrografiche sul vulcano laziale. I proietti inclusi nei tufi*, « Periodico Mineralogia », XX, 211-235 (1959).
- [9] FORNASERI M.-PENTA A., *Elementi alcalini minori negli analcimi e loro comportamento nel processo di analcimizzazione della leucite*, « Periodico Mineralogia », Anno XXIX, 1 (1960).
- [10] NARICI E., *Contributo alla petrografia chimica della provincia magmatica campana e del Monte Vulture*, « Zeitschrift für Vulkanologie », Band XIV (1932).
- [11] NIGGLI P., *Die quantitative mineralogische Klassifikation der Eruptivgesteine*, « Schweizerische Miner. Petr. Mitt. », XI, 296-364 (1931).
- [12] RADINA B.-SCHIAVINATO G., *Sui cosiddetti « tufi di rimpasto » del Monte Vulture (Lucania)*, « Rendiconti SMI », Anno XII (1956).
- [13] RITTMAN A., *Gesteine und Mineralien von Monte Vulture in der Basilicata*, « Schweizerische Mineral. Petrogr. Mitt. », Bd. XI, 2 (1931).
- [14] ROSENBUSCH H., *Elemente des Gesteinslehre*, Stuttgart (1923).
- [15] SCHERILLO A., *Un nuovo esempio di analcimizzazione della leucite*, « Boll. Soc. Nat. Napoli », 53, 195 (1942).
- [16] SCHERILLO A., *Processi di « argillificazione » in lave, scorie, inclusi del vulcano laziale*, « Periodico Mineralogia », XXIII, 1-25 (1954).
- [17] STELLA A., *Contributo alla conoscenza dei giacimenti italiani di leucite*, « Boll. Soc. Geol. It. », 49, 67 (1954).
- [18] WASHINGTON H. S., *A description of the Quantitative Classification of Igneous rocks*, Washington-Government Printing Office (1958).

Microbiologia. — *Azione inibente di alcuni antibiotici sui microrganismi riducenti il colesterolo a coprosterolo* (*). Nota di CARLO ARNAUDI e SANDRA CARINI, presentata (**) dal Socio S. TONZIG.

L'uso degli antibiotici nelle ricerche sulla riduzione del colesterolo a coprosterolo nell'intestino dei mammiferi ha seguito scopi ed indirizzi diversi nel tempo; mentre dapprima questi farmaci furono adoperati per dare una dimostrazione dell'intervento dei batteri intestinali in questa trasformazione, e della diversa loro azione sui batteri medesimi, da alcuni anni l'interesse per essi si è andato ampliando anche in questo campo e in alcuni casi si tende ad attribuire ad essi alterazioni del contenuto in colesterolo nel sangue, senza peraltro conoscere il meccanismo di questo fenomeno.

Nel 1943 Rosenheim e Webster [1], in esperimenti *in vivo*, somministrano a ratti una dieta di cervello aggiunta di succinilsulfatiazolo, composto ad azione batteriostatica su *Escherichia coli* e su altri batteri del gruppo coli, o di carbarsone (acido *p*-carbamino-fenilarsonico), sostanza particolarmente nociva alla fauna protozoaria intestinale ed in particolare ad un flagellato della specie *Trichomonas*. L'aggiunta di succinilsulfatiazolo o di carbarsone produce una completa inibizione nella formazione del coprosterolo *in vivo*. Dopo tre settimane di ritorno alla dieta normale e di ristabilimento della normale flora intestinale con ritorno dei coli, gli Autori non trovano ancora una normale escrezione di coprosterolo. In conseguenza di questi dati sperimentali e della differenza stereochimica tra il colesterolo, derivato della trans-decalina, e il coprosterolo, derivato della *cis*-decalina, Rosenheim tende a negare l'intervento di batteri o protozoi nella riduzione a coprosterolo e avanza l'ipotesi di una probabile azione enzimatica della mucosa intestinale o di altri agenti sconosciuti e mette in relazione l'effetto inibitore degli antibiotici con una probabile azione di questi ultimi sulla sintesi delle vitamine essenziali, biotina e acido folico.

Successivamente Wainfan e coll. (1952) [2], riscontrano che somministrando a ratti antibiotici e sulfamidici con la dieta (streptomicina 0,04 %, succinilsulfatiazolo 1 %), il colesterolo non viene né distrutto né chimicamente modificato, mentre a regimi normali circa il 12 % del colesterolo non è più reperibile. Questi risultati, secondo gli Autori, provano che, nelle loro condizioni sperimentali, i micròbi intestinali sono i principali responsabili della riscontrata distruzione o modificazione del colesterolo.

Viceversa Coleman e Baumann (1957) [3], aggiungendo antibiotici alla dieta di ratti, trovano che mentre la penicillina e in parte il succinilsulfatia-

(*) Lavoro eseguito nella Sezione Microbiologica del Centro di studio per la chimica e la microbiologia delle fermentazioni, del Consiglio Nazionale delle Ricerche, presso l'Università di Milano.

(**) Nella seduta del 13 maggio 1961.

zolo deprimono la riduzione in istudio, la streptomicina, la cloromicetina, l'aureomicina, non riducono la quantità di coprosterolo nelle feci o la diminuiscono molto limitatamente. Questi Autori avvalorano l'ipotesi che gli antibiotici provati abbiano azioni diverse sui componenti della flora intestinale e che i responsabili della riduzione del colesterolo siano sensibili soprattutto alla penicillina.

Dam (1956) [4] dà la prova inconfutabile dell'intervento dei batteri intestinali nella riduzione del colesterolo a coprosterolo ottenendo *in vitro* la trasformazione del colesterolo contenuto nel cervello di bue, utilizzato questo come terreno nutritivo, seminato con feci o con un arricchimento da feci.

In seguito questo dato è confermato da Arnaudi e Carini (1959) [5] che inoltre ottengono *in vitro* la riduzione di colesterolo cristallino assolutamente puro perché in precedenza liberato della frazione satura, seminando con un estratto acquoso di feci centrifugate, e così private delle scorie, e contenenti pochi germi per cc.

Alcuni Autori hanno riscontrato modificazioni del colesterolo nel siero del sangue di animali in seguito al trattamento per via orale con antibiotici; i dati sperimentali in questo campo sono per ora pochi e contraddittori. Broitman e coll. (1960) [6], trovano, in animali a dieta colesterolo più colato, un aumento nel grado di ipercolesterolemia se la dieta è aggiunta di neomicina, e attribuiscono questa alterazione ad una inibizione della flora intestinale responsabile della degradazione degli acidi biliari e della riduzione del colesterolo. Schönheimer prima (1930) [7], e recentemente, Favarger (1960) [8], hanno provato che il colesterolo può venire riassorbito dall'intestino mentre la sua forma ridotta, il coprosterolo, lo è in quantità molto minore; inoltre, quand'anche fosse giunto in circolo, è più facilmente ossidabile del colesterolo e non forma come questo depositi nei tessuti animali. Di qui l'importanza di non alterare una naturale via per l'eliminazione del colesterolo.

In conseguenza di queste osservazioni siamo stati indotti ad indagare sull'azione di alcuni antibiotici direttamente *in vitro* sulla flora batterica di origine fecale che da tempo risultava attiva sulla molecola del colesterolo e capace di compiere la riduzione della stessa a coprosterolo. Nelle nostre prove colturali sono stati usati il solfato di streptomina e il cloridrato di tetraciclina, due fra i prodotti già sperimentati *in vivo* da Coleman (loc. cit.) e che, secondo questo autore, non hanno diminuito la trasformazione biochimica in parola e di conseguenza non avrebbero azione sulla flora specifica.

Questo nostro lavoro rientra in un più vasto piano di ricerche tendenti ad indagare sulla relazione esistente fra escrezione di coprosterolo e tasso di colesterolo nel sangue. Questo diviene ancor più interessante se si considera che esiste una eliminazione del colesterolo in eccesso, al quale ora si attribuisce tanta importanza nelle manifestazioni aterosclerotiche, sia negli animali onnivori (ratto, cane, uomo), sia negli erbivori, come è stato da noi recentemente trovato; infatti anche nell'intestino del coniglio esiste una flora atta a ridurre *in vitro* il colesterolo a coprosterolo e nelle feci dell'animale

stesso si trova coprosterolo. Quando la dieta del coniglio è arricchita con colesterolo, aumenta l'attività riducente della flora *in vitro* e triplica la quantità di coprosterolo reperibile nelle feci. Nel coniglio l'attività riducente della microflora sulla molecola del colesterolo è pur sempre inferiore a quella che si trova nel ratto; questo potrebbe giustificare, almeno in parte, la maggior facilità a formazione di ateromi nel coniglio che nel ratto. Studi successivi tenderanno appunto a chiarire se esiste un rapporto tra attività riducente sul colesterolo nell'intestino e livelli ematici del colesterolo in animali tenuti a diete diverse.

PARTE SPERIMENTALE.

Terreno colturale: 2,5 % cervello di bue liofilizzato, 1 % peptone, 0,1 % glucosio, 0,1 % cisteina cloridrato.

Antibiotici: solfato di streptomycin: 20, 100, 200 γ per cc di terreno colturale; cloridrato di tetraciclina: 20, 100, 200 γ per cc di terreno colturale.

Semina: con una coltura di batteri di origine fecale che, da tempo riseminata nel medesimo terreno colturale, si era dimostrata atta a ridurre la molecola del colesterolo *in vitro*.

Incubazione: per 7 giorni a 37°C in apparecchio per anaerobi.

Estrazione del coprosterolo delle colture: per separare lo sterolo saturo si è seguito il metodo di Schönheimer, già da noi indicato in un precedente lavoro (loc. cit.).

Controllo batteriologico delle colture: al 2°, 5° e 7° giorno di incubazione è stato allestito un controllo batteriologico delle colture eseguito in capsule Petri con agar nutritivo + brodo cervello (1 cc per piastra) + cisteina cloridrato (0,2 cc per piastra di una soluzione 1 %) e seminate secondo il metodo delle diluizioni successive. In una seconda serie di capsule Petri si aggiunse antibiotico all'agar nutritivo sopra descritto nella quantità, rispettivamente, di 10, 30, 50 γ per cc. Le piastre furono incubate a 37°C e controllate dopo 2 e 4 giorni.

Risemine: di ogni coltura, dopo 7 giorni di incubazione, si effettuarono risemine nelle medesime condizioni culturali.

RISULTATI SPERIMENTALI.

Come si è detto più sopra, le semine sono state fatte con una coltura di batteri di origine fecale che, riseminata in un adatto terreno colturale, è atta a ridurre a coprosterolo il 70-80 % del colesterolo presente. La composizione di questa microflora si presenta costante nel tempo.

I numerosi rilievi morfologici, culturali e biochimici eseguiti sopra le colture degli stipti isolati, ci consentono di concludere che la flora attiva sopra il colesterolo, atta cioè a ridurlo a coprosterolo, è costituita in grande prevalenza da cocci aventi tutte le caratteristiche dello *Streptococcus fae-*

calis (Andrewes e Horder) Escherich e da batteri aventi le caratteristiche di *Escherichia freundii* (Braak) Yale.

Questi medesimi microrganismi riseminati singolarmente non hanno finora portato ad una riduzione valutabile del colesterolo; riseminandoli in miscela si è riusciti ad ottenere soltanto piccole quantità di coprosterolo (circa 2 % rispetto al colesterolo di partenza). Molto probabilmente tale minore attività è da attribuire al fatto che la normale composizione della microflora risulta alterata nelle proporzioni fra le specie presenti.

Nelle Tabelle I e II sono riportati i risultati ottenuti nelle prove di riduzione *in vitro* in presenza di due antibiotici. Entrambi gli antibiotici deprimono la riduzione del colesterolo agendo direttamente sulla microflora.

TABELLA I.

Riduzione in vitro del colesterolo dopo aggiunta di solfato di streptomicina (SS).

	I semina	II risemina	III risemina
C*	+	+	+
20 γ /cc SS	+	(+)	—
100 γ /cc SS	+	(+)	(+)
200 γ /cc SS	(+)	—	—

* = controllo, seminato, senza antibiotico.

+

(+)

—

Mentre i controlli, cioè le colture incubate senza antibiotico, danno sempre accumulo di coprosterolo, l'aggiunta di solfato di streptomicina o cloridrato di tetraciclina diminuisce la quantità di coprosterolo, specie nelle risemine successive, fino ad inibirne completamente la formazione. Anche tornando a seminare in un terreno colturale normale senza antibiotico non si ha più ripresa della normale attività riduttiva.

I controlli batteriologici delle colture alla prima semina con antibiotico come detto in precedenza, indicano che il solfato di streptomicina non sembra modificare il numero dei batteri presenti atti a crescere nel terreno colturale sopra descritto. Viceversa l'aggiunta in piastra del medesimo antibiotico a 10, 30, 50 γ per cc diminuisce nettamente il numero delle colonie, fino ad annularle completamente. Il cloridrato di tetraciclina non porta nelle medesime condizioni sperimentali una differenza numerica evidente nella composizione della microflora delle colture con e senza antibiotico.

TABELLA II.

Riduzione in vitro del colesterolo dopo aggiunta di cloridrato di tetraciclina (CT).

	I semina	II risemina	III risemina	IV risemina
C*	+	+	+	+
20 γ /cc CT	+	(+)	(+)	—
100 γ /cc CT	(+)	(+)	—	—
200 γ /cc CT	(+)	(+)	—	—

* = controllo, seminato, senza antibiotico.

— = riduzione normale.

(+) = riduzione molto scarsa.

— = assenza di riduzione.

DISCUSSIONE DEI RISULTATI.

I dati sperimentali ottenuti provano che i due antibiotici usati agiscono negativamente sulla flora specifica atta a compiere la riduzione del colesterolo nell'intestino dei mammiferi, tanto da eliminare la specie responsabile o alterare definitivamente l'equilibrio tra le più specie che collaborano a questa trasformazione. Infatti se ai dosaggi più bassi si ha ancora una riduzione normale, aumentando la concentrazione dell'antibiotico si ha un diminuito accumulo di coprosterolo, finché nelle successive risemine scompare qualsiasi traccia dello sterolo saturo.

A prova dell'alterata composizione della microflora delle colture sta il fatto che, anche dopo risemina in terreno senza antibiotico, non si ha più ripresa dell'attività riducente. Dai controlli batteriologici delle colture si è notato che la microflora non è scomparsa e nemmeno diminuita numericamente rispetto ai controlli. Questo fa supporre che, trattandosi di più specie, alcune di esse, non sensibili all'antibiotico, sopravvivono e si sviluppano regolarmente, mentre altre vengono eliminate.

Questi dati sperimentali ottenuti *in vitro* concordano con le esperienze *in vivo* di Rosenheim e Webster che avevano notato una completa inibizione nella escrezione del coprosterolo dopo trattamento con sulfamidici, inibizione prolungata per alcun tempo anche dopo la cessazione della somministrazione del farmaco in parola.

Non è possibile ora dubitare, come fecero allora gli Autori succitati, che la trasformazione del colesterolo nell'intestino non sia opera di batteri intestinali anche se ancora non isolati.

I nostri dati concordano pure con l'esperienza *in vivo* condotta da Wainfan e coll. che trovarono come l'equilibrio del colesterolo nell'organismo venga alterato da aggiunte di antibiotici alla dieta, e ne ritrovarono un tasso elevato nel fegato, mentre diminuiva la quantità di colesterolo distrutto.

Noi potremmo suggerire che la diminuita distruzione del colesterolo potrebbe essere attribuita a una ridotta o annullata escrezione di coprosterolo per inibizione della microflora che compie la riduzione del colesterolo a coprosterolo.

Coleman e Baumann, viceversa, sempre in prove dietetiche *in vivo*, riscontrarono che penicillina e succinilsulfatiazolo deprimono l'escrezione di coprosterolo, mentre nelle loro condizioni sperimentali, aureomicina, streptomycin e cloromicetina non hanno alcun effetto; evidentemente ciò dipende dalla concentrazione dell'antibiotico e dalla durata della prova. Noi potremmo aggiungere che se streptomycin e tetraciclina inibiscono *in vitro* la microflora della riduzione del colesterolo, a maggior ragione riusciranno dannosi alla medesima penicillina e succinilsulfatiazolo che già si erano visti avere un'azione negativa sulla medesima *in vivo*.

Dalle ricerche sperimentali riportate risulta possibile avvalorare l'ipotesi che esista un'azione deprimente di alcuni fra gli antibiotici più usati su uno dei meccanismi naturali di regolazione del tasso di colesterolo nell'organismo animale per mezzo dell'escrezione di coprosterolo.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] O. ROSENHEIM, T. A., WEBSTER, *The Mechanism of Coprosterol Formation in vivo*, « Biochem. J. », 37, 580 (1943).
- [2] E. WAINFAN, G. HENKIN, L. I. RICE, W. MARX, *Effects of Antibacterial Drugs on the total Cholesterol Balance of Cholesterol-Fed Mice*, « Arch. Biochem. Biophys. », 38, 187-193 (1952).
- [3] D. L. COLEMAN, C. A. BAUMANN, *Intestinal Sterols. - III. Effects of Age, Sex and Diet*, « Arch. Biochem. Biophys. », 66, 226-233 (1957).
- [4] A. SNØG-KJÆR, J. PRANGE, H. DAM, *Conversion of Cholesterol into Coprosterol by Bacteria in vitro*, « J. Gen. Microb. », 14, 256-260 (1956).
- [5] C. ARNAUDI, S. CARINI, *Riduzione microbica del colesterolo a coprosterolo*, « La Ricerca Scientifica », 10 (1959).
- [6] S. A. BROITMAN, D. G. KINNEAR, L. S. GOTTLIEB e coll., *Effect of Neomycin Alteration of the Rat intestinal Flora on serum Cholesterol and valvular sudanophilia*, « J. Lab. Clin. Med. », 55, 55-59 (1960).
- [7] R. SCHÖNHEIMER, H. VON BEHRING, R. HUMMEL, L. SCHINDEL, *Ueber die Bedeutung gesättigter Sterine in Organismus*, « Z. Physiol. Chem. », 192, 74 (1930).
- [8] P. FAVARGER M. BALDIN, *Le sort et le rôle biologique du Coprostanol. Biochemistry of Lipids*. Ed. G. Popjak, Londra, 222 (1960).

Zoologia. — *Ricerche kariologiche su* *Macrosiphum rosae* L., *Myzodes persicae* Sulzer e *Brevicoryne brassicae* L. (*Homoptera Aphididae*). Nota di GIUSEPPE COGNETTI e ANNA MARIA COGNETTI VARRIALE (*), presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

La classificazione degli Afidi presenta notevoli difficoltà soprattutto per la presenza nel loro ciclo evolutivo di femmine fondatrici, di femmine attere e alate, di femmine sessupare e sessuali e di maschi, ciascuna di queste forme con caratteristiche morfologiche differenti.

Quegli Autori che hanno intrapreso studi citologici sugli Afidi spesso non sono stati in grado di individuare la specie confondendola con altre, per cui talvolta non è chiaro su quale specie siano state effettivamente svolte le ricerche. Infatti alcuni citologi come ad esempio la Stevens⁽¹⁾ e von Baehr⁽²⁾ si sono limitati a designare l'Afide sul quale hanno lavorato dal nome della pianta ospite.

Scopo del presente lavoro è quello di stabilire il corredo cromosomico di *Macrosiphum rosae*, *Myzodes persicae* e *Brevicoryne brassicae*. I dati sulla forma e il numero di cromosomi delle prime due specie risultano, dalla letteratura, contrastanti ed inoltre i cromosomi di *B. brassicae* non sono mai stati descritti. La classificazione delle tre specie è stata confermata dal prof. Martelli della Università di Milano, profondo conoscitore della sistematica del gruppo.

La forma e il numero dei cromosomi è stato rilevato attraverso lo studio delle mitosi somatiche nei giovanissimi embrioni che venivano estratti dall'addome della virginopara. Gli embrioni venivano lasciati 20-25 minuti in carminio acetico e poi schiacciati fra due vetrini. I kariogrammi sono stati studiati al termine della profase somatica dato che in metafase i cromosomi, essendo molto condensati, assumono un aspetto sferico o di bastoncelli molto corti e si prestano perciò più difficilmente all'analisi.

Macrosiphum rosae.

I maschi di questa specie sono molto rari⁽³⁾. Nei nostri allevamenti non sono mai comparsi per cui non è stato possibile individuare i cromosomi sessuali.

(*) Istituto di Zoologia e Anatomia comparata della Università di Modena.

(**) Nella seduta del 13 maggio 1961.

(1) M. STEVENS, « J. Exp. Zool. », vol. 2, 313-33 (1905).

(2) W. B. von BAEHR, « La Cellule », vol. 30, 315-352 (1920).

(3) L. PROVASOLI, « Boll. Zool. Agr. Bachicul. Milano », vol. 11, 1-48 (1940).

Questa specie è stata spesso confusa con altre viventi su piante di rosa; per questa ragione non è facile comprendere dai vaghi dati della letteratura, su quali specie si siano effettivamente svolte le ricerche carilogiche. Solo dopo aver stabilito la forma e il numero dei cromosomi è stato possibile sapere quali erano quegli Autori che avevano realmente lavorato su *M. rosae*.

I dati carilogici su *Aphis rosae* si devono soprattutto a Stschelkanovzew, von Baehr, Stevens e Hewitt. Essi hanno studiato lo sviluppo dell'uovo partenogenetico e la formazione dei primi blastomeri. Sui cromosomi sessuali non si hanno dati precisi.

Stschelkanovzew⁽⁴⁾ sostiene che l'*Aphis rosae* presenta nelle cellule somatiche 14 cromosomi. La Stevens⁽⁵⁾ descrive invece 10 cromosomi diploidi in *A. rosae* bruno, 14 in *A. rosae* verde, 18 in *A. rosae* migratorio⁽⁵⁾. Hewitt⁽⁶⁾ e von Baehr⁽⁷⁾ distinguono nei nuclei di *A. rosae* 10 cromosomi di cui 4 grandi 2 medi e 4 piccoli. Queste osservazioni sono identiche a quelle della Stevens per quanto riguarda l'*A. rosae* bruno.

Le nostre osservazioni confermano i risultati di Hewitt e di von Baehr. Il *Macrosiphum rosae* presenta nelle cellule somatiche 10 cromosomi di differenti dimensioni. Come appare dalla Foto 1 vi sono due coppie di cromosomi lunghi, una delle quali leggermente più lunga dell'altra, due coppie di cromosomi cortissimi, di dimensioni leggermente diverse e una coppia di lunghezza intermedia.

L'*A. rosae* bruno della Stevens e l'*A. rosae* di Hewitt e di von Baehr si identificano quindi con il *Macrosiphum rosae*.

Myzodes persicae.

Dal punto di vista citologico questa specie è stata studiata da Shinji. Secondo le osservazioni di questo autore, riportate da Makino⁽⁸⁾, il numero cromosomico della specie in oggetto sarebbe di 12.

Dalle nostre osservazioni risulta invece che il numero diploide è di 14 cromosomi. Come appare dalla Foto 2, i cromosomi sono di diversa lunghezza; si notano nettamente tre coppie di cromosomi lunghi, di dimensioni leggermente diverse, e 4 molto più corte. Si deve quindi supporre che Shinji abbia esaminato i cariogrammi di una specie morfologicamente molto simile, cioè una *sibling species* giapponese o che la sua classificazione della specie sia errata.

Nei ceppi di *Myzodes persicae* tenuti in allevamento non sono mai comparsi i maschi e di conseguenza non è stato possibile identificare i cromosomi sessuali.

(4) P. STSCHEKANOVZEW, « Biol. Centralbl. », vol. 24, 104-112 (1904).

(5) M. STEVENS, « Publ. Carn. Inst. », vol. 51 (1906).

(6) C. B. HEWITT, « Mem. Proc. Manchester Phil. Soc. », vol. 50 (1906).

(7) W. B. von BAEHR, « Arch. Zellforsch. », vol. 3, 269-333 (1909).

(8) S. MAKINO, *Chromosomes number in animals*, Iowa State College Press (1951).

Brevicoryne brassicae.

Non ci risulta che esistano dati in letteratura sul numero cromosomico di questa specie.

In base ai risultati delle nostre ricerche abbiamo potuto stabilire che questa specie possiede un numero diploide di 16 cromosomi di diversa grandezza. Sono presenti due coppie di cromosomi lunghi di lunghezza leggermente diversa e 6 coppie di cromosomi corti. Un attento esame delle piastre prometafasiche rivela che le 6 coppie di cromosomi corti sono di dimensioni leggermente diverse fra loro.

Negli allevamenti, verso la fine di settembre, sono comparse le forme sessuali; è stato così possibile stabilire che la coppia più lunga è quella dei cromosomi sessuali. Nei maschi infatti manca un cromosoma della coppia più lunga (fig. 1) (Tav. I, foto 3 e 4).

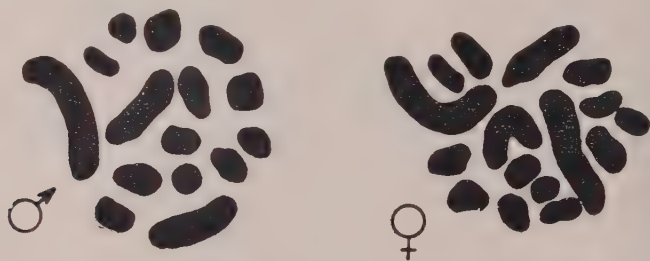
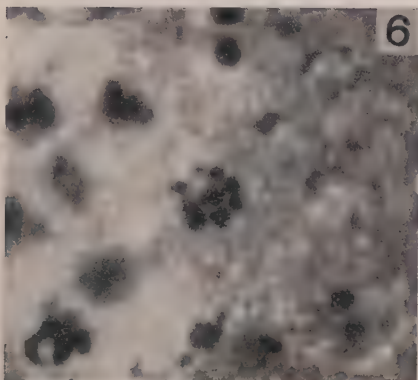
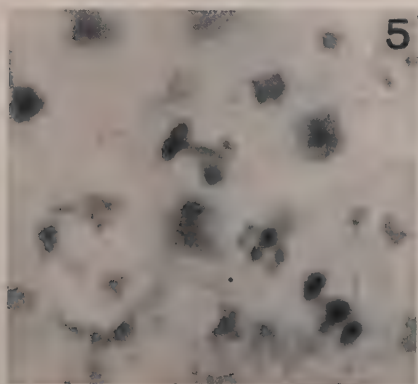
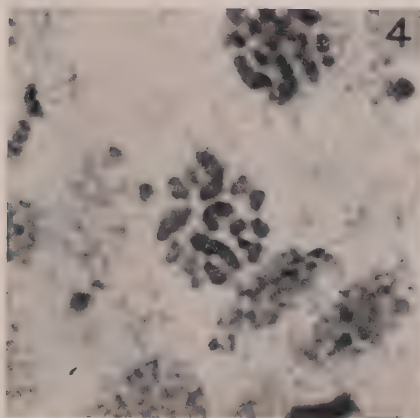
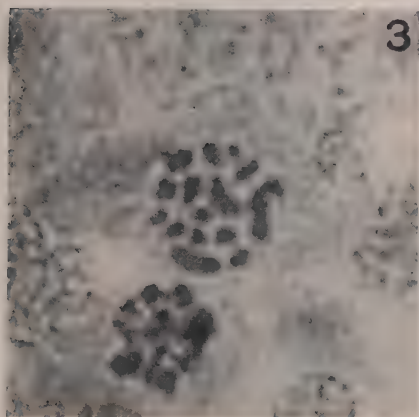
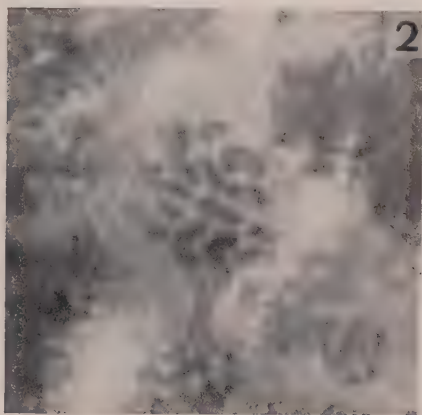
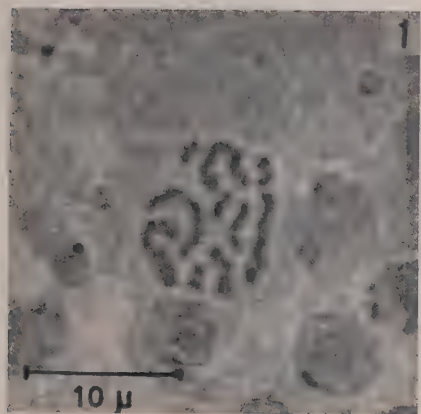


Fig. 1. - Cariogramma di *Brevicoryne brassicae* nelle cellule somatiche.

Anche in questa specie come è regola generale negli Afidi, alla prima anafase spermatogenetica mentre ciascun bivalente si divide il cromosoma sessuale si allunga rimanendo tirato fra le due piastre (Tav. I, foto 5). Il citoplasma non si divide in due parti eguali; la costrizione (citodieresi) inizia normalmente in corrispondenza della metà del cromosoma sessuale, ma successivamente si sposta verso uno dei poli comprendendo quindi il cromosoma sessuale. Si formano quindi due spermatociti di cui quello privo di cromosoma sessuale degenera.

Concludendo: il metodo dello schiacciamento con carminio acetico di giovanissimi embrioni si è rivelato utilissimo per l'individuazione della specie mediante l'esame delle piastre prometafasiche. Ciò ha una notevole importanza per la classificazione degli Afidi che, come è noto, presentano specie e generi con caratteri morfologici molto simili e quindi distinguibili solo attraverso uno studio morfologico molto laborioso di caratteri spesso minutissimi.

Lo studio kariologico eseguito su *Macrosiphum rosae*, *Myzodes persicae* e *Brevicoryne brassicae* ha permesso di stabilire con esattezza il numero cromosomico (rispettivamente 10, 14 e 16) e di precisarne i kariogrammi.



Il maschio di *B. brassicae* presenta la formula cromosomica $2A = 14 + X$ e la femmina $2A = 14 + 2X$, la coppia dei cromosomi sessuali nella femmina è la più lunga.

Anche se non è stato possibile stabilire in *Macrosiphum rosae* e *Myzodes persicae* quale fosse la coppia dei cromosomi sessuali, è tuttavia molto probabile che, come si verifica nella maggior parte degli Omotteri, questa sia da individuarsi in quella costituita dai cromosomi più lunghi.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA I

- 1) *Macrosiphum rosae*. Prometafase somatica (Schiacciamento con carminio acetico).
- 2) *Myzodes persicae*. Prometafase somatica (Schiacciamento con carm. acet.).
- 3) *Brevicoryne brassicae*. Prometafase somatica nel maschio (Schiacciamento con carm. acet.).
- 4) *Brevicoryne brassicae*. Prometafase somatica nella femmina (Schiacciamento con carm. acet.).
- 5) Spermatogenesi di *B. brassicae*. Anafase della prima divisione di maturazione. Ematosilina di Heidenhain.
- 6) Spermatogenesi di *B. brassicae*. Metafase della seconda divisione di maturazione. Ematosilina di Heidenhain.

Embriologia. — *Ulteriori osservazioni sulla ontogenesi della emoglobina dell'embrione di pollo* (*). Nota di VINCENZO D'AMELIO e ANNA MARIA SALVO, presentata (**) dal Corrisp. G. MONTALENTI.

In precedenti ricerche [1] avevamo seguito, con il metodo della diffusione-precipitazione su piastra di agar secondo Ouchterlony [2], la comparsa di antigeni correlati con l'emoglobina (Hb) adulta durante i primi stadii di sviluppo dello embrione di pollo. Con questa tecnica avevamo stabilito la presenza di parte degli antigeni già a 72 ore di sviluppo mentre un assetto completo di antigeni identici a quelli dell'Hb adulta sono presenti solo a 136 ore di sviluppo.

Questi risultati ci hanno indotto ad uno studio elettroforetico ed immunoelettroforetico delle frazioni emoglobiniche embrionali per determinare se gli antigeni presenti avessero o meno oltre ad una identità sierologica lo stesso comportamento elettroforetico delle frazioni adulte.

MATERIALE E METODI.

Per la preparazione della Hb adulta e dell'antisiero omologo si è seguita la tecnica già descritta [3]. La Hb embrionale veniva ottenuta da un emolizzato di globuli rossi embrionali preparati da embrioni tra 47 ore e 11 giorni di incubazione. La posizione delle varie frazioni separate elettroforeticamente nel gel di agar con tampone continuo e discontinuo, veniva determinata sia direttamente per il colore proprio della Hb, sia per colorazione con o-dianisidina sia, infine, dalla posizione dei picchi delle linee di precipitazione che si ottengono con l'analisi immunoelettroforetica condotta secondo Grabar e Williams [4].

TECNICA DELLA PREPARAZIONE DEI GLOBULI ROSSI EMBRIONALI.

Gli embrioni isolati dal tuorlo e lavati in soluzione 0,9 % di NaCl, si omogenizzano lentamente in 20 volumi della stessa soluzione. Si filtra l'omogenato attraverso garza e la parte non filtrata si lava sulla stessa garza unendo quindi il liquido di lavaggio al primo filtrato. Si centrifuga il filtrato a 500 g per 15 minuti e si lava il sedimento 2 volte con centrifugazione alla stessa velocità.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata della Università di Palermo con contributi del Consiglio Nazionale delle Ricerche e della Fondazione Rockefeller.

(**) Nella seduta del 13 maggio 1961.

Il sedimento ripreso in 10 cc di soluzione fisiologica si incuba a 37°C per 30 minuti, si filtra di nuovo attraverso garza, dopo diluizione con soluzione fisiologica, per eliminare il coagulo proteico che si è formato, e si centrifuga il filtrato come sopra. In tal modo si ottengono cellule del sangue contaminate solo da una bassa percentuale di nuclei isolati derivanti soprattutto da cellule immature della serie eritrocitaria.

RISULTATI.

L'elettroforesi su blocco di amido [3] (tampone borato pH 8,6 0,05 M) permette di evidenziare nella Hb di pollo adulto la presenza di tre frazioni distinte, indicate come C_1 , C_2 , C_3 [3], tutte migranti verso il polo negativo e a concentrazione decrescente, essendo cioè la più veloce, C_1 , anche la più concentrata. Tale risoluzione in tre frazioni si ottiene anche con elettroforesi su agar 1 % purché eseguita con tampone discontinuo di veronal (0,05 M nelle vaschette, 0,025 M nel gel a pH 8,2) (fig. 1). Solo due frazioni si ottengono invece quando venga adoperato solo tampone di veronal 0,05 M.

Questo dimostra la importanza delle tecniche adoperate e può spiegare la non concordanza tra i nostri risultati e quelli ottenuti da Gratzer & Allison [5] che su gel di amido sono riusciti a separare solo due frazioni da Hb di pollo adulto. Analisi elettroforetiche condotte da Fine ed altri [6] con la stessa metodica da noi adoperata e conducenti alla dimostrazione di due sole frazioni emoglobiniche, possono essere spiegate con la diversa concentrazione di Hb adoperata per l'analisi, dato che quella utilizzata dagli altri Autori era di 5-10 volte inferiore a quella da noi utilizzata. In tal modo la componente meno concentrata può non essere evidenziabile. L'analisi sierologica delle tre diverse frazioni isolate ha dimostrato tra l'altro la specificità sierologica di una delle tre frazioni (C_3) [3].

L'analisi elettroforetica della Hb, preparata per emolisi delle cellule del sangue di embrioni di pollo, dimostra che sin a 68 ore di sviluppo si ha solo una frazione che migra verso il polo negativo ma più velocemente della più veloce delle frazioni dell'adulto. L'analisi immunoelettroforetica con sieri



Fig. 1. — Elettroforesi in Hb adulta su gel di agar in tampone di Veronal (0,05 M, 0,025 M) a pH 8,2. 4 ore di scorrimento 100 Volts 30 mA.

anti-Hb-adulta tuttavia dimostra una maggiore complessità di questa componente in quanto in corrispondenza di essa si formano due linee di precipitazione con picchi disposti a distanza diversa dal punto di partenza e vicini tra loro (fig. 2).

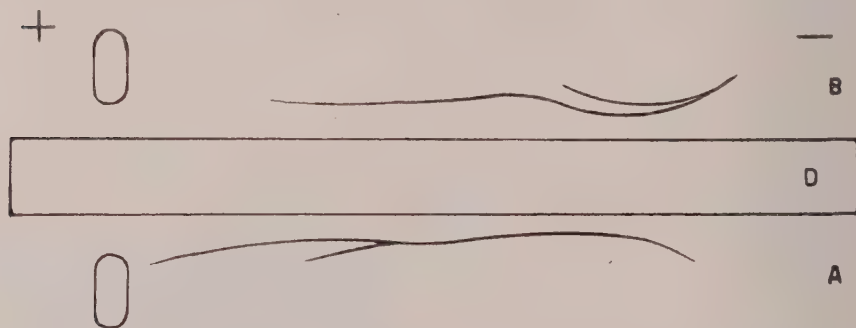


Fig. 2. - Disegno schematico di immunoelettroforesi di Hb adulta (A) e da embrioni di 68 ore (B). Siero anti-Hb-adulta (D).

Una frazione corrispondente elettroforeticamente ad una dell'adulto (C_1) fa la sua comparsa a 88 ore. Un'altra frazione è evidenziata dalla immunoelettroforesi intorno a 121 ore (C_2) mentre che con la sola analisi elettroforetica si riesce a dimostrarne la presenza solo intorno a 167 ore di sviluppo. In embrioni di 10 giorni di incubazione la immunoelettroforesi

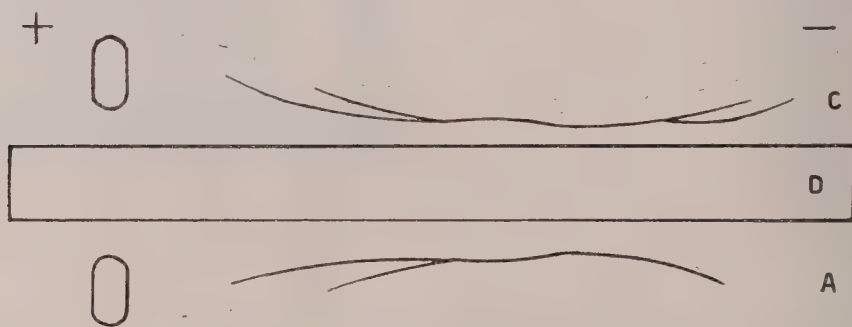


Fig. 3. - Disegno schematico di immunoelettroforesi di Hb-adulta (A) e da embrioni di 10 giorni (C). Siero anti-Hb-adulta (D).

dimostra una terza componente corrispondente alla componente C_3 dell'Hb dell'adulto, oltre a tracce della Hb tipica dell'embrione che ancora permangono (fig. 3). L'analisi densitometrica delle elettroforesi evidenzia, nel corso dello sviluppo, un continuo aumento percentuale delle frazioni emoglobiniche di tipo adulto rispetto alle embrionali che diminuiscono progressivamente.

Considerando questi risultati è difficile sfuggire alla tentazione di stabilire una correlazione tra le varie fasi della emopoiesi embrionale e la sequenza nella comparsa delle varie frazioni emoglobiniche.

Facendo un confronto tra i nostri dati e quelli riportati da Romanoff [7] sulla distribuzione delle forme mature e immature degli eritrociti del ceppo primitivo e definitivo, si vede che fino a quando non compaiono nel sangue dell'embrione eritroblasti di tipo definitivo la Hb ha soltanto componenti di tipo embrionale.

Con la comparsa di questo tipo cellulare cominciano ad essere evidenziabili, anche elettroforeticamente, le frazioni corrispondenti a quelle dell'adulto e la percentuale delle frazioni embrionali rispetto a quelle dell'adulto diminuisce progressivamente. Con l'analisi immunoelettroforetica, tuttavia, si possono svelare frazioni emoglobiniche di tipo adulto in un periodo precedente a quello descritto per la comparsa di forme della serie eritrocitaria definitiva. Ciò può essere spiegato con la sensibilità di questa metodica che può dimostrare anche solo tracce dell'antigene. Le frazioni identiche a quelle dell'adulto seguono, nella loro comparsa, una sequenza determinata, cioè la C_1 è la prima a comparire, quindi la C_2 e infine la C_3 . Tale sequenza potrebbe essere solo apparente e cioè dovuta al fatto che la concentrazione necessaria per la evidenziazione viene raggiunta prima dalla frazione più concentrata (C_1). Più attraente è però un'altra possibilità: la componente C_1 è l'unica evidenziabile nel nucleo dei globuli rossi dell'adulto [8] ed è stato recentemente dimostrato che negli eritoblasti embrionali il nucleo è il primo luogo di sintesi di Hb [9]. Questa frazione dunque potrebbe essere la sola contenuta nei nuclei degli eritoblasti definitivi che a 121 ore rappresentano il 6,9 % delle cellule della serie rossa embrionale e il 69 % delle cellule del tipo definitivo in particolare, essendo il rimanente 31 % rappresentato da cellule ancora più immature [7].

I risultati ottenuti con le ricerche ora esposte completano ed estendono quelli da noi ottenuti in una ricerca precedente con la quale però avevamo dovuto limitarci ad accertare la presenza di antigeni Hb simili nell'embrione. Si era potuto cioè stabilire che a 72 ore di sviluppo erano presenti solo alcuni degli antigeni emoglobinici presenti nell'adulto, mentre a 136 ore di sviluppo non si osservavano differenze tra l'emoglobina adulta e quella embrionale. Gli esperimenti attuali permettono di dimostrare la presenza di frazioni emoglobiniche tipiche dell'embrione e di una sequenza della comparsa delle frazioni omologabili a quelle dell'adulto. Con le tecniche immunoelettroforetiche la frazione sierologicamente specifica (C_1) è evidenziabile solo in un periodo tra 167 ore e 10 giorni di sviluppo.

In estratti embrionali di 36 ore l'analisi eseguita con la tecnica di Ouchterlony, indicava la presenza di antigeni che, pur reagendo con un siero anti Hb adulta, dimostravano una specificità distinta da quest'ultima [1].

Esperienze con questa tecnica sono state ora ripetute usando però l'emolizzato totale di globuli rossi di embrioni a 40 ore di sviluppo (che quindi contiene una concentrazione di Hb embrionale maggiore di quella presente

negli estratti totali di embrioni). Si è così confermata non solo la presenza di antigeni Hb simili già a questo stadio di sviluppo ma anche quella di antigeni producenti linee di precipitazione che incrociano quelle prodotte dall'Hb adulta contro il rispettivo antisiero. Tali linee non sono ottenute quando lo stesso siero anti Hb venga messo a reagire contro plasma di pollo adulto.

Allo stato attuale delle ricerche non siamo ancora in grado di pronunciarsi sulla natura di tali antigeni presenti nelle prime ore di sviluppo.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] V. D'AMELIO e M. A. SALVO, « Acta Embryol. Morph. Exper. », 2, 118 (1959).
- [2] Ö. OUCHTERLONY, « Arkiv Kemi, Mineral. u. Geol. », 26 B, N° 14 (1948).
- [3] V. D'AMELIO e A. M. SALVO, « Zeitschrift f. Naturforschung », 14 b, 455 (1959).
- [4] P. GRABAR e C. A. WILLIAMS, « Biochim. Biophys. Acta », 17, 67 (1955).
- [5] W. B. GRATZER e A. C. ALLISON, « Biol. Rev. », 35, 459 (1960).
- [6] J. M. FINE, J. URIEL e J. FAURE, « Bull. Soc. Chim. Biol. », 38, 649 (1956).
- [7] A. L. ROMANOFF, *The Avian Embryo*, The MacMillan Co., New York 1960, p. 590.
- [8] V. D'AMELIO e M. A. SALVO, « Exptl. Cell Research », 18, 384 (1959).
- [9] B. R. A. O'BRIEN, « Exptl. Cell Research », 21, 226 (1960).
- [10] F. G. HALL, « J. Physiol. », 83, 222 (1934).

Fisiologia. — *Analisi della meccanica toraco addominale durante respirazione a pressione positiva* (*) (**). Nota di EMILIO AGOSTONI, presentata (***) dal Socio R. MARGARIA.

È stato recentemente osservato (Agostoni 1961, *a*) che nell'uomo l'attività elettrica del diaframma persiste anche respirando ad una pressione positiva alla quale, in base alle caratteristiche elastiche dell'apparato toraco-polmonare quali risultano dal diagramma pressione volume (Rahn e coll. 1946), l'inspirazione potrebbe essere completamente passiva. D'altra parte il diagramma pressione volume toraco-polmonare non permette di conoscere i rapporti meccanici toraco-addominali ed in particolare il contributo del diaframma. In questa ricerca si è perciò studiata la meccanica toraco-addominale durante respirazione a pressione positiva (PPB) mediante un'analisi grafica che permette di descrivere, in modo quantitativo e sinottico, il comportamento delle pressioni transtoracica, transdiaframmatica e transaddominale durante il ciclo respiratorio (Agostoni 1961, *b*).

In due soggetti si sono determinate le curve pressione volume del polmone e del torace. Si sono quindi registrate, contemporaneamente al flusso respiratorio, la pressione gastrica e quella esofagea durante il ciclo respiratorio. Dalla pressione gastrica si può risalire per mezzo di una opportuna correzione alla pressione sul lato addominale della cupola diaframmatica (Agostoni e Rahn 1960,), mentre dalla pressione esofagea si ottiene la pressione intratoracica: da questi dati si può determinare la pressione transdiaframmatica.

Il soggetto, in posizione seduta, respirava, attraverso un pneumotacografo a bassa resistenza, in un cassone a grande capacità (760 l) in cui si manteneva una pressione positiva rispetto all'ambiente varia da 0 a 30 cm H₂O.

La figura illustra un'analisi grafica della meccanica toracoaddominale durante PPB di 20 cm H₂O. Il volume polmonare espresso in % della capacità vitale è posto in funzione della pressione intratoracica (linea continua, P_{i_r}), e della pressione addominale (linea tratteggiata, P_{a_d}). La curva P_{i_r} indica la pressione intratoracica dovuta alla elasticità del torace quando i muscoli respiratori sono rilasciati la curva, $P_{i_{L+20}}$ indica la pressione intratoracica dovuta alla elasticità del polmone, spostata a destra per un ammontare di 20 cm H₂O pari alla pressione positiva applicata.

(*) Dall'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Milano.

(**) Questo lavoro è stato eseguito con il contributo della NATO (programma di sovvenzione per la ricerca scientifica).

(***) Nella seduta del 13 maggio 1961.

Trascurando la pressione corrispondente alla resistenza dinamica della parete toracica e dell'addome (Agostoni 1961, *b*), la distanza orizzontale tra P_{iC} e P_i indica la pressione esercitata dai muscoli respiratori quale risulta da misure transtoraciche: quando P_i è a destra di P_{iC} (come nel diagramma della figura) questa pressione rappresenta il contributo dei muscoli espiratori quando invece P_i è a sinistra di P_{iC} essa rappresenta il contributo dei muscoli inspiratori.

La distanza tra P_i e P_{iL} indica la pressione necessaria a vincere le resistenze dinamiche al movimento dell'aria e del tessuto polmonare.

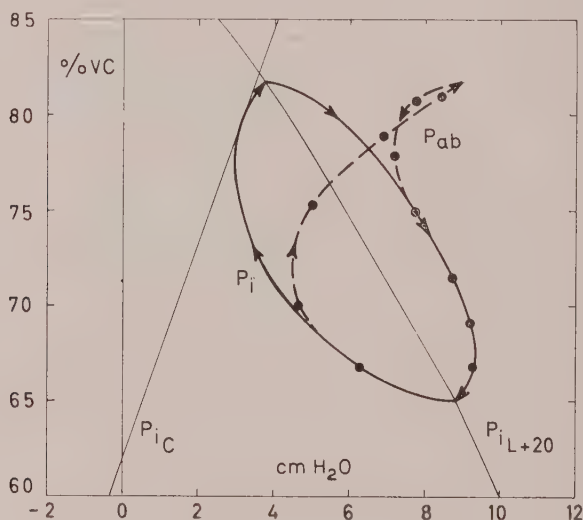


Fig. 1. - Volume polmonare espresso in % della capacità vitale in funzione delle pressioni dalla parte toracica (P_i , linea continua) e da quella addominale (P_{ab} , linea tratteggiata) della cupola diaframmatica durante il ciclo respiratorio eseguito ad una pressione positiva di 20 cm H₂O.

La fase del ciclo è indicata dalle frecce, i punti indicano intervalli di 0,2 sec dall'inizio dell'inspirazione o dell'espirazione. La curva P_{iC} indica le pressioni intratoraciche dovute all'elasticità del torace, quella P_{iL+20} indica le pressioni intratoraciche dovute all'elasticità del polmone più la pressione positiva applicata. Per spiegazioni vedi testo.

La distanza tra P_{ab} e P_i esprime la pressione transdiaframmatica. La distanza tra P_{ab} e l'ordinata ($P = 0$) rappresenta la pressione transaddominale nella parte più alta dell'addome, ed è l'espressione della tensione della parete addominale quale è dovuta alle sue due componenti elastica e muscolare. Non è possibile separare completamente queste due componenti perché, ad uno stesso volume polmonare, la posizione della parete addominale e quindi la sua forza elastica, a rilasciamento, è diversa da quella che si ha durante la respirazione. Quando, come nel caso illustrato dalla figura, i muscoli

espiratori sono attivi, quando cioè P_i è a destra di P_{iC} , la distanza tra P_{ab} e P_{iC} è prevalentemente dovuta all'attività dei muscoli della parete addominale.

Appare dal diagramma che il contributo meccanico del diaframma ($P_{ab} - P_i$) è ancora marcato ad un valore di PPB al quale l'inspirazione risulta completamente passiva in base all'analisi delle pressioni transtoraciche: infatti, a questo valore di PPB, P_i si trova a destra di P_{iC} durante tutto il ciclo respiratorio. La pressione transdiaframmatica media durante il ciclo respiratorio a questo livello di PPB è il 42 % del valore rilevato durante la respirazione a pressione ambiente. Con l'aumentare del valore di PPB la pressione transdiaframmatica si riduce progressivamente, per raggiungere lo zero ad un valore di 30 cm H₂O. L'inspirazione non può quindi essere considerata completamente passiva che a questi valori di PPB.

Questi esperimenti non permettono di chiarire secondo quale meccanismo si mantiene un certo gradiente pressorio addomino-toracico durante una parte del ciclo respiratorio. Né i risultati di esperimenti eseguiti su animali (Bjurstedt, 1953) possono essere di molto aiuto in questo senso, sia perché la condizione di PPB induce apnea negli animali anestetizzati, sia per le peculiari condizioni meccaniche dell'animale in contenzione.

In base ai risultati di questa ricerca sembra potersi formulare solo la seguente interpretazione. Durante PPB nell'uomo, l'attività dei muscoli inspiratori persiste: l'effetto meccanico di tale attività è bilanciato da una azione dei muscoli espiratori, in eccesso a quella richiesta dalle condizioni di PPB in base al diagramma pressione volume toraco-polmonare. Questa extra attività dei muscoli espiratori, come del resto quella dei muscoli inspiratori, non può essere rilevata da misure di pressione transtoracica, poiché a livello della gabbia toracica, i muscoli inspiratori ed espiratori agiscono direttamente sulle stesse strutture e non è quindi possibile separare il contributo meccanico degli uni da quello degli altri quando agiscono simultaneamente: le misure di pressione transtoracica permettono di rilevare soltanto la risultante delle due attività. A livello dell'addome invece è possibile eseguire tale distinzione perché la misura della pressione transdiaframmatica permette di determinare il contributo della sola componente inspiratoria anche quando i muscoli espiratori si contraggono simultaneamente.

La persistenza dell'attività inspiratoria potrebbe però essere limitata al solo diaframma, sia, in conseguenza di una più elevata soglia a stimoli inibitori propria delle cellule che regolano l'attività del diaframma, sia in rapporto ad un ipotetico riflesso tendente a mantenere un certo gradiente pressorio addomino-toracico durante una parte del ciclo respiratorio.

Il permanere di un gradiente pressorio addomino-toracico, anche quando l'inspirazione potrebbe essere completamente passiva, favorisce il ritorno del sangue venoso dalla cavità addominale a quella toracica, ovviando così parzialmente a quella riduzione della gettata che si avrebbe in condizioni di PPB qualora il gradiente pressorio addomino-toracico fosse ridotto a zero. E poiché la riduzione della gettata cardiaca è il principale fattore limitante il massimo

valore tollerabile di PPB (Barach e coll. 1957), la persistente attività del diaframma e la corrispondente extraattività dei muscoli addominali aumentano probabilmente la resistenza dell'uomo alle condizioni di PPB.

BIBLIOGRAFIA.

- E. AGOSTONI, «Atti Acc. Naz. Lincei», 30, 100, (1961) *a*.
H. RAHN, A. B. OTIS, L. E. CHADWICK e W. O. FENN, «Am. Journ. Physiol.», 146, 161, (1946).
E. AGOSTONI, «J. Appl. Physiol.», in corso di pubblicazione (1961) *b*.
E. AGOSTONI e H. RAHN, «J. Appl. Physiol.», 15, 1087 (1960).
H. BJURSTEDT, «Acta Physiol. Scand.», 29, 145 (1953).
A. L. BARACH, W. O. FENN, E. B. FERRIS e C. F. SCHMIDT, «J. Aviat. Med.», 18, 73 (1947).

Fisiologia. — *Analisi neurofisiologica degli effetti della imipramina* (*). Nota di PAOLO CREPAX, ETTORE FADIGA, ANNA MASSARINI e ANGELO VOLTA, presentata (**) dal Socio G. C. PUPILLI.

Con le indagini riferite nella presente Nota ci siamo proposti di analizzare l'azione neurofarmacologica del cloridrato di N (3 dimetilaminopropil)-iminodibenzile (imipramina), attuando nel Gatto una esplorazione sistematica delle modificazioni provocate da tale sostanza in fenomeni centrali, spontanei o evocati, dovuti all'attività di diversi distretti e sistemi del nevrasse, tanto encefalici quanto spinali. Ci è parso che osservazioni di questo tipo potessero integrarsi utilmente con quanto è noto ^(1,2) circa agli effetti psicotropi che sono caratteristici del farmaco.

Sono stati presi in esame i seguenti fenomeni: *a*) l'attività elettrica spontanea del *neocortex* e la reazione di risveglio, nell'animale col nevrasse integro ovvero sezionato a livello mesencefalico o sottobulbare; *b*) l'attività elettrica spontanea dell'*archicortex* (circonvoluzione dell'ippocampo) e le modificazioni provocate nell'attività stessa dalla stimolazione del N. ischiatico, nell'animale col nevrasse integro; *c*) le risposte corticocerebrali, con reclutamento ovvero con aumento, provocate dalla stimolazione iterativa di nuclei talamici con proiezione rispettivamente diffusa e specifica; *d*) la risposta transcallosale, registrata dalla corteccia di un emisfero per stimolazione del punto omotopico dell'emisfero opposto; *e*) la risposta del lembo isolato di corteccia cerebrale alla stimolazione elettrica diretta; *f*) i riflessi destati nei MM. quadricipite femorale e tibiale anteriore rispettivamente dalla percussione del tendine rotuleo (riflesso monosinaptico) e dalla stimolazione del capo centrale del N. tibiale ipsilaterale (riflesso polisinaptico) nell'animale spinale.

Le osservazioni sono state eseguite su 86 Gatti immobilizzati mediante curarizzazione (*d*-tubocurarina o Flaxedil, in dosi rispettivamente di 0,2 e 2 mg/kg) ovvero sottoposti a recisione del nevrasse al livello richiesto dall'esperimento che s'intendeva effettuare; gli animali curarizzati e quelli con sezione sottobulbare erano soccorsi con la respirazione artificiale. Le tecniche messe in atto sono state descritte in lavori precedentemente pubblicati ^(3,4,5).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia generale dell'Università di Urbino e nella Sezione I del Centro di Neurofisiologia del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Gli Autori ringraziano il Direttore del Centro per l'ospitalità loro concessa.

(**) Nella seduta del 13 maggio 1961.

(1) R. KUHN, «Schweiz. med. Wschr.», LXXXVII, 1135 (1957).

(2) P. KIELHOLZ u. R. BATTEGAY, «Schweiz. med. Wschr.», LXXXVIII, 763 (1958).

(3) P. CREPAX e A. VOLTA, «Arch. Sci. biol.», XLIII, 177 (1959).

(4) F. INFANTELLINA, «Arch. Sci. biol.», XXXIX, 209 (1955).

(5) R. CORAZZA e P. L. PARMEGGIANI, «Arch. Sci. biol.», XLIV, 435 (1960).

La imipramina è stata somministrata tanto per via intravenosa (V. femorale), quanto per applicazione locale mediante dischetti di carta bibula imbevuti della soluzione in esame, sciogliendola in soluzione fisiologica (NaCl al 9‰) nel primo caso, in liquido di Tyrode (pH corretto a 7-7,2) nel secondo.

1. L'elettrogramma derivato dal *neocortex* del Gatto col nevrasse integro è costituito da onde dell'ampiezza di 30-80 μV e della frequenza di 15-30 Hz, alle quali di quando in quando si alternano onde di minore frequenza (8-10 Hz) e di maggiore ampiezza (100-200 μV). Per effetto della iniezione intravenosa di imipramina (1-3 mg/kg), si osserva un aumento di frequenza delle onde di maggiore ampiezza, che si possono presentare riunite in fusi di 7-12 unità ma che più spesso sono distribuite irregolarmente. Questi fenomeni di sincronizzazione si manifestano 5-7 min dopo l'introduzione del farmaco e sono accompagnati da una cospicua riduzione degli effetti generalizzati prodotti nell'attività corticale dalle stimolazioni periferiche: i valori di soglia della reazione di risveglio, saggiata mediante l'eccitamento del N. ischiatico, s'innalzano; a differenza di quanto avviene in condizioni basali, tale reazione non si protrae mai oltre la fine dello stimolo. Dopo la iniezione delle dosi sopra indicate, il tracciato elettrico corticocerebrale conserva l'aspetto sincronizzato per 1 h circa; poi riprende i caratteri che presenta prima del trattamento, mentre la soglia della reazione di risveglio rimane modificata più a lungo (90-100 min).

Nel preparato «encefalo isolato» e in quello «cervello isolato», la imipramina (1-3 mg/kg i.v.) eleva il livello della sincronizzazione, che nei preparati stessi è manifesta anche prima del trattamento. L'effetto è più evidente nel Gatto «cervello isolato», manifestandosi con un aumento tanto dell'ampiezza e durata dei singoli fusi quanto della loro frequenza. E in entrambi i preparati la imipramina, anche in piccola dose, riduce in modo costante e netto gli effetti diffusi prodotti sull'attività elettrica corticocerebrale da stimolazioni periferiche (acustica, nel preparato «encefalo isolato»; olfattiva, nel preparato «cervello isolato»).

2. L'attività elettrica spontanea della corteccia dell'ippocampo si distingue da quella derivata dal *neocortex* per la grande facilità con cui presenta ritmi lenti, costituiti da caratteristiche onde di ampiezza relativamente elevata (200-300 μV) e di frequenza variabile tra 3 e 6/sec. Anche le reazioni a stimoli periferici sono nell'ippocampo diverse da quelle neocorticali: gli impulsi afferenti che provocano nel *neocortex* la reazione di risveglio, determinano di solito nell'*archicortex* la comparsa di treni assai regolari di onde lente di bassa frequenza⁽⁶⁾.

La imipramina (0,8-4 mg/kg i.v.) modifica in modo netto l'attività ippocampale, tanto nei suoi aspetti spontanei quanto in quelli provocati. Le

(6) J. D. GREEN e A. A. ARDUINI, «J. Neurophysiol.», XVII, 533 (1954).

componenti rapide e di scarsa ampiezza aumentano di frequenza, mentre quelle lente ed ampie diminuiscono: poiché il farmaco provoca nei tracciati neocorticali modificazioni opposte, dopo la sua somministrazione scompaiono quasi completamente le differenze di aspetto che prima del trattamento distinguono l'attività elettrica spontanea dell'*archicortex* da quella del *neocortex*.

La reazione ippocampale a impulsi di origine periferica è del pari profondamente modificata per effetto della imipramina. Dopo la introduzione di dosi anche piccole del farmaco (0,8 mg/kg), la stimolazione iterativa del N. ischiatico (anche se eseguita con elevati voltaggi: 15 V) provoca nell'*archicortex*, anziché i fenomeni di sincronizzazione caratteristici dell'animale non trattato, la comparsa di una tipica reazione di risveglio, palesata dalla desincronizzazione dei ritmi e dalla diminuzione di ampiezza delle onde. Per dosi di imipramina da 0,8 a 2 mg/kg, gli effetti descritti si osservano per la durata di 1-2 h; l'impiego di dosi più elevate non vale a renderli più cospicui, ma ne prolunga la durata. Seguendo gli effetti nel tempo, si nota che l'azione del farmaco sui fenomeni derivati dall'*archicortex* regredisce dopo quella esercitata sull'attività spontanea neocorticale e sulla soglia della reazione di risveglio.

3. La stimolazione elettrica iterativa di nuclei talamici con proiezione diffusa ovvero specifica evoca nella corteccia cerebrale oscillazioni di potenziale che hanno la caratteristica di aumentare progressivamente di ampiezza se destate da impulsi susseguentisi a bassa cadenza (6-10 Hz), come se gli effetti di un singolo stimolo fossero « facilitati » da quelli degli stimoli precedenti⁽⁷⁾. Pur avendo questa caratteristica essenziale e comune, le risposte così suscitate si distinguono in due gruppi: quelle evocate per attivazione di nuclei « specifici », inseriti nella via sensoriale primaria (risposte con aumento), e quelle destate dalla stimolazione di nuclei « aspecifici » con proiezione diffusa (risposte con reclutamento). Le prime sono costituite da una serie di oscillazioni difasiche, composte da un potenziale positivo e da uno negativo di ampiezza minore o uguale, mentre nelle seconde mancano spesso le onde positive e in ogni caso quelle negative sono prevalenti per ampiezza.

Le modificazioni che per applicazione topica di imipramina sulla corteccia compaiono nelle risposte con reclutamento e in quelle con aumento sono assai simili tra loro, ed essenzialmente si compendiano in una diminuzione di ampiezza. L'incremento delle oscillazioni di potenziale che nella corteccia cerebrale provoca l'arrivo subentrante degli impulsi corticipeti destati con la stimolazione iterativa di un nucleo talamico con proiezione diffusa o specifica, dopo l'applicazione (3 min) di una soluzione poco concentrata del farmaco (1×10^{-3} ; 2×10^{-3}) è assai minore di quel che si osserva prima del

(7) E. W. DEMPSEY e R. S. MORISON, « Amer. J. Physiol. », CXXXV, 281 e 293 (1942); CXXXVIII, 297 (1943).

trattamento; prolungando fino a 5-6 min il tempo di applicazione della sostanza ovvero aumentando la concentrazione di quest'ultima (5×10^{-3}), si nota inoltre che in quasi tutte le oscillazioni di cui si compongono le risposte, l'onda negativa manca o è fortemente ridotta di ampiezza e durata. Se si paragonano i grafici ottenuti in tali condizioni con quelli registrati in condizioni basali, si può rilevare come la generale riduzione delle onde negative non si accompagna con una variazione proporzionale delle componenti positive, le quali anzi si fanno talora più ampie e costanti, mostrando evidenti segni di reclutamento in corrispondenza dei primi impulsi della salva.

Per quanto concerne gli effetti esercitati dalla somministrazione del farmaco per via intravenosa (3-8 mg/kg), i risultati che si riferiscono alle risposte con reclutamento devono essere tenuti distinti da quelli attinenti alle risposte con aumento. Nel primo caso si osserva una diminuzione di ampiezza tanto delle onde superficie-negative quanto di quelle superficie-positive; la soglia dell'effetto s'innalza scarsamente. Le risposte con aumento, dal canto loro, palesano dopo la iniezione delle dosi dianzi indicate una chiara riduzione del voltaggio delle onde superficie-negative, ma non di quelle superficie-positive, che restano pressappoco invariate o addirittura aumentano lievemente di ampiezza; la soglia del fenomeno s'innalza in misura minore di quella riscontrata per le risposte con reclutamento ovvero non si modifica affatto.

4. La risposta della corteccia del *gyrus suprasylvius* alla stimolazione, effettuata con un singolo impulso, del punto omotopico dell'emisfero contralaterale è costituita tipicamente da un'onda superficie-positiva di scarsa ampiezza e della durata di 15-20 msec, seguita da un'onda di segno opposto che predomina per ampiezza e durata; questo complesso può a sua volta precedere un potenziale positivo meno ampio e più lento, e talora una scarica postuma non dissimile da quella che fa seguito alla risposta primaria^(8,9).

Le modificazioni provocate dalla imipramina nelle risposte corticali a impulsi transcallosali ricordano nel loro insieme quelle osservate nello studio delle risposte alla stimolazione iterativa di nuclei talamici con proiezione diffusa. Saggiando il farmaco per applicazione locale, si è visto che il trattamento con soluzioni poco concentrate (5×10^{-4} ; 1×10^{-3}) non diminuisce di molto il voltaggio della componente positiva, mentre riduce in modo netto quello della componente negativa; quest'ultima scompare del tutto, se si tratta la corteccia con soluzioni più concentrate (2×10^{-3} ; 5×10^{-3}), ma anche in questo caso la componente positiva, quantunque depressa, continua a manifestarsi chiaramente negli elettrogrammi. Una diminuzione di ampiezza delle risposte a impulsi transcallosali si osserva anche dopo la somministrazione di imipramina per via intravenosa (3 mg/kg): tale diminuzione si palesa in misura circa eguale in entrambe le componenti, riduzioni anche assai

(8) H. J. CURTIS, « J. Neurophysiol. », III, 414 (1940).

(9) B. GRAFSTEIN, « J. Neurophysiol. », XXII, 504 (1959).

scarse dell'onda negativa essendo accompagnate da riduzioni corrispondenti di quella dell'opposto segno.

5. È noto che la stimolazione iterativa può evocare nel lembo isolato di corteccia cerebrale un'attività pulsatoria che prosegue anche dopo la fine dello stimolo e che si mantiene per varie decine di secondi, purché la cadenza degli impulsi superi determinati valori critici (4,10). Le nostre indagini sullo *slab* di corteccia sono state rivolte allo studio degli effetti esercitati dalla imipramina sui fenomeni ritmici testé menzionati; la sostanza è stata saggiata per applicazione diretta. Analogamente a quanto risulta dalle modificazioni delle risposte della corteccia integra, anche in condizioni di isolamento funzionale si è visto che il farmaco deprime l'attività degli aggregati neuronici corticali: dopo l'applicazione di una soluzione all' 1×10^{-3} sulla sede di derivazione per la durata di 3 min, si osserva una forte riduzione di ampiezza, frequenza e durata della scarica ripetitiva, che scompare completamente prolungandosi il trattamento.

6. Per effetto della somministrazione di imipramina, nella dose di 5 mg/kg, si osserva un aumento di ampiezza delle contrazioni destate nel M. quadricipite femorale dalla percussione del suo tendine (riflesso monosinaptico di estensione). Tale aumento è massimo durante il secondo e terzo minuto che segue la somministrazione, quando si possono registrare contrazioni di ampiezza anche doppia di quella basale. Trascorso questo tempo, le risposte decrescono rapidamente, ma non riacquistano subito l'ampiezza iniziale, un lieve potenziamento residuo essendo di solito palese per durate di 15-20 minuti. È da rilevare come assai spesso l'aumento testé descritto sia preceduto da una transitoria diminuzione delle risposte, che compare pochi secondi dopo la somministrazione del farmaco e perdura per circa 30 sec. di. Esperimenti eseguiti effettuando la registrazione contemporanea dell'attività riflessa e della pressione intrarteriosa hanno mostrato come questa riduzione iniziale di ampiezza del riflesso patellare si manifesti e regredisca contemporaneamente alla diminuzione del livello emopressorio.

Le modificazioni provocate dalla imipramina sul riflesso flessorio ipsilaterale (polisinaptico) sono più variabili di quelle ora descritte. Per quanto concerne gli effetti delle dosi più elevate (5-10 mg/kg), si può affermare in generale che subito dopo la somministrazione la risposta aumenta, sia pure in misura lieve (10-20 %) e transitoria (2-5 min circa): questo aumento è seguito dall'effetto opposto, fuorché in rari casi, nei quali la risposta può mantenersi esaltata a lungo (30-40 min). Contrariamente a quanto si è osservato per il riflesso patellare, nel riflesso flessorio generalmente manca la diminuzione iniziale di ampiezza. A questo proposito si deve per altro notare che lo stimolo impiegato era diverso nei due casi: il riflesso patellare era destato da stimoli fisiologici (percussione del tendine), mentre per ottenere

il riflesso di flessione si ricorreva alla stimolazione elettrica del nervo, usando impulsi di voltaggio triplo di quella soglia⁽¹¹⁾.

Se si considerano nel loro insieme i vari risultati conseguiti studiando le modificazioni funzionali provocate dalla imipramina⁽¹²⁾, essi sembrano attestare che il farmaco esercita un'azione depressiva tanto a livello sottocorticale quanto a livello del *neocortex*. Così, la notevole elevazione della soglia della reazione di risveglio e la sincronizzazione dei ritmi elettroencefalografici possono facilmente spiegarsi ammettendo che il sistema reticolare attivatore bulbo-ponto-mesencefalico sia depresso; similmente, la riduzione di ampiezza delle risposte transcallosali e la scomparsa presso che completa dell'attività ripetitiva provocabile nel preparato di *slab* corticale, rispecchiano la depressione degli elementi nervosi neocorticali. Quanto agli effetti osservati derivando l'attività dell'*archicortex*, essi possono spiegarsi ammettendo che la imipramina alteri il normale equilibrio tra i due sistemi afferenti che controllano l'ippocampo⁽¹³⁾: il farmaco eserciterebbe sul sistema sincronizzatore un'azione depressiva più intensa di quella provocata sul sistema desincronizzante, sicché l'attività rapida e le risposte di desincronizzazione verrebbero a prevalere negli elettrogrammi derivati dopo la somministrazione della sostanza.

Per intendere l'azione che la imipramina esercita sulle risposte con reclutamento ovvero con aumento, occorre aver presenti i diversi effetti del farmaco applicato sulla corteccia ovvero introdotto per via generale: nel primo caso, solo le componenti negative delle risposte corticali sono ridotte, ma in egual misura nei due tipi di risposta; nel secondo, la riduzione concerne sia le componenti negative sia quelle positive nel caso delle risposte con reclutamento, solo quelle negative nel caso delle risposte con aumento. Sul fondamento della origine probabilmente profonda delle onde positive⁽¹⁴⁾ e del fatto che, a differenza di quanto accade per applicazione topica, tutti gli elementi che partecipano alle risposte sono egualmente esposti all'azione del farmaco iniettato in vena, i dati sopra riferiti provano: 1° l'azione depressiva della imipramina sugli elementi corticali e inoltre sui sistemi talamici con proiezione diffusa; 2° la scarsa suscettività dei sistemi talamici con proiezione specifica all'azione deprimente del farmaco.

Quanto agli effetti della imipramina a livello spinale, è opportuno rilevare innanzi tutto che dosi inferiori a 5 mg/kg di tale sostanza, largamente attive rispetto ai fenomeni encefalici, tanto nell'animale col nevrasso integro

(11) Di fatto, in esperimenti di controllo si è visto che quando le osservazioni vengono compiute impiegando stimoli di poco sopraliminali, anche i riflessi destati nel M. tibiale anteriore presentano, subito dopo la somministrazione del farmaco, la diminuzione di ampiezza dianzi ricordata.

(12) La documentazione grafica dei dati esposti nella presente Nota verrà riprodotta nella Memoria *in extenso*.

(13) R. CORAZZA e P. L. PARMEGGIANI, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », XXXVII, 377 (1961); « Arch. Sci. biol. », XLV, in corso di stampa (1961).

(14) M. H. CLARE e G. H. BISHOP, « EEG clin. Neurophysiol. », VIII, 583 (1956).

quanto nei preparati « encefalo isolato » e « cervello isolato », esercitano sui riflessi spinali effetti scarsi e incostanti; solo dosi pari o superiori a 5 mg/kg producono modificazioni abbastanza uniformi. Tali modificazioni potrebbero spiegarsi attribuendo alla imipramina un'azione aumentatrice sia sulle sinapsi centrali eccitatorie, sia su quelle inibitorie ⁽¹⁵⁾ e supponendo che il secondo effetto abbia una durata più lunga. Tuttavia il fatto che gli effetti ora descritti si ottengano soltanto con l'uso di dosi relativamente elevate, scema di per sé solo l'importanza da attribuire a questi risultati in una valutazione complessiva dell'azione centrale della imipramina.

Inversamente, considerazioni dello stesso genere inducono ad attribuire particolare importanza alle modificazioni funzionali delle strutture reticolari e rinencefaliche, modificazioni che compaiono per effetto delle più piccole dosi attive: le strutture stesse sembrano quindi dotate, riguardo al farmaco, di una suscettività elettiva.

(15) J. C. ECCLES, *The physiology of nerve cells*. Johns Hopkins Press, Baltimore, 1957.

Biologia. — *L'andamento dell'attività mitotica nel midollo spinale di un Anfibio urodelo durante lo sviluppo* ^(*). Nota di GIORGIO M. BAFFONI, presentata ^(**) dal Corrisp. A. STEFANELLI.

In precedenti ricerche sul nucleo delle cellule nervose di Vertebrati, è stata osservata la presenza di elementi indifferenziati nello strato ventricolare di Anfibi anuri ed urodeli ⁽¹⁾ metamorfosati; inoltre il tardivo esaurimento dell'attività proliferativa durante la morfogenesi cerebellare di Vertebrati tetrapodi ⁽²⁾ ed in particolare il persistere di mitosi ventricolari nel metencefalo di Anfibi metamorfosati ⁽³⁾ hanno indicato che la determinazione numerica delle cellule nervose non è ovunque precoce. Queste osservazioni hanno suggerito un complesso di indagini sull'attività mitotica dello strato ventricolare degli Anfibi durante il loro periodo di sviluppo (embrionale, larvale e post-larvale). Sono stati già resi noti i risultati preliminari delle osservazioni compiute sull'andamento del ritmo mitotico del neurasse durante lo sviluppo di un Anfibio anuro (*Bufo bufo*), scelto appositamente tra quelli meglio adattati alla condizione terrestre poiché in essi la metamorfosi coinvolge modificazioni di tutti gli apparati organici, compresi gli organi di senso e di conseguenza il sistema nervoso ⁽⁴⁾; tali osservazioni hanno documentato che l'attività mitotica del neurasse persiste ovunque fino a dopo il termine della metamorfosi, inoltre presenta un diverso comportamento nelle singole regioni e nelle varie zone di una stessa regione, in stretto rapporto con l'entità delle modificazioni dei vari centri nervosi e con le modalità d'accrescimento delle varie parti ⁽⁵⁾. Un tentativo di discriminazione tra fattori di sviluppo e d'accrescimento in rapporto con l'attività proliferativa, è stato compiuto somministrando l'ormone tiroideo a larve di Anfibi anuri ed esaminando le modificazioni morfologiche e le variazioni dell'attività mitotica ai vari livelli del neurasse durante la metamorfosi accelerata

(*) Ricerca eseguita nell'Istituto di Zoologia ed Anatomia comparata dell'Università di Modena e nel Centro di Neuroembriologia del C.N.R. presso l'Università di Roma.

(**) Nella seduta del 13 maggio 1961.

(1) G. M. BAFFONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. 8^a), XXI, 491 (1956); M. MARINI, « Riv. di Neurobiol. », II, 495 (1956),

(2) G. M. BAFFONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. 8^a), XVI, 798 (1954); « Arch. Zool. Ital. », XLI, 1 (1956); E. CAPANNA, « Arch. Ital. Anat. Embriol. », LXV, 250 (1960).

(3) G. M. BAFFONI ed E. ELIA, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. 8^a), XXII, 109 (1957); G. M. BAFFONI, « Riv. di Neurobiol. », V, 33 (1959).

(4) Ved.: G. M. BAFFONI, « Riv. di Biol. », LIII, 293 (1960).

(5) G. M. BAFFONI e R. PINACCI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. 8^a), XXV, 128 (1958). G. M. BAFFONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. 8^a), XXVI, 598 (1959). R. PINACCI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. 8^a), XXIX, 150 (1960).

ed anticipata ⁽⁶⁾; ma una conferma più interessante sarebbe emersa dal confronto dell'andamento del ritmo mitotico del neurasse tra l'Anfibio anuro ed un Anfibio urodelo che dopo la metamorfosi resta in acqua e nel quale, di conseguenza, le modificazioni organiche si limitano sostanzialmente agli apparati tegumentario e respiratorio e pertanto il periodo larvale va considerato più che altro come un periodo d'accrescimento. I primi risultati di tale indagine, limitata al metencefalo, sono stati già pubblicati ⁽⁷⁾. Nella presente Nota saranno sommariamente riferiti i risultati sull'andamento del ritmo mitotico nel midollo spinale dello stesso Anfibio urodelo (*Triturus cristatus carnifex* Laur.)

Ricordo che i primi accurati rilievi sull'attività mitotica in Anfibi urodeli sono stati compiuti da Coghill ⁽⁸⁾ in alcuni stadî embrionali nei quali iniziano particolari attività fisiologiche di natura motoria: in *Ambystoma* è stata constatata una diseguale distribuzione delle mitosi tra le diverse regioni del neurasse in animali allo stesso stadio di sviluppo e particolari variazioni nelle varie regioni tra animali a stadî differenti; lungo il midollo spinale, inoltre, sono stati osservati focolai mitotici che però non conservavano una definita relazione con le radici nervose e che sono stati ritenuti espressione di onde mitotiche decorrenti in senso cefalo-caudale; nel midollo spinale, infine, sono state notate temporanee dilatazioni in rapporto con accentuazioni dell'attività proliferativa. Quasi contemporaneamente Detwiler ⁽⁹⁾, in trapianti eterotopici di segmenti di midollo spinale di *Ambystoma*, ha riscontrato una più marcata accentuazione dell'attività mitotica, specialmente nella regione dorsale (piastra alare), particolarmente elevata se il trapianto proveniva da segmenti anteriori ed era stato eseguito cefalicamente; la valutazione dei risultati di queste esperienze ha portato l'Autore a concludere che in una determinata zona del sistema nervoso i processi proliferativi e differenziativi sono diretti da fattori intrinseci (di natura ereditaria); però fattori estrinseci, quali l'attività morfogenetica delle regioni contigue, a causa dell'attività metabolica di neuroni in differenziamento o funzionanti, possono influenzare l'attività mitotica.

Successivamente Detwiler ⁽¹⁰⁾ ed Harrison ⁽¹¹⁾ hanno esaminato l'attività mitotica nel neurasse di embrioni di *Ambystoma* operati di asportazione unilaterale della placca neurale; gli Autori hanno concordemente riscontrato che i processi regolativi del neurasse sono accompagnati da accentuazione dell'attività mitotica e da migrazione cellulare.

(6) G. M. BAFFONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. 8^a), XXIII, 495 (1957); XXVII, 427 (1959); XXVIII, 102 (1959); « Boll. di Zool. », XXVI, 255 (1959).

(7) G. M. BAFFONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. 8^a), XXIII, 90 (1957); « Boll. di Zool. », XXIV, 135 (1957).

(8) G. E. COGHILL, « Journ. Comp. Neurol. », XXXVII, 71 (1954); LVII, 327 (1933).

(9) S. R. DETWILER, « Journ. Exptl. Zool. », XLII, 333 (1925).

(10) S. R. DETWILER, « Journ. Exptl. Zool. », XCVI, 129 (1944); « Anat. Rec. », XCIV, 229 (1946); « Journ. Exptl. Zool. », CIV, 53 (1947).

(11) R. G. HARRISON, « Journ. Exptl. Zool. », CVI, 27 (1947).

Va precisato che tutti gli Autori finora menzionati si sono limitati a verificare, soltanto in alcuni stadî del periodo embrionale, la consistenza numerica delle mitosi ed a stabilire diretti confronti delle eventuali variazioni senza poter precisare quanto dell'attività proliferativa fosse dovuto ad effettive variazioni di attività mitotica e quanto invece ad modificazioni di forma e di superficie del neuroepitelio (strato germinativo o ventricolare).

Poiché la mia ricerca si proponeva intenti comparativi, è stato ritenuto indispensabile procedere a precisare i valori di *densità* mitotica onde poter valutare l'effettiva variazione dell'attività mitotica (sia tra le varie regioni del neurasse, sia tra le porzioni di una stessa regione, sia tra animali diversi) indipendentemente dalle modificazioni della superficie ventricolare. I valori riportati nella Tabella e nell'istogramma (fig. 1) rappresentano i valori medi di almeno tre individui per ogni stadio; gli stadî embrionali e larvali (classificati secondo Glücksohn ⁽¹²⁾ per il *Triturus cristatus*) sono stati scelti ad opportuni intervalli di tempo onde meglio valutare l'andamento generale ed i dettagli del ritmo mitotico.

Ogni animale, catturato in natura, è stato fissato in liquido di Sanfelice, incluso in celloidina-paraffina e sezionato dalla norma trasversale in serie a 7 μ di spessore; i vetrini sparaffinati sono stati trattati con il reattivo di Schiff, previa idrolisi, secondo il metodo di Feulgen standardizzato da Stowell ⁽¹³⁾ o colorati con il Mallory-Azan. Il computo delle mitosi (prometafase-anafase) è stato compiuto su sezioni alterne a partire dal calamo fino al livello dell'apertura anale. Per gli stessi motivi accennati in analoghe ricerche sull'Anfibio anuro ⁽¹⁴⁾, stabilito che il volume delle cellule ventricolari non si modifica sensibilmente durante il periodo larvale ⁽¹¹⁾, si è preferito riferire i valori assoluti delle mitosi all'unità di superficie; a tale scopo sono stati disegnati alla camera lucida i contorni della cavità ventricolare delle sezioni su cui erano stati eseguite i computi mitotici, quindi con un curvimetro sono stati misurati e convertiti in valori decimali; l'area ventricolare è stata ottenuta moltiplicando lo sviluppo lineare della cavità ventricolare per lo spessore della sezione. Dividendo i valori assoluti delle mitosi per l'area ventricolare si è ricavato il valore della densità mitotica. Ove è stato possibile (nei primi stadî di sviluppo) si è tenuto separato conto dei valori della regione dorsale (piastra alare) e di quella ventrale (piastra alare) del midollo.

Le osservazioni microscopiche hanno anzitutto precisato che nell'Anfibio urodelo il canale endimale si restringe molto più presto che nell'anuro: infatti già dagli stadî 36-40, risalendo dalla regione caudale fino a metà di quella del tronco, la cavità endimale si è chiusa dorsalmente e di essa resta una esigua porzione della piastra basale modellata in uno stretto canale a sezione circolare; all'inizio del periodo larvale (stadî 45-48) solo un breve tratto immediatamente dietro al calamo (circa per 1 mm di lunghezza) con-

(12) GLÜCKSOHN, « Roux' Arch. Entw.-mech. Org. », CXXV, 341 (1932).

(13) R. E. STOWELL, « Stain Technol. », XX, 45 (1945).

(14) G. M. BAFFONI, « Boll. di Zool. », XXVI, 255 (1959).

serva un lume ampio ed allungato in senso dorso-ventrale, ma dallo stadio 50 in poi tutta la cavità endimale, dal calamo in poi, si presenta ridotta ad uno stretto canale a sezione circolare. La diminuzione dei valori dell'area ventricolare che si verifica al termine del periodo embrionale e che prosegue anche all'inizio del periodo larvale (fino allo stadio 50), nonostante l'allungamento dell'animale (ved. Tabella I) deve riferirsi al restringimento del canale endimale.

TABELLA I.

Stadio	Età in giorni	Lungh. in mm.	N. mitosi	Emiarea ventr. in dmm ²	Densità
36	9	8	267,7	27,8	9,63
40	12	10	289,5	23,5	12,35
42	15	10,5	216,0	21,9	9,84
45	19	14,5	133,3	20,5	6,47
47	25	15,5	99,5	19,5	5,12
50	47	16,5	123,3	19,1	6,46
52	55	18	272,7	25,1	10,86
55	60	20	379,0	30,0	12,60
58	75	22	438,0	32,3	13,56
60	90	26	271,2	35,3	7,68
62	110	30	341,5	62,3	5,48
63	140	36	275,0	65,3	4,21
—	170	40	101,0	67,2	1,50

Il fatto che mentre il lume del canale endimale si riduce, i valori di densità mitotica decrescono, ribadisce che la morfogenesi del canale endimale non è provocato dall'attività proliferativa della piastra alare, come aveva sostenuto Prénant⁽¹⁵⁾, bensì viene effettuata dal differenziamento cellulare ed in particolare dallo sviluppo dei fasci commessurali del midollo spinale.

Come conseguenza della precoce morfogenesi del canale endimale, diviene impossibile la distinzione tra mitosi della piastra alare e quelle della piastra basale; nei primi stadi di sviluppo esaminati, ove è possibile rintracciare il solco limitante per una certa lunghezza del midollo spinale e quindi valutare separatamente la densità mitotica delle due porzioni del tubo neu-

(15) A. PRÉNANT, «Intern. Monatschr. Anat. Physiol.», XI, 281 (1894).

rale, è risultato che la *densità* mitotica della piastra alare è sempre maggiore di quella della piastra basale (allo stadio 40 essa è pari rispettivamente a 15,4 ed a 10,5; allo stadio 42 è pari a 12,4 ed 8,4); questo fatto comprova la validità di alcune osservazioni desunte da precedenti Autori (9,11) in base al confronto dei computi mitotici della regione dorsale e ventrale del midollo spinale in embrioni di Urodeli in condizioni di sviluppo normale ed in condizioni sperimentali.

Complessivamente l'andamento delle densità mitotiche nel midollo spinale durante lo sviluppo è rappresentato da una curva (ved.: fig. 1) carat-

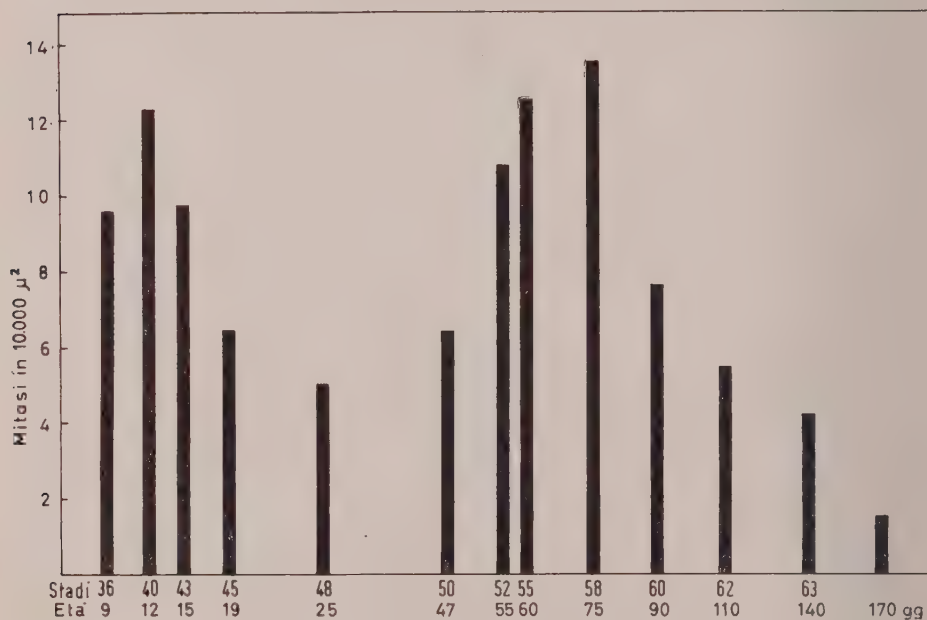


Fig. 1. - Andamento dell'attività proliferativa nel midollo spinale durante lo sviluppo di *Triturus cristatus carnifex*.

(Il tempo, sulle ascisse, è in scala logaritmica).

terizzata da un apice nel periodo embrionale e dall'altro nella prima metà del periodo larvale. Questa distribuzione è determinata da una rapida caduta dell'attività proliferativa al termine del periodo embrionale e dalla lenta ripresa nei primi venti giorni di vita larvale; va sottolineato che la caduta dell'attività mitotica coincide con l'esaurimento delle scorte vitelline e raggiunge il fondo quando inizia l'attività dell'apparato digerente; è noto che in corrispondenza dei cambiamenti di tipo di nutrizione si verificano « crisi metaboliche » (Cotronei ⁽¹⁶⁾), nelle quali si realizzano profondi rimaneggiamenti

(16) G. COTRONEI, «Mem. Soc. Ital. Sci. dei XL» (ser. 3^a), XXI, 1 (1919); «Arch. Zool. Ital.», X, 85 (1922); «Rend. Acc. Naz. Lincei» (ser. 6^a), XXIV, 411 (1938).

nel chimismo dell'organismo (ved.: Urbani⁽¹⁷⁾); pertanto la depressione dell'attività proliferativa al termine del periodo embrionale va messa in rapporto con una crisi metabolica. Va inoltre ricordato che negli Anfibî urodeli, a differenza degli Anuri, le modificazioni che si verificano durante la metamorfosi sono poco vistose poiché il regime alimentare non si modifica (larve ed adulti sono carnivori) e gli apparati della condizione acquatica si conservano anche nell'adulto; di conseguenza negli Anfibî urodeli la metamorfosi non provoca una vera e propria crisi metabolica. Proprio per effetto di ciò si spiega perché l'attività mitotica nel midollo spinale durante gli ultimi tre mesi di vita larvale di *Triturus*, vada progressivamente decrescendo, mentre negli Anuri presenta alcune accentuazioni e cadute (ved.: Baffoni e Pinacci⁽⁵⁾).

Va inoltre rilevato che i valori di densità mitotica dell'Anfibio urodelo nel midollo spinale si mantengono a livelli molto più bassi che in quello dell'Anuro: la bassa frequenza delle mitosi nello strato ventricolare del midollo, insieme alle oscillazioni diurne dell'attività mitotica constatate negli Urodeli⁽¹⁸⁾, possono essere ritenute le cause della maggior fluttuazione dei valori di densità riscontrata tra i varî individui allo stesso stadio di sviluppo ($> 10,8\%$); la bassa frequenza di densità mitotica dell'Urodelo non appare giustificata dalla maggior lunghezza del periodo larvale (che è compensata da un accrescimento corporeo molto maggiore), ma va piuttosto attribuita al maggior volume delle cellule ventricolari (minor numero di elementi nell'unità di superficie) ed al ridotto sviluppo dei centri spinali, particolarmente al livello dell'innervazione degli arti: in effetti negli Urodeli il differenziamento coinvolge solo alcuni neuroni dello strato mantellare, persistendo elementi indifferenziati i quali costituiscono un grigio periventricolare più o meno esteso, e le intumescenze del midollo spinale sono appena accennate. La lentezza di sviluppo dell'Urodelo, può invece chiarire perché in questi animali non si mette in evidenza quella depressione di attività mitotica che è stata verificata negli Anuri all'inizio dell'attività funzionale dei centri motorî diretti.

Concludendo: la densità mitotica nel midollo spinale durante lo sviluppo di un Anfibio urodelo si mantiene su valori relativamente modesti; una rarefazione di mitosi è stata verificata in corrispondenza del passaggio tra la condizione embrionale e larvale; nel primo mese di vita larvale l'attività proliferativa riprende ed infine decresce lentamente, senza però estinguersi, anche dopo la metamorfosi. Nell'Anfibio urodelo l'attività mitotica non presenta alcune oscillazioni messe in evidenza durante il periodo larvale e la metamorfosi dell'Anfibio anuro: ne consegue che tali oscillazioni sono dovute a specifiche esigenze di sviluppo, in rapporto con le differenti condizioni

(17) E. URBANI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. 8^a), XXIII, 86 (1957); « Rend. Ist. Lomb. Sci. Lett. », XCII, 69 (1957).

(18) Ved.: L. E. SCHEVING, J. J. CHIAKULAS & H. I. ABZUG, « Journ. Cell. Comp. Physiol. », LIV, 109 (1959).

ecologiche dell'adulto. Considerazioni in base alle osservazioni eseguite, indicherebbero che l'attività proliferativa dello strato ventricolare nell'Anfibio urodelo più che a processi del differenziamento organologico sarebbero piuttosto da mettersi in rapporto con i processi dell'accrescimento del neurasse.

Osservazioni che mi riservo di documentare in futuro, indicano che nell'Urodelo, come è stato visto nell'Anuro, il midollo spinale presenta una successione regolare di accentuazioni localizzate dell'attività mitotica lungo l'asse antero-posteriore: lungo il tratto da me considerato se ne contano una quindicina; mi riservo di tornare sull'interpretazione da attribuire a questi fatti.

PERSONALE ACCADEMICO

Poiché i Soci Anziani Giuseppe Levi e Crocco chiedono di essere dispensati dalla presidenza, questa viene assunta dal prof. Cassinis il quale, dopo i due predetti Colleghi, è il più anziano tra i Soci presenti.

Il Socio Anziano Cassinis comunica che il Collega Giorgio Dal Piaz, Decano dell'Accademia, e la sua figliola Maria, sono rimasti feriti in un incidente automobilistico ma che, fortunatamente, le loro condizioni non sono gravi e vanno sempre più migliorando.

Il prof. Cassinis propone che all'illustre Collega sia inviato, dalla Classe, un messaggio di fervido augurio e di affettuoso saluto, a seguito di quello già trasmesso dalla Presidenza dell'Accademia.

La proposta è approvata all'unanimità.

Il Socio Anziano Cassinis è poi lieto di comunicare la notizia, diffusa oggi dalla radio, della nomina dei Soci Marotta e Giacomello a membri dell'Accademia Pontificia delle Scienze e si rende interprete presso i predetti Colleghi delle vivissime felicitazioni della Classe tutta che si associa con un vibrante applauso.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Socio Anziano Cassinis porge il cordiale saluto suo e della Classe al prof. Václav Hlavatý, della Indiana University, e al dott. Hirobumi Mizuno, dell'Università di Tokyo, che assistono alla seduta.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Boaga presenta il suo volume dal titolo «Complementi di Matematica», destinato agli elettrotecnici e agli elettronici e redatto secondo i programmi della Facoltà d'Ingegneria dell'Università di Roma. L'opera ha inizio con l'illustrazione dei fondamenti del calcolo matriciale e tratta quindi: della risoluzione numerica delle equazioni algebriche, della teoria delle funzioni di variabile complessa, delle funzioni cilindriche, periodiche, sferiche, ortogonali, della trasformata di Laplace con applicazioni e, infine, della probabilità e statistica.

Il Socio Desio presenta tre lavori, estratti dal volume LXVI della Rivista Italiana di Paleontologia, ed eseguiti con il contributo del Comitato per la Geologia del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Il primo, del quale sono autori lo stesso Socio Desio, la prof. C. Rossi Ronchetti e il dott. C. Invernizzi, intitolato «Il Giurassico dei dintorni di Jefren in Tripolitania», ha una particolare importanza in quanto, fino ad oggi, mancavano studi sui terreni libici del

Giura; il secondo, ancora del Socio Desio, in collaborazione con la prof. C. Rossi Ronchetti, è dedicato allo studio del Giurassico medio di Garetel-Bellaa (Tripolitania) e sulla posizione stratigrafica della formazione di Tacbàl, mentre il terzo, anch'esso dovuto al Socio Desio, in collaborazione con la prof. C. Rossi Ronchetti e con il dott. Viganò, si occupa della stratigrafia del Trias in Tripolitania e nel Sud-Tunisino.

Il predetto Socio Desio presenta poi un suo fascicolo, estratto da « Le Vie del Mondo », dal titolo « L'oro nero nel sottosuolo della Libia » nel quale egli illustra le indagini geologico-petrolifere, svolte dall'Italia in Libia dal 1911 fino allo scoppio della seconda guerra mondiale, e i notevoli risultati ottenuti, ricordando anche l'estrazione del primo petrolio dal pozzo Mellaha n. 8 nelle vicinanze di Tripoli, nell'estate del 1937.

L'oratore conclude mettendo in evidenza il fatto che furono gli italiani, pur con i limitatissimi mezzi finanziari e il ridottissimo personale a disposizione, a porre per primi, con la conoscenza delle serie stratigrafiche e della struttura tettonica, le basi fondamentali necessarie per le ricerche petrolifere nel territorio libico.

Il Socio Desio presenta, infine, l'opera sua e del prof. F. Villa, dal titolo « Stratigrafia dei pozzi per acqua della Pianura Padana », I. Lombardia, osservando che tale volume è il primo di una serie di pubblicazioni sui pozzi della Pianura Padana, che completerà, per il periodo 1933-1959, la raccolta analoga, pubblicata dal compianto prof. Federico Sacco, arrestatasi al 1933.

Il Socio Desio desidera esprimere un vivo ringraziamento ai Comuni ed alle imprese di perforazione che hanno rispettivamente fornito notizie sui pozzi perforati e sulle stratigrafie e all'ANIDEL, che ha generosamente contribuito, non solo alle spese di raccolta dei dati, ma anche a quelle della presente pubblicazione.

Il Socio Anziano Cassinis ringrazia i Colleghi che hanno presentato le citate opere e comunica che è pervenuto all'Accademia un volume del Socio Piontelli dal titolo « Elementi di teoria della corrosione a umido dei materiali metallici ».

Informa poi la Classe che è uscito il fascicolo II (febbraio 1961) dei Rendiconti, listato a lutto per la morte del compianto Presidente Giordani.

Il Segretario Accademico presenta le pubblicazioni inviate in omaggio.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci: Cambi, Picone, Signorini, Tonzig, Aloisi, Margaria, Bonino, Zagar, Segre, Montalenti, Cotronei, Stefanelli, Caloi, Bianchi, G. B. Dal Piaz, Caglioti e Desio.

Viene letto l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

SEVERI F. — Le particelle del cronotopo di materia pura. Nota riassuntiva.

BAGGIO P. e MALARODA R. — Il traforo del Monte Bianco; prime osservazioni geologiche sul tratto dalla progressiva 1300 alla progressiva 2500 (parte italiana) (pres. dal Socio G. B. DAL PIAZ).

BASSOTTI L. — Approssimazione globale degli autovalori di una trasformazione lineare e compatta (pres. dal Socio M. PICONE).

FRODA A. — Sur l'angle complexe, orienté, de deux vecteurs d'un espace unitaire (pres. dal Socio B. SEGRE).

ZAIDMAN S. — Solutions presque-périodiques dans le problème de Cauchy pour l'équation non-homogène des ondes. Nota II (pres. dal Socio M. PICONE).

Il Socio Anziano Cassinis prende atto, con vivo compiacimento, che nella presente seduta sono state presentate ben 40 Note e ringrazia i Soci per la loro validissima collaborazione.

Il Socio Picone presenta una Memoria dal titolo « Criteri sufficienti per il minimo assoluto di un integrale pluridimensionale del primo ordine del vettore minimante ».

Il Socio Anziano Cassinis si rallegra con il Collega Picone per la sua intensa e fervida attività scientifica.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Sansone, anche a nome dei Colleghi Picone e Miranda, legge la relazione della Commissione per l'esame della Memoria del dott. Giorgio Adler dal titolo « Maggiorazione del gradiente delle funzioni armoniche mediante i loro valori al contorno ». La relazione, che conclude proponendo la stampa del suddetto lavoro nelle Memorie accademiche, è messa ai voti dal Socio Anziano Cassinis e approvata all'unanimità.

CONGRESSI

Il Socio Anziano Cassinis dà notizia dei seguenti congressi e manifestazioni scientifiche, ai quali l'Accademia è stata invitata:

1) Conferenza Internazionale sull'elettronica medica in concomitanza con la XIV Conferenza annuale sulle tecniche elettriche nella medicina e nella biologia (The Waldorf-Astoria, New York City — 16-21 luglio 1961);

2) IV Corso Internazionale per la misurazione delle basi geodetiche (Monaco di Baviera — 4-12 settembre 1961);

3) III Congresso Internazionale di Cibernetica, indetto dall'Associazione Internazionale di Cibernetica (Namur, Belgio — 11-15 settembre 1961);

4) IV Convegno Internazionale di Agrochimica sull'assorbimento nutrizionale dei vegetali (Pisa-Firenze, 9-14 aprile 1962);

5) Conferenza Internazionale sulla spettroscopia organizzata dalla Società per la spettroscopia applicata (Università del Maryland, 18-22 giugno 1962).

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 13 maggio 1961

- ARCIDIACONO Giuseppe e ARCIDIACONO Salvatore. — *Spazio tempo universo*. Roma, Edizioni del Fuoco, s. d. Pp. 242, in-8°, con tavv.
- ARCIDIACONO Salvatore. — Vedi: ARCIDIACONO Giuseppe e ARCIDIACONO Salvatore.
- BOAGA Giovanni. — *Complementi di Matematica (per gli elettrotecnici e gli elettronici)*. Roma, Edizioni dell'Ateneo, 1961. Pp. XIV-309, in-8°, con figg. (Università degli Studi di Roma, Facoltà di Ingegneria).
- BOSSOLASCO Mario. — *Résultats préliminaires des observations faites à Genova* (Istituto Geofisico, Università) *sur les effets géophysiques de l'éclipse totale de soleil du 15 février 1961*. Pp. 2 dattiloscritte (Symposium on Solar Seeing, Roma, 20-25 February 1961).
- BOSSOLASCO Mario e ELENA Antonio. — *The anomalous ionospheric absorption on winter days*. Estr. da « Geofisica Pura e Applicata », vol. XLVII, 1960, n. 3.
- *On the lunar semidiurnal variation of the D and F₂ layers*. Estr. da « Geofisica Pura e Applicata », vol. XLVI, 1960, [n.] 2.
- CHAUVE Pierre et FRANÇOIS Solange. — *Sur la tectonique de la région de Remoray (Doubs) (Feuille de Mouthe au 50.000^e)*. Estr. da « Bulletin de la Carte Géologique de la France », t. LVI, 1958, n. 255.
- *Sur les accidents et l'évolution tectonique de la région de Rondefontaine (Doubs)*. Estr. da « Bulletin de la Société d'Histoire Naturelle du Doubs », 1956, n. 60.
- DAUVILLIER Alexandre. — *La poussière cosmique. Les milieux interplanétaire, interstellaire et intergalactique*. Paris, Masson et C.^{ie} Éditeurs, 1961. Pp. 212, in-8°, con figg. e tavv. (Collection Evolution des Sciences, 19).
- DAVITTI Luigi e PINOLI Giuseppe. — *La protezione sociale della maternità nel mondo*. Roma, Istituto di Medicina Sociale, 1960. Pp. 338, in-8° (Collana di Studi sui Problemi Medico Sociali, XLVII).
- DESIO Ardito. — *L'oro nero nel sottosuolo della Libia*. Estr. da « Le Vie del Mondo », 1960, n. 6.
- *Pubblicazioni*. [Elenco]. (1920-1960). Milano, Università di Milano, Istituto di Geologia, 1960. Pp. 16, in-8°.
- DESIO Ardito e ROSSI RONCHETTI Carla. — *Sul Giurassico medio di Garetel - Bellàa (Tripolitania) e sulla posizione stratigrafica della formazione di Tacbal*. Estr. da « Rivista Italiana di Paleontologia e Stratigrafia », vol. LXVI, 1960, n. 2.
- e VILLA Floriano. — *Stratigrafie dei pozzi per acqua della pianura Padana. 1: Lombardia*. Milano, Università di Milano, Istituto di Geologia, 1960. Pp. 370, in-8°. con 1 carta.
- DESIO Ardito, ROSSI RONCHETTI Carla e INVERNIZZI Gilberto. — *Il Giurassico dei dintorni di Jefren in Tripolitania*. Estr. da « Rivista Italiana di Paleontologia e Stratigrafia », vol. XVI, 1960, n. 1.
- ROSSI RONCHETTI Carla e VIGANÓ P. L. — *Sulla stratigrafia del Trias in Tripolitania e nel Sud-Tunisino*. Estr. da « Rivista Italiana di Paleontologia e Stratigrafia », vol. LXVI, 1960, n. 3.
- DICKERMAN Philip J. — Vedi: *Optical spectrometric measurements of high temperatures*.
- ELENA Antonio. — Vedi: BOSSOLASCO Mario e ELENA Antonio.
- ERMOLENKO N. F. — *Mikroelementy i koloidy počv*. Minsk, Izdatel'stvo Akademii Nauk BSSR, 1960. Pp. 290, in-8°, con figg.
- FRANÇOIS Solange et GUILLAUME André. — *Étude stratigraphique et tectonique de la région de Foncine (Jura) (Feuilles de Mouthe et de Champagnole au 50.000^e)*. Estr. da « Bulletin de la Carte Géologique de la France », t. LVI, 1958, n. 257.
- FRANÇOIS Solange et SIGAL Jacques. — *Les foraminifères du Grétac inférieur vocontien*. (Note préliminaire). Estr. da « Comptes-Rendu Sommaire des Séances de la Société Géologique de France », 1958, n. 6.

- FRANÇOIS Solange, LEHMANN Jean-Paul et MAYNC Wolf. — *Sur un niveau à Pseudocyclammines dans le Sequanien du Jura français*. Estr. da «Compte-Rendu Sommaire des Séances de la Société Géologique de France», 1958, n. 12.
- FRANÇOIS Solange. — Vedi: CHAUVE Pierre et FRANÇOIS Solange.
- GUILLAUME André. — *Découverte de copeaux de flysch charrié sur la partie nord-occidentale du massif du Marguareis (Alpes maritimes franco-italiennes)*. Estr. da «Comptes-Rendus des Séances de l'Académie des Sciences», t. CCLI, 1960.
- *Données nouvelles sur la stratigraphie du Crétacé de la région de Lains (Jura)*. Estr. da «Bulletin de la Société Géologique de France», s. 7^a, t. I, 1959.
- *Géologie de la dorsale comprise entre la Vermenagna et le Val Grande et du massif Bric dell'Omo-Monte Safo (Province de Cuneo, Italie)*. Estr. da «Comptes-Rendus des Séances de l'Académie des Sciences», t. CCL, 1960.
- *Présence du Turonien dans la région du lac de Narlay (Jura)*. Estr. da «Comptes-Rendus des Séances de l'Académie des Sciences», t. CCL, 1960.
- *Rapports des massifs du Monte-Vecchio, du Monte Besimada et du Monte Marguareis, dans le secteur de Limone Piemonte (Alpes Maritimes franco-italiennes)*. Estr. da «Comptes-Rendus des Séances de l'Académie des Sciences», t. CCLI, 1960.
- *Sur le niveau supérieur à «Exogyra virgula» sur la région de Champagnole-Morez (Jura)*. Estr. da «Compte-Rendu Sommaire des Séances de la Société Géologique de France», 1959, n. 4.
- GUILLAUME André. — Vedi: FRANÇOIS Solange et GUILLAUME André.
- INVERNIZZI Gilberto. — Vedi: DESIO Ardito, ROSSI RONCHETTI Carla e INVERNIZZI Gilberto.
- KLAASSEN L. M. — Vedi: TINBERGEN Jan.
- KOYCK L. M. — Vedi: TINBERGEN Jan.
- LEHMANN Jean-Paul. — Vedi: FRANÇOIS Solange, LEHMANN Jean-Paul et MAYNC Wolf.
- MARAFIOTI RENZI Elda. — *Sul concetto di «visita» in assicurazione malattie*. Roma, Istituto di Medicina Sociale, 1961. Pp. 31, in-8° (Argomenti di Medicina Sociale, 16).
- MAYNC Wolf. — Vedi: FRANÇOIS Solange.
- LEHMANN Jean-Paul et MAYNC Wolf. — *Optical spectrometric measurements of high temperatures*. Edited by Philip J. Dickerman. Chicago, The University of Chicago Press, 1961. Pp. VIII-268, in-8°, con figg. e tavv.
- PANNARIA Francesco. — *Particelle del principio di scambio nel cronotopo*. Estr. da «Bollettino del Consiglio Nazionale degli Ingegneri», a. X, 1961, n. 2.
- PINOLI Giuseppe. — Vedi: DAVITTI Luigi e PINOLI Giuseppe.
- PIONTELLI Roberto. — *Elementi di teoria della corrosione a umido dei materiali metallici*. Milano, Longanesi e C., 1961. Pp. XXIV-452, in-8°, con figg. (Monografie dell'Istituto di Chimica-Fisica Elettrochimica e Metallurgia del Politecnico di Milano, vol. I).
- ROGLIANO Giuseppe. — *Materie prime utili per lo sviluppo della Calabria*. Cosenza, Tipografia-Linotypia Eredi Serafino, 1961. Pp. 16, in-8° (Quaderni per il Piano di Sviluppo Regionale della Calabria, n. I).
- ROSSI RONCHETTI Carla. — Vedi: DESIO Ardito e ROSSI RONCHETTI Carla.
- Vedi: DESIO Ardito, ROSSI RONCHETTI Carla e INVERNIZZI Gilberto.
- Vedi: DESIO Ardito, ROSSI RONCHETTI Carla e VIGANÓ P. L.
- SIGAL Jacques. — Vedi: FRANÇOIS Solange et SIGAL Jacques.
- SYMPOSIUM ON WEICHTSAVING OF BRIDGES AND STRUCTURES. — *Proceedings*. Compiled by Japan Society of Civil Engineers and Architectural Institute of Japan, Tokyo, Japan Society for the Promotion of Science, 1960. Pp. 6 preliminari n.n. — 114, in-8°, con figg. e tavv.
- TATAFIORE Enrico. — *La ginnastica auxologica dell'età prescolare (Con appendice di alimentazione auxologica del primo biennio)*. Roma, Istituto di Medicina Sociale, 1961. Pp. 41, in-8° (Manuali di Divulgazione e Guide Pratiche, 5).
- TINBERGEN Jan. — *Selected Papers*. Edited by L. H. Klaassen, L. M. Keyck and H. J. Wittoveen. Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1959. Pp. XII-318, in-8°, con figg.
- VIGANÓ P. L. — Vedi: DESIO Ardito, ROSSI RONCHETTI Carla e VIGANÓ P. L.
- VILLA Floriano. — Vedi: DESIO Ardito e VILLA Floriano.
- WITTEVEEN H. J. — Vedi: TINBERGEN Jan.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 13 giugno 1961

Presiede il Socio anziano GINO CASSINIS

NOTE DI SOCI

Analisi matematica. — *Sulla condizione di Weierstrass per un'estremante di un integrale.* Nota (*) del Socio MAURO PICONE.

Designando n e r due numeri naturali porrò

$$\mu = \binom{r+n-1}{r} - 1, \quad \nu = \binom{r+n-1}{r-1},$$

e per una funzione reale z , delle r variabili reali x_1, x_2, \dots, x_r , di classe n nel dominio regolare D dello spazio euclideo $S_{(r)}$, a r dimensioni, luogo del punto $x(x_1, x_2, \dots, x_r)$, indicherò, se $n > 1$, con

$$z_1, z_2, \dots, z_\mu,$$

le sue derivate parziali d'ordine non superiore a $n-1$, disposte in un certo ordine e, in ogni caso, con

$$z_{\mu+1}, z_{\mu+2}, \dots, z_{\mu+\nu},$$

quelle d'ordine n , pur esse disposte in un certo ordine.

Sia $\overset{\circ}{z}(x)$ una particolare funzione reale del punto x , di classe n nel dominio D , della quale indicherò, come sopra, con

$$\overset{\circ}{z}_1, \overset{\circ}{z}_2, \dots, \overset{\circ}{z}_\mu, \overset{\circ}{z}_{\mu+1}, \overset{\circ}{z}_{\mu+2}, \dots, \overset{\circ}{z}_{\mu+\nu},$$

(*) Presentata nella seduta del 13 giugno 1961.

le derivate parziali fino a quelle incluse d'ordine n , $\rho'(x)$ e $\rho''(x)$ siano due funzioni definite nel dominio D , per le quali si abbia

$$\rho'(x) \geq 0, \rho''(x) \geq 0, \quad \text{per } x \in D,$$

$$\rho'(x) + \rho''(x) > 0, \quad \text{per } x \text{ interno a } D,$$

potendo dirsi un dominio l'insieme T dello spazio euclideo $S_{(r+1)}$ a $r+1$ dimensioni, luogo punti per i quali è

$$x \in D,$$

$$\overset{\circ}{z}(x) - \rho'(x) \leq z \leq \overset{\circ}{z}(x) + \rho''(x).$$

Detta $\mathfrak{F}D$ la frontiera di D , indicherò con E l'insieme costituito da tutte le funzioni reali $z(x)$, di classe n nel dominio D , verificanti le condizioni:

$$\text{il punto } [x, z(x)] \in T, \quad \text{per } x \in D,$$

$$z(x) \equiv \overset{\circ}{z}(x) \quad , \quad z_i(x) \equiv \overset{\circ}{z}_i(x), \quad \text{per } x \in \mathfrak{F}D, \quad (i = 1, 2, \dots, \mu).$$

Sia

$$f(x, z, z_1, z_2, \dots, z_\mu, z_{\mu+1}, z_{\mu+2}, \dots, z_{\mu+\nu})$$

una funzione reale del punto $(x, z, z_1, z_2, \dots, z_\mu, z_{\mu+1}, z_{\mu+2}, \dots, z_{\mu+\nu})$, continua, con le derivate parziali

$$f_{z_{\mu+1}}, f_{z_{\mu+2}}, \dots, f_{z_{\mu+\nu}},$$

per (x, z) in T e per quali si vogliano valori delle $z_1, z_2, \dots, z_{\mu+\nu}$ e introduciamo la funzione di Weierstrass, relativa alla f , d'ordine n ,

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_f(x, z, z_1, z_2, \dots, z_\mu, z_{\mu+1}, z_{\mu+2}, \dots, z_{\mu+\nu}, z'_{\mu+1}, z'_{\mu+2}, \dots, z'_{\mu+\nu}) \equiv \\ f(x, z, z_1, z_2, \dots, z_\mu, z'_{\mu+1}, z'_{\mu+2}, \dots, z'_{\mu+\nu}) \\ - f(x, z, z_1, z_2, \dots, z_\mu, z_{\mu+1}, z_{\mu+2}, \dots, z_{\mu+\nu}) \\ - \sum_{h=1}^{\nu} f_{z_{\mu+h}}(x, z, z_1, z_2, \dots, z_\mu, z_{\mu+1}, z_{\mu+2}, \dots, z_{\mu+\nu}) (z'_{\mu+h} - z_{\mu+h}). \end{aligned}$$

Dirò che la ipersuperficie $z = \overset{\circ}{z}(x)$ verifica, rispetto alla funzione f , la condizione di Weierstrass d'ordine n , positivamente, se si ha sempre

$$\mathfrak{G}_f[x, \overset{\circ}{z}(x), \overset{\circ}{z}_1(x), \overset{\circ}{z}_2(x), \dots, \overset{\circ}{z}_\mu(x), z_{\mu+1}, z'_{\mu+2}, \dots, z_{\mu+\nu}] \geq 0,$$

negativamente, se si ha sempre

$$\mathfrak{G}_f[x, \overset{\circ}{z}(x), \overset{\circ}{z}_1(x), \overset{\circ}{z}_2(x), \dots, \overset{\circ}{z}_\mu(x), z_{\mu+1}, z_{\mu+2}, \dots, z_{\mu+\nu}] \leq 0,$$

per x in D e per quali si vogliano valori delle $z_{\mu+1}, z_{\mu+2}, \dots, z_{\mu+\nu}$.

Com'è ben noto, se

$$(n-1)(r-1) = 0,$$

il soddisfacimento positivamente (negativamente), da parte della superficie $z = \overset{\circ}{z}(x)$, della condizione di Weierstrass, rispetto alle funzioni f , d'ordine n

è necessario affinché la funzione $\hat{z}(x)$ dia all'integrale

$$I(\hat{z}) \equiv \int_D f(x, \hat{z}, z_1, z_2, \dots, z_\mu, z_{\mu+1}, z_{\mu+2}, \dots, z_{\mu+v}) dx$$

il minimo (il massimo) valore in $E^{(1)}$, ma non mi consta che sia stato mai osservato che:

Questa condizione non è più necessaria se

$$(1) \quad (n-1)(r-1) > 0.$$

Ora ciò è immediato. Sia, invero, $I(\hat{z})$ costante in E , allora ogni funzione $z(x)$ di E , rende, simultaneamente, minimo e massimo $I(\hat{z})$ in E e se la detta condizione di Weierstrass fosse necessaria, dovendo, per ogni funzione $z(x)$ di E , la ipersuperficie $z = z(x)$ verificare, rispetto alle f , la condizione di Weierstrass, e positivamente e negativamente, dovrebbe risultare $E_f \equiv 0$; per (x, z) in T e per quali si vogliano valori di $z_1, z_2, \dots, z_\mu, z_{\mu+1}, \dots, z_{\mu+2}, z_{\mu+v}, z'_{\mu+1}, z'_{\mu+2}, \dots, z'_{\mu+v}$; dovrebbe cioè la f essere una funzione lineare delle $z_{\mu+1}, z_{\mu+2}, \dots, z_{\mu+v}$. Se dunque, verificandosi la (1), addurremo un esempio di una funzione, *non lineare* nelle $z_{\mu+1}, z_{\mu+2}, \dots, z_{\mu+v}$, per la quale $I(\hat{z})$ è costante in E , avremo dimostrato la *non necessità*, in quel caso, della condizione di Weierstrass.

Sia, ad esempio, D un dominio regolare del piano (x, y) e l'insieme E , quello delle funzioni $z(x, y)$, di classe due in D , verificanti le condizioni:

$$\left. \begin{aligned} z(x, y) &\equiv \hat{z}(x, y) \\ \text{grad } z(x, y) &\equiv \text{grad } \hat{z}(x, y) \end{aligned} \right\} \quad \text{su } \mathfrak{F}D,$$

posto

$$f \equiv z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2,$$

l'integrale

$$\int_D (z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2) dx dy,$$

è costante in $E^{(2)}$ e la f non è lineare nelle derivate d'ordine massimo dalle quali dipende. Più in generale ⁽³⁾, è costante in E l'integrale

$$\int_D \left[\varphi \cdot (z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2) + \frac{1}{2} \varphi_{yy} z_x^2 + \frac{1}{2} \varphi_{xx} z_y^2 - \varphi_{xy} z_x z_y \right] dx dy,$$

designando $\varphi(x, y)$ una fissata funzione arbitraria di classe due in D .

(1) Nuove e semplici dimostrazioni di tale necessità, in ipotesi più larghe delle consuete, trovansi, per $r=1$ e n arbitrario, nella mia Memoria: *Sulle condizioni necessarie per un estremo nel calcolo delle variazioni* [«Memorie dell'Acc. Naz. dei Lincei» (Classe, di Scienze fisiche, matematiche e naturali, vol. IV della serie VII (1954)] e, per $r=2$ e $n=1$, in una Nota di W. GAUTSCHI, *Una estensione agli integrali doppi di una condizione di Picone, necessaria per un estremo* [in questi «Rendiconti», seduta del 14 gennaio 1956].

(2) S. BERNSTEIN, «Math. Annalen», Band 69, seite 97; PICONE e SIGNORINI, questi «Rendiconti» seduta del 13 maggio 1961.

(3) Cfr. PICONE, Rendiconti delle sedute della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali dell'Accademia delle Scienze di Torino, seduta del 3 maggio 1961.

Biologia. — *Organizzazioni isotipiche nelle riaggregazioni in vitro di abbozzi disgregati di retina di embrioni di pollo* ^(*). Nota di ALBERTO STEFANELLI, ANNA MARIA ZACCHEI e VITTORIA CECCHERINI, presentata ^(**) dal Corresp. A. STEFANELLI.

Con recenti ricerche ^(*) abbiamo descritte le varie modalità di aggregazione di cellule disgregate con tripsinizzazione di abbozzi di retine di embrioni di pollo sospese in goccia pendente, *in vitro*.

Abbiamo detto come le diverse forme di organizzazione morfologica ottenute *in vitro* siano assai inferiori a quelle ottenute nel nostro Istituto, già nel 1942, allora diretto dal Maestro G. Cotronei, da Del Pianto ⁽²⁾ negli Anfibi, ma come il materiale discreto, in quelle esperienze, non fosse lasciato in balia di se stesso in una goccia di mezzo di coltura, bensì trapiantato in una cavità ricavata tra le cellule vitelline di un embrione ospite. Ma se il grado di organizzazione in coltura *in vitro* è inferiore, la tecnica si dimostra più idonea per uno studio causale del fenomeno della aggregazione isotipica, sia per la maggiore facilità di interpretazione delle più semplici organizzazioni e sia soprattutto per la limitazione e la identificazione di fattori che possono entrare in gioco.

Con la tecnica da noi usata (rimandiamo al lavoro citato) si sono ottenuti quattro tipi fondamentali di organizzazione nell'ambito dell'aggregato:

1° Gruppi o noduli pieni di cellule senza un particolare orientamento cellulare interno (indicati con il n. 2 nelle figure delle tavole). È una organizzazione comune alle cellule melaniche del tappeto; è particolare anche la loro localizzazione a mezza distanza tra il centro e la superficie dell'aggregato (Tavola I, fig. 2), come se a questo livello questi elementi trovassero le migliori condizioni trofiche. Gruppi massicci sono formati anche dalle cellule nervose retiniche (n. 6); non sono tuttavia identificabili quelle del ganglio retinico da quelle del ganglio cerebrale.

2° Aggruppamenti orientati degli elementi retinici attorno a «nidi» di fibre plessiformi (n. 3). È evidente come le fibre nervose prodotte si raccolgano in ammassi o nidi, di varia forma, ma per lo più sferoidale, che corrispondono agli strati plessiformi delle retine normali.

(*) Ricerca eseguita nell'Istituto di Anatomia Comparata «G. B. Grassi» della Università di Roma e nel Centro di Neuroembriologia del C.N.R.

(**) Nella seduta del 13 giugno 1961.

(1) A. STEFANELLI, A. M. ZACCHEI e V. CECCHERINI, *Ricostituzioni retiniche in vitro dopo disgregazione dell'abbozzo oculare di pollo*, «Acta Emb. Morph. Exp.», 4, 47-55 (1961).

(2) E. DEL PIANTO, *Ricerche sulla ricostituzione dell'abbozzo dell'occhio di Rana escludente, dissociato nei suoi elementi*, «Arch. Zool. It.», 39, 229-256 (1942).

3° Aggruppamenti di cellule sensorie visive (non differenziabili in coni e bastoncelli) in strutture monostratificate, quasi sempre associate a masse melaniche; in genere hanno una forma a coppa con le cellule pigmentate all'interno. I più piccoli di questi aggruppamenti possono avere forma a rosetta (Tavola II, n. 5, fig. h).

4° Aggruppamenti di forma vescicolare, con cavità a volte pieni di essudato, per lo più monostratificati, che nelle sezioni appaiono « a rosetta » (n. 1).

Quali sono le « forze » che portano le cellule disgregate da abbozzi embrionali già determinati, e che quindi hanno già in potenza il loro destino differenziativo segnato, ad associarsi in gruppo isotipici così da creare nell'aggregato delle organizzazioni differenziate più o meno complesse?

Se per alcune organizzazioni si è potuto rispondere in modo adeguato (rimandiamo al lavoro di Stefanelli⁽³⁾ e a quello più recente di L. Weiss⁽⁴⁾), per altre la domanda è ancora senza una precisa risposta.

Tre sono le modalità più plausibili e probabilmente coesistenti: 1° movimenti orientati delle cellule simili per effetto di tropismi; 2° movimenti a caso e adesione specifica dovuta alla affinità delle superfici cellulari, strutturale e biochimica; 3° moltiplicazione cellulare e costituzione di cloni isotipici.

Con le ricerche degli ultimi anni è sempre più diminuita la evidenza di fenomeni citotropici, mentre sempre più è apparsa la importanza delle affinità delle superfici cellulari nei fenomeni di adesione specifica che portano alla aggregazione di cellule simili che si muovono a caso (Holtfreter '43-'48; Tyler '40-'47; P. Weiss '41-'47). Il problema non è tuttavia soddisfacentemente risolto sebbene molte siano oggi le ricerche che hanno dimostrato la fondamentale importanza del movimento cellulare nella morfogenesi giungendo ad una completa rivalutazione delle celebri osservazioni del Ruffini (1907) sul movimento sticotropico negli embrioni.

Dalle nostre osservazioni sui tipi elementari di organizzazione che si ottengono con la riaggregazione *in vitro* è risultato tuttavia come alcuni siano ad esclusivo carico della divisione cellulare. Tali sono le formazioni « a rosetta » già descritte da Moscona ('58)⁽⁵⁾ in retine disgregate e riaggregate, ma che erano già state viste anche in colture di espunti da Tansley ('33)⁽⁶⁾ e dalla Dorris ('38)⁽⁷⁾. Formazioni « a rosetta » sono state descritte

(3) A. STEFANELLI, *I movimenti cellulari nella morfogenesi*, « Boll. Zool. », 24, 427-449 (1957).

(4) L. WEISS, *The adhesion of cells*, « Int. Rev. Cytol. », 9, 184-224 (1960).

(5) A. MOSCONA, *Formation of lentoids by dissociated retinal cell of the chick embryo*, « Science », 125, 598-599 (1958).

(6) K. TANSLEY, *The formation of rosettes in the rat retina*, « Brit. Ophthalm. », 17, 321-337 (1933).

(7) F. DORRIS, *Differentiation of the chick eye in vitro*, « J. Exp. Zool. », 78, 385-415 (1938).

anche in neuroblastomi da Pomerat e Littlejohn ('56)⁽⁸⁾. Anche queste formazioni sono state sin ora interpretate come dovute alla aggregazione di cellule simili in rapporto alle loro affinità, come afferma anche Willmer nel suo recentissimo libro *Cytology and evolution* (1960)⁽⁹⁾.

Le nostre indagini sperimentali sulle retine disgregate di embrioni di pollo (di 5 giorni) ci hanno dimostrato in modo assai chiaro come vi siano diversi tipi di « rosette » e come alcune siano frutto della semplice moltiplicazione cellulare di un elemento capostipite e rappresentino quindi dei veri cloni cellulari, mentre per altre si devono riconoscere fenomeni di associazione isotipica.

Dopo poche ore dalla aggregazione comincia in seno agli aggregati la proliferazione cellulare; tuttavia il numero delle mitosi, negli aggregati fissati senza particolare trattamento, non è tale da permettere un preciso accertamento dei punti di maggiore attività. Per ottenere una « concentrazione » delle mitosi abbiamo trattato gli aggregati appena formati, o dopo tempi variabili, con Colcemid Ciba (desacetil methilcolchicina)⁽¹⁰⁾. È stata usata una soluzione 1/25.000.000 e il trattamento è durato da 6 a 16 ore.

Gli aggregati sono stati fissati a vari intervalli di tempo dall'inizio del trattamento; le sezioni sono state colorate con il metodo Mallory-Azan. Le Tavole I e II mostrano gli aspetti di questi aggregati.

Se il trattamento con colchicina viene fatto dopo 24 ore dalla aggregazione si osserva una distribuzione diffusa delle cariocinesi (Tavola I, fig. a, b).

È da notare a questo proposito che nella aggregazione si uniscono solo cellule vitali e non cellule morte o lesionate. Abbiamo potuto controllare questo trattando le cellule disgregate con acridin-orange e osservando poi il fenomeno della aggregazione con luce U. V. opportunamente filtrata. Come è noto le cellule sane manifestano una fluorescenza verde mentre quelle lese in modo reversibile appaiono gialle e quelle lese in modo irreversibile sono rosse (Stockinger '58⁽¹¹⁾; Wolf e Aronson '60⁽¹²⁾). Nelle nostre osservazioni si aggregano infatti solo le cellule verdi che sono quelle che appaiono anche dotate di un vivace movimento di *bubbling* (vedi il lavoro di Stefanelli e Zacchei '58⁽¹³⁾). Le cellule melaniche si aggregano già in gruppi isotipici pieni (n. 2).

(8) C. M. POMERAT e L. LITTLEJOHN, *Observation on tissue culture of the human eye* « Sth. Med. J. Birmingham », 49, 230 (1956).

(9) E. N. WILLMER, *Cytology and Evolution*. Academic Press, New York, London (1960).

(10) Ringraziamo la Ditta Ciba per averci fornito gentilmente la sostanza.

(11) L. STOCKINGER, *Fluoreszenzuntersuchungen am Gewebekulturen*, « Z. Natur.forsch. », 13 B, 407-409 (1958).

(12) M. K. WOLF e S. B. ARONSON, *Growth, fluorescence and metachromasy of cells cultured in the presence of acridin-orange*, « J. Histoch. Cytoch. », 9, 22-29 (1961).

(13) A. STEFANELLI e A. M. ZACCHEI, *Sulle modalità di aggregazione delle cellule di embrione di pollo disgregate con tripsina*, « Acta Embr. Morphol. Exper. », 2, 1-12 (1958).

Trattando con colchicina dopo 48 ore (fig. *c-h*) le mitosi appaiono invece concentrate in nidi e costituiscono strutture « a rosetta » monostratificate e limitanti una cavità (fig. *c-e* n. 1). Queste immagini dimostrano chiaramente come queste rosette non siano il risultato di una aggregazione cellulare, ma di una divisione cellulare. La presenza di rosette formate da pochissime cellule e di rosette più cospicue dimostrano come esse in effetti derivino per ritmica divisione di una cellula capostipide. Le rosette di cellule limitanti una cavità sono pertanto il risultato morfologico di un clone cellulare e rappresentano la più semplice organizzazione morfologica.

In questi preparati si osservano anche delle organizzazioni melaniche « a rosetta » (Tavole I e II, fig. *g-h*, n. 4) ma non abbiamo mai osservata una attività cariocinetica, se non del tutto casuale; esse hanno quindi una origine diversa dalle « rosette » ora descritte, si formano cioè non per moltiplicazione ma per aggregazione come negli aggregati pieni.

Abbiamo osservato in alcuni casi anche rosette di cellule visive (non differenziate in coni e bastoncelli). Anche in questi casi non è mai risultata una particolare attività mitotica. In genere queste cellule si aggregano in strutture monostratificate a contatto con cellule melaniche; ma se le cellule sono poche queste strutture, ripiegandosi su se stesse, formano delle disposizioni a « rosetta » (Tavola II, fig. *h*, n. 5).

Se si fa il trattamento con colchicina dopo 3-6 giorni (Tavole I e II, fig. *i-n*) si osserva come la forte attività mitotica rimanga limitata quasi esclusivamente alla periferia dell'aggregato (Tavola I, fig. *n*), mentre nella parte più profonda si formino, per attiva proliferazione delle fibre nervose, dei nidi sinaptici di natura simile agli strati plessiformi delle retine normali (n. 3). Attorno a questi nidi di varia foggia, ma per lo più sferoidali, si stratificano le cellule retiniche assumendo a volte aspetti « a rosetta » di natura però assai differente dalle rosette più su descritte. In questo ultimo caso l'orientamento delle cellule è meccanicamente condizionato dalla presenza del nido sinaptico che funge da « supporto ».

In conclusione possiamo affermare, dalle esperienze di trattamento degli aggregati di cellule disgregate di retine embrionali di pollo, che si hanno diverse condizioni di struttura a « rosetta »; mentre quelle formate da cellule melaniche del tappeto e quelle formate da cellule sensorie visive non manifestano particolari proprietà cariocinetiche e sono da interpretarsi formate per aggregazione specifica isotipica, quelle monostratificate di cellule dei gangli retinici e cerebrali risultano dovute a pura moltiplicazione cellulare e sono la espressione morfologica di un clone cellulare.

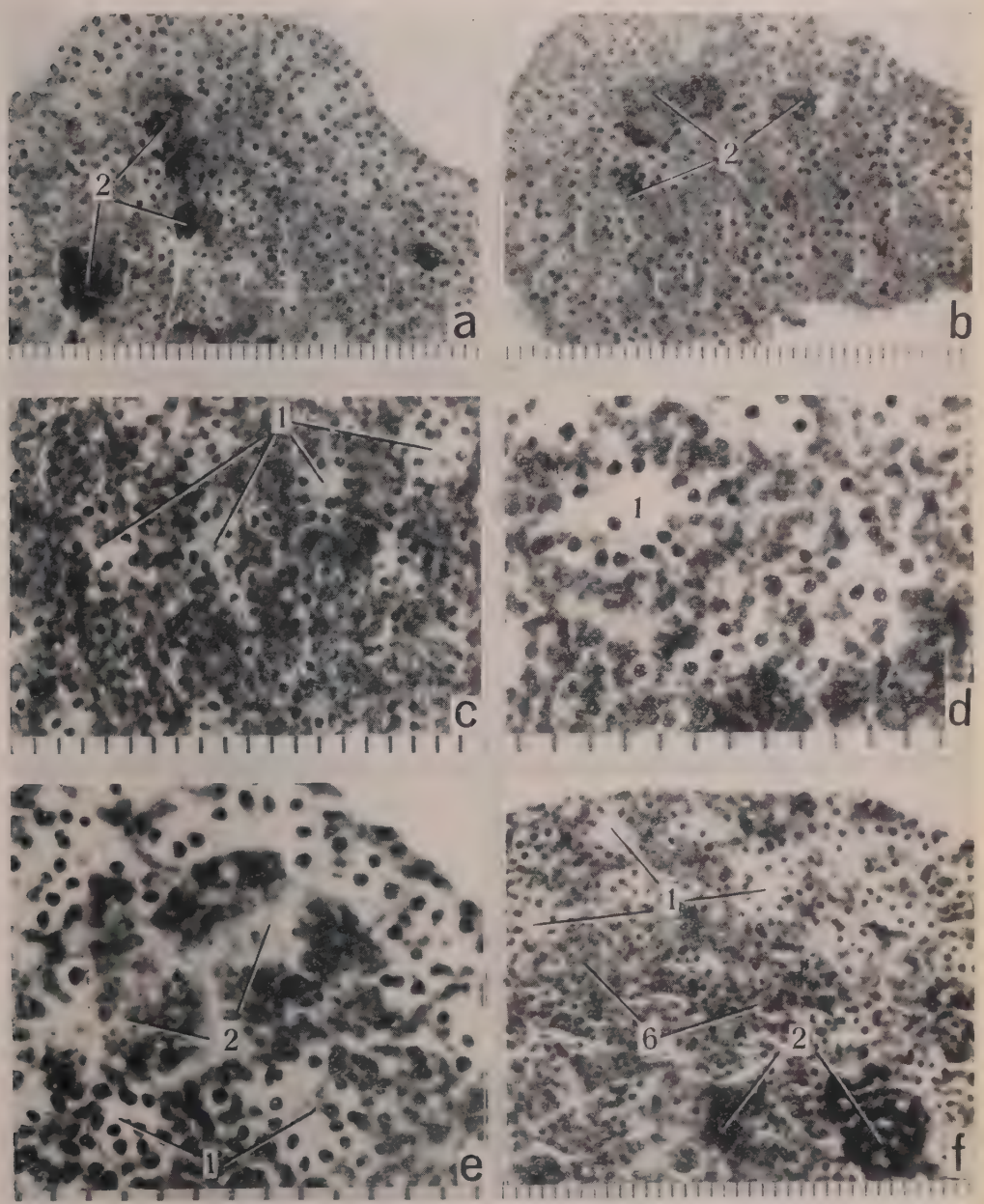
Le formazioni « a rosetta » attorno a nidi sinaptici sono invece determinate dalle condizioni meccaniche orientatrici del plesso di fibre nervose.

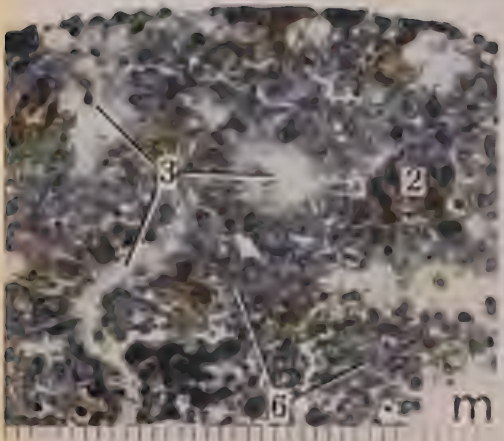
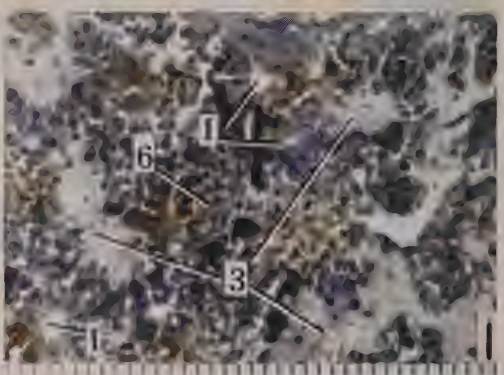
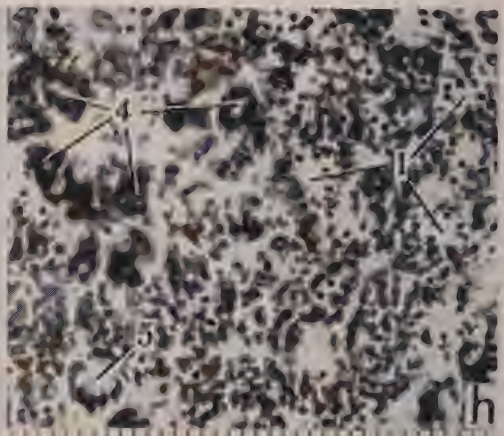
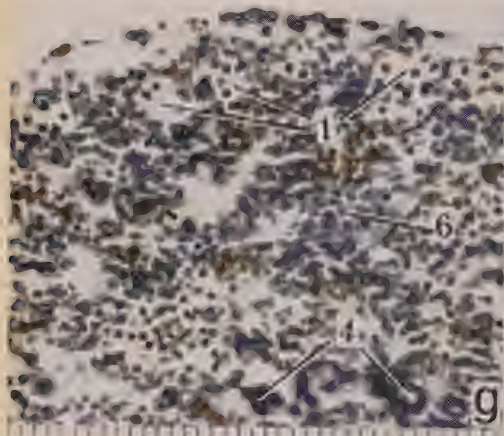
SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE I E II

a, b, aggregati di retina embrionale di pollo 5 giorni trattati con Colcemid (Ciba) dopo 24 ore dalla aggregazione; *c-h*, dopo 48 ore; *i-n*, dopo 3-6 giorni.

1, « rosette » formate per attività cariocinetica; 2, aggregati massicci di cellule del tappeto; 3, « rosette » attorno ai nidi sinaptici (plessiformi); 4, « rosette » di cellule melaniche del tappeto; 5, « rosette » di cellule visive; 6, ammassi di cellule del ganglio retinico.

Ogni divisione delle scale in calce alle fotografie = 10 μ .





NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Soluzioni presque-périodiques dans le problème de Cauchy pour l'équation non-homogène des ondes.* Nota II di S. ZAIDMAN, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

§ 4. Considérons maintenant $f(t)$ une fonction fortement continue et faiblement presque-périodique, de $t \in J$ à \mathcal{H} ; (et donc $\langle f(t), e \rangle$ est p.p. pour chaque $e \in \mathcal{H}$). Alors on a le

LEMME I. — *Si $f(t)$ est fortement continue et faiblement presque-périodique de J à \mathcal{H} , alors la solution minimale $u^*(t)$ de (4) est faiblement p.p.*

Démonstration. — Soit

$$u^*(t) = G(t) u^*(0) + \int_0^t G(t-s) f(s) ds$$

la solution minimale considérée. Nous démontrons que pour chaque suite $(h_n)_i^\infty$ de nombres réels, on trouve une suite partielle, $(h'_{n'})_i^\infty$, ainsi que la suite $\langle u^*(t + h'_n), e \rangle$ soit convergente uniformément pour $t \in J$, pour chaque $e \in \mathcal{H}$.

Tenant compte de la presque-périodicité faible de $f(t)$, on trouve, d'après le Théorème IV de Amerio [5], une suite $(h''_n)_i^\infty \subset (h_n)_i^\infty$, telle que la suite $(f(t + h''_n))_i^\infty$ soit convergente uniformément sur $t \in J$, dans \mathcal{H} faible, vers $g(t) \in \mathcal{H}$, qui est aussi faiblement presque-périodique. D'autre part, vu que $u^*(t)$ est bornée, et donc a trajectoire relativement faiblement compacte, il existe une suite $(h'_n) \subset (h''_n)$ telle que $\langle u^*(h'_n), e \rangle$ est convergente vers $\langle v^*, e \rangle$ pour chaque $e \in \mathcal{H}$, v^* étant un élément de \mathcal{H} . Aussi, $f(t + h'_n)$ converge uniformément sur $t \in J$ dans \mathcal{H} faible, vers $g(t)$.

Soit

$$v^*(t) = G(t) v^* + \int_0^t G(t-s) g(s) ds.$$

Alors $u^*(t + h'_n)$ tend vers $v^*(t)$ dans \mathcal{H} faible, uniformément sur chaque compact de J . En effet, comme l'on voit aisément, on a que

$$u^*(t + h'_n) = G(t) u^*(h'_n) + \int_0^t G(t-s) f(s + h'_n) ds.$$

Le premier terme de la partie droite converge uniformément sur chaque compact de J , dans \mathcal{H} faible, vers $G(t) v^*$, vu que

$$\langle G(t) [u^*(h'_n) - v^*], e \rangle = \langle u^*(h'_n) - v^*, G(-t) e \rangle.$$

(*) Nella seduta del 13 maggio 1961.

En effet, si t parcourt un compact de J , la fonction vectorielle continue $G(-t)$ parcourt un compact de \mathcal{H} , et d'autre part la convergence faible est uniforme par rapport à chaque compact de fonctionnelles.

Puis on a que

$$\left\langle \int_0^t G(t-s) [f(s+h'_n) - g(s)] ds, e \right\rangle = \int_0^t \langle e, G(t-s) [f(s+h'_n) - g(s)] \rangle ds \\ \int_0^t \langle G(s-t)e, f(s+h'_n) - g(s) \rangle ds$$

et on applique la même observation.

On a obtenu que $v^*(t)$ est limite faible des $u^*(t+h'_n)$; elle est donc bornée dans \mathcal{H} , quand $t \in J$, et $\|v^*(t)\| \leq k^*$, $t \in J$.

Mais on a même que

$$\sup_{t \in J} \|v^*(t)\| = k^*.$$

En effet, si on aurait que $\sup_{t \in J} \|v^*(t)\| < k^*$, on pourrait en déduire, avec un procédé analogue à celui utilisé déjà une « solution faible » $u_i^*(t)$, bornée, de (4), telle que $\sup_{t \in J} \|u_i^*(t)\| < k^*$, absurde.

Le même raisonnement montre que $v^*(t)$ est même une « solution faible » minimale de

$$(4') \quad u_{tt}(X, t) = Lu(X, t) + g(X, t).$$

Maintenant démontrons que $u^*(t+h'_n)$ converge vers $v^*(t)$ dans \mathcal{H} -faible, mais uniformément sur *tout* J .

Supposons par l'absurde que ce n'est pas vrai. Alors, il existe un $e_0 \in \mathcal{H}$, un $\rho > 0$ et trois suites $\{t_j\}$, $\{\alpha'_j\} \subset (h'_j)$, $\{\alpha''_j\} \subset (h''_j)$, ainsi que

$$|\langle u^*(t_j + \alpha'_j), e_0 \rangle - \langle u^*(t_j + \alpha''_j), e_0 \rangle| \geq \rho, \quad j = 1, 2, \dots$$

On peut tirer de $\{t_j + \alpha'_j\}$, $\{t_j + \alpha''_j\}$ deux suites partielles, avec la même notation, ainsi que les suites $(f(t + t_j + \alpha'_j))_i^\infty$, $(f(t + t_j + \alpha''_j))_i^\infty$ soient convergentes uniformément sur J dans \mathcal{H} -faible, vers $g_1(t)$ et $g_2(t)$ respectivement, et ainsi que les suites $(u^*(t + t_j + \alpha'_j))_i^\infty$, $(u^*(t + t_j + \alpha''_j))_i^\infty$ soient convergentes dans \mathcal{H} -faible, uniformément sur chaque compact de J , vers $v_1^*(t)$ et $v_2^*(t)$, « solutions faibles » minimales données par les formules

$$v_1^*(t) = G(t)v_1^*(0) + \int_0^t G(t-s)g_1(s)ds \\ v_2^*(t) = G(t)v_2^*(0) + \int_0^t G(t-s)g_2(s)ds.$$

Puis on démontre facilement, vu que $(\alpha'_j) \subset (h'_j)$, $(\alpha''_j) \subset (h''_j)$ et que $f(t+h'_j)$, $f(t+t_j+\alpha'_j)$, $f(t+t_j+\alpha''_j)$ sont uniformément faiblement convergentes,

l'égalité de $g_1(t)$ et $g_2(t)$, pour $t \in J$. Dans ce cas, vu l'unicité de la solution minimale, il résulte que $v_1^*(t) = v_2^*(t)$ et $v_1^*(0) = v_2^*(0)$. Mais, on a que

$$0 = |\langle v_1^*(0) - v_2^*(0), e \rangle| = \lim_{j \rightarrow \infty} |\langle u^*(t_j + \alpha_j'), e_0 \rangle - \langle u^*(t_j + \alpha_j''), e_0 \rangle| \geq \rho$$

absurde, et donc $u^*(t)$ est faiblement p.p. On a maintenant le

THÉORÈME 2 (de presque-périodicité). — *Si l'équation (4) avec $f(X, t)$ fortement presque-périodique de J à H , a une solution faible bornée, elle a aussi une solution faible presque-périodique.*

On démontre que la solution faible minimale $u^*(t)$ déjà construite et dont on connaît la presque-périodicité faible, est même fortement p.p. Pour cela, il est suffisant de montrer qu'elle a trajectoire relativement compacte. Puis, en répétant exactement les raisonnements du Lemme 1, mais avec convergence forte au lieu de la convergence faible, on obtient la presque périodicité forte de $u^*(t)$. (Ou on pourrait également utiliser le critérium général de Kopec-Amerio [6] selon lequel toute fonction faiblement presque-périodique à trajectoire relativement compacte, est aussi fortement presque-périodique).

Nous ne donnons pas ici la preuve de la compacité relative de la trajectoire de $u^*(t)$. Il suffit de renvoyer le lecteur au travail [2] de Amerio, où, à la page 344, est donnée une démonstration qui est complètement, mot à mot, adaptée à notre cas.

COROLLAIRE. — *Toute solution $u(t)$ de (4) ayant la trajectoire relativement compacte est presque-périodique (si $f(t)$ est p.p.).*

En effet, si $u^*(t)$ est la solution minimale presque-périodique, alors $u(t) - u^*(t)$ est une solution relativement compacte de l'équation homogène, c'est à dire on a que $u(t) - u^*(t) = G(t)[u(0) - u^*(0)]$.

La compacité relative et la propriété de groupe, donnent immédiatement la p.p. de $u(t) - u^*(t)$ et donc de $u(t)$ aussi.

Observation. — Les mêmes résultats démontrés avec les mêmes méthodes sont valables encore pour l'étude de la presque-périodicité dans le problème mixte au sens de Hadamard, sur les domaines *non-bornés* de \mathbb{R}^n .

§ 5. Nous démontrons l'extension du *Corollaire* au cas des solutions distributions vectorielles presque-périodiques, d'après un schéma déjà utilisé par nous dans [7]. Rappelons quelques définitions et résultats (voir Schwartz [8, 9]).

Soit \mathfrak{D} l'espace des fonction $\varphi(t)$, $t \in J$, indéfiniment dérivables et à support compact. Une suite $(\varphi_n)_i^\infty$ tend vers zéro dans \mathfrak{D} si les $(\varphi_n)_i^\infty$ ont un support compact commun et les dérivées $(\varphi_n^{(p)}(t))$ tendent vers zéro uniformément dans ce support. Soit puis \mathfrak{D}_L l'espace des fonctions $\varphi(t)$ indéfiniment déri-

vables, telles que $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi^{(p)}(t)| dt < \infty$, $p = 0, 1, 2, \dots$. Une suite $(\varphi_n)_i^\infty$

tend vers zéro dans \mathfrak{D}_L si les $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_n^{(p)}(t)| dt \rightarrow 0$ avec $n \rightarrow \infty$, pour chaque

$p = 0, 1, 2, \dots$.

Une distribution vectorielle $T \in \mathfrak{D}(t, E)$, à valeurs dans un espace de Banach E , est, par définition, toute application linéaire continue de \mathfrak{D} en E . Une distribution vectorielle $T \in \mathfrak{D}(t, E)$ est dite *bornée* si elle est même une application linéaire continue de \mathfrak{D}_{L^1} dans E . On écrit $T \in \mathfrak{D}_{L^\infty}(t, E)$. Puis,

un ensemble borné dans \mathfrak{D}_{L^1} est un ensemble A tel que
$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi^{(p)}(t)| dt \leq K_p,$$

$p = 0, 1, 2, \dots$ pour $\varphi \in A$. Une distribution vectorielle bornée est dite « à trajectoire relativement compacte » si elle applique chaque ensemble borné de \mathfrak{D}_{L^1} dans un ensemble relativement compact de E . On écrit $T \in \mathfrak{D}_{L_c^\infty}(t, E)$. La translatée $\mathcal{T}_h T$ d'une distribution vectorielle, définie par $\langle \mathcal{T}_h T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi(t-h) \rangle$, $\varphi \in \mathfrak{D}$, appartient à $\mathfrak{D}'(t, E)$ ou à $\mathfrak{D}_{L^\infty}(t, E)$ si T y appartient. Puis, une distribution $T \in \mathfrak{D}(t, E)$ est presque-périodique, si elle est bornée, et de plus, chaque suite $(h_n)_i$ contienne une suite partielle $(h'_n)_i$ telle que la suite $\langle \mathcal{T}_{h'_n} T, \varphi \rangle_i$ est convergente dans E fort, uniformément par rapport à φ parcourant tout ensemble borné de \mathfrak{D}_{L^1} . On écrit $T \in \mathfrak{D}_{L_{pp}^\infty}(t, E)$. Soit maintenant F un deuxième espace de Banach et $K \in \mathcal{L}(E, F)$. On définit, pour $T \in \mathfrak{D}(t, E)$, la distribution $KT \in \mathfrak{D}'(t, F)$ par la formule $\langle KT, \varphi \rangle = K \langle T, \varphi \rangle$. Maintenant introduisons des solutions distributions - vectorielles de l'équation des ondes (voir Lions ([10, 11])

$$u_{tt}(X, t) = -A u(X, t) + f(X, t).$$

Pour cela on introduit sur D_A un produit scalaire

$$[\varphi, \psi]_{D_A} = ((\varphi, \psi))_{H_A} + (A\varphi, A\psi)_H.$$

Vu que A est auto-adjoint, donc fermé dans H , et vu que l'injection de H_A dans H est continue, il résulte que D_A est un espace de Hilbert complet dans la métrique définie ici. On voit immédiatement que $A \in \mathcal{L}(D_A; H)$. Soit maintenant $U \in \mathfrak{D}_{L_{pp}^\infty}^\infty(t, H)$. Une solution distribution vectorielle de l'équation des ondes non-homogène est définie comme $T \in \mathfrak{D}'(t, D_A)$ vérifiant, au sens des distributions, l'équation

$$(6) \quad \frac{d^2 T}{dt^2} = -AT + U$$

où $AT \in \mathfrak{D}'(t, H)$. On a alors le suivant

THÉORÈME 3. - Si $T \in \mathfrak{D}'(t, D_A)$ vérifie (6), avec $U \in \mathfrak{D}_{L_{pp}^\infty}^\infty(t, H)$ et si $T \in \mathfrak{D}_{L_c^\infty}^\infty(t; H_A)$ et $dT/dt \in \mathfrak{D}_{L_c^\infty}^\infty(t, H)$ alors on a que $T \in \mathfrak{D}_{L_{pp}^\infty}^\infty(t; H_A)$ et $dT/dt \in \mathfrak{D}_{L_{pp}^\infty}^\infty(t; H)$.

Démonstration. - Soit $\alpha \in \mathfrak{D}$; on définit le produit de convolution de $T \in \mathfrak{D}'(t; E)$ par $\alpha \in \mathfrak{D}$, $T * \alpha$, comme une nouvelle distribution vectorielle

par la formule $\langle T * \alpha, \varphi \rangle = \langle T, \psi \rangle$, $\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(s) \varphi(s+t) ds$ pour chaque $\varphi \in \mathfrak{D}$. On voit bien que $T * \alpha \in \mathfrak{D}'(t, E)$ et on voit aussi que elle est une distribution définie par une fonction indéfiniment dérivable, $T_\alpha(s)$, donnée par la formle $T_\alpha(s) = \langle T_t, \alpha(s-t) \rangle$.

On a donc que

$$\langle T_* \alpha, \varphi \rangle = \langle T_\alpha(s), \varphi(s) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} T_\alpha(s) \varphi(s) ds.$$

Puis il est facile à voir que si $D = d/dt$, on a $D(T_*\alpha) = (DT)_*\alpha$ et que si $K \in \mathcal{L}(E, F)$, F — un deuxième espace de Banach, on a $(KT)_*\alpha = K(T_*\alpha)$. Enfin un résultat essentiel est le suivant:

Une condition nécessaire et suffisante pour que $T \in \mathfrak{D}'(t, E)$ soit dans $\mathfrak{D}'_{L^\infty}(t, E)$, $\mathfrak{D}'_{L^c_\infty}(t, E)$, $\mathfrak{D}'_{L^{pp}_\infty}(t, E)$ est que, pour chaque $\alpha \in \mathfrak{D}$, la fonction $T_\alpha(s)$ soit respectivement: bornée dans E , à trajectoire relativement compacte dans E , presque-périodique de J à E .

(La démonstration se trouve dans un travail de l'auteur en cours d'apparition [7]).

Maintenant la démonstration du théorème 3 est immédiate. Soit $T \in \mathfrak{D}'(t, D_A)$ telle que $T \in \mathfrak{D}'_{L^c_\infty}(t, H_A)$, et vérifiant (6). Alors, pour chaque $\alpha \in \mathfrak{D}$, $T_*\alpha$ est dans D_A , a trajectoire relativement compacte dans H_A et vérifie $D^2(T_*\alpha) = -A(T_*\alpha) + U_*\alpha$, $U_*\alpha$ étant p.p. de J à H .

D'après le Corollaire, il résulte que $T_*\alpha$ est p.p. de J à H_A , pour chaque $\alpha \in \mathfrak{D}$; donc $T \in \mathfrak{D}'_{L^{pp}_\infty}(t, H_A)$. De la même manière est démontré le résultat concernant la dérivée DT .

Il serait évidemment intéressant d'obtenir l'extension au cas des distributions du Théorème 2. Nous avons essayé un peu, mais sans succès.

LITTÉRATURE CITÉE (suite).

- [6] L. AMERIO, *Funzioni debolmente quasi-periodiche*, « Rend. Sem. Matem. Padova », vol. XXX (1960).
- [7] S. ZAIDMAN, *Solutions presque-périodiques des équations hyperboliques*, « Comptes Rendus Acad. Sciences, Paris », vol. 250 (1960), p. 2112 et manuscrit à paraître.
- [8] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, Paris, Herman, vol. II (1951).
- [9] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions à valeurs vectorielles*, I, II, « Ann. Inst. Fourier » (VII), p. 1-141 (1957).
- [10] J. L. LIONS, *Problèmes aux limites en théorie des distributions*, « Acta Math. », 94 (1955).
- [11] J. L. LIONS, *Problèmes aux limites de type mixte*, C.B.R.M., Bruxelles 1954.

Analisi matematica. — *Approssimazione globale degli autovalori di una trasformazione lineare e compatta.* Nota di LUCILLA BASSOTTI, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

In una precedente Nota ⁽¹⁾, ci siamo occupati del problema della convergenza di un metodo per il calcolo degli autovalori di una trasformazione T compatta, non necessariamente hermitiana. Abbiamo dimostrato che, per ogni autovalore λ della T , esiste una successione $\{\lambda^{(n)}\}$ ad esso convergente, essendo $\lambda^{(n)}$ un numero appartenente all'insieme $\Lambda^{(n)}$ dei valori forniti dall'approssimazione n -sima. Detto $u_{\lambda^{(n)}}^{(n)}$ il vettore dato dal metodo stesso in corrispondenza a $\lambda^{(n)}$, abbiamo altresì provato che la successione $\{u_{\lambda^{(n)}}^{(n)}\}$ è compatta e ogni suo elemento di compattezza è un'autosoluzione relativa a λ .

Ora, mentre ogni autovalore λ è approssimato da numeri di $\Lambda^{(n)}$, non è in generale vero che ogni numero di $\Lambda^{(n)}$ approssimi qualche autovalore della T , come è stato posto in luce dal prof. Fichera ⁽²⁾ in un problema analogo a quello da noi studiato.

Scopo della presente Nota, che prosegue la ricerca iniziata in una precedente già citata, è di fornire un « criterio di selezione » che permetta di estrarre dall'insieme $\Lambda^{(n)}$ un sottinsieme che converga verso l'insieme degli autovalori della T , la convergenza essendo intesa secondo una topologia introdotta negli insiemi chiusi del piano.

Sia S uno spazio di Hilbert complesso, completo e separabile e T un'arbitraria trasformazione lineare e compatta definita in S e avente codominio contenuto in S . In corrispondenza ad ogni numero complesso λ , consideriamo la trasformazione lineare hermitiana e compatta determinata dalla T :

$$(1) \quad \mathfrak{G}(u, \lambda) = \lambda T u + \bar{\lambda} T^* u - |\lambda|^2 T^* T u$$

e il funzionale definito in $S - \omega$ nel modo seguente:

$$(2) \quad F(u, \lambda) = 1 - \frac{(\mathfrak{G}(u, \lambda), u)}{\|u\|^2}.$$

Fissato in S un sistema completo di vettori linearmente indipendenti $\{u_k\}$, indichiamo con $\mu_n(\lambda)$ il minimo del funzionale $F(u, \lambda)$ sulla varietà $\mathfrak{M}_n - \omega$ ⁽³⁾, \mathfrak{M}_n designando la varietà involuppo lineare dei vettori u_1, \dots, u_n .

(*) Nella seduta del 13 maggio 1961.

(1) Cfr. L. BASSOTTI, *Costruzione di successioni approssimanti gli autovalori di una trasformazione lineare e compatta*, in corso di stampa sui « Rend. Acc. Naz. Lincei ».

(2) G. FICHERA, *Su un metodo di Picone per il calcolo degli autovalori e delle autosoluzioni*, « Ann. Matem. » (4), XL (1955).

(3) Per l'esistenza del minimo cfr. loc. cit. ⁽¹⁾, teorema I.

Sia $L_n^{(1/2)}$ l'insieme dei numeri complessi λ tali che $\mu_n(\lambda) \leq \frac{1}{2}$ e consideriamo l'insieme $L_n^{(1/2)} \cap \mathcal{C}_0$. Esso potrebbe essere vuoto: se ciò accade per ogni n , la trasformazione T non ha autovalori contenuti in $\overline{\mathcal{C}_0}$.

Se l'insieme $L_n^{(1/2)} \cap \mathcal{C}_0$ è definitivamente non vuoto ⁽⁴⁾, indichiamo con n_0 il primo indice a partire dal quale ciò si verifica. Definiamo i numeri $\varepsilon_n(\rho)$ nel modo seguente, per $n \geq n_0$:

$$(7) \quad \varepsilon_n(\rho) = \text{estr.} \sup_{\lambda \in L_n^{(1/2)} \cap \mathcal{C}_0} [\eta_n^2(\lambda) - (1 - \mu_n(\lambda))^2]$$

ove si è posto $\eta_n(\lambda) = \|\mathcal{S}(u_\lambda^{(n)}, \lambda)\|$, $u_\lambda^{(n)}$ indicando un vettore unitario minimante $F(u, \lambda)$ in $\mathcal{M}_n - \omega$. Dimostriamo il seguente lemma:

I. - I numeri $\varepsilon_n(\rho)$ formano una successione convergente a zero.

Supponiamo, per assurdo, che esista una successione crescente di indici n_k tali che $\varepsilon_{n_k}(\rho) > q > 0$. In corrispondenza ad ogni n_k si potrebbe allora determinare un punto $\gamma_{n_k} \in L_{n_k}^{(1/2)} \cap \mathcal{C}_0$ tale che in esso riesca:

$$\eta_{n_k}^2(\gamma_{n_k}) - [1 - \mu_{n_k}(\gamma_{n_k})]^2 > q.$$

La successione di vettori unitari $\{u_{\gamma_{n_k}}^{(n_k)}\}$ è compatta ⁽⁵⁾: è possibile quindi

estrarre da essa una sottosuccessione $\{u_{\gamma_{v_k}}^{(v_k)}\}$, in modo che esistano $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{\gamma_{v_k}}^{(v_k)} = u_\gamma$,

$\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_{v_k} = \gamma$. Si ha:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \eta_{v_k}(\gamma_{v_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathcal{S}(u_{\gamma_{v_k}}^{(v_k)}, \gamma_{v_k})\| = \|\mathcal{S}(u_\gamma, \gamma)\| = 1 - \mu(\gamma);$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{v_k}(\gamma_{v_k}) = \mu(\gamma).$$

Ne segue un assurdo.

Indichiamo con $L_n^*(\rho)$ l'insieme (eventualmente vuoto) dei punti di minimo relativo della funzione $\mu_n(\lambda)$ verificanti le condizioni:

$$(8) \quad |\lambda| \leq \rho, \quad \mu_n(\lambda) \leq \frac{1}{2}, \quad \mu_n(\lambda) \leq \sqrt{\varepsilon_n(\rho)}.$$

Sussiste il seguente teorema:

II. *L'insieme $L_n^*(\rho)$ è definitivamente non vuoto se tale è $\Lambda \cap \mathcal{C}_0$. Dato un $\varepsilon > 0$, l'insieme $\Lambda \cap \mathcal{C}_0$ è definitivamente contenuto nell'involucro di raggio ε di*

(4) Tale circostanza si verifica certamente se l'insieme $\Lambda \cap \mathcal{C}_0$ è non vuoto.

(5) La compattezza della successione $\{u_{\gamma_{n_k}}^{(n_k)}\}$ è conseguenza del teorema III della

Nota citata in (3). Si ha infatti, per la condizione $\mu_{n_k}(\gamma_{n_k}) \leq \frac{1}{2}$, l'uniforme convergenza della serie $\sum_s |\langle u_{\gamma_{n_k}}^{(n_k)}, u_s \rangle|^2$ rispetto a $\{u_{\gamma_{n_k}}^{(n_k)}\}$. Si osservi inoltre che, in base al teorema VII della

Nota citata, ogni elemento di compattezza della successione $\{u_{\gamma_{n_k}}^{(n_k)}\}$ è un vettore minimante $F(u, \lambda)$ in $S - \omega$.

$L_n^*(\rho)$ e viceversa, l'insieme $L_n^*(\rho)$ è definitivamente contenuto nell'involucro di raggio ε di $\Lambda \cap \bar{\mathcal{C}}_0$.

In corrispondenza ad un fissato numero reale τ , poniamo:

$$(9) \quad \Psi(u, \lambda) = \frac{(\mathfrak{G}^2(u, \lambda) + \tau \mathfrak{S}(u, \lambda), u)}{\|u\|^2}.$$

Per ogni λ , $(\mathfrak{G}^2(u, \lambda) + \tau \mathfrak{S}(u, \lambda), u)$ è una forma quadratica hermitiana e compatta definita in S . Per la trasformazione $\mathfrak{S}(u, \lambda)$ sussiste la seguente rappresentazione spettrale ⁽⁶⁾:

$$\mathfrak{S}(u, \lambda) = \sum_k \sigma_k(\lambda) (u, w_k) w_k.$$

Ne segue:

$$(10) \quad \Psi(u, \lambda) = \frac{\sum_k \sigma_k(\lambda) [\sigma_k(\lambda) + \tau] |(u, w_k)|^2}{\sum_k |(u, w_k)|^2}.$$

Sia $\Lambda \cap \mathcal{C}_0$ non vuoto: è possibile allora determinare un indice n_0 tale che, per $n \geq n_0$, $L_n^{(1/2)} \cap \mathcal{C}_0$ sia non vuoto. Per $n > n_0$, sia λ un elemento di $L_n^{(1/2)} \cap \mathcal{C}_0$. Essendo $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k(\lambda) [\sigma_k(\lambda) + \tau] = 0$, il funzionale è certamente dotato di minimo $\nu(\lambda)$ se $\tau \leq \mu(\lambda) - 1$ ⁽⁷⁾, e si ha:

$$\nu(\lambda) = \min \{ \sigma_k(\lambda) \cdot [\sigma_k(\lambda) + \tau] \}.$$

Supponiamo $\tau \leq \mu(\lambda) - 1$ e sia $\sigma(\lambda)$ un autovalore di $\mathfrak{S}(u, \lambda)$ tale che

$$\sigma^2(\lambda) + \tau \sigma(\lambda) = \nu(\lambda).$$

Si ha allora, per ogni $n \geq n_0$ e ogni $\lambda \in L_n^{(1/2)} \cap \mathcal{C}_0$:

$$(11) \quad \sigma^2(\lambda) + \tau \sigma(\lambda) - \Psi(u_n^{(n)}, \lambda) \leq 0.$$

Posto:

$$\tau = -2 + 2\mu_n(\lambda) + \frac{\eta_n^2(\lambda) - [1 - \mu_n(\lambda)]^2}{\sqrt{\varepsilon_n(\rho)}} - \sqrt{\varepsilon_n(\rho)} \quad (8),$$

il discriminante del trinomio in $\sigma(\lambda)$ a primo membro della (11) vale:

$$\left(\frac{\eta_n^2(\lambda) - [1 - \mu_n(\lambda)]^2}{\sqrt{\varepsilon_n(\rho)}} + \sqrt{\varepsilon_n(\rho)} \right)^2.$$

Ne segue che la (11) può scriversi:

$$\left(\sigma(\lambda) - 1 + \mu_n(\lambda) + \frac{\eta_n^2(\lambda) - [1 - \mu_n(\lambda)]^2}{\sqrt{\varepsilon_n(\rho)}} \right) (\sigma(\lambda) - 1 + \mu_n(\lambda) - \sqrt{\varepsilon_n(\rho)}) \leq 0.$$

(6) Cfr. G. FICHERA, *Lezioni sulle trasformazioni lineari*, vol. I, *Introduzione all'Analisi lineare*, Ist. Mat. Univ., Trieste 1954, p. 227.

(7) $1 - \mu(\lambda)$ è l'autovalore positivo massimo della $\mathfrak{S}(u, \lambda)$.

(8) Tale scelta di τ , essendo $\lambda \in L_n^{(1/2)} \cap \mathcal{C}_0$, verifica la condizione $\tau \leq \mu(\lambda) - 1$.

Si ha allora, per $n \geq n_0$ e $\lambda \in L_n^{(1/2)} \cap \mathcal{C}_0$:

$$1 - \mu_n(\lambda) - \sqrt{\varepsilon_n(\rho)} \leq \sigma(\lambda) \leq 1 - \mu_n(\lambda) + \sqrt{\varepsilon_n(\rho)},$$

oppure:

$$(12) \quad \mu_n(\lambda) - \sqrt{\varepsilon_n(\rho)} \leq 1 - \sigma(\lambda) \leq \mu_n(\lambda) + \sqrt{\varepsilon_n(\rho)}.$$

Fissato $\lambda^{(9)}$, esiste un indice $n(\lambda)$ maggiore di n_0 e tale che per $n > n(\lambda)$ l'unico autovalore $\sigma(\lambda)$ della $\mathcal{G}(\mu, \lambda)$ che soddisfa la (12) sia $1 - \mu(\lambda)$, come si verifica osservando che i termini estremi della disuguaglianza (12) per $n \rightarrow \infty$ tendono a $\mu(\lambda)$. Si ha allora per $n > n(\lambda)$:

$$(13) \quad \mu_n(\lambda) - \sqrt{\varepsilon_n(\rho)} \leq \mu(\lambda) \leq \mu_n(\lambda) + \sqrt{\varepsilon_n(\rho)}.$$

Sia λ^* un autovalore di T di modulo minore di ρ . Esiste un indice $n_0(\lambda^*)$ maggiore di $n(\lambda^*)$, tale che per $n > n_0(\lambda^*)$ riesca $\mu_n(\lambda^*) \leq \frac{1}{2}$. D'altra parte per la (13), si ha: $\mu_n(\lambda^*) \leq \sqrt{\varepsilon_n(\rho)}$ per $n > n(\lambda^*)$ e quindi per $n > n_0(\lambda^*)$.

Per ogni $n > n_0(\lambda^*)$ scegliamo in $\Lambda^{(n)} \cap \mathcal{C}_0$ un punto $\lambda^{(n)}$ tale che

$$\mu_n(\lambda^{(n)}) \leq \mu_n(\lambda^*) \quad , \quad \lim \lambda^{(n)} = \lambda^* \quad (10).$$

Resta così provato che, se $\Lambda \cap \mathcal{C}_0$ non è vuoto, tale è anche $L_n^*(\rho)$ per n sufficientemente grande, e che l'insieme $\Lambda \cap \mathcal{C}_0$ è definitivamente contenuto nell'involucro di raggio ε di $L_n^*(\rho)$.

Sia ora $\lambda^{(n)}$ una successione tale che $\lambda^{(n)} \in L_n^*(\rho)$ per $n \geq n_0$. Detto λ un elemento di compattezza di $\{\lambda^{(n)}\}$, consideriamo una sottosuccessione $\{\lambda^{(n_k)}\}$ convergente a λ . Riesce, per ipotesi:

$$\mu_{n_k}(\lambda^{(n_k)}) \leq \sqrt{\varepsilon_{n_k}(\rho)} \quad \text{per } n_k \geq n_0$$

e quindi al limite per $k \rightarrow \infty$, $\mu(\lambda) = 0$. Ciò mostra che: 1° se $\Lambda \cap \overline{\mathcal{C}_0}$ è vuoto, tale deve essere definitivamente $L_n^*(\rho)$; 2° se $\Lambda \cap \overline{\mathcal{C}_0}$ non è vuoto, l'insieme $L_n^*(\rho)$ è definitivamente contenuto nell'involucro di raggio ε di $\Lambda \cap \overline{\mathcal{C}_0}$.

Consideriamo, in corrispondenza ad ogni numero positivo ρ , il dominio D_ρ del piano λ definito dalla disuguaglianza $\lambda \leq \rho$. Possiamo pensare gli insiemi chiusi del piano come elementi di uno spazio di Hausdorff \mathcal{H} , dando una opportuna definizione di intorno di un insieme chiuso \mathcal{C} . Indichiamo pertanto con $I_\varepsilon(\mathcal{C})$ l'involucro aperto di raggio ε di un insieme chiuso \mathcal{C} e definiamo « intorno $\mathcal{I}_{\varepsilon, \rho}(\mathcal{C})$ di parametri ε e ρ di un elemento \mathcal{C} » l'insieme degli elementi Γ di \mathcal{H} che verificano le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} (\Gamma \cap D_\rho) &\subset I_\varepsilon(\Gamma \cap D_\rho) \\ (\mathcal{C} \cap D_\rho) &\subset I_\varepsilon(\Gamma \cap D_\rho). \end{aligned}$$

(9) λ va fissato in un insieme $L_n^{(1/2)} \cap \mathcal{C}_0$ con $\bar{n} \geq n_0$; esso appartiene allora ad ogni insieme $L_n^{(1/2)} \cap \mathcal{C}_0$ con $n \geq \bar{n}$.

(10) L'esistenza del punto $\lambda^{(n)}$ è dimostrata nel teorema VIII della Nota citata in (1).

Tale definizione di intorno verifica i seguenti assiomi di Hausdorff:

- 1° ogni intorno di \mathcal{C} contiene \mathcal{C} ;
- 2° se Γ appartiene all'intorno $\mathfrak{I}_{\varepsilon, \varrho}(\mathcal{C})$, allora esiste un intorno di Γ contenuto in $\mathfrak{I}_{\varepsilon, \varrho}(\mathcal{C})$;
- 3° l'intersezione di due intorni dello stesso elemento \mathcal{C} contiene un intorno di \mathcal{C} ;
- 4° se \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 sono elementi distinti, esistono un intorno di \mathcal{C}_1 e un intorno di \mathcal{C}_2 fra loro disgiunti.

Per la verifica dei primi tre si osservi che l'intorno $\mathfrak{I}_{\varepsilon', \varrho'}(\mathcal{C})$ è contenuto nell'intorno $\mathfrak{I}_{\varepsilon, \varrho}(\mathcal{C})$ se $\varepsilon' \leq \varepsilon$ e $\varrho' \geq \varrho$. Per il quarto, si può ragionare nel modo seguente. Siano \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 due insiemi chiusi e distinti del piano e sia x un punto di \mathcal{C}_1 non appartenente a \mathcal{C}_2 . Posto $\overline{x\mathcal{C}_2} = 3\delta$, gli intorni $\mathfrak{I}_{\delta, \varrho}(\mathcal{C}_1)$ e $\mathfrak{I}_{\delta, \varrho}(\mathcal{C}_2)$ sono disgiunti, qualsiasi sia $\varrho > |x|$.

Consideriamo ora due successioni di numeri reali positivi, la prima crescente e divergente:

$$\rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_h < \dots$$

e l'altra decrescente e infinitesima:

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_h > \dots$$

Fissato l'intero h , è possibile determinare un numero n_h tale che per $n > n_h$ l'insieme $L_{n_h}^*(\rho_h)$ sia contenuto nell'involucro di raggio ε_h di $\Lambda \cap D_{\varrho_h}$ e viceversa, l'insieme $\Lambda \cap D_{\varrho_h}$ sia contenuto nell'involucro di raggio ε_h di $L_{n_h}^*(\rho_h)$ (cfr. teorema II).

Sussiste il seguente teorema:

III. - *La successione di insiemi $L_{n_h}^*(\rho_h)$ converge all'insieme Λ nella topologia dello spazio \mathcal{N} .*

Sia $\mathfrak{I}_{\varepsilon, \varrho}$ un arbitrario intorno di Λ . Possiamo, senza restrizione, supporre ϱ diverso dal modulo di ogni autovalore. Esiste allora un opportuno indice h_0 tale che $\varepsilon_{h_0} < \varepsilon$, $\rho_{h_0} > \varrho$ ed inoltre per $h > h_0$ siano verificate le condizioni

$$(L_{n_h}^*(\rho_h) \cap D_{\varrho}) \subset I_{\varepsilon}(\Lambda \cap D_{\varrho})$$

$$(\Lambda \cap D_{\varrho}) \subset I_{\varepsilon}(L_{n_h}^*(\rho_h) \cap D_{\varrho}).$$

Ciò prova l'asserto.

Analisi matematica. — *Un criterio sufficiente per il minimo assoluto degli integrali doppi nel caso di contorno variabile.* Nota di ANDRÁS KÓSA, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

Nelle opere [1], [2] e [3] di M. Picone si trovano criteri sufficienti di tipo nuovo per il minimo assoluto degli integrali doppi. In questi articoli, i contorni delle superficie ammissibili sono fissi. Nella Nota presente, ci occuperemo del caso in cui i contorni delle superficie ammissibili non sono fissi, ma devono appartenere a una superficie prescritta. Il procedimento che sarà seguito è analogo a quello che abbiamo fatto, per il caso degli integrali semplici, in [4].

Prima di tutto introduciamo le notazioni seguenti: indichiamo con $L'(\bar{L}', L'_i, \dots)$ il contorno della superficie di equazione $z = z(x, y)$ ($z = \bar{z}(x, y)$, $z = z_i(x, y), \dots$), con $L(\bar{L}, L_i, \dots)$ la proiezione di $L'(\bar{L}', L'_i, \dots)$ sul piano (x, y) e con $D_L(D_{\bar{L}}, D_{L_i}, \dots)$ il dominio del piano (x, y) , limitato dalla curva $L(\bar{L}, L_i, \dots)$.

Siano date tre superficie, di equazioni

$$(1) \quad z = \bar{z}(x, y) \quad , \quad z = z_1(x, y) \quad , \quad z = z_2(x, y)$$

con i contorni

$$(2) \quad L' \quad , \quad L'_1 \quad , \quad L'_2.$$

Supponiamo:

$$(3) \quad L' = L'_1 + L'_2$$

e che le funzioni $z = z_i(x, y)$ siano continue nei domini D_{L_i} ($i = 1, 2$). Sia poi la funzione $z = \bar{z}(x, y)$ di classe uno nel dominio $D_{L_1} + D_{L_2} - D_{L_1} D_{L_2}$, e sia valida la seguente disuguaglianza:

$$(4) \quad z_1(x, y) \neq z_2(x, y) \quad \text{in} \quad D_{L_1} D_{L_2}.$$

Indichiamo con T il dominio dello spazio (x, y, z) , limitato dalle superficie $z = \bar{z}(x, y)$, $z = z_1(x, y)$, $z = z_2(x, y)$, e con G un insieme dato nel piano (p, q) . Inoltre la funzione

$$(5) \quad f(x, y, z, p, q)$$

sia continua nell'insieme $T \times G$.

Definiamo ora l'insieme $E(T \times G)$ delle funzioni $z(x, y)$ nel modo seguente: $z(x, y) \in E(T \times G)$, se:

1° il contorno L' della superficie $z = z(x, y)$ si trova sulla superficie $z = \bar{z}(x, y)$;

2° $z(x, y)$ è di classe uno in D_L ;

3° $(x, y, z(x, y), z_x(x, y), z_y(x, y)) \in T \times G$ per $(x, y) \in D_L$.

(*) Nella seduta del 13 giugno 1961.

Evidentemente il funzionale:

$$(6) \quad J[z(x, y)] = \int \int_{D_L} f(x, y, z(x, y), z_x(x, y), z_y(x, y)) \, dx \, dy$$

è definito per tutte le funzioni $z(x, y) \in E(T \times G)$.

Diciamo che la funzione $\bar{z}(x, y) \in E(T \times G)$ minimizza il funzionale (6), in $E(T \times G)$, se per tutte le funzioni $z(x, y) \in E(T \times G)$ vale la disuguaglianza $J[z(x, y)] \geq J[\bar{z}(x, y)]$.

Fissiamo ora una funzione $\bar{z}(x, y) \in E(T \times G)$ e consideriamo sotto quali ipotesi minimizzi il funzionale (6). A tale scopo, prendiamo, in primo luogo, due funzioni

$$(7) \quad A(x, y, z), \quad B(x, y, z)$$

continue con le loro derivate parziali

$$(8) \quad A_x(x, y, z), \quad B_y(x, y, z)$$

nel dominio T , e supponiamo che valga la seguente identità:

$$(9) \quad f(x, y, \bar{z}(x, y), \bar{z}_x(x, y), \bar{z}_y(x, y)) + A(x, y, \bar{z}(x, y)) \bar{z}_x(x, y) + B(x, y, \bar{z}(x, y)) \bar{z}_y(x, y) - \int_{\bar{z}(x, y)}^{\bar{z}(x, y)} \{A_x(x, y, \xi) + B_y(x, y, \xi)\} \, d\xi$$

$$- A(x, y, \bar{z}(x, y)) \bar{z}_x(x, y) - B(x, y, \bar{z}(x, y)) \bar{z}_y(x, y) = 0 \text{ in } D_L - D_{L_1} D_{L_2}.$$

Introduciamo poi la funzione $C(x, y, z)$ nel modo seguente:

$$(10) \quad C(x, y, z) = \bar{C}(x, y) - \int_{\bar{z}(x, y)}^z \{A_x(x, y, \xi) + B_y(x, y, \xi)\} \, d\xi,$$

dove si pone

$$(11) \quad \bar{z}(x, y) = \begin{cases} \bar{z}(x, y) & \text{in } D_L \\ \bar{z}(x, y) & \text{in } D_{L_1} + D_{L_2} - D_L \end{cases}$$

e

$$(12) \quad \bar{C}(x, y) = \begin{cases} f(x, y, \bar{z}(x, y), \bar{z}_x(x, y), \bar{z}_y(x, y)) + A(x, y, \bar{z}(x, y)) \bar{z}_x(x, y) + B(x, y, \bar{z}(x, y)) \bar{z}_y(x, y) & \text{in } D_L \\ A(x, y, \bar{z}(x, y)) \bar{z}_x(x, y) + B(x, y, \bar{z}(x, y)) \bar{z}_y(x, y) & \text{in } D_{L_1} + D_{L_2} + D_L \end{cases}$$

Dalle (9) e (12) si vede subito che la funzione $\hat{C}(x, y)$ è continua in tutto il dominio $D_{L_1} + D_{L_2}$. Dalla (10) segue che ci si verifica la seguente identità:

$$(13) \quad A_x(x, y, z) + B_y(x, y, z) + C_z(x, y, z) \equiv 0 \quad \text{in } T.$$

Dopo questo possiamo far vedere facilmente che l'integrale

$$(14) \quad \iint \psi(z) dx dy = \iint \{C(x, y, z) - A(x, y, z)z_x - B(x, y, z)z_y\} dx dy,$$

calcolato su qualsiasi superficie $z = z(x, y) \in E(T \times G)$, ha sempre lo stesso valore $J[\hat{z}(x, y)]$. Infatti, presa la funzione $z(x, y) \in E(T \times G)$ arbitrariamente, le due superficie $z = u_1(x, y)$, $z = u_2(x, y)$, dove

$$(15) \quad u_1(x, y) = \begin{cases} \hat{z}(x, y) & \text{in } D_L \\ \bar{z}(x, y) & \text{in } D_L - D_L \end{cases}$$

$$(16) \quad u_2(x, y) = \begin{cases} z(x, y) & \text{in } D_L \\ \bar{z}(x, y) & \text{in } D_L - D_L, \end{cases}$$

hanno lo stesso contorno nel dominio $D_L + D_L$, e quindi, in virtù dell'identità (13), l'integrale (14) assume lo stesso valore sulle superficie $z = u_1(x, y)$, $z = u_2(x, y)$. Dalle (9)–(12) segue che

$$\psi(u_1(x, y)) \equiv 0 \quad \text{in } D_L - D_L$$

e

$$\psi(u_2(x, y)) \equiv 0 \quad \text{in } D_L - D_L,$$

dunque, tenuto ancora conto della (12), si ha:

$$(17) \quad \iint_{D_L} \psi(z(x, y)) dx dy = \iint_{D_L} \psi(\hat{z}(x, y)) dx dy = J[\hat{z}(x, y)].$$

Prendiamo ora la differenza:

$$(18) \quad J[z(x, y)] - J[\hat{z}(x, y)] = \iint_{D_L} f(x, y, z(x, y), z_x(x, y), z_y(x, y)) dx dy - \iint_{D_L} \psi(z(x, y)) dx dy = \iint_{D_L} \left\{ f(x, y, z(x, y), z_x(x, y), z_y(x, y)) - \hat{C}(x, y) - \int_{\hat{z}(x, y)}^{z(x, y)} [A_x(x, y, \xi) + B_y(x, y, \xi)] d\xi + A(x, y, z(x, y))z_x(x, y) + B(x, y, z(x, y))z_y(x, y) \right\} dx dy.$$

Possiamo quindi enunciare il

TEOREMA: La funzione $\hat{z}(x, y) \in E(T \times G)$ minimizza $J[z]$ in $E(T \times G)$, se si possono definire, in T , due funzioni $A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$, continue

con le derivate parziali (8), le quali verificano l'identità (9), in modo che si abbia, per ogni punto (x, y, z, p, q) di $T \times C$,

$$(19) \quad \Omega(x, y, z, p, q) = f(x, y, z, p, q) - \mathring{C}(x, y) \\ + \int_{\mathring{z}(x, y)}^z \{A_x(x, y, \xi) + B_y(x, y, \xi)\} d\xi + A(x, y, z)p + B(x, y, z)q \geq 0,$$

dove la funzione $\mathring{C}(x, y)$ è data dalla formula (12).

Infine facciamo la seguente osservazione: Sia (a, b) un punto arbitrario della curva \mathring{L} . Dalle (9) e (19) si ottengono queste relazioni:

$$(20) \quad f(a, b, \mathring{z}(a, b), \mathring{z}_x(a, b), \mathring{z}_y(a, b)) \\ + A(a, b, \mathring{z}(a, b))(\mathring{z}_x(a, b) - \bar{z}_x(a, b)) \\ + B(a, b, \mathring{z}(a, b))(\mathring{z}_y(a, b) - \bar{z}_y(a, b)) = 0;$$

$$(21) \quad f(a, b, \mathring{z}(a, b), p, q) - f(a, b, \mathring{z}(a, b), \mathring{z}_x(a, b), \mathring{z}_y(a, b)) \\ - A(a, b, \mathring{z}(a, b))\mathring{z}_x(a, b) - B(a, b, \mathring{z}(a, b))\mathring{z}_y(a, b) \\ + A(a, b, \mathring{z}(a, b))p + B(a, b, \mathring{z}(a, b))q \geq 0.$$

Supponiamo ora che anche un certo intorno del punto $(\mathring{z}_x(a, b), \mathring{z}_y(a, b))$ appartenga all'insieme G , e la funzione $f(a, b, \mathring{z}(a, b), p, q)$ abbia le derivate parziali rispetto a p, q nel punto $(p, q) = (\mathring{z}_x(a, b), \mathring{z}_y(a, b))$. Sotto queste ipotesi dalla (21) segue subito:

$$(22) \quad f_p(a, b, \mathring{z}(a, b), \mathring{z}_x(a, b), \mathring{z}_y(a, b)) = -A(a, b, \mathring{z}(a, b)), \\ f_q(a, b, \mathring{z}(a, b), \mathring{z}_x(a, b), \mathring{z}_y(a, b)) = -B(a, b, \mathring{z}(a, b)),$$

e sostituendo queste nella (20), si ottiene la seguente uguaglianza:

$$(23) \quad f(a, b, \mathring{z}(a, b), \mathring{z}_x(a, b), \mathring{z}_y(a, b)) \\ - f_p(a, b, \mathring{z}(a, b), \mathring{z}_x(a, b), \mathring{z}_y(a, b))(\mathring{z}_x(a, b) - \bar{z}_x(a, b)) \\ - f_q(a, b, \mathring{z}(a, b), \mathring{z}_x(a, b), \mathring{z}_y(a, b))(\mathring{z}_y(a, b) - \bar{z}_y(a, b)) = 0,$$

che è la ben nota condizione di trasversalità.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] M. PICONE, *Su un criterio sufficiente in un classico problema di calcolo delle variazioni*, «Atti Acc. Naz. Lincei», 28, fasc. 2 (1960).
- [2] M. PICONE, *Su un criterio sufficiente in un classico problema di calcolo delle variazioni*, «Atti dell'Acc. delle Scienze di Torino», vol. 94 (1959-60).
- [3] M. PICONE, *Nuovi criteri sufficienti in un classico problema di calcolo delle variazioni*, «Annali di Mat. pura ed applicata» (IV), vol. LIII, pp. 119-138.
- [4] A. KÓSA, *Un criterio sufficiente per il minimo assoluto nel caso di estremi variabili*, «Atti Acc. Naz. Lincei», 30, fasc. 5, pp. 669-672 (1961).

Analisi matematica. — *Sullo spettro della trasformazione integro-differenziale di Volterra.* Nota di LUCIANO DE VITO, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

In un mio recente lavoro ⁽¹⁾ ho considerato la seguente trasformazione lineare (trasformazione integrodifferenziale di Volterra):

$$(1) \quad V(u) = \sum_i^3 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_i^2} + \int_0^t \sum_i^3 \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x_i^2} \varphi_i(t, \tau) d\tau \quad \begin{array}{l} x \equiv (x_1, x_2, x_3) \in A \\ 0 \leq t \leq t_0 \end{array}$$

ove A è un campo propriamente regolare nel senso di Fichera ⁽²⁾, dello spazio cartesiano tridimensionale S_3 , le $\varphi_i(t, \tau)$ sono funzioni complesse, misurabili secondo Lebesgue e limitate nell'insieme $0 \leq t \leq t_0, 0 \leq \tau \leq t_0$ ⁽³⁾, ed ho tra l'altro dimostrato che, considerato il dominio \mathfrak{D}_V della trasformazione (1), opportunamente definito, per ogni $f(x, t) \in \mathfrak{L}^2$ ⁽⁴⁾ esiste una ed una sola soluzione in \mathfrak{D}_V dell'equazione $V(u) = f$ ⁽⁵⁾.

(*) Nella seduta del 13 giugno 1961.

(1) *Sull'equazione integrodifferenziale di tipo ellittico di Volterra*, «Memorie dell'Acc. delle Scienze di Torino», 1961.

(2) Cfr. G. FICHERA, *Alcuni recenti sviluppi della teoria dei problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali*, «Atti del Convegno di Trieste sulle equazioni alle derivate parziali», 1954, p. 207.

(3) Nella Memoria citata in ⁽¹⁾, le funzioni $\varphi_i(t, \tau)$ erano supposte reali. L'estensione dei risultati di quel lavoro al caso che le $\varphi_i(t, \tau)$ siano complesse, è peraltro immediata.

(4) Con \mathfrak{L}^2 intendiamo lo spazio delle funzioni hilbertiane nell'insieme $x \in A, 0 \leq t \leq t_0$.

(5) \mathfrak{D}_V è l'insieme delle funzioni $u(x, t)$ che godono delle seguenti proprietà: 1° sono di quadrato sommabile, assieme alle loro derivate prime rispetto a x_1, x_2, x_3 (in senso debole), nell'insieme $x \in A, 0 \leq t \leq t_0$; 2° si annullano per $x \in \mathfrak{F}A, 0 \leq t \leq t_0$ (nel senso che, per quasi tutti i t di $(0, t_0)$, la funzione di $x: u(x, t)$ ha traccia nulla su $\mathfrak{F}A$ nel senso di Fichera, cfr. loc. cit. in ⁽²⁾); 3° in corrispondenza ad ogni $u \in \mathfrak{D}_V$ esiste una funzione $f \in \mathfrak{L}^2$ tale che, fissata comunque una funzione v verificante 1° e 2°, riesce:

$$\int_A dx \int_0^{t_0} \sum_i^3 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i^2} \left[\frac{\partial v(x, t)}{\partial x_i^2} + \int_t^{t_0} \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial x_i^2} \varphi_i(\tau, t) d\tau \right] dt = \int_A dx \int_0^{t_0} f(x, t) v(x, t) dt.$$

La funzione f , che in tal modo resta univocamente associata alla $u \in \mathfrak{D}_V$ è il risultato della trasformazione $V(u)$ (funzionalmente prolungata). Nella sopracitata Memoria (cfr. ⁽¹⁾) ho, in più, fatto vedere che, se $f(x, t)$ è continua per $x \in A \cup \mathfrak{F}A, 0 \leq t \leq t_0$ ed uniformemente hölderiana rispetto a x , e se le $\varphi_i(t, \tau)$ sono continue per $0 \leq t \leq t_0, 0 \leq \tau \leq t_0$, la soluzione $u \in \mathfrak{D}_V$ dell'equazione $V(u) = f$ è continua assieme alle sue derivate parziali rispetto a x_1, x_2, x_3 prime e seconde, per $x \in A, 0 \leq t \leq t_0$ e verifica in senso classico l'equazione $V(u) = f$. Nella suddetta Memoria, questi risultati sono acquisiti relativamente al caso reale, cioè supponendo reali le funzioni di \mathfrak{L}^2 e le funzioni di \mathfrak{D}_V . L'estensione di questi risultati al caso complesso è però assai facile.

Nella presente Nota mi propongo di caratterizzare lo spettro della trasformazione V , cioè di determinare i valori del parametro complesso λ tali che, per essi e per essi soli, la trasformazione $V - \lambda I$ (ove I è l'immersione di \mathfrak{D}_V in \mathfrak{L}^2 ⁽⁶⁾) non è un isomorfismo di \mathfrak{D}_V su \mathfrak{L}^2 . Il risultato cui si perviene è il seguente:

I. - Lo spettro della trasformazione V è costituito da un'infinità numerabile di numeri reali negativi $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ e coincide con l'insieme caratteristico (insieme degli autovalori) del problema al contorno

$$(2) \quad \sum_i^3 \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} - \lambda u(x) = 0 \quad x \in A, \quad u(x) = 0 \quad x \in \mathfrak{F}A$$

inteso in senso classico.

Nel caso particolare $\varphi_1(t, \tau) \equiv \varphi_2(t, \tau) \equiv \varphi_3(t, \tau)$ il risultato si potrebbe forse anche ottenere usando, opportunamente completato, un procedimento già impiegato da Volterra ⁽⁷⁾ per lo studio dell'equazione

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \sum_i^3 \left[\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_i^2} + \int_{t_0}^t \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x_i^2} \varphi(t, \tau) d\tau \right].$$

In quel che segue adotteremo le seguenti convenzioni. Posto $T_0 \equiv (0, t_0)$, denoteremo con T il generico intervallo chiuso dell'asse reale t contenuto in T_0 e con $C \times T$ l'insieme descritto dal punto $(x, t) \equiv (x_1, x_2, x_3, t)$ al variare di x nell'insieme $C \subset S_3$ e di t in T . Denotiamo con $\mathcal{H}_0^2(A \times T)$ lo spazio di Hilbert delle funzioni complesse che sono di quadrato sommabile, assieme alle loro derivate parziali prime rispetto a x_1, x_2, x_3 (in senso debole), nell'insieme $A \times T$, e che si annullano su $(\mathfrak{F}A) \times T$, ove il prodotto scalare è così definito:

$$(u, v)_{\mathcal{H}_0^2(A \times T)} = \int_{A \times T} \sum_i^3 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i} \frac{\overline{\partial v(x, t)}}{\partial x_i} dx dt,$$

con $L^2(A \times T)$ lo spazio di Hilbert dei vettori a tre componenti di quadrato sommabile in $A \times T$ (con la consueta definizione di prodotto scalare), con $L_0^2(A \times T)$ il sottospazio di $L^2(A \times T)$ costituito dai vettori ognuno dei quali è il gradiente debole, rispetto ad x_1, x_2, x_3 , di una funzione di $\mathcal{H}_0^2(A \times T)$, con $\mathfrak{L}^2(A \times T)$ lo spazio delle funzioni hilbertiane in $A \times T$, con $\mathfrak{L}^2(T)$ lo spazio delle funzioni hilbertiane in T , con $\mathfrak{L}^2(A)$ lo spazio delle funzioni hilbertiane in A . In tutti questi simboli, aboliremo sempre la parentesi $(A \times T)$ quando sia $T \equiv T_0$. Nel seguito, quando non vi sarà luogo ad equivoci, adotteremo la seguente convenzione: se S e S' sono due spazi di Hilbert uno isomorfo all'altro (nel senso di Hilbert), elementi di S' (e varietà

(6) Per immersione di \mathfrak{D}_V in \mathfrak{L}^2 intendiamo la trasformazione che associa ad ogni $u \in \mathfrak{D}_V$ la funzione stessa pensata come elemento di \mathfrak{L}^2 .

(7) Cfr. V. VOLTERRA, *Vibrazioni elastiche nel caso della eredità*, « R. C. Accad. Lincei », 21, pp. 3-12 (1912).

lineari di elementi di S') verranno indicati usando lo stesso simbolo impiegato per denotare gli enti corrispondenti in S .

Sia \mathcal{T}_λ la trasformazione lineare e continua di \mathcal{H}_0^2 in sé definita dalla condizione:

$$\int_{A \times T_0} \sum_i^3 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i} \left[\frac{\partial v(\bar{x}, \bar{t})}{\partial x} + \int_t^{t_0} \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial x} \varphi_i(\tau, t) d\tau \right] dx dt + \lambda (u, v)_{\mathcal{L}^2} = (u, \mathcal{T}_\lambda(v))_{\mathcal{H}_0^2}$$

per ogni $v \in \mathcal{H}_0^2$. Condizione necessaria e sufficiente perché λ non appartenga allo spettro di V è che λ non sia autovalore per la trasformazione V e che, per ogni fissato $f \in \mathcal{L}^2$ esista una $u \in \mathcal{D}_V$ tale che: $(u, \mathcal{T}_\lambda(v))_{\mathcal{H}_0^2} = (f, v)_{\mathcal{L}^2}$

per ogni $v \in \mathcal{H}_0^2$. Allora, per un principio esistenziale di G. Fichera, (cfr. loc cit. in ⁽²⁾), si ha che:

II. — *Condizione necessaria e sufficiente perché λ non appartenga allo spettro di V è che λ non sia autovalore per V e che esista una costante K_λ tale che, per ogni $v \in \mathcal{H}_0^2$ riesca:*

$$(3) \quad \|v\|_{\mathcal{L}^2} \leq K_\lambda \|\mathcal{T}_\lambda(v)\|_{\mathcal{H}_0^2}.$$

In virtù di questo risultato, il teorema I sarà acquisito quando avremo dimostrato le seguenti tre proposizioni:

i) *Per ogni λ che non appartenga all'insieme caratteristico del problema (2), sussiste la formula di maggiorazione (3).*

ii) *Se λ non è autovalore per il problema (2), esso non può essere autovalore neppure per la trasformazione V .*

iii) *Per ogni λ che appartenga all'insieme caratteristico del problema (2) l'estremo superiore di $\|v\|_{\mathcal{L}^2} / \|\mathcal{T}_\lambda(v)\|_{\mathcal{H}_0^2}$ è $+\infty$.*

Alla dimostrazione della proposizione i) dobbiamo premettere il seguente teorema:

III. — *Se $\mathcal{T}(v)$ è la trasformazione lineare continua di \mathcal{H}_0^2 in sé, definita dalla relazione: $(u, v)_{\mathcal{L}^2} = (u, \mathcal{T}(v))_{\mathcal{H}_0^2}$, $u, v \in \mathcal{H}_0^2$, in corrispondenza ad ogni λ che non sia autovalore per il problema (2) esiste una costante $K(\lambda)$ tale che:*

$$(4) \quad \|v\|_{\mathcal{H}_0^2(A \times T)}^2 \leq K(\lambda) \|P_{L_0^2(A \times T)} \text{grad}_x [\lambda \mathcal{T}(v) + v]\|_{L^2(A \times T)}^2 \quad (8) \quad v \in \mathcal{H}_0^2.$$

Indichiamo con $\{\lambda_h\}$ la successione degli autovalori del problema (2) (ciascuno ripetuto tante volte quant'è la sua molteplicità), con $\{v_h(x)\}$ una corrispondente successione ortonormale (in $\mathcal{L}^2(A)$) di autosoluzioni, con $\{\omega_v(t)\}$ un sistema ortonormale e completo in $\mathcal{L}^2(T)$. Il sistema $\{|\lambda_h|^{-1/2} v_h(x) \omega_v(t)\}$ risulta ortonormale e completo in $\mathcal{H}_0^2(A \times T)$. Ordiniamo le funzioni di tale sistema in un'unica successione: $\{u_k(x, t)\}$; sia

(8) Se V è una varietà contenuta nello spazio di Hilbert S , con $P_V u$ denotiamo la proiezione di $u \in S$ su V .

$u_k(x, t) = |\lambda_{\bar{h}(k)}|^{-1/2} v_{\bar{h}(k)}(x) \omega_{\bar{h}(k)}(t)$. Si ha, ovviamente:

$$(5) \quad \|v\|_{\mathcal{H}_0^2(A \times T)}^2 = \sum_k^\infty |(v, u_k)_{\mathcal{H}_0^2(A \times T)}|^2 \quad v \in \mathcal{H}_0^2(A \times T).$$

Essendo: $\Delta_x^2 u_k(x, t) = \lambda_{\bar{h}(k)} u_k(x, t)$ riesce:

$$\int_{A \times T} \left[\lambda u_k(x, t) \overline{v(x, t)} + \sum_i^3 \frac{\partial u_k(x, t)}{\partial x_i} \frac{\partial \overline{v(x, t)}}{\partial x_i} \right] dx dt = \frac{\lambda_{\bar{h}(k)} - \lambda}{\lambda_{\bar{h}(k)}} (u_k, v)_{\mathcal{H}_0^2(A \times T)},$$

da cui

$$(6) \quad \begin{aligned} & \|P_{L_0^2(A \times T)} \text{grad}_x [\lambda \mathcal{C}(v) + v]\|_{L^2(A \times T)}^2 = \\ & \sum_k^\infty \left| \int_{A \times T} \left[\lambda u_k(x, t) \overline{v(x, t)} + \sum_i^3 \frac{\partial u_k(x, t)}{\partial x_i} \frac{\partial \overline{v(x, t)}}{\partial x_i} \right] dx dt \right|^2 = \\ & \sum_k^\infty \left| \frac{\lambda - \lambda_{\bar{h}(k)}}{\lambda_{\bar{h}(k)}} \right|^2 |(v, u_k)_{\mathcal{H}_0^2(A \times T)}|^2. \end{aligned}$$

Da (5) (6), posto $K(\lambda) = \text{estr sup}_k |\lambda_{\bar{h}(k)} / [\lambda - \lambda_{\bar{h}(k)}]|^2$ si trae

$$\begin{aligned} & K(\lambda) \|P_{L_0^2(A \times T)} \text{grad}_x [\lambda \mathcal{C}(v) + v]\|_{L^2(A \times T)}^2 = \\ & K(\lambda) \sum_k^\infty \left| \frac{\lambda - \lambda_{\bar{h}(k)}}{\lambda_{\bar{h}(k)}} \right|^2 |(v, u_k)_{\mathcal{H}_0^2(A \times T)}|^2 \geq \|v\|_{\mathcal{H}_0^2(A \times T)}^2. \end{aligned}$$

È così provata la (4).

Dimostrazione della proposizione i).

Indicato con $\gamma(v)$ il vettore di L^2 che ha come i -esima componente la funzione

$$\int_i^{t_0} \frac{\partial}{\partial x_i} v(x, \tau) \varphi_i(\tau, t) d\tau,$$

si ha:

$$\|\mathcal{C}_\lambda(v)\|_{\mathcal{H}_0^2} = \|P_{L_0^2}[\text{grad}_x(\lambda \mathcal{C}(v) + v) + \gamma(v)]\|_{L^2}.$$

Allora, per provare l'asserto, basta mostrare che è assurdo ammettere, per ogni intero $n > 0$, l'esistenza di una funzione $v_n \in \mathcal{H}_0^2$ tale che:

$$(7) \quad \|v_n\|_{\mathcal{H}_0^2}^2 > n \|P_{L_0^2}[\text{grad}_x(\lambda \mathcal{C}(v_n) + v_n) + \gamma(v_n)]\|_{L^2}^2.$$

Per la disuguaglianza di Poincaré, esiste una costante Ω tale che, per ogni $v \in \mathcal{H}_0^2$, riesce: $\|v\|_{\mathcal{H}_0^2(A \times T)}^2 \leq \Omega \|v\|_{\mathcal{H}_0^2(A \times T)}^2$. Pertanto, se è vera la (7), posto

$w_n = v_n / \|v_n\|_{\mathcal{H}_0^2}$, per ogni T si ha:

$$\Omega n^{-1} > \|P_{L_0^2(A \times T)} [\text{grad}_x (\lambda \zeta(w_n) + w_n) + \gamma(w_n)]\|_{L^2}^2$$

donde

$$(8) \quad 2 \Omega n^{-1} + 2 \|P_{L_0^2(A \times T)} \gamma(w_n)\|_{L^2}^2 > \|P_{L_0^2(A \times T)} \text{grad}_x [\lambda \zeta(w_n) + w_n]\|_{L^2}^2.$$

Da (4) e (8) si deduce:

$$(9) \quad \|w_n\|_{\mathcal{H}_0^2(A \times T)}^2 < 2 \Omega K(\lambda) n^{-1} + 2 K(\lambda) \|P_{L_0^2(A \times T)} \gamma(w_n)\|_{L^2}^2.$$

Avendosi:

$$\|P_{L_0^2(A \times T)} \gamma(w_n)\|_{L^2}^2 \leq \sum_i^3 \int_{A \times T} \left| \int_i^{t_0} \frac{\partial w_n(x, \tau)}{\partial x_i} \varphi_i(\tau, t) d\tau \right|^2 dx dt,$$

indicato con M un numero tale che $|\varphi_i(\tau, t)| \leq M$, $i = 1, 2, 3$, dalla (9) si trae:

$$(10) \quad \|w_n\|_{\mathcal{H}_0^2(A \times T)}^2 < 2 \Omega K(\lambda) n^{-1} + 2 K(\lambda) M^2 t_0 \int_{A \times T} dx dt \int_i^{t_0} |\text{grad}_x w_n(x, \tau)|^2 d\tau.$$

Siano t_1, t_2, \dots, t_r, r punti di T_0 tali che $t_0 > t_1 > \dots > t_r = 0$, $t_j - t_{j+1} < [2 M^2 t_0 K(\lambda)]^{-1}$.

Mostriamo che:

$$(11)_j \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_{j+1}}^{t_j} dt \int_A |\text{grad}_x w_n(x, t)|^2 dx = 0 \quad j = 0, 1, \dots, r-1.$$

Dalla (10) si deduce, assumendo $T \equiv (t_1, t_0)$:

$$\int_{t_1}^{t_0} dt \int_A |\text{grad}_x w_n(x, t)|^2 dx \leq 2 \Omega K(\lambda) n^{-1} [1 - 2 K(\lambda) M^2 t_0 (t_1 - t_0)]^{-1},$$

donde la (11)₁. Supponiamo vera la (11)_j, per ogni $j < s$; dalla (10) si trae:

$$[1 - 2 K(\lambda) M^2 t_0 (t_s - t_{s+1})] \int_{t_{s+1}}^{t_s} dt \int_A |\text{grad}_x w_n(x, t)|^2 dx \leq 2 \Omega K(\lambda) n^{-1} + 2 K(\lambda) M^2 t_0^2 \int_{t_s}^{t_0} dt \int_A |\text{grad}_x w_n(x, t)|^2 dx$$

e quindi la (11)_s. Dalle (11)_j segue:

$$(12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n\|_{\mathcal{H}_0^2} = 0,$$

il che è assurdo dato che: $\|w_n\|_{\mathcal{H}_0^2} = 1$. È così provata la proposizione i).

Dimostrazione della proposizione ii).

Supponiamo, per assurdo, che λ , pur non essendo autovalore relativo al problema (2), appartenga all'insieme caratteristico della trasformazione V. Ogni corrispondente autosoluzione u verifica la relazione:

$$\int_{A \times T} \left\{ \lambda u(x, t) \overline{v(x, t)} + \sum_i \frac{\partial \overline{v(x, t)}}{\partial x_i} \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i} + \int_0^t \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x_i} \overline{\varphi_i(t, \tau)} d\tau \right] \right\} dx dt = 0$$

$$v \in \mathcal{H}_0^2(A \times T),$$

donde, indicato con $\{v_k(x, t)\}$ un sistema ortonormale e completo in $\mathcal{H}_0^2(A \times T)$, segue:

$$0 = \sum_k |(\text{grad}_x v_k, \text{grad}_x [\lambda \mathcal{C}(u) + u] + \gamma'(u))_{L^2}|^2 =$$

$$\|P_{L_0^2(A \times T)} [\text{grad}_x (\lambda \mathcal{C}(u) + u) + \gamma'(u)]\|_{L^2}^2,$$

ove, con $\gamma'(u)$, si è indicato il vettore di L^2 che ha per i -esima componente:

$$\int_0^t \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x_i} \overline{\varphi_i(t, \tau)} d\tau.$$

Da qui, per la (4), si trae:

$$\|u\|_{\mathcal{H}_0^2(A \times T)} \leq K(\lambda)^{1/2} \|P_{L_0^2(A \times T)} \text{grad}_x [\lambda \mathcal{C}(u) + u]\|_{L^2} \leq K(\lambda)^{1/2} \|P_{L_0^2(A \times T)} \gamma'(u)\|_{L^2}.$$

Da questa relazione, ripetendo il ragionamento fatto per dedurre la (12) dalla (9), si trae: $\|u\|_{\mathcal{H}_0^2(A \times T)} = 0$ donde l'assurdo. La proposizione ii) è così dimostrata.

Dimostrazione della proposizione iii).

Conserviamo le notazioni introdotte nella dimostrazione del teorema III. Supponiamo, per assurdo, che la (3) sia verificata in corrispondenza ad un

autovalore λ_{h_0} del problema (2). Considerato il sistema $\{u_h(x, t)\}$ introdotto nella dimostrazione del teorema III, relativo a $T \equiv T_0$, la (3) può anche scriversi nella forma:

$$\|v\|_{L^2}^2 \leq K_{\lambda_{h_0}}^2 \|P_{L_0} [\text{grad}_x (\lambda_{h_0} \overline{v}(v) + v) + \gamma(v)]\|_{L^2}^2 \equiv K_{\lambda_{h_0}}^2 \sum_0^\infty k \left| \int_{A \times T_0} \lambda_{h_0} \overline{u_k(x, t)} v(x, t) + \sum_i^3 \frac{\partial u_k(x, t)}{\partial x_i} \left[\frac{\partial v(x, t)}{\partial x_i} + \int_i^{t_0} \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial x_i} \varphi_i(\tau, t) d\tau \right] dx dt \right|^2.$$

Allora, in particolare, se assumiamo $v(x, t) = v_{h_0}(x) u_T(t)$, ove con $u_T(t)$ indichiamo la funzione caratteristica di T , otteniamo:

$$(13) \quad \|v_{h_0}(x) u_T(t)\|_{L^2}^2 \leq K_{\lambda_{h_0}}^2 \sum_0^\infty k \left| \int_{A \times T} \left[\lambda_{h_0} v_h(k)(x) v_{h_0}(x) + \sum_i^3 \frac{\partial v_h(k)(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v_{h_0}(x)}{\partial x_i} \right] |\lambda_h(k)|^{-1/2} \overline{\omega_v(k)(t)} dx dt + \sum_i^3 \int_{A \times T_0} \frac{\partial v_h(k)(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v_{h_0}(x)}{\partial x_i} |\lambda_h(k)|^{-1/2} dx dt \int_i^{t_0} \overline{\omega_v(k)(t)} \varphi_i(\tau, t) u_T(\tau) d\tau \right|^2.$$

Avendosi:

$$\int_A \left[\lambda_{h_0} v_h(k)(x) v_{h_0}(x) + \sum_i^3 \frac{\partial v_h(k)(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v_{h_0}(x)}{\partial x_i} \right] dx = 0,$$

$$\|v_{h_0}(x) u_T(t)\|_{L^2}^2 = \text{mis } T,$$

dalla (13) si trae:

$$(14) \quad \text{mis } T \leq K_{\lambda_{h_0}}^2 \sum_0^\infty k \left| \int_{T_0} dt \int_A \sum_i^3 \left[|\lambda_h(k)|^{-1/2} \frac{\partial v_h(k)(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v_{h_0}(x)}{\partial x_i} \overline{\omega_v(k)(t)} + \int_i^{t_0} \varphi_i(\tau, t) u_T(\tau) d\tau \right] dx \right|^2.$$

Indicato con $w_{h_0}(x, t)$ il vettore di L^2 che ha per i -esima componente la funzione

$$\frac{\partial v_{h_0}(x)}{\partial x_i} \int_i^{t_0} \varphi_i(\tau, t) u_T(\tau) d\tau,$$

dalla (14) si deduce:

$$\frac{1}{K_{\lambda_{h_0}}^2} \text{mis } T \leq \|P_{L_0^2} w_{h_0}(x, t)\|_{L^2}^2 \leq \|w_{h_0}\|_{L^2}^2 \leq M^2 \int_{T_0} dt \left(\int_i^{t_0} u_T(\tau) d\tau \right)^2 \int_A |\text{grad } v_{h_0}(x)|^2 dx =$$

$$M^2 |\lambda_{h_0}| \int_{T_0} dt \left(\int_i^{t_0} u_T(\tau) d\tau \right)^2,$$

donde la diseguaglianza assurda:

$$\text{mis } T \leq K_{\lambda_{h_0}}^2 M^2 |\lambda_{h_0}| t_0 (\text{mis } T)^2.$$

Geometria. — *Sur l'angle complexe, orienté, de deux vecteurs d'un espace unitaire.* Nota di ALEXANDRE FRODA, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

1. Soient K , respectivement D , le champ des nombres complexes, respectivement réels. Un espace linéaire \mathfrak{M}^n , de dimension finie n , donné sur le champ de scalaires K , est dit *espace unitaire* (sur K), lorsqu'on attache un *produit scalaire* $\varphi(z, t)$ à chaque couple ordonné de vecteurs z, t de \mathfrak{M}^n .

En \mathfrak{M}^n , les postulats du produit scalaire [5] sont:

1° $\varphi(z, t) \in K$ est une fonctionnelle bilinéaire sur K , telle que

$$z, t \in \mathfrak{M}^n, \quad \lambda \in K \rightarrow \varphi(\lambda z, t) = \lambda \cdot \varphi(z, t), \quad \varphi(z, \lambda t) = \bar{\lambda} \varphi(z, t) \quad (1);$$

2° $\varphi(z, t)$ possède la symétrie hermitienne: $\varphi(z, t) = \overline{\varphi(t, z)}$;

3° $\varphi(z, z)$ est une forme quadratique définie positive.

En remplaçant le champ K des scalaires par D , dans tout ce qui précède, l'espace linéaire est dit *euclidien* (sur D) et sera désigné par \mathfrak{E}^n . Le produit scalaire est alors, en particulier, symétrique,

$$x, y \in \mathfrak{E}^n \rightarrow \varphi(x, y) = \varphi(y, x).$$

La *norme* (longueur) d'un vecteur $z \in \mathfrak{M}^n$ sera, par définition (2),

$$(1) \quad \|z\| = + [\varphi(z, z)]^{1/2}.$$

On introduit dans ce qui suit, une définition de l'*angle orienté* de deux vecteurs de \mathfrak{M}^n , qui n'est qu'une extension (3) de la définition classique de l'angle des vecteurs de \mathfrak{E}^n , lorsque \mathfrak{M}^n résulte de \mathfrak{E}^n par l'extension du champ de scalaires D à K , effectuée de manière à conserver la dimension n de l'espace [3 (a)].

2. Soit $\{x, y\}$ une paire ordonnée de vecteurs non-nuls x, y de l'espace euclidien \mathfrak{E}^n (sur D). L'angle $\theta(x, y) \in D$ de ces vecteurs est défini en géométrie élémentaire, en ajoutant la condition supplémentaire

$$(2) \quad 0 \leq \theta(x, y) \leq \pi,$$

(*) Nella seduta del 13 maggio 1961.

(1) Soient $\lambda \in K \rightarrow \lambda = \alpha + i\beta$, $i^2 + 1 = 0$, ($\alpha, \beta \in D$). On pose $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ (conjugué imaginaire), $|\lambda|$ (module) et l'on écrit aussi

$$\Re \lambda = \alpha, \quad \Im \lambda = \beta,$$

pour les *parties réelle, imaginaire* de λ .

(2) Si $z \in \mathfrak{M}^n$, $z \neq 0$, on dit que $z^* = z/\|z\|$ est le *vecteur normé* obtenu de z . L'indice supérieur * indiquera qu'un vecteur est normé.

(3) L'idée de cette extension est algébrique, en contraste au point de vue classique [6].

On satisfait aussi à la condition de symétrie

$$(3) \quad \theta(x, y) = \theta(y, x),$$

en posant, comme on sait,

$$(4) \quad \theta(x, y) = \text{Arc cos } \frac{\varphi(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|},$$

où la détermination choisie au second membre y correspond à (2).

Si, en particulier, la dimension de l'espace euclidien \mathcal{E}^n est $n = 2$, on peut choisir une orientation, qui définit le sens direct de rotation des vecteurs du plan comme en géométrie analytique [1]. Tout angle non-nul $\theta(x, y)$ a alors une valeur soit positive, soit négative, selon que la rotation R , qui applique le vecteur normé x^* sur le vecteur normé y^* a le sens direct ou le sens inverse, par rapport à l'orientation. On satisfait ainsi à la condition supplémentaire

$$(2^*) \quad -\pi \leq \theta(x, y) \leq \pi,$$

qui remplace (2) et à la relation de symétrie gauche

$$(3^*) \quad x, y \in \mathcal{E}^2 \rightarrow \theta(x, y) = -\theta(y, x),$$

qui remplace (3), ce qui donne une variante de la définition précédente.

On l'étend à \mathcal{E}^n , $n \geq 2$, en choisissant en chaque sous-espace linéaire \mathcal{E}^2 de \mathcal{E}^n une orientation ⁽⁴⁾ et en attribuant à l'angle $\theta(x, y)$ la valeur, pourvue d'un signe, qu'elle prend dans un plan \mathcal{E}^2 , contenant x et y .

3. Soient z, t deux vecteurs non-nuls de l'espace unitaire n -dimensionnel \mathcal{U}^n (sur K), obtenu par l'extension de l'espace euclidien \mathcal{E}^n (sur D), suivant le procédé algébrique utilisé antérieurement [3 (a^o)]. On écrit d'une manière univoque, pour z, t vecteurs de \mathcal{U}^n ,

$$(5) \quad z = x + ix', \quad t = y + iy', \quad x, x', y, y' \in \mathcal{E}^n, \quad (i^2 + 1 = 0).$$

Il s'agit, dans ce qui suit, de définir, par extension, *un angle* $\theta(z, t)$, ayant pour valeur un nombre complexe, qu'on attachera à la paire ordonnée z, t de vecteurs de \mathcal{U}^n .

On pourrait essayer simplement de définir l'angle $\theta(z, t)$ complexe de deux vecteurs quelconques de \mathcal{U}^n en posant, pour $z \neq 0$ et $t \neq 0$, l'égalité

$$(6) \quad \theta(z, t) = \text{arc cos } \frac{\varphi(z, t)}{\|z\| \cdot \|t\|}, \quad (z, t \in \mathcal{U}^n),$$

relation vérifiée aussi par deux vecteurs, non-nuls quelconques x, y de \mathcal{E}^n , en (4).

(4) Le choix de l'orientation en chaque plan \mathcal{E}^2 est arbitraire [2], mais si l'on veut tenir compte de la continuité, les orientations des \mathcal{E}^2 devraient être reliées entre elles. Cette condition n'apparaît que si l'on applique (2*). C'est pourquoi l'on a préféré, dans ce qui suit, d'étendre de l'euclidien à l'unitaire, la définition de l'angle, en partant de (2), où le choix en question n'intervient pas.

Cette définition n'est pourtant pas acceptable, car elle ne permettra pas, en général, d'attacher à la paire arbitraire de vecteurs z, t de \mathfrak{M}^n un angle $\theta(z, t)$ de valeur complexe, arbitraire. Il résulte en effet de (6), qu'on a, pour z, t non-nuls,

$$(7) \quad |\cos \theta(z, t)| \leq 1,$$

car le module du produit scalaire de \mathfrak{M}^n doit satisfaire à l'inégalité

$$(8) \quad |\varphi(z, t)| \leq \|z\| \cdot \|t\|.$$

Le fait que l'inégalité (7) ne peut avoir lieu si $\theta(z, t)$ prend une valeur complexe tout-à-fait arbitraire met en évidence une insuffisance de la définition exprimée par l'égalité (6), où figure au second membre une valeur de la fonction (multiforme) complexe arc cos ζ de la variable complexe ζ pour

$$(9) \quad \zeta = \frac{\varphi(z, t)}{\|z\| \cdot \|t\|} \in K.$$

C'est pourquoi une autre définition de l'angle complexe $\theta(z, t)$ sera proposée et examinée dans la suite de ce travail.

4. L'angle $\theta(z, t)$ de deux vecteurs non-nuls z, t d'un espace unitaire \mathfrak{M}^n (sur K), orienté de z à t , est conçu — dans ce qui suit — comme un nombre complexe, équivalent à une paire ordonnée de deux angles réels $\theta_1(z, t) \in D$, $\theta_2(z, t) \in D$. On égale ces angles aux valeurs suivantes (cf. note ⁽¹⁾):

$$\theta_1(z, t) = \Re \theta(z, t) \quad , \quad \theta_2(z, t) = \Im \theta(z, t)$$

et l'on a univoquement pour $z, t \in \mathfrak{M}^n$, $i^2 + 1 = 0$, l'identité

$$(10) \quad \theta(z, t) = \Re \theta(z, t) + i \Im \theta(z, t),$$

de même qu'on a

$$(11) \quad \varphi(z^*, t^*) = \Re \varphi(z^*, t^*) + i \Im \varphi(z^*, t^*).$$

Il semble naturel d'imposer à la définition de $\theta(z, t)$ en \mathfrak{M}^n les postulats suivants:

a° $\theta(z, t)$ est une fonctionnelle en z, t aux valeurs en K ,

$$z_0, t_0 \in \mathfrak{M}^n \rightarrow \theta(z_0, t_0) \in K,$$

b° Pour $z, t \in \mathfrak{M}^n$ arbitraires et non-nuls, on a

$$\theta(t, z) + \theta(-t, z) = \pi,$$

c° On a l'équivalence logique

$$\varphi(z^*, t^*) = \varphi(z_0^*, t_0^*) \longleftrightarrow \theta(z, t) = \theta(z_0, t_0), \quad z, t, z_0, t_0 \in \mathfrak{M}^n,$$

d° On admet que $\Re \theta(z, t)$ est fonction seulement de $\Re \varphi(z^*, t^*)$ et que $\Im \theta(z, t)$ est fonction seulement de $\Im \varphi(z^*, t^*)$.

On a, de plus, les équivalences logiques, exprimées par le tableau suivant

$$\Re \varphi(z^*, t^*) = 1 \quad , \quad \text{resp. } 0, \text{ resp. } -1 \longleftrightarrow \Re \theta(z, t) = 0 \quad , \quad \text{resp. } \frac{\pi}{2}, \text{ resp. } \pi,$$

$$\Im \varphi(z^*, t^*) = 1 \quad , \quad \text{resp. } 0, \text{ resp. } -1 \longleftrightarrow \Im \theta(z, t) = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \text{resp. } 0, \text{ resp. } -\frac{\pi}{2}.$$

On déduit des postulats a°-d°, entre autres, les conséquences suivantes:

e° Pour $\alpha > 0$, $\beta > 0$ arbitraires, on a

$$\theta(\alpha z, \beta t) = \theta(z, t), \quad z, t \in \mathfrak{M}^n.$$

En effet, on a

$$(\alpha z)^* = \frac{\alpha}{|\alpha|} \cdot \frac{z}{\|z\|} = z^*, \quad (\beta t)^* = \frac{\beta}{|\beta|} \cdot \frac{t}{\|t\|} = t^*$$

et l'on en tire l'égalité

$$\varphi((\alpha z)^*, (\beta t)^*) = \varphi(z^*, t^*),$$

qui implique, en vertu de c°, l'égalité à démontrer (5).

f° On a séparément les équivalences logiques

$$\Re \varphi(z^*, t^*) = \Re \varphi(z_o^*, t_o^*) \longleftrightarrow \Re \theta(z, t) = \Re \theta(z_o, t_o),$$

$$\Im \varphi(z^*, t^*) = \Im \varphi(z_o^*, t_o^*) \longleftrightarrow \Im \theta(z, t) = \Im \theta(z_o, t_o),$$

qu'on obtient en rapprochant c° et d°.

g° Lorsqu'on change l'orientation de l'angle $\theta(z, t)$ de \mathfrak{M}^n , on a

$$\theta(z, t) = \overline{\theta(t, z)}.$$

On le prouve séparément pour les parties réelle et imaginaire des deux membres de l'égalité.

En effet, d'une part on doit avoir, puisque $\Re \overline{\theta(t, z)} = \Re \theta(t, z)$, l'égalité $\Re \theta(z, t) = \Re \theta(t, z)$, car on a $\varphi(z^*, t^*) = \overline{\varphi(t^*, z^*)}$ et donc $\Re \varphi(z^*, t^*) = \Re \varphi(t^*, z^*)$.

Cela s'écrit, en posant $t^* = z_o^*$, $z^* = t_o^*$ au second membre,

$$\Re \varphi(z^*, t^*) = \Re \varphi(z_o^*, t_o^*).$$

ce qui implique, en vertu de f°, l'égalité à démontrer.

On doit avoir aussi d'autre part, puisque $\Im \overline{\theta(t, z)} = -\Im \theta(t, z)$ l'égalité

$$\Im \theta(z, t) = -\Im \theta(t, z),$$

qu'on prouve comme suit: On a, puisque $\varphi(z^*, t^*) = \overline{\varphi(t^*, z^*)}$, les égalités

$$\Im \varphi(z^*, t^*) = -\Im \varphi(t^*, z^*) = \Im \varphi(-t^*, z^*).$$

En posant $-t^* = z_o^*$, $z^* = t_o^*$ au dernier membre, on a

$$\Im \varphi(z^*, t^*) = \Im \varphi(z_o^*, t_o^*)$$

(5) En satisfaisant aux postulats a°-d°, l'angle $\theta(z, t)$, où $z, t \in \mathfrak{M}^n$ (sur K), est bien défini, tandis que l'angle des deux « directions » considérées de \mathfrak{M}^n ne l'est pas. Soit, en effet, $\lambda \in K$; le produit scalaire

$$\varphi((\lambda z)^*, t^*) = \frac{\lambda}{|\lambda|} \varphi(z^*, t^*)$$

change (sauf si $\lambda > 0$) avec le rapport $\lambda/|\lambda|$ de module égal à 1, et la condition requise par c° pour avoir $\theta(\lambda z, z) = \theta(z, z)$ n'est plus remplie. Cet effet de la multiplication de z par $\lambda \in K$ explique la raison des signes positifs de α, β en e°, ainsi que la forme spéciale des inégalités, qui complètent les définitions (4) de $\theta(x, y)$ et (12) de $\theta(z, t)$.

ce qui implique, en vertu de f°, les égalités

$$\Im \theta(z, t) = \Im \theta(z_0, t_0) = \Im \theta(-t, z).$$

En séparant les parties réelle et imaginaire en b°, on a

$$\Re \theta(-t, z) = -\Re \theta(t, z)$$

et donc finalement l'égalité à démontrer.

h° Si U est un opérateur (linéaire) unitaire de \mathfrak{M}^n on a

$$\theta(Uz, Ut) = \theta(z, t).$$

Par la définition de U , on a en effet

$$\varphi(Uz, Ut) = \varphi(z, t) \quad , \quad \|Uz\| = \|z\| \quad , \quad \|Ut\| = \|t\|,$$

donc

$$\varphi((Uz)^*, (Ut)^*) = \varphi(z^*, t^*),$$

ce qui, en vertu de c° implique l'égalité à prouver.

i° Si z, t sont des vecteurs de \mathfrak{M}^n , on a les équivalences logiques

$$\varphi(z^*, t^*) = 1 \longleftrightarrow \theta(z, t) = 0,$$

$$\varphi(z^*, t^*) = 0 \longleftrightarrow \theta(z, t) = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \varphi(z^*, t^*) = i \longleftrightarrow \theta(z, t) = \frac{\pi}{2}(1 + i).$$

La démonstration en résulte directement de c° et d°.

Si S est un système de vecteurs $z_j \in \mathfrak{M}^n$ ($j = 1, 2, \dots$) ordonné au sens des indices j croissants, S sera dit *isogonal*, si pour tout couple $\{j, k\}$, les angles orientés $\theta(z_j, z_k)$, où $j < k$, ont une valeur égale, ce qui a lieu suivant c° si et seulement si les produits scalaires respectifs $\varphi(z_j^*, z_k^*)$ des vecteurs normés obtenus de z_j, z_k ont une valeur égale ⁽⁶⁾.

5. Soient donnés l'espace unitaire \mathfrak{M}^n (sur K) et donc aussi le produit scalaire $\varphi(z, t)$, pour tout $z, t \in \mathfrak{M}^n$.

On définit l'angle de deux vecteurs (non-nuls) z, t , orienté de z vers t , par la formule

$$(12) \quad \theta(z, t) = \text{Arc cos} \frac{\Re \varphi(z, t)}{\|z\| \cdot \|t\|} + i \text{Arc sin} \frac{\Im \varphi(z, t)}{\|z\| \cdot \|t\|}, \quad (z, t \in \mathfrak{M}^n, i^2 + 1 = 0),$$

où $\Re \varphi(z, t) \in D$, $\Im \varphi(z, t) \in D$ sont uniquement déterminés par l'identité (11). Si l'on pose

$$(13) \quad u = \frac{\Re \varphi(z, t)}{\|z\| \cdot \|t\|} \quad , \quad v = \frac{\Im \varphi(z, t)}{\|z\| \cdot \|t\|},$$

les déterminations des arcs réels sont choisies, en (12), pour tout $u \in D$, $v \in D$, ($|u| \leq 1, |v| \leq 1$) de manière à satisfaire aux conditions

$$(14) \quad 0 \leq \text{Arc cos } u \leq \pi \quad , \quad -\frac{\pi}{2} \leq \text{Arc sin } v \leq \frac{\pi}{2}.$$

(6) Voir [3 (b°)] pour l'étude de systèmes isogonaux en \mathfrak{E}^n .

Les inégalités $|\dot{u}| \leq 1, |\dot{v}| \leq 1$ résultent de l'inégalité classique (8) de Cauchy-Buniakowsky, lorsqu'on pose, compte tenu de (11), les égalités (13) ce qui rend un sens à (12), quels que soient z, t , vecteurs de \mathfrak{M}^n .

On vérifie aisément que la définition (12) satisfait au postulats a°-d° du point 4.

La définition (12) est une extension de la définition (4), de l'angle $\theta(x, y)$ des vecteurs $x, y \in \mathfrak{E}^n$ (sur D), qui est reliée à la condition (2).

En effet, soit l'espace euclidien \mathfrak{E}^n (sur D) obtenu de l'espace unitaire \mathfrak{M}^n (sur K) par la restriction du champ de scalaires K au sous-champ D, ce qui est toujours possible⁽⁷⁾ en maintenant la dimension n des espaces, comme on l'a déjà montré [3 (a°)]. On convient d'écrire, comme alors et d'une manière univoque les égalités (5).

Il en résulte que (12) peut s'écrire aussi sous la forme

$$(15) \quad \theta(z, t) = \theta(x + ix', y + iy') = \\ = \text{Arc cos} \frac{\varphi(x, y) + \varphi(x', y')}{(\|x\|^2 + \|x'\|^2)^{1/2} \cdot (\|y\|^2 + \|y'\|^2)^{1/2}} + i \text{Arc sin} \frac{\varphi(x', y) - \varphi(x, y')}{(\|x\|^2 + \|x'\|^2)^{1/2} \cdot (\|y\|^2 + \|y'\|^2)^{1/2}},$$

où le produit scalaire $\varphi(x, y)$ en \mathfrak{E}^n (sur D) s'obtient du produit scalaire $\varphi(z, t)$ en \mathfrak{M}^n (sur K), en y prenant $z = x \in D, t = y \in D$. La formule (15) s'appuie aussi sur les remarques suivantes: En vertu des propriétés 1°, 2° du produit scalaire, du point 1, on a:

$$(16) \quad \varphi(z, t) = [\varphi(x, y) + \varphi(x', y')] + i [\varphi(x', y) - \varphi(x, y')]$$

et en vertu de (1), (11), (16) on obtient, pour $z = t$, donc pour $x = y, x' = y'$, l'implication

$$(17) \quad z = x + ix' \rightarrow \|z\|^2 = \|x\|^2 + \|x'\|^2$$

et son analogue

$$(18) \quad t = y + iy' \rightarrow \|t\|^2 = \|y\|^2 + \|y'\|^2,$$

qui font passer de (12) à (15).

Tout cela montre que la formule (15), qui donne l'angle orienté $\theta(z, t)$, où $z, t \in \mathfrak{M}^n$ (sur K), est équivalente à (12) et n'est qu'une extension de la formule classique (4), qui donne l'angle $\theta(x, y)$, où $x, y \in \mathfrak{E}^n$ (sur D), extension satisfaisant aux postulats a°-d°.

6. Voici quelques conséquences des formules précédentes:

Il résulte de l'unicité des expressions (10), (11) de $\theta(z, t)$, $\varphi(z^*, t^*)$, qu'on a en (12),

$$(19) \quad \cos \Re \theta(z, t) = \Re \varphi(z^*, t^*) \quad , \quad \sin \Im \theta(z, t) = \Im \varphi(z^*, t^*),$$

où z^*, t^* sont les vecteurs normés obtenus de z, t .

(7) On procède à la restriction de \mathfrak{M}^n (sur K) à \mathfrak{E}^n (sur D), qu'on obtient en conservant une même base pour ces deux espaces linéaires.

En vertu de l'identité (8) et des propriétés du produit scalaire, (du point 1), ainsi que des égalités (19), il résulte de (8), les inégalités équivalentes

$$(20) \quad |\varphi(z^*, t^*)| \leq 1 \iff \cos^2 \Re \theta(z, t) + \sin^2 \Im \theta(z, t) \leq 1,$$

où z^*, t^* sont les vecteurs normés obtenus de z, t , respectivement et l'égalité ayant lieu, de même qu'en (8), si et seulement si les vecteurs non-nuls $z, t \in \mathfrak{M}^n$ sont linéairement dépendants (sur K).

En posant, pour $z_1, z_2 \in \mathfrak{M}^n$,

$$(21) \quad \rho_1 = \frac{\|z_1\|}{\|z_1 + z_2\|}, \quad \rho_2 = \frac{\|z_2\|}{\|z_1 + z_2\|},$$

on tire de (19) les *formules d'addition*

$$(22) \quad \begin{cases} \cos \Re \theta(z_1 + z_2, t) = \rho_1 \cos \Re \theta(z_1, t) + \rho_2 \cos \Re \theta(z_2, t), \\ \sin \Im \theta(z_1 + z_2, t) = \rho_1 \sin \Im \theta(z_1, t) + \rho_2 \sin \Im \theta(z_2, t). \end{cases}$$

7. On peut rapprocher la représentation des nombres complexes λ , considérés comme paires ordonnées de nombres réels $\Re \lambda, \Im \lambda$, et la représentation des vecteurs z, t de l'espace unitaire \mathfrak{M}^n (sur K), en tant que paires ordonnées de vecteurs de l'espace euclidien \mathfrak{E}^n (sur D), les espaces $\mathfrak{E}^n, \mathfrak{M}^n$ ayant le même nombre n de dimensions. Au lieu des égalités (5), on peut écrire $z, t \in \mathfrak{M}^n$ sous la forme de paires ordonnées de vecteurs de \mathfrak{E}^n

$$(23) \quad z \cong \{x, x'\}, \quad t \cong \{y, y'\}.$$

Cette représentation s'appuie sur l'isomorphisme, vérifiable en chacun des cas analogues considérés [3 (a°)].

Voici comment on peut s'aider d'une représentation géométrique élémentaire, pour interpréter, dans le cas où $n = 2$, la formule (15) qui donne l'angle $\theta(z, t)$.

Soit \mathfrak{M}^2 (sur K) un espace unitaire bidimensionnel, obtenu de l'espace euclidien bidimensionnel \mathfrak{E}^2 (sur D), par extension du champ des scalaires de D à K [3 (a°)]. On peut écrire

$$(24) \quad \begin{cases} z \in \mathfrak{M}^2 \rightarrow z \cong \{x, x'\}, & x \in \mathfrak{E}^2, x' \in \mathfrak{E}'^2, \\ t \in \mathfrak{M}^2 \rightarrow t \cong \{y, y'\}, & y \in \mathfrak{E}^2, y' \in \mathfrak{E}'^2, \end{cases}$$

où z, t sont isomorphes aux paires ordonnées respectives et $\mathfrak{E}^2 \cong \mathfrak{E}'^2$, (isomorphisme pouvant aller jusqu'à une identification).

L'interprétation géométrique des résultats est suggérée par le procédé de représentation d'Argand-Gauss des nombres $\lambda \in K$ dans un plan euclidien et par l'analogie ci-dessus.

Soient $\mathfrak{E}^2, \mathfrak{E}'^2$ deux des plans de coordonnées d'un système cartésien trirectangulaire d'un espace euclidien tridimensionnel \mathfrak{E}^3 .

On désigne par z^0, t^0 les vecteurs de \mathfrak{E}^3 , ayant les projections orthogonales $\{x, x'\}, \{y, y'\}$ sur les deux plans $\mathfrak{E}^2, \mathfrak{E}'^2$, respectivement (5). On obtient

la figure 1 ci-jointe, si l'on admet les conventions usuelles pour la représentation des plans, des vecteurs et des angles.

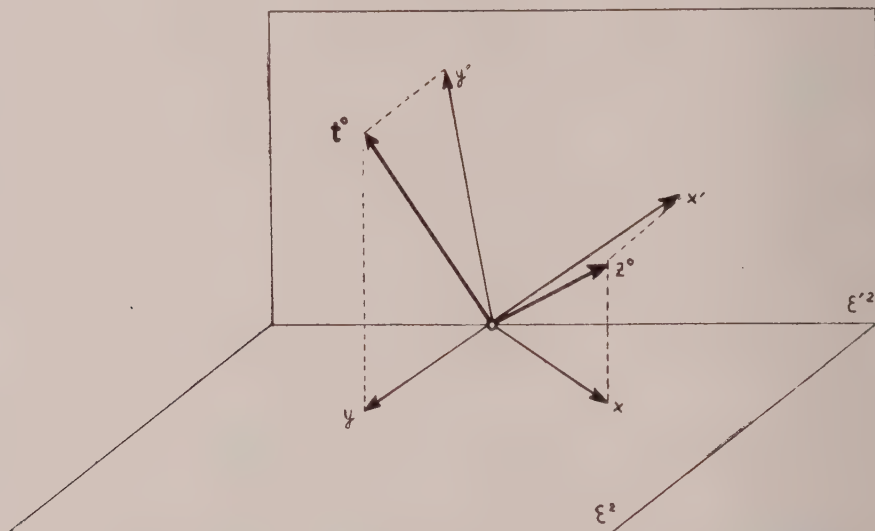


Fig. 1. - Sur l'angle complexe, orienté, de deux vecteurs d'un espace unitaire.

Afin de simplifier les formules à appliquer on peut admettre, sans porter atteinte à la généralité (vu la conséquence e^0 du point 4 permettant de définir $\theta(z, t)$, abstraction faite de facteurs positifs de z, t), qu'on a

$$(25) \quad \|x\| = \|x'\| = \|y\| = \|y'\| = 1$$

et donc, en vertu de (17), (18), aussi

$$(26) \quad \|z\| = \|t\| = \sqrt{2}.$$

Après identification de (12) et de (15), on peut donc en tirer, compte tenu de (26), les égalités

$$(19) \quad \begin{cases} \cos \Re \theta(z, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x, y) + \varphi(x', y')], \\ \sin \Im \theta(z, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x', y) - \varphi(x, y')] \end{cases}$$

et les angles réels $\Re \theta(z, t)$, $\Im \theta(z, t)$ sont uniquement déterminés à l'aide de (13) et (14).

Or, en vertu de (25), il résulte de (4), qu'on a aussi pour les produits scalaires

$$(4^*) \quad \begin{cases} \varphi(x, y) = \cos \theta(x, y) & , & \varphi(x', y') = \cos \theta(x', y'), \\ \varphi(x', y) = \cos \theta(x', y) & , & \varphi(x, y') = \cos \theta(x, y'). \end{cases}$$

On obtient finalement la paire ordonnée d'angles réels, isomorphe à l'angle complexe, défini en (15),

$$(27) \quad \theta(z, t) \cong \{\Re \theta(z, t), \Im \theta(z, t)\}.$$

Les angles réels satisfaisant aux égalités, obtenues de (4*) et de (19*), vérifient donc les relations

$$(28) \quad \begin{cases} \cos \Re \theta(z, t) = \frac{1}{2} [\cos \theta(x, y) + \cos \theta(x', y')], \\ \sin \Im \theta(z, t) = \frac{1}{2} [\cos \theta(x', y) - \cos \theta(x, y')]. \end{cases}$$

Sur la figure apparaît l'angle réel $\theta(z^o, t^o)$ des vecteurs de l'espace euclidien \mathcal{E}^3 , tandis que l'angle complexe $\theta(z, t)$ des vecteurs de l'espace unitaire \mathcal{U}^2 on le reconstitue en rapprochant les formules (27), (28) et compte-tenu de (13), (14).

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] APPELL PAUL & (VALIRON GEORGES), *Analyse mathématique*, t. I, 1937 Paris, p. 24, p. 54.
- [2] BOURBAKI N., *Algèbre*, II, Ch. IX, *Formes sesquilinéaires et formes quadratiques*, Paris, 1959, pp. 160-184.
- [3] FRODA ALEXANDRE, (a°) *La réduction des formes quadratiques*, « Revue de math. pures et appl. », Buc. 1960, t. V, 2, pp. 229-239; (b°) *Systèmes isogonaux d'un espace euclidien*, « Revue de math. pures et appl. », Buc. 1961, t. VI, 2.
- [4] HALMOS, PAUL R., *Introduction to Hilbert Space*, New York 1951, pp. 11-16.
- [5] JACOBSON NATHAN, *Lectures in abstract algebra*, II, *Linear algebra*, New York 1953, p. 160.
- [6] KLEIN, FELIX, (a°) *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, 3° ed., II, Berlin 1925, pp. 180-187; (b°) *Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie*, Berlin 1928, pp. 128-135.

Geometria. — *Sulla curvatura geodetica totale.* Nota di GIACOMO SABAN, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

INTRODUZIONE.

1. Il teorema di Scherrer⁽¹⁾, dal quale risulta che l'essere nulla la torsione integrale di ogni curva chiusa sopra una superficie è una proprietà caratteristica delle sfere (e dei piani), può dedursi in maniera ben più semplice dalla considerazione della torsione *geodetica* totale di tali curve, come successivamente è stato messo in rilievo dal Signorini⁽²⁾.

Questa Nota, pur ricollegandosi al suddetto ordine di ricerche, fissa invece l'attenzione sulla *curvatura geodetica totale*. Viene dimostrato anzitutto che la curvatura geodetica totale di ogni curva convessa chiusa tracciata sopra una superficie a curvatura gaussiana positiva (rispettivamente nulla, negativa) si mantiene minore (rispettivamente, uguale, maggiore) a 2π . La dimostrazione stessa si ispira ad un procedimento, utilizzato da Masatsugu Tsuji⁽³⁾ per dare una nuova dimostrazione del noto teorema di Fenchel⁽⁴⁾ che afferma che la curvatura totale di ogni curva sghemba chiusa è sempre maggiore a 2π . Successivamente vengono invertiti i risultati ottenuti, mostrando che le proprietà della curvatura geodetica totale a cui si è accennato sopra conducono a caratterizzazioni delle superficie la cui curvatura gaussiana si mantiene di segno costante.

I risultati qui conseguiti hanno interesse in vista anche di eventuali loro estensioni alle varietà a tre o più dimensioni, le quali potranno formare oggetto di ulteriori ricerche.

2. Data una superficie Σ , bilatera, orientata e semplicemente connessa, diremo *convessa* ogni regione \mathcal{R} di Σ tale che \mathcal{R} contenga sempre, assieme ad ogni coppia di punti P e Q arbitrariamente scelti in \mathcal{R} , l'intero arco di geodetica delimitato da quei due punti. I punti frontiera di \mathcal{R} costituiscono

(*) Nella seduta del 13 giugno 1961.

(1) W. SCHERRER, *Eine Kennzeichnung der Kugel*, «Vierteljahrsschrift der naturforsch. Ges. Zürich», 85, Beiblatt 32, pp. 40-46 (1940).

(2) A. SIGNORINI, *Sopra una caratterizzazione della sfera*, «Annali di Mat.» (4), 20, pp. 211-212 (1941); vedasi anche H. GEPPERT, *Sopra una caratterizzazione della sfera*, «Annali di Mat.» (4), 20, pp. 59-66 (1941).

(3) M. TSUJI, *On a theorem of Fenchel on the total curvature of a closed curve*, «Commentarii Mathematici Universitatis Sancti Pauli», 6, pp. 29-32 (1957).

(4) W. FENCHEL, *Über Krümmung und Windung geschlossener Raumkurven*, «Math. Ann.», 101, pp. 238-252 (1929). Cfr. altresì B. SEGRE, *Sui circoli geodetici di una superficie a curvatura totale costante, che contengono nell'interno una linea assegnata*, «Boll. Un. Mat. Ital.» (1), 13, pp. 279-283 (1934).

allora una *curva convessa* su Σ e questa giace per intero (nell'intorno del punto di tangenza) da una banda della linea geodetica tangente.

Chiameremo ancora *poligono convesso* su una superficie Σ un poligono i cui lati siano tutti archi di linee geodetiche di Σ ed i cui vertici appartengano ad una curva convessa su Σ .

Sopra ogni curva convessa chiusa \mathcal{L} verrà scelto un *verso di percorrenza* in maniera che la regione convessa \mathcal{R} di Σ racchiusa da \mathcal{L} rimanga sempre a sinistra di \mathcal{L} per un osservatore disposto secondo la normale positiva di Σ in un qualsiasi punto di \mathcal{R} . Il verso di percorrenza di un poligono convesso sarà quello che su esso subordina la curva convessa alla quale appartengono i suoi vertici.

L'*angolo esterno* in un vertice di un poligono geodetico qualsiasi è l'angolo positivo ($< 2\pi$) che misura la rotazione che porta la tangente della geodetica che giunge al vertice considerato a coincidere con la tangente della geodetica uscente da esso.

I. — SUPERFICIE A CURVATURA GAUSSIANA POSITIVA.

3. Sia Π_n un poligono convesso i cui n lati siano archi di geodetiche di una superficie Σ bilatera, semplicemente connessa ed a curvatura gaussiana K continua sempre positiva. Siano ancora P_i ($i = 1, 2, \dots, n$) i vertici di Π_n , A_i l'angolo esterno di Π_n nel vertice P_i ed $S_n = \sum_{i=1}^n A_i$.

Si consideri il poligono curvilineo Π_{n-1} ottenuto a partire dal poligono Π_n sopprimendone un vertice, ad esempio il vertice P_i ; il poligono Π_{n-1} sarà parimente convesso e risulterà definito dalla successione dei vertici $P_1, P_2, \dots, P_{i-1}, P_{i+1}, \dots, P_n$ e gli $n-3$ angoli $A_1, A_2, \dots, A_{i-2}, A_{i+2}, \dots, A_n$ saranno uguali per ambedue i poligoni Π_{n-1} , Π_n . Indicando quindi con S la loro somma avremo

$$S_{n-1} = S + \bar{A}_{i-1} + \bar{A}_{i+1}, \quad S_n = S + A_{i-1} + A_i + A_{i+1},$$

ove \bar{A}_{i-1} ed \bar{A}_{i+1} denotano i valori che assumono gli angoli esterni nei vertici P_{i-1} e P_{i+1} a soppressione effettuata del vertice P_i .

Essendo la superficie Σ a curvatura gaussiana positiva, detti α_{i-1} , α_i ed α_{i+1} gli angoli interni del triangolo geodetico $P_{i-1} P_i P_{i+1}$ sussiste la nota relazione ⁽⁵⁾

$$\alpha_{i-1} + \alpha_i + \alpha_{i+1} = \pi + \varepsilon,$$

ove l'*eccesso* ε è dato dalla formula

$$\varepsilon = \int_{P_{i-1} P_i P_{i+1}} K da < 0.$$

Si ha quindi

$$A_i = \pi - \alpha_i = \alpha_{i-1} + \alpha_{i+1} - \varepsilon,$$

(5) Cfr. ad esempio K. STRUBECKER, *Differentialgeometrie*, III, Sammlung Götschen, p. 133 (1959).

per cui

$$A_{i-1} + A_i + A_{i+1} = A_{i-1} + \alpha_{i-1} + A_{i+1} + \alpha_{i+1} - \varepsilon = \bar{A}_{i-1} + \bar{A}_{i+1} - \varepsilon$$

e quindi

$$\bar{A}_{i-1} + \bar{A}_{i+1} \geq A_{i-1} + A_i + A_{i+1},$$

il segno di eguaglianza valendo solo se l'area del triangolo geodetico $P_{i-1} P_i P_{i+1}$ è nulla, cioè se P_i giace sull'arco di geodetica $P_{i-1} P_{i+1}$, caso che si può senz'altro escludere. Parimente la convessità del poligono Π_n esclude che il punto P_i possa essersi trovato nella porzione di superficie Σ indicata in figura a sinistra di $P_{i-1} P_{i+1}$.

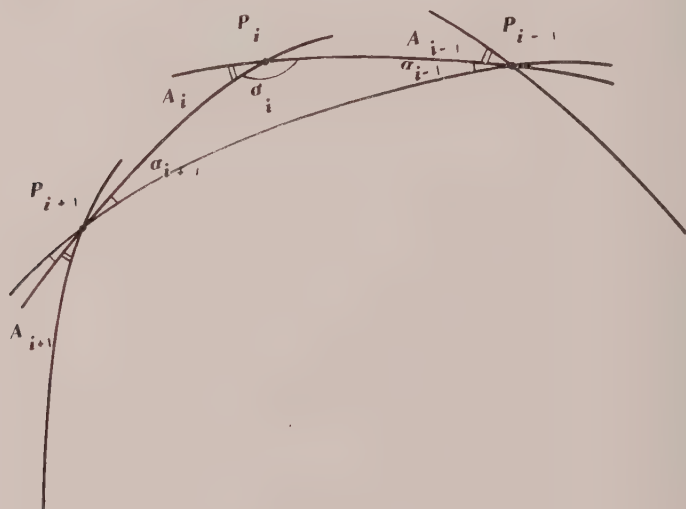


Fig. 1.

Da quanto precede risulta dunque che

$$(1) \quad S_n < S_{n-1}.$$

A partire da questa ineguaglianza, sopprimendo successivamente $n-3$ qualsiasi vertici del poligono iniziale Π_n si ottiene

$$S_n < S_{n-1} < S_{n-2} < \dots < S_3,$$

ove S_3 denota la somma degli angoli esterni del triangolo geodetico sotteso dai rimanenti tre vertici, P_j, P_h, P_k di Π_n . Detti rispettivamente α_j, α_h ed α_k gli angoli interni di questo triangolo, si ha, sempre in base all'osservazione precedente e con analogo significato per la quantità ε_1 ,

$$S_3 = 3\pi - \alpha_j - \alpha_h - \alpha_k = 3\pi - \pi - \varepsilon_1 = 2\pi - \varepsilon_1;$$

per cui si conclude che

$$S_3 < 2\pi,$$

ossia

$$(2) \quad S_n < 2\pi.$$

4. Consideriamo ora sopra una superficie Σ una curva convessa chiusa \mathcal{C} di lunghezza L , che non consti di un medesimo arco di geodetica percorso, in versi contrari, due volte. Introduciamo l'ascissa curvilinea, s , misurata a partire da un punto origine P_0 arbitrariamente fissato su \mathcal{C} . Suddividiamo quindi la curva in 2^n parti di eguale lunghezza $L/2^n$, mediante una successione di punti $P_0, P_1, \dots, P_{2^n-1}$, e con questi punti come vertici costruiamo un poligono geodetico convesso Π_{2^n} sopra Σ : la successione dei poligoni convessi siffatti, al crescere indefinito di n , tende alla curva \mathcal{C} . Osserviamo allora che

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2^n} = \oint_{\mathcal{C}} \rho_g ds.$$

Difatti la curvatura geodetica di una generica curva C in un suo punto $P(s)$ si può anche notoriamente ⁽⁶⁾ definire mediante la fomula

$$(4) \quad \rho_g = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \psi}{\Delta s},$$

ove $\Delta \psi$ denoti l'angolo formato dalle geodetiche tangenti alla curva C nei punti $P(s)$ e $P(s + \Delta s)$, sicché

$$S_{2^n} = \oint_{\Pi_{2^n}} \rho_g ds$$

e da questa discende la (3).

Le (2), (3) implicano le

$$(5) \quad \oint_{\mathcal{C}} \rho_g ds < 2\pi,$$

in quanto nel passaggio al limite, la successione degli S_n essendo decrescente, non può apparire il segno di uguaglianza. Se poi la curva \mathcal{C} dovesse ridursi ad una geodetica chiusa sopra Σ , sarebbe

$$S_{2^n} = S_{2^{n-1}} = \dots = S_3 = 0,$$

onde la formula (5) rimarrebbe ancora valida.

5. Consideriamo ora una superficie Σ bilatera, semplicemente connessa, dotata di curvatura gaussiana K continua e tale che sia

$$\oint_{\mathcal{C}} \rho_g ds < 2\pi$$

(6) Cfr. ad esempio W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, I, Dover Pubbl., p. 164 (1954).

per ogni curva convessa chiusa ϱ tracciata su essa. Sia ancora \mathfrak{R} la regione di Σ racchiusa da ϱ e designamo con da l'elemento d'area di Σ : vale la formula di Gauss-Bonnet

$$(6) \quad \iint_{\mathfrak{R}} K da + \oint_{\varrho} \rho_g ds = 2\pi,$$

sicché dall'ipotesi testé formulata segue la

$$(7) \quad \iint_{\mathfrak{R}} K da > 0$$

per ogni arbitraria regione \mathfrak{R} convessa e semplicemente connessa di Σ . Ciò implica senz'altro che debba essere

$$(8) \quad K > 0$$

su tutta la porzione di Σ considerata. Difatti, se ciò non fosse pur sussistendo la (7) ed essendo da non negativo, esisterebbe per ogni regione \mathfrak{R} di Σ una partizione in almeno due regioni \mathfrak{R}_+ , \mathfrak{R}_- tali che

$$\mathfrak{R}_+ \cap \mathfrak{R}_- = \emptyset, \quad \mathfrak{R}_+ \cup \mathfrak{R}_- = \mathfrak{R}$$

ed

$$\iint_{\mathfrak{R}_+} K da + \iint_{\mathfrak{R}_-} K da > 0,$$

con $K > 0$ in \mathfrak{R}_+ , $K < 0$ in \mathfrak{R}_- , sicché

$$(9) \quad \iint K da < 0$$

su \mathfrak{R}_- o per ogni regione contenuta in \mathfrak{R}_- . Basterà allora prendere una qualsiasi curva convessa in \mathfrak{R}_- per ottenere, in base ai ragionamenti dei numeri precedenti, nuovamente la (7), l'integrazione essendo ora estesa alla regione racchiusa da questa curva e quindi interna ad \mathfrak{R}_- , il che evidentemente contraddice la (9): l'ipotesi che K possa annullarsi ed assumere valori negativi in una regione della superficie conduce dunque ad un assurdo, e rimane così dimostrata la (8).

Si ha dunque il risultato seguente:

La curvatura geodetica totale soddisfa alla:

$$\oint_{\varrho} \rho_g ds < 2\pi$$

per ogni curva convessa chiusa ϱ di una porzione di superficie Σ se e soltanto se questa è in ogni punto a curvatura gaussiana positiva.

Questo teorema caratterizza pertanto le superficie in discorso.

II. λ SUPERFICIE A CURVATURA GAUSSIANA NULLA.

6. Assegnata una porzione di superficie Σ , bilatera, semplicemente connessa, di cui K denoti la curvatura gaussiana e da denoti l'elemento di area, e presa una curva chiusa \mathcal{L} (priva di nodi) tracciata su questa, di cui ρ_g sia la curvatura geodetica e ds indichi l'elemento d'arco curvilineo, riferiamoci ancora alla formula di Gauss-Bonnet

$$\iint_{\mathcal{R}} K da + \oint_{\mathcal{L}} \rho_g ds = 2\pi,$$

\mathcal{R} essendo la regione di Σ racchiusa da \mathcal{L} .

Supposto che la porzione di superficie Σ appartenga ad una superficie sviluppabile (eventualmente ad un piano), ossia che in ogni suo punto risulti $K = 0$, e che la curva \mathcal{L} non si riduca ad un arco di geodetica percorso due volte, si ha quindi

$$(10) \quad \oint_{\mathcal{L}} \rho_g ds = 2\pi,$$

sicch :

La curvatura geodetica totale $\oint_{\mathcal{L}} \rho_g ds$ di ogni curva chiusa priva di nodi tracciata sopra una superficie sviluppabile vale sempre 2π .

Segue da ci  che su una porzione semplicemente connessa di superficie sviluppabile non esiste nessuna linea geodetica che si intersechi o si chiuda.

Difatti, essendo su una geodetica ovunque $\rho_g = 0$, per una curva chiusa siffatta si avrebbe $\oint_{\mathcal{L}} \rho_g ds = 0$, in contradizione con la (10).

7. Sia ora Σ una superficie bilatera semplicemente connessa qualsivoglia, dotata di curvatura gaussiana K continua, tale che per ogni curva chiusa \mathcal{L} (priva di nodi) tracciata su essa valga la (10).

In base alla formula di Gauss-Bonnet, si avr  di conseguenza

$$(11) \quad \iint_{\mathcal{R}} K da = 0,$$

\mathcal{R} denotando la regione di Σ racchiusa da \mathcal{L} . Siccome per  la (10)   per ipotesi verificata per ogni curva chiusa \mathcal{L} sopra Σ , la (11) dovr  sussistere per ogni regione \mathcal{R} semplicemente connessa di Σ . Ci  implica che debba essere $K = 0$ in ogni punto della porzione di superficie considerata: difatti, se cos  non  , pur sussistendo la (11), e da essendo non negativo, K deve cambiare di segno in \mathcal{R} , a meno che non sia ovunque $da = 0$ e che la Σ non si riduca

ad un solo punto. Esiste dunque ancora una partizione di \mathcal{R} in *almeno* due regioni disgiunte, \mathcal{R}_+ ed \mathcal{R}_- , tali che in una sia $K > 0$, nell'altra invece $K < 0$. Sia ora $\bar{\mathcal{R}}_+$ una qualsiasi regione semplicemente connessa interamente contenuta in \mathcal{R}_+ e sia $\bar{\mathcal{L}}$ la curva chiusa che la delimita. Allora ovviamente è

$$\iint_{\bar{\mathcal{R}}_+} K da > 0$$

e quindi, per la formula di Gauss-Bonnet,

$$\oint_{\bar{\mathcal{L}}} \rho_g ds = 2\pi - \iint_{\bar{\mathcal{R}}_+} K da < 2\pi,$$

contrariamente all'ipotesi. Dunque:

Se per ogni curva chiusa priva di nodi \mathcal{L} di una superficie Σ bilatera, semplicemente connessa ed a curvatura gaussiana continua è

$$\oint_{\mathcal{L}} \rho_g ds = 2\pi,$$

la superficie Σ è necessariamente una porzione di superficie sviluppabile (o di piano).

Riunendo i risultati ottenuti sopra si conclude che:

La curvatura geodetica totale soddisfa alla

$$\oint_{\mathcal{L}} \rho_g ds = 2\pi$$

per ogni curva chiusa \mathcal{L} di una superficie se, e soltanto se, questa è una superficie sviluppabile o un piano.

Si ha così una caratterizzazione delle superficie sviluppabili.

III. - SUPERFICIE A CURVATURA GAUSSIANA NEGATIVA.

8. Consideriamo ora una superficie bilatera, semplicemente connessa ed a curvatura gaussiana continua ovunque negativa: ferme restando le notazioni introdotte ai nn. 2 e 3, si trova

$$(12) \quad A_{i-1} + A_i + A_{i+1} = \bar{A}_{i-1} + \bar{A}_{i+1} + \delta$$

avendosi ora ⁽⁷⁾ pel triangolo geodetico $P_{i-1} P_i P_{i+1}$:

$$\alpha_{i-1} + \alpha_i + \alpha_{i+1} = \pi - \delta,$$

(7) Cfr. ad esempio K. STRUBECKER, *Differentialgeometrie*, III, Sammlung Götschen, p. 133 (1959).

il difetto δ soddisfacendo alla

$$\delta = - \iint_{P_{i-1} P_i P_{i+1}} K \, da > 0.$$

Si ha quindi

$$A_i = \alpha_{i-1} + \alpha_{i+1} + \delta$$

onde segue la (12), e quindi anche la

$$(13) \quad S_n > S_{n-1};$$

sopprimendo ancora $n-3$ vertici del poligono convesso Π_n si ha dunque

$$S_n > S_{n-1} > \dots > S_3,$$

S_3 essendo la somma degli angoli esterni del triangolo geodetico $P_j P_h P_k$ a cui si giunge colla soppressione di $n-3$ vertici. Indicando con α_j, α_h ed α_k gli angoli interni di questo triangolo, si ha

$$S_3 = 3\pi - \alpha_j - \alpha_h - \alpha_k = 2\pi + \delta_1,$$

ove δ_1 ha significato analogo a quello indicato sopra per δ . Si conclude quindi che

$$S_3 > 2\pi,$$

e da ciò si deduce la

$$(14) \quad S_n > 2\pi.$$

9. Ripetendo i ragionamenti del n. 4, si ottiene ora l'ineguaglianza

$$(15) \quad \oint_{\mathcal{L}} \rho_g \, ds > 2\pi,$$

sicché:

La curvatura geodetica totale di ogni curva convessa chiusa \mathcal{L} di una superficie a curvatura gaussiana ovunque negativa è sempre superiore a 2π .

Inversamente, se

$$\oint_{\mathcal{L}} \rho_g \, ds > 2\pi$$

per ogni curva convessa chiusa \mathcal{L} di una qualunque porzione di superficie Σ bilatera, semplicemente connessa ed a curvatura gaussiana continua, allora dalla formula di Gauss-Bonnet risulta ancora

$$\iint_{\mathcal{R}} K \, da < 0$$

per ogni regione \mathcal{R} convessa di Σ , e da ciò si trae che dev'essere

$$K < 0$$

su tutta la porzione di Σ considerata. Si ha dunque che

La curvatura geodetica totale soddisfa alla

$$\oint_{\mathcal{L}} \rho_g ds > 2\pi$$

per ogni curva convessa \mathcal{L} di una porzione di superficie Σ se, e soltanto se, questa ha ovunque curvatura gaussiana negativa.

Si ha così una *caratterizzazione* di questo tipo di superficie.

Si osservi infine che il sussistere della (15) per ogni linea chiusa convessa di una superficie a curvatura gaussiana negativa fornisce (ristretto tuttavia alle sole geodetiche *convesse*) un noto teorema ⁽⁸⁾, secondo cui sopra una superficie siffatta non esiste nessuna linea geodetica ($\rho_g = 0$) che intersechi se stessa o si chiuda.

(8) Cfr. ad esempio K. STRUBECKER, *Differentialgeometrie*, III, Sammlung Götschen, p. 136 (1959).

Geometria differenziale. — *Connessioni che conservano una struttura quasi complessa.* Nota di ALDO COSSU, presentata (*) dal Socio E. BOMPIANI.

INTRODUZIONE. — In questa Nota si considera una varietà differenziabile V_{2n} dotata di una struttura quasi complessa \mathfrak{J} . Dopo aver determinato tutte le connessioni λ rispetto alle quali \mathfrak{J} è parallela, si perviene ad una relazione tra la forma di torsione delle suddette connessioni e la forma di torsione della struttura \mathfrak{J} mediante gli operatori \mathfrak{C} ed \mathfrak{N} ⁽¹⁾ definiti da \mathfrak{J} sullo spazio delle 2-forme vettoriali. Da questa relazione si deducono diverse proprietà, tra le quali: una condizione necessaria e sufficiente affinché una λ abbia per forma di torsione quella della struttura ed una condizione necessaria e sufficiente affinché la struttura \mathfrak{J} sia senza torsione. Da quest'ultima si deduce infine che condizione necessaria e sufficiente affinché \mathfrak{J} sia senza torsione occorre e basta che esista una λ semisimmetrica.

I. — ALCUNE OSSERVAZIONI SUGLI OPERATORI \mathfrak{C} ED \mathfrak{N} .

Sia T_{2n} uno spazio vettoriale reale a $2n$ dimensioni e sia \mathfrak{J} un automorfismo di T_{2n} tale che $\mathfrak{J}^2 = -E$, essendo E l'automorfismo identico, e sia A_q lo spazio delle q -forme vettoriali controvarianti definito da T_{2n} .

I. — Sia \mathfrak{C} l'automorfismo di A_q in sé definito, per ogni $\omega \in A_q$ e per ogni q -pla di vettori $v_1, \dots, v_q \in T_{2n}$, dalla relazione

$$(I.1) \quad \mathfrak{C}\omega(v_1, \dots, v_q) = \omega(\mathfrak{J}v_1, \dots, \mathfrak{J}v_q).$$

Sia \mathfrak{N} l'endomorfismo di A_q definito dalla relazione

$$(I.2) \quad \mathfrak{N}\omega(v_1, \dots, v_q) = \sum_{s=1}^q \omega(v_1, \dots, \mathfrak{J}v_s, \dots, v_q).$$

Valgono le seguenti ovvie proprietà

II. — Per ogni q -forma vettoriale ω si ha

$$(I.3) \quad \mathfrak{C}^2\omega = (-1)^q \omega, \quad \mathfrak{N}\mathfrak{C}\omega = \mathfrak{C}\mathfrak{N}\omega.$$

Per ogni 2-forma vettoriale ω è

$$(I.4) \quad \mathfrak{C}\mathfrak{N}\omega = -\mathfrak{N}\omega, \quad \mathfrak{N}^2\omega = 2\mathfrak{C}\omega - 2\omega.$$

Per ogni 1-forma vettoriale ω è

$$(I.5) \quad \mathfrak{N}\omega = \mathfrak{C}\omega.$$

(*) Nella seduta del 13 giugno 1961.

Per ogni q -forma vettoriale ω si ha

$$(1.6) \quad \mathcal{C}(\mathfrak{I}\omega) = \mathfrak{I}\mathcal{C}\omega, \quad \mathfrak{N}(\mathfrak{I}\omega) = \mathfrak{I}\mathfrak{N}\omega.$$

Le (1.3) e le (1.5) si giustificano subito ⁽¹⁾. Inoltre dalla $\mathcal{C}\mathfrak{N}\omega(v, \mu) = \mathcal{C}(\omega(\mathfrak{I}v, \mu) + \omega(v, \mathfrak{I}\mu)) = -\omega(v, \mathfrak{I}\mu) - \omega(\mathfrak{I}v, \mu) = -\mathfrak{N}\omega(v, \mu)$ si ottiene la prima delle (1.4), e dalla

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}^2\omega(v, \mu) &= \mathfrak{N}(\omega(\mathfrak{I}v, \mu) + \omega(v, \mathfrak{I}\mu)) = -\omega(v, \mu) + \\ &+ 2\omega(\mathfrak{I}v, \mathfrak{I}\mu) - \omega(v, \mu) = 2\mathcal{C}\omega(v, \mu) - 2\omega(v, \mu) \end{aligned}$$

si ricava la seconda delle (1.4).

III. - *Affinché una 2-forma vettoriale ω si annulli in ogni coppia di vettori $v, \mathfrak{I}v$ occorre e basta che sia*

$$(1.7) \quad \omega = -\mathcal{C}\omega.$$

Infatti, se $\omega(v, \mathfrak{I}v) = 0$, deve anche essere

$$\begin{aligned} 0 &= \omega(v - \mathfrak{I}\mu, \mathfrak{I}v + \mu) = \omega(v, \mathfrak{I}v) + \omega(v, \mu) + \omega(-\mathfrak{I}\mu, \mathfrak{I}v) + \\ &+ \omega(-\mathfrak{I}\mu, \mu) = \omega(v, \mu) + \omega(\mathfrak{I}v, \mathfrak{I}\mu), \end{aligned}$$

e quindi la (1.7). Viceversa, se vale la (1.7), si ha per ogni $v, \mu \in T_{2n}$

$$\omega(v, \mu) = -\omega(\mathfrak{I}v, \mathfrak{I}\mu)$$

e quindi per $\mu = \mathfrak{I}v$

$$\omega(v, \mathfrak{I}v) = \omega(\mathfrak{I}v, v) = -\omega(v, \mathfrak{I}v).$$

Ogni coppia di vettori $v, \mathfrak{I}v$ individua un sottospazio *caratteristico* T_2 ⁽²⁾ a due dimensioni appartenente a T_{2n} . Quindi la III è equivalente alla

IV. - *Affinché una 2-forma vettoriale ω si annulli nelle coppie di vettori appartenenti ai T_2 caratteristici occorre e basta che sia verificata la (1.7).*

V. - *Ogni soluzione dell'equazione (1.7) nella 2-forma incognita ω è data da*

$$(1.8) \quad \omega = \alpha - \mathcal{C}\alpha,$$

con α 2-forma vettoriale arbitraria.

Infatti la (1.8) soddisfa alla (1.7), tenendo conto della prima delle (1.3).

Inoltre ogni soluzione ω delle (1.7) verifica la relazione

$$\omega = \frac{1}{2}\omega - \frac{1}{2}\mathcal{C}\omega$$

che rientra nella (1.8) ponendo $\alpha = \omega/2$.

(1) [3], p. 207.

(2) [4], p. 8.

VI. — Se ω è una 2-forma vettoriale, le relazioni

a) $\mathfrak{I}\omega(v, \mu) + \omega(\mathfrak{I}v, \mu) = 0$ oppure $\omega(v, \mu) = \mathfrak{I}\omega(\mathfrak{I}v, \mu)$ per ogni $v, \mu \in T_{2n}$;

b) $2\omega = \mathfrak{I} \circ \mathfrak{I}\omega$;

c) $3\omega + \mathfrak{C}\omega - \mathfrak{I} \circ \mathfrak{I}\omega = 0$;

sono equivalenti.

Infatti dalla a) si ha anche

$$\omega(v, \mu) = \mathfrak{I}\omega(v, \mathfrak{I}\mu)$$

e quindi

$$2\omega(v, \mu) = \mathfrak{I}\omega(\mathfrak{I}v, \mu) + \mathfrak{I}\omega(v, \mathfrak{I}\mu)$$

che, tenendo conto di (1.2), dà la b).

Dalla b) si ha applicando l'operatore \mathfrak{C} e tenendo conto di (1.6) ed (1.4)

$$(1.9) \quad 2\mathfrak{C}\omega = \mathfrak{I} \circ \mathfrak{C}\mathfrak{I}\omega = -\mathfrak{I} \circ \mathfrak{I}\omega = -2\omega,$$

cioè $\omega = -\mathfrak{C}\omega$, che sommata alla b) fornisce la c).

Applicando \mathfrak{I} alla c) si ha

$$3\mathfrak{I}\omega + \mathfrak{I} \circ \mathfrak{C}\omega + \mathfrak{I}\mathfrak{I}\omega = 0$$

e quindi

$$(1.10) \quad 3\mathfrak{I}\omega(v, \mu) + \mathfrak{I}\omega(\mathfrak{I}v, \mathfrak{I}\mu) + \omega(\mathfrak{I}v, \mu) + \omega(v, \mathfrak{I}\mu) = 0,$$

mentre per la c)

$$3\omega(v, \mu) + \omega(\mathfrak{I}v, \mathfrak{I}\mu) - \mathfrak{I}\omega(\mathfrak{I}v, \mu) - \mathfrak{I}\omega(v, \mathfrak{I}\mu) = 0,$$

sostituendo in quest'ultima $\mathfrak{I}v$ a v si ottiene

$$3\omega(\mathfrak{I}v, \mu) - \omega(v, \mathfrak{I}\mu) + \mathfrak{I}\omega(v, \mu) - \mathfrak{I}\omega(\mathfrak{I}v, \mathfrak{I}\mu) = 0,$$

che addizionata alla (1.10) fornisce la a).

Si osservi che

VII. — Ogni 2-forma vettoriale ω verificante una delle relazioni a), b), c) si annulla sempre nelle coppie di vettori appartenenti ai T_2 caratteristici.

Infatti dalla b) si ha la (1.9), ma non viceversa.

VIII. — La più generale 2-forma ω che verifica la a) si costruisce a partire da un'arbitraria 2-forma α mediante la

$$(1.11) \quad \omega = \alpha - \mathfrak{C}\alpha + \mathfrak{I} \circ \mathfrak{I}\alpha.$$

Infatti per le (1.4) ed (1.6)

$$\begin{aligned} 2\omega - \mathfrak{I} \circ \mathfrak{I}\omega &= 2\alpha - 2\mathfrak{C}\alpha + 2\mathfrak{I} \circ \mathfrak{I}\alpha - \mathfrak{I} \circ \mathfrak{I}\mathfrak{I}\alpha + \mathfrak{I} \circ \mathfrak{C}\mathfrak{I}\alpha - \\ &= \mathfrak{I} \circ \mathfrak{I}\mathfrak{I}\alpha = \mathfrak{I} \circ \mathfrak{I}^2\alpha = \mathfrak{I} \circ \mathfrak{I}^2\alpha + 2\mathfrak{I} \circ \mathfrak{I}\mathfrak{I}\alpha - 2\mathfrak{I} \circ \mathfrak{I}\mathfrak{I}\alpha + \mathfrak{I} \circ \mathfrak{I}^2\alpha = 0. \end{aligned}$$

Inoltre ogni ω che verifica la a) verifica anche la c) e quindi la

$$\omega = \frac{1}{4}(\omega - \mathfrak{C}\omega + \mathfrak{I} \circ \mathfrak{I}\omega),$$

che è del tipo (1.11) se si pone $\alpha = \omega/4$.

Segue subito che

IX. - Se ω ed α sono 2-forme in relazione (I.11), α verifica la a) se e soltanto se è $\alpha = \omega/4$.

In modo analogo a quanto s'è fatto nei casi precedenti e tenendo conto che ω verifica la a), si prova che

X. - La più generale soluzione dell'equazione (I.11), ove ω verifica la a), nella 2-forma incognita α si costruisce a partire da un'arbitraria 2-forma β mediante la

$$(I.12) \quad \alpha = 2\beta - \mathfrak{I} \circ \mathfrak{N} \beta + \frac{1}{4} \omega.$$

Si ha anche che

XI. - Se ω ed α sono 2-forme in relazione (I.11), α verifica la (I.7) se e soltanto se è valida la

$$(I.13) \quad 2\alpha + \mathfrak{I} \circ \mathfrak{N} \alpha = \omega.$$

Segue allora che

XII. - Se ω verifica la a), la più generale soluzione dell'equazione (I.13) nella 2-forma incognita α si costruisce a partire da un'arbitraria 2-forma β mediante la

$$(I.14) \quad \alpha = \beta - \mathcal{C} \beta - \mathfrak{I} \circ \mathfrak{N} \beta + \frac{1}{4} \omega.$$

Si osservi che le proposizioni IX, X, XI, XII continuano ad essere valide anche nel caso in cui è $\omega = 0$. In modo più preciso

XIII. - Non esiste alcuna 2-forma α , non nulla, che verifica la a) e la

$$(I.15) \quad \alpha - \mathcal{C} \alpha + \mathfrak{I} \circ \mathfrak{N} \alpha = 0.$$

Ogni α che verifica la

$$(I.16) \quad 2\alpha + \mathfrak{I} \circ \mathfrak{N} \alpha = 0$$

verifica anche la (I.15) e la (I.7); e viceversa.

Le soluzioni delle equazioni (I.15) e (I.16) nella 2-forma incognita α si costruiscono rispettivamente a partire da un'arbitraria 2-forma β mediante le

$$(I.17) \quad \alpha = 2\beta - \mathfrak{I} \circ \mathfrak{N} \beta$$

$$(I.18) \quad \alpha = \beta - \mathcal{C} \beta - \mathfrak{I} \circ \mathfrak{N} \beta.$$

Le (I.17) e (I.18) si giustificano subito osservando che esse verificano rispettivamente la (I.15) e la (I.16); viceversa ogni α verificante la (I.15) si può sempre scrivere secondo la

$$(I.17') \quad \alpha = \frac{3\alpha + \mathcal{C}\alpha}{4} - \mathfrak{I} \circ \mathfrak{N} \left(\frac{3\alpha + \mathcal{C}\alpha}{8} \right),$$

ed ogni α che verifica la (I.18) si può scrivere secondo la

$$(I.18') \quad \alpha = \frac{\alpha}{4} - \mathcal{C} \frac{\alpha}{4} - \mathfrak{I} \circ \mathfrak{N} \frac{\alpha}{4}.$$

Una soluzione particolare abbastanza interessante dell'equazione (1.15), che si ricollega alla forma di torsione di una connessione semisimmetrica⁽³⁾, si ha quando si considera una 2-forma vettoriale α tale che per ogni $v, \mu \in T_{2n}$ è

$$(1.19) \quad \alpha(v, \mu) \wedge v \wedge \mu = 0.$$

Si prova allora facilmente che esiste una 1-forma a valori scalari φ , tale che

$$(1.20) \quad \alpha(v, \mu) = \mu\varphi(v) - v\varphi(\mu).$$

Si verifica subito mediante la (1.20) che la α in questione è soluzione di (1.15).

Una forma α del tipo (1.20) non può mai verificare la (1.7), esistono però dei T_2 caratteristici nei quali essa si annulla; essi sono soltanto quelli definiti da vettori nei quali la 1-forma φ è nulla. Infatti, come è subito visto, α si annulla in v, μ se e soltanto se $\varphi(v) = \varphi(\mu) = 0$.

2. - SULLA TORSIONE DELLE CONNESSIONI RISPETTO ALLE QUALI È PARALLELA LA STRUTTURA \mathcal{J} DI UNA VARIETÀ QUASI COMPLESSA.

Sia V_{2n} una varietà differenziabile di classe C^v munita di una struttura quasi complessa \mathcal{J} di classe C^u ($u < v$), essendo \mathcal{J} un campo di automorfismi sugli spazi tangenti T_x tale che $\mathcal{J}^2 = -E$. Rimane quindi definito canonicamente su V_{2n} un campo h di tensori di specie (1,1) di classe C^u .

Sia V_{2n} ricoperta mediante intorno U muniti di coriferimenti $\theta_x^U = (\theta^i)$ ($i = 1, \dots, 2n$) per ogni $x \in U$. Il campo h è definito in ogni U da un campo di matrici h_U non singolari $2n \times 2n$, tale che $h_U^2 = -I$, con I matrice unitaria. Poiché gli elementi della matrice $h_U(x)$ sono le componenti del tensore $h(x)$ per $x \in U$, se V è un altro intorno munito di coriferimenti θ_x^V e se per ogni $x \in U \cap V$ è $\theta_x^U = A_V^U \theta_x^V$, con A_V^U campo di matrici non singolari $2n \times 2n$ di classe C^{v-1} definito in $U \cap V$, deve aversi in $U \cap V$

$$h_V = A_U^V h_U A_V^U$$

essendo $A_U^V = \bar{A}_V^U$.

Se λ è una connessione su V_{2n} rispetto alla quale il tensore h è parallelo, si dice che la struttura \mathcal{J} è parallela rispetto a λ ⁽⁴⁾.

Se λ_U è la matrice della connessione in U , deve quindi aversi

$$(2.1) \quad \nabla^\lambda h_U = dh_U + \lambda_U h_U - h_U \lambda_U = 0.$$

Se \mathcal{J} è parallela rispetto a λ , la (2.1) deve essere verificata in ogni intorno U del ricoprimento considerato. Sia γ una connessione senza torsione (simmetrica) su V_{2n} e sia γ_U la matrice di γ in U , deve allora essere

$$(2.2) \quad \lambda_U = \gamma_U + \pi_U,$$

(3) [5], p. 126.

(4) [1], p. 17.

con π_U matrice che definisce in U una 1-forma differenziale tensoriale di specie $(1,1)$.

Per (2.2) la (2.1) è equivalente alla

$$(2.3) \quad \overset{\gamma}{\nabla} h_U = h_U \pi_U - \pi_U h_U.$$

La (2.3) è verificata, come subito si prova, ponendo

$$\pi_U = \frac{1}{2} \overset{\gamma}{\nabla} h_U h_U;$$

quindi una delle connessioni λ rispetto alle quali \mathfrak{F} è parallela è definita in ogni U dalla matrice

$$(2.4) \quad \lambda_U = \gamma_U + \overset{\gamma}{\nabla} h_U h_U.$$

Se a γ_U nella (2.4) si sostituisce $\gamma_U + \rho_U$, con ρ_U matrice che definisce in U una 1-forma differenziale tensoriale arbitraria di specie $(1,1)$, si ha

$$(2.5) \quad \lambda_U = \gamma_U + \frac{1}{2} (\rho_U - h_U \rho_U h_U + \overset{\gamma}{\nabla} h_U h_U)$$

che verifica la (2.1). La (2.5) determina la più generale connessione λ per cui \mathfrak{F} è parallela. Infatti, se π_U è soluzione della (2.3), si ha

$$\pi_U = -h_U \pi_U h_U + \overset{\gamma}{\nabla} h_U h_U$$

e quindi

$$\pi_U = \frac{1}{2} (\pi_U - h_U \pi_U h_U + \overset{\gamma}{\nabla} h_U h_U)$$

che sostituita in (2.2) dà un'espressione di λ_U del tipo (2.5). Riepilogando

I. - Su una V_{2n} , in cui è definita la struttura quasi complessa \mathfrak{F} , ogni connessione λ , rispetto alla quale \mathfrak{F} è parallela, è definita in ogni intorno U dalla matrice (2.5), ove γ è una connessione senza torsione e ρ una 1-forma differenziale tensoriale di specie $(1,1)$.

Se si indicano rispettivamente con $\lambda_p^i, \gamma_p^i, \rho_p^i, h_p^i$ gli elementi delle matrici $\lambda_U, \gamma_U, \rho_U, h_U$, dalla (2.5) si ha

$$(2.6) \quad \lambda_p^i = \gamma_p^i + \frac{1}{2} (\rho_p^i - h_p^i \rho_p^i h_p^i + \overset{\gamma}{\nabla} h_p^i h_p^i).$$

Si ponga

$$(2.7) \quad \rho_{pj}^i = R_{pj}^i \theta^j, \quad \overset{\gamma}{\nabla} h_p^i = \overset{\gamma}{\nabla}_j h_p^i \theta^j, \quad A_{pj}^i = R_{[pj]}^i, \quad S_{pj}^i = R_{(pj)}^i,$$

essendo R_{pj}^i le componenti di un tensore R di specie $(1,2)$ ed A_{pj}^i ed S_{pj}^i le componenti della parte alternante e simmetrica di R . Se si indicano con λ_{pj}^i e γ_{pj}^i i coefficienti delle connessioni λ e γ in U , si ha dalle (2.6) e (2.7)

$$(2.8) \quad \lambda_{pj}^i = \gamma_{pj}^i + \frac{1}{2} (A_{pj}^i + S_{pj}^i - h_p^i A_{pj}^i h_p^i - h_p^i S_{pj}^i h_p^i + \overset{\gamma}{\nabla}_j h_p^i h_p^i),$$

da cui, introducendo la connessione senza torsione $\bar{\gamma}$ definita in U dai coefficienti

$$\bar{\gamma}_{pj}^i = \gamma_{pj}^i + S_{pj}^i,$$

si ha

$$(2.8') \quad \lambda_{pj}^i = \bar{\gamma}_{pj}^i + \frac{1}{2} (A_{pj}^i - h_t^i A_{sj}^t h_p^s + \bar{\nabla}_j h_s^i h_p^s),$$

essendo

$$\bar{\nabla}_j h_s^i = \nabla_j h_s^i + S_{rj}^i h_s^r - S_{sj}^r h_r^i.$$

Dalle (2.8') si ottiene allora subito che le componenti Σ^i in U della forma di torsione Σ di λ sono date dalle

$$(2.9) \quad \Sigma^i = \frac{1}{2} (A_{pj}^i - h_t^i A_{sj}^t h_p^s + h_t^i \bar{\nabla}_{[j} h_{p]}^t) \theta^j \wedge \theta^p,$$

Siano α e β le 2-forme vettoriali controvarianti definite in U dalle componenti

$$(2.10) \quad \alpha^i = A_{pj}^i \theta^p \wedge \theta^j, \quad \beta^i = \bar{\nabla}_{[p} h_{j]}^i \theta^p \wedge \theta^j,$$

si ha allora per le componenti di $\mathfrak{I} \circ \mathfrak{N} \alpha$ e $\mathfrak{I} \circ \beta$

$$(2.11) \quad (\mathfrak{I} \circ \mathfrak{N} \alpha)^i = 2 h_r^i A_{s[j}^r h_{p]}^s \theta^p \wedge \theta^j, \quad (\mathfrak{I} \circ \beta)^i = h_r^i \bar{\nabla}_{[p} h_{j]}^r \theta^p \wedge \theta^j.$$

Dalle (2.9), (2.10), (2.11) segue quindi

$$(2.11') \quad \Sigma = -\frac{1}{2} (\alpha - \frac{1}{2} \mathfrak{I} \circ \mathfrak{N} \alpha + \mathfrak{I} \circ \beta),$$

cioè

$$(2.12) \quad 4\Sigma + 2\alpha - \mathfrak{I} \circ \mathfrak{N} \alpha + 2\mathfrak{I} \circ \beta = 0.$$

Applicando alla (2.12) gli operatori \mathcal{C} e $\mathfrak{I} \circ \mathfrak{N}$ si ottengono le

$$(2.13) \quad 4\mathcal{C}\Sigma + 2\mathcal{C}\alpha + \mathfrak{I} \circ \mathfrak{N} \alpha + 2\mathfrak{I} \circ \mathcal{C}\beta = 0$$

$$(2.14) \quad 4\mathfrak{I} \circ \mathfrak{N} \Sigma + 2\mathfrak{I} \circ \mathfrak{N} \alpha + 2(\mathcal{C}\alpha - \alpha) - 2\mathfrak{N}\beta = 0.$$

Sottraendo dalla (2.12) la (2.13) e sommando la (2.14) si ha

$$(2.15) \quad 2(\Sigma - \mathcal{C}\Sigma + \mathfrak{I} \circ \mathfrak{N} \Sigma) = \mathfrak{N}\beta + \mathfrak{I} \circ \mathcal{C}\beta - \mathfrak{I} \circ \beta.$$

Se si pone

$$(2.16) \quad 8T = \mathfrak{N}\beta + \mathfrak{I} \circ \mathcal{C}\beta - \mathfrak{I} \circ \beta,$$

si riconosce subito mediante le (2.10) e (2.11) che le componenti T^i della forma T sono

$$T^i = -\frac{1}{4} (\bar{\nabla}_{[r} h_{p]}^i h_j^r - \bar{\nabla}_{[r} h_{j]}^i h_p^r) \theta^p \wedge \theta^j.$$

Poiché

$$(2.16') \quad t_{ij}^i = \frac{1}{2} (\bar{\nabla}_{[r} h_{j]}^i h_j^r - \bar{\nabla}_{[r} h_{j]}^r h_j^i) \quad (5)$$

sono le componenti del tensore di torsione della struttura \mathfrak{I} , T è la forma di torsione della struttura stessa. Segue pertanto dalle (2.15)

II. - Se λ è una connessione rispetto alla quale \mathfrak{I} è parallela, la forma di torsione Σ di λ soddisfa alla

$$(2.17) \quad \Sigma - \mathcal{C}\Sigma + \mathfrak{I} \circ \mathfrak{N}\Sigma = 4T \quad (6),$$

essendo T la forma di torsione della struttura quasi complessa.

Dalla (2.17) o dalla (2.16) si ottengono, tenendo conto della VIII del § 1, le note ⁽⁷⁾ proprietà di T , cioè T verifica le proprietà *a*), *b*), *c*) della VI del § 1 e quindi si annulla (VII, § 1), in ogni $x \in V_{2n}$, nelle coppie di vettori appartenenti ai sottospazi caratteristici a due dimensioni di T_x .

Dalla XI del § 1 si ha

III. - Se λ è una connessione rispetto alla quale \mathfrak{I} è parallela, la forma di torsione Σ di λ si annulla, in ogni $x \in V_{2n}$, nelle coppie di vettori appartenenti ai T_x caratteristici di T_x , se e solo se

$$(2.18) \quad 2\Sigma + \mathfrak{I} \circ \mathfrak{N}\Sigma = 4T.$$

Dalla (2.17) e per la IX del § 1 si ha invece

IV. - Se λ è una connessione, rispetto alla quale \mathfrak{I} è parallela, la forma di torsione Σ di λ coincide con la forma di torsione T della \mathfrak{I} , se e solo è

$$(2.19) \quad 2\Sigma = \mathfrak{I} \circ \mathfrak{N}\Sigma,$$

cioè se e solo se in ogni $x \in V_{2n}$ e per ogni coppia di vettore $\mu, \nu \in T_x$ si ha

$$(2.20) \quad \Sigma(\mu, \nu) = \mathfrak{I}\Sigma(\mathfrak{I}\mu, \nu).$$

Si osservi che se è valida la (2.18), cioè se

$$(2.21) \quad \Sigma + \mathcal{C}\Sigma = 0,$$

deve anche aversi, sostituendo la (2.11) nella (2.21),

$$\alpha + \mathfrak{I}\beta + \mathcal{C}(\alpha + \mathfrak{I}\beta) = 0$$

e quindi, tenendo conto della V del § 1, deve essere

$$(2.22) \quad \alpha = \bar{\alpha} - \mathcal{C}\bar{\alpha} - \mathfrak{I}\beta.$$

Se ci riferiamo allora ad un intorno U munito di coriferimenti, nel quale i coefficienti della connessione λ sono dati dalle (2.8), per le (2.22)

(5) [2] p. 60; si ricordi che il tensore di torsione di \mathfrak{I} si esprime nel suddetto modo a partire da un'arbitraria connessione senza torsione.

(6) Alla stessa relazione si poteva arrivare dalla (2.11') mediante la proposizione X del § 1.

(7) [2], p. 77; [1], p. 25.

e le (2.10) si ottengono i coefficienti della λ per cui Σ verifica la (2.21), ponendo

$$(2.23) \quad A_{pj}^i = 2 B_{pj}^i - 2 B_{rs}^i h_p^r h_j^s - h_i^i \bar{\nabla}_{[p} h_{j]}^i,$$

essendo B_{pj}^i le componenti di un campo di tensori B , alternanti rispetto agli indici di covarianza, ed essendo le componenti $\bar{\alpha}^i$ della 2-forma differenziale vettoriale $\bar{\alpha}$ definite da $\bar{\alpha}^i = 2 B_{pj}^i \theta^p \wedge \theta^j$. Si ha in tal modo sostituendo la (2.23) in (2.8')

$$(2.24) \quad \lambda_{pj}^i = \gamma_{pj}^i + B_{pj}^i - B_{rs}^i h_p^r h_j^s - 2 h_i^i B_{s[j}^i h_{p]}^s - \frac{1}{2} (\bar{\nabla}_{[r} h_{j]}^i h_p^r + h_i^i \bar{\nabla}_{(p} h_{j)}^i),$$

essendo $\bar{\gamma}_{pj}^i = \gamma_{pj}^i + S_{pj}^i$.

Se si pone

$$Q_{pj}^i = \frac{1}{4} S_{pj}^i + B_{pj}^i,$$

risultando quindi Q un arbitrario campo tensoriale di specie (1,2), le (2.24) si possono scrivere secondo le

$$(2.25) \quad \lambda_{pj}^i = \gamma_{pj}^i + Q_{pj}^i - Q_{rs}^i h_p^r h_j^s - h_i^i Q_{s[j}^i h_{p]}^s - h_i^i Q_{ps}^i h_j^s - \frac{1}{2} (\bar{\nabla}_{[r} h_{j]}^i h_p^r + h_i^i \bar{\nabla}_{(p} h_{j)}^i).$$

Se invece è $\Sigma = T$, cioè se è valida la (2.19) o la (2.20), per la (2.12) si ha

$$(2.26) \quad 4T + 2\alpha - \mathfrak{I} \circ \mathfrak{N} \alpha + 2\mathfrak{I} \circ \beta = 0.$$

Poiché, come subito si verifica, è

$$2\mathfrak{I} \circ \beta = 2\mathfrak{I} \circ \mathfrak{C} \beta - 8T = 2\mathfrak{I} \circ \mathfrak{C} \beta - \mathfrak{N} \beta - 4T,$$

sostituendo in (2.26) si ha

$$2(\alpha + \mathfrak{I} \circ \mathfrak{C} \beta) - \mathfrak{I} \circ \mathfrak{N}(\alpha + \mathfrak{I} \circ \mathfrak{C} \beta) = 0.$$

Tenendo conto della VIII del § 1, deve così essere

$$\alpha = \bar{\alpha} - \mathfrak{C} \bar{\alpha} + \mathfrak{I} \circ \mathfrak{N} \bar{\alpha} - \mathfrak{I} \circ \mathfrak{C} \beta;$$

passando allora alle componenti dei tensori definiti canonicamente da α , $\bar{\alpha}$, β e sostituendo in (2.8) si ha

$$(2.27) \quad \lambda_{pj}^i = \gamma_{pj}^i + \frac{1}{4} (S_{pj}^i - 2 h_i^i S_{s[j}^i h_{p]}^s - S_{rs}^i h_p^r h_j^s - 2 \bar{\nabla}_{[r} h_{j]}^i h_p^r - h_i^i \bar{\nabla}_{(p} h_{j)}^i).$$

Si può facilmente osservare che le (2.27) si possono ottenere dalle (2.24) annullando il tensore B .

Riepilogando:

V. - In una V_{2n} in cui è definita la struttura \mathfrak{I} , ogni connessione λ , rispetto alla quale \mathfrak{I} è parallela e tale che la forma di torsione Σ si annulli, in ogni $x \in V_{2n}$, nelle coppie di vettori appartenenti a T_x caratteristici di T_x , è definita in ogni intorno U dai coefficienti (2.25), essendo Q un campo tensoriale arbitrario di specie (1,2) e γ un'arbitraria connessione senza torsione.

Invece le connessioni λ , che costituiscono una sottoclasse delle precedenti, per le quali la forma di torsione Σ coincide con la forma T di torsione della struttura \mathfrak{I} , sono definite in ogni U dai coefficienti (2.27), essendo S un arbitrario campo tensoriale di specie (1,2) simmetrico rispetto agli indici di covarianza.

3. - CASO DI UNA STRUTTURA SENZA TORSIONE.

Se $T = 0$ si ha per la (2.17)

$$(3.1) \quad \Sigma - \mathcal{C}\Sigma + \mathfrak{I} \circ \mathfrak{N}\Sigma = 0;$$

viceversa, se esiste una connessione λ rispetto a cui \mathfrak{I} è parallela e la cui forma di torsione verifica la (3.1), è $T = 0$. Inoltre, per il primo capoverso della XIII del § 1, è subito visto che, se $T = 0$, non possono esistere connessioni rispetto a cui \mathfrak{I} è parallela e con forma di torsione non nulla verificante la (2.20). Ciò è d'accordo con la IV, perché se $T = 0$ la (2.20) è valida se $\Sigma = 0$, e viceversa. Se $T = 0$ le (2.20) si possono scrivere tenendo conto delle (2.16') secondo le

$$(3.2) \quad \lambda_{pj}^i = \gamma_{pj}^i + Q_{pj}^i - Q_{rs}^i h_p^r h_j^s - h_i^i Q_{sj}^s h_p^s - h_i^i Q_{ps}^s h_j^s - \frac{1}{4} (\nabla_r h_{(p}^i h_{j)}^r + 3 h_i^i \nabla_{(p} h_{j)}^i).$$

Analogamente le (2.27) si scriveranno secondo le

$$(3.3) \quad \lambda_{pj}^i = \gamma_{pj}^i + \frac{1}{4} (S_{pj}^i - 2 h_i^i S_{r(j}^r h_{p)}^r - S_{rs}^i h_p^r h_j^s - \nabla_r h_{(p}^i h_{j)}^r - 3 h_i^i \nabla_{(p} h_{j)}^i).$$

Se γ è una connessione senza torsione rispetto a cui \mathfrak{I} è parallela, dalle (2.5) si ha in U

$$(3.4) \quad \lambda_U = \gamma_U + \tau_U - h_U \tau_U h_U,$$

avendo posto $\rho_U = 2 \tau_U$.

Se si introduce la 1-forma differenziale tensoriale di specie (1,1) definita in U dalla matrice $\tau_U = (\tau_p^i)$ con $\tau_p^i = Q_{pj}^i \theta^j$, e se si estende in modo ovvio l'operatore \mathcal{C} alle q -forme differenziali tensoriali, si può porre

$$\mathcal{C}\tau_U = (\mathcal{C}\tau_p^i).$$

In tal caso, se γ è ancora una connessione senza torsione rispetto a cui \mathfrak{I} è parallela, dalle (3.2) si ha

$$(3.5) \quad \lambda_U = \gamma_U + \tau_U - \mathcal{C}\tau_U h_U - h_U \tau_U h_U - h_U \mathcal{C}\tau_U.$$

Ad una formola identica si arriva partendo dalle (3.3), se si pone $\tau_p^i = \frac{1}{4} S_{pj}^i \theta^j$.

Riepilogando:

I. - Affinché la struttura \mathfrak{I} sia senza torsione occorre e basta che esista una connessione λ , rispetto a cui \mathfrak{I} è parallela, tale che la forma Σ di torsione verifichi la (3.1)⁽⁸⁾.

(8) La condizione espressa in [3], p. 239, rientra nella suddetta condizione.

Se \mathfrak{F} è integrabile ogni connessione λ rispetto a cui \mathfrak{F} è parallela ha una forma di torsione soddisfacente alla (3.1).

Le connessioni λ senza torsione rispetto alle quali \mathfrak{F} è parallela sono definite in ogni U dai coefficienti (3.3).

Se γ è una connessione senza torsione rispetto a cui \mathfrak{F} è parallela, ogni altra connessione λ rispetto a cui \mathfrak{F} è parallela è definita in ogni U dalle matrici (3.4). Quelle connessioni invece aventi forma di torsione verificante la relazione $\Sigma = -\mathcal{C}\Sigma$ sono definite dalle (3.5).

Se esiste una connessione λ semisimmetrica, rispetto a cui \mathfrak{F} è parallela, cioè una connessione λ con forma di torsione Σ tale che in ogni $x \in V_{2n}$ sia $\Sigma(\mu, \nu) \wedge \mu \wedge \nu = 0$ per ogni $\mu, \nu \in T_x$ ⁽³⁾, per quanto s'è visto nel § 1, Σ soddisfa alla (3.1) ed è quindi $T = 0$.

Se λ è una connessione senza torsione rispetto a cui \mathfrak{F} è parallela, ogni connessione $\bar{\lambda}$, definita in U dalla matrice $\bar{\lambda}_U = \lambda_U + \pi_U$ con $\pi_U = (\delta_p^i \varphi)$ ed essendo φ una 1-forma differenziale, è semisimmetrica e rispetto ad essa \mathfrak{F} è parallela.

Anzi è facile provare che ogni connessione semisimmetrica rispetto a cui \mathfrak{F} è parallela si ottiene sommando al secondo membro di (3.3) il termine $\delta_p^i \varphi_j$, con φ_j componenti di una vettore covariante.

Concludendo:

II. — *Affinché la struttura \mathfrak{F} sia integrabile occorre e basta che esista una connessione λ semisimmetrica rispetto alla quale \mathfrak{F} è parallela. Se \mathfrak{F} è integrabile, ogni connessione semisimmetrica rispetto a cui \mathfrak{F} è parallela è definita in ogni U dalla matrice*

$$\lambda_U = \gamma_U + \tau_U - \mathcal{C}\tau_U h_U - h_U \tau_U h_U - h_U \mathcal{C}\tau_U + \pi_U,$$

essendo γ una connessione senza torsione rispetto a cui \mathfrak{F} è parallela, essendo $\tau_U = (S_{pj}^i \theta^j)$ con S_{pj}^i componenti di un tensore di specie (1,2) simmetrico e $\pi_U = (\delta_p^i \varphi)$ con φ 1-forma differenziale.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] B. ECKMANN, *Cours sur les variétés complexes*, C.I.M.E., 1956.
- [2] A. FROLICHER, *Zur Differentialgeometrie der komplexen Strukturen*, «Math. Annalen», Bd. 129 (1955).
- [3] A. LICHNEROWICZ, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, C.N.R., Ed. Cremonese, 1955.
- [4] E. MARTINELLI, *Sulle varietà a struttura complessa o quasi complessa*, Conferenze Sem. Mat. dell'Univer. di Bari, 52-53 (1960).
- [5] I. A. SCHOUTEN, *Ricci-Calculus*, Springer-Verlag, Berlin 1954.

Meccanica. — *Proprietà di una particella di prova nel campo gravitazionale einsteiniano.* Nota di EMILIO CLAUSER, presentata (*) dal Socio B. FINZI.

Dalle equazioni di puro campo della teoria gravitazionale einsteiniana, Infeld e Schild hanno dedotto la legge della geodetica per una particella di prova mediante un opportuno processo limite ⁽¹⁾.

A tal fine, essi identificano innanzitutto la particella gravitante ad una singolarità del tensore fondamentale, la quale descriva una linea oraria temporale, e la contraddistinguono mediante uno scalare positivo m indipendente dalle coordinate della singolarità stessa. Ogni spazio-tempo relativo ad una particella gravitante e ad altri corpi, dipende manifestamente dal parametro m ed ospita la linea oraria della particella stessa. Infeld e Schild considerano i limiti degli elementi precedenti allorché m tende a zero: nell'ipotesi che lo spazio-tempo tenda al *campo base* dal quale è assente la particella gravitante, la linea oraria L così ottenuta costituisce la linea oraria della *particella di prova*. L è linea di regolarità del campo base, a sua volta soluzione delle equazioni gravitazionali di puro campo.

Il problema di dedurre la legge di moto di una particella di prova dalle equazioni gravitazionali assume così un preciso significato. Gli autori precedenti lo affrontano ritenendo innanzitutto sviluppabile in serie di potenze di m il tensore fondamentale dello spazio-tempo di parametro m ; esso risulta così rappresentato dalla somma del tensore fondamentale del campo base con una serie di potenze di m , intere e positive. Le equazioni di campo che ne conseguono si spezzano allora in due gruppi: quello costituito dalle equazioni gravitazionali di puro campo, che reggono il campo base, e quello che raggruppa i termini dipendenti dal parametro m . Il comportamento di una particella di prova nel campo base è allora individuato dal sistema di equazioni che risultano da questo secondo gruppo, dividendone ambo i membri per m e facendo ivi successivamente tendere a zero m stesso. Condizione necessaria di integrabilità di quest'ultimo sistema è appunto che la legge oraria della particella di prova, identificata ad un polo di ordine -1 , sia una geodetica del campo base.

La precedente ricerca di Infeld e Schild è stata da me successivamente completata ⁽²⁾.

(*) Nella seduta del 13 giugno 1961.

(1) L. INFELD e R. SCHILD, *On the Motion of Test Particles in General Relativity*, «Revs. of Modern Physics», 21, 408 (1949).

(2) *Condizioni di integrabilità nel campo gravitazionale einsteiniano e moto di una particella di prova*, «Annali di Matematica pura ed applicata» (IV), vol. LVI (1961).

In questa Nota dimostro che il sistema costituito dalle equazioni che individuano il campo base e da quelle che danno il moto della particella di prova comporta la medesima propagazione ondosa: quella del solo campo base. In altre parole: mentre la particella di prova produce genericamente un'alterazione delle discontinuità attraverso i fronti d'onda, il moto di questi non subisce alterazione alcuna, perché rigorosamente inalterate restano le varietà caratteristiche del campo base. Inalterate restano pure le linee bicaratteristiche, che ancora sono geodetiche del campo base, precisamente come la linea oraria L che dà il moto della particella di prova, allorché essa è rappresentata da un polo di prim'ordine.

Dimostro infine che anche il particolare fenomeno costituito dal moto di una particella di prova, comunque rappresentata, induce una perturbazione nel campo base; questa perturbazione si propaga essa pure con i precedenti fronti d'onda.

1. — LE EQUAZIONI DI CAMPO IN PRESENZA DI UNA PARTICELLA DI PROVA.

Le equazioni di puro campo della teoria gravitazionale einsteiniana sono le seguenti:

$$(1) \quad G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0,$$

$$(2) \quad g_{\alpha\beta/\nu} \equiv g_{\alpha\beta,\nu} - g_{\alpha\sigma} \Gamma_{\nu\beta}^{\sigma} - g_{\sigma\beta} \Gamma_{\alpha\nu}^{\sigma} = 0;$$

nella (1)

$$(3) \quad R_{\mu\nu} \equiv \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu,\lambda}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\sigma}^{\sigma}$$

è il tensore contratto di Riemann, costruito con i simboli di Christoffel di seconda specie

$$(4) \quad \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\varrho} (g_{\mu\varrho,\nu} + g_{\varrho\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\varrho})$$

relativi al tensore fondamentale (simmetrico) di componenti $g_{\mu\nu}$, i quali costituiscono la soluzione delle (2), e

$$(5) \quad R \equiv R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$$

è l'invariante lineare del tensore di Riemann contratto (3).

Ciò posto, seguendo Infeld e Schild, consideriamo uno spazio-tempo riemanniano $R_{(m)}$ individuato da un tensore fondamentale le cui componenti

$$(6) \quad g_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu}(x^0, x^1, x^2, x^3, m)$$

dipendano oltre che dalle coordinate spazio-temporali x^0, x^1, x^2, x^3 anche da un parametro m , positivo o nullo, e presentino una singolarità lungo

(3) Cfr. ad esempio, B. FINZI-M. PASTORI, *Calcolo Tensoriale e Applicazioni*, Bologna (1949) cap. X e cap. V, § 6. Qui e nel seguito, la virgola indica derivazione parziale ordinaria rispetto a coordinate spazio-temporali x^0, x^1, x^2, x^3 di ugual indice. Anche nelle formule non tensoriali viene omissso il simbolo di sommatoria, relativo ad indici uguali e comunque collocati; infine gli indici greci assumono i valori 0, 1, 2, 3, gli indici latini i soli valori 1, 2, 3.

una linea oraria $L_{(m)}$ dello spazio-tempo $R_{(m)}$. Supponiamo soddisfatte le seguenti condizioni:

a) la generica componente del tensore fondamentale

$$(7) \quad \overset{\circ}{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^0, x^1, x^2, x^3, 0)$$

ottenuta eguagliando a zero il parametro m nella (6) è una funzione analitica lungo la linea L , limite della linea $L_{(m)}$ per m tendente a zero ed in un conveniente intorno di L . Le (7) individuano lo spazio-tempo base o campo base $R_{(0)}$ soluzione delle equazioni gravitazionali di puro campo;

b) per un punto P esterno ad L passa un arco di geodetica a carattere spaziale, che interseca L ortogonalmente. Diremo allora che $L_{(m)}$ è la linea oraria di una particella gravitante e che L è la linea oraria della particella di prova;

$$c) \quad \lim_{m \rightarrow 0} g_{\mu\nu}(x^0, x^1, x^2, x^3, m) = \overset{\circ}{g}_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu}(x^0, x^1, x^2, x^3, 0);$$

d) esternamente ad un conveniente tubo di flusso tracciato attorno a $L_{(m)}$ nello spazio-tempo $R_{(m)}$, le (6) si possono sviluppare nelle serie

$$(8) \quad g_{\mu\nu} = \overset{\circ}{g}_{\mu\nu} + m \overset{1}{g}_{\mu\nu} + m^2 \overset{2}{g}_{\mu\nu} + \dots$$

convergenti per convenienti valori positivi di m ; nella (8) i coefficienti delle successive potenze di m sono per ipotesi singolari lungo la linea oraria $L_{(m)}$, e la serie di potenze di m che ivi compare rappresenta la particella gravitante ⁽⁴⁾. Grazie alla (8) è così verificata l'ipotesi, essenziale in questo procedimento, che lo spazio-tempo $R_{(m)}$ tenda ad $R_{(0)}$ allorché m tende a zero.

Le equazioni che si ottengono sostituendo gli sviluppi (8) nelle equazioni di puro campo (1) ed esplicitando in esse la dipendenza dalle successive potenze di m si possono indicare così

$$(9) \quad \overset{\circ}{G}_{\mu\nu} + m \overset{1}{G}_{\mu\nu} + m^2 \overset{2}{G}_{\mu\nu} + \dots = 0.$$

Ma il campo base è indipendente dalla presenza della particella gravitante; le (9) si spezzano quindi nel sistema costituito dalle equazioni gravitazionali di puro campo che reggono il campo base stesso, e nelle equazioni che ne raggruppano i termini rimanenti. Dividendo per m ambo i membri di queste ultime e facendo successivamente tendere m stesso a zero si ottiene in definitiva dalle (9) il seguente sistema differenziale del secondo ordine nelle funzioni incognite $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$ e $\overset{1}{g}_{\mu\nu}$:

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} (10) \quad \overset{\circ}{G}_{\mu\nu} \equiv \overset{\circ}{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \overset{\circ}{g}_{\mu\nu} \overset{\circ}{R}_{\rho\sigma} \overset{\circ}{g}^{\rho\sigma} = 0 \\ (11) \quad \overset{1}{G}_{\mu\nu} \equiv \overset{1}{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \overset{\circ}{g}_{\mu\nu} \overset{1}{R}_{\rho\sigma} \overset{\circ}{g}^{\rho\sigma} = 0; \end{array} \right.$$

(4) Come nelle (8), anche in qualunque espressione del seguito ogni fattore delle successive potenze di m sarà contraddistinto da un indice ad esso sovrapposto; una quantità che non dipende da m , e quindi riguarda esclusivamente il campo base, sarà invece contraddistinta da un indice zero ad essa sovrapposto.

esso regge il campo base attraverso alla (10) ed il comportamento della particella di prova attraverso alla (11).

La forma esplicita della (11) si ottiene utilizzando la (4) e calcolando mediante la (2) il contributo arrecato dai termini di primo grado in m delle (8) ai simboli di Christoffel di seconda specie; esso è il seguente:

$$(12) \quad \overset{I}{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\nu} = \frac{1}{2} \overset{I}{g}^{\nu\epsilon} (\overset{I}{g}_{\alpha\epsilon, \beta} + \overset{I}{g}_{\epsilon\beta, \alpha} - \overset{I}{g}_{\alpha\beta, \epsilon}) - \overset{I}{g}^{\nu\epsilon} \overset{I}{g}_{\epsilon\sigma} \overset{0}{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\sigma} \quad (2).$$

2. — CONDIZIONI DI COMPATIBILITÀ GEOMETRICO-CINEMATICHE E DINAMICHE IN PRESENZA DI UNA PARTICELLA DI PROVA.

Determiniamo le varietà caratteristiche del sistema (I), non discutendo il corrispondente problema di Cauchy, ma il sistema algebrico di equazioni lineari che caratterizza le discontinuità sui fronti d'onda delle derivate di ordine massimo delle funzioni incognite che intervengono nel sistema (I) stesso.

Detta Σ una ipersuperficie di discontinuità di equazione

$$(13) \quad \tau(x^0, x^1, x^2, x^3) = \text{costante},$$

semplici considerazioni differenziali di carattere geometrico relative a sistemi differenziali di secondo ordine, impongono alle discontinuità delle derivate di ordine massimo delle funzioni incognite $\overset{0}{g}_{\alpha\beta}$ e $\overset{1}{g}_{\alpha\beta}$ del sistema (I) di verificare le seguenti *condizioni di compatibilità geometrico-cinematiche*:

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} (14) \quad D \frac{\overset{2}{g}_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \overset{0}{\lambda}_{\alpha\beta} \tau_{,\mu} \tau_{,\nu} \\ (15) \quad D \frac{\overset{2}{g}_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \overset{1}{\lambda}_{\alpha\beta} \tau_{,\mu} \tau_{,\nu} \end{array} \right.$$

qui il simbolo D premesso ad una quantità indica il salto attraverso Σ della quantità stessa ⁽⁵⁾, mentre $\overset{0}{\lambda}_{\alpha\beta}$ e $\overset{1}{\lambda}_{\alpha\beta}$ sono venti moltiplicatori arbitrari i quali individuano le discontinuità che possono presentare attraverso Σ le derivate seconde di $\overset{0}{g}_{\alpha\beta}$ e di $\overset{1}{g}_{\alpha\beta}$.

Per la (3), per la (4), per la (5) e per la (12), le (I) impongono allora a tali moltiplicatori di soddisfare il seguente sistema di *condizioni di compatibilità dinamiche*, costituito da venti equazioni algebriche, lineari ed omogenee:

(5) Cfr. ad esempio, T. LEVI-CIVITA, *Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa*, Bologna (1931), § 7.

$$\begin{aligned}
 (16) \quad & \overset{\circ}{g}^{\alpha\beta} (\overset{\circ}{\lambda}_{\mu\nu} \tau_{,\alpha} \tau_{,\beta} + \overset{\circ}{\lambda}_{\alpha\beta} \tau_{,\mu} \tau_{,\nu} - \overset{\circ}{\lambda}_{\alpha\mu} \tau_{,\beta} \tau_{,\nu} - \overset{\circ}{\lambda}_{\beta\nu} \tau_{,\mu} \tau_{,\alpha}) + \\
 & - \frac{1}{2} \overset{\circ}{g}_{\mu\nu} \overset{\circ}{g}^{\varrho\sigma} \overset{\circ}{g}^{\alpha\beta} (\overset{\circ}{\lambda}_{\varrho\sigma} \tau_{,\alpha} \tau_{,\beta} + \overset{\circ}{\lambda}_{\alpha\beta} \tau_{,\varrho} \tau_{,\sigma} - \overset{\circ}{\lambda}_{\alpha\varrho} \tau_{,\beta} \tau_{,\sigma} - \overset{\circ}{\lambda}_{\beta\sigma} \tau_{,\varrho} \tau_{,\alpha}) = 0 \\
 (III) \quad & \left. \begin{aligned}
 (17) \quad & \overset{\circ}{g}^{\alpha\beta} (\overset{\circ}{\lambda}_{\mu\nu} \tau_{,\alpha} \tau_{,\beta} + \overset{\circ}{\lambda}_{\alpha\beta} \tau_{,\mu} \tau_{,\nu} - \overset{\circ}{\lambda}_{\alpha\mu} \tau_{,\beta} \tau_{,\nu} - \overset{\circ}{\lambda}_{\beta\nu} \tau_{,\mu} \tau_{,\alpha}) + \\
 & - \overset{\circ}{g}^{\alpha\beta} (\overset{\circ}{\lambda}_{\mu\nu} \tau_{,\alpha} \tau_{,\beta} + \overset{\circ}{\lambda}_{\alpha\beta} \tau_{,\mu} \tau_{,\nu} - \overset{\circ}{\lambda}_{\alpha\mu} \tau_{,\beta} \tau_{,\nu} - \overset{\circ}{\lambda}_{\beta\nu} \tau_{,\mu} \tau_{,\alpha}) + \\
 & - \frac{1}{2} \overset{\circ}{g}_{\mu\nu} \overset{\circ}{g}^{\varrho\sigma} \overset{\circ}{g}^{\alpha\beta} (\overset{\circ}{\lambda}_{\varrho\sigma} \tau_{,\alpha} \tau_{,\beta} + \overset{\circ}{\lambda}_{\alpha\beta} \tau_{,\varrho} \tau_{,\sigma} - \overset{\circ}{\lambda}_{\alpha\varrho} \tau_{,\beta} \tau_{,\sigma} - \overset{\circ}{\lambda}_{\beta\sigma} \tau_{,\varrho} \tau_{,\alpha}) + \\
 & + \frac{1}{2} \overset{\circ}{g}_{\mu\nu} \overset{\circ}{g}^{\varrho\sigma} \overset{\circ}{g}^{\alpha\beta} (\overset{\circ}{\lambda}_{\varrho\sigma} \tau_{,\alpha} \tau_{,\beta} + \overset{\circ}{\lambda}_{\alpha\beta} \tau_{,\varrho} \tau_{,\sigma} - \overset{\circ}{\lambda}_{\alpha\varrho} \tau_{,\beta} \tau_{,\sigma} - \overset{\circ}{\lambda}_{\beta\sigma} \tau_{,\varrho} \tau_{,\alpha}) = 0,
 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

essendo

$$\overset{\circ}{g}^{\alpha\beta} \text{DEF. } \overset{\circ}{g}^{\alpha\varrho} \overset{\circ}{g}^{\beta\sigma} \overset{\circ}{g}_{\varrho\sigma}.$$

Ora il sistema differenziale (I) non è un sistema normale, poiché è ben noto che le equazioni gravitazionali (10) di puro campo non costituiscono un sistema differenziale normale⁽⁶⁾; discontinuità possono quindi aver luogo attraverso generiche ipersuperficie dello spazio-tempo base; fra esse ve ne possono essere però alcune particolari che concedono discontinuità più late delle altre. Queste sono appunto le varietà caratteristiche dei sistemi differenziali non normali; esse si possono pertanto equivalentemente definire con Hadamard, come quelle in corrispondenza alle quali si abbassa la caratteristica della matrice del sistema di condizioni di compatibilità dinamiche o ciò che è lo stesso, come quelle in corrispondenza alle quali aumenta, il numero dei moltiplicatori arbitrari dai quali dipende la soluzione del medesimo sistema; esso nel caso in esame è appunto il sistema (III) nel quale $\overset{\circ}{\lambda}_{\alpha\beta}$ e $\overset{\circ}{\lambda}_{\beta\alpha}$ sono quantità simmetriche rispetto agli indici α e β .

3. - I FRONTI D'ONDA GRAVITAZIONALI IN PRESENZA DI UNA PARTICELLA DI PROVA.

In assenza della particella di prova sussistono le sole (10) il cui carattere tensoriale implica che le corrispondenti condizioni (16) di compatibilità dinamiche siano equazioni tensoriali nel campo base e che i moltiplicatori $\overset{\circ}{\lambda}_{\alpha\beta}$ siano le componenti di un tensore (simmetrico) del campo base; si può allora sveltire la discussione relativa all'arbitrarietà delle soluzioni del sistema (16) in un generico riferimento, e quindi la determinazione delle varietà caratteristiche, risolvendo dapprima il sistema (16) in un conveniente rife-

(6) Cfr. T. LEVI CIVITA, *Caratteristiche e bicaratteristiche delle equazioni dell'Einstein*, in questi « Rendiconti », vol. XI, (1930) Nota I p. 3, Nota II p. 113. Cfr. altresì B. FINZI, *Discontinuità sul fronte d'onda delle azioni gravitazionali*, ibidem, vol. VI, p. 19 (1949).

rimento spazio-temporale particolare e poi estendendo le soluzioni così ottenute ad un riferimento generico; basta a tal fine tenere appunto conto che le $\overset{\circ}{\lambda}_{\alpha\beta}$ sono le componenti di un tensore ⁽⁷⁾.

Sebbene le (11) e pertanto anche le (17) siano stabilite e quindi sussistano, come le (10) e le (16), in un generico riferimento è a priori ignota la legge di trasformazione delle $\overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}$ e delle $\overset{\circ}{\lambda}_{\alpha\beta}$, onde, a priori almeno, non si può affermare che le $\overset{\circ}{\lambda}_{\alpha\beta}$ siano le componenti di un tensore. Volendo evitare una indagine preliminare sul comportamento delle $\overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}$ e delle $\overset{\circ}{\lambda}_{\alpha\beta}$ di fronte a trasformazioni di coordinate, occorre pertanto discutere l'arbitrarietà delle soluzioni del sistema (III) lasciando generico il riferimento spazio-temporale.

Per determinare le varietà caratteristiche del sistema (I) appare allora a priori opportuno tener conto che la matrice dei coefficienti di $\overset{\circ}{\lambda}_{\mu\nu}$ nel sistema (17) è identica alla matrice dei coefficienti omologhi di $\overset{\circ}{\lambda}_{\mu\nu}$ nel sistema (16), al quale si riduce il sistema (I) in assenza della particella di prova; è pertanto nota la condizione che fa abbassare la caratteristica della matrice precedente. Basta così ritenere nel sistema (17) le $\overset{\circ}{\lambda}_{\alpha\beta}$ come quantità note, perché determinate dal sistema (16), e discutere il sistema (17) come se fosse non omogeneo ed avesse per incognite le sole $\overset{\circ}{\lambda}_{\alpha\beta}$, nella duplice eventualità che sia diverso da zero oppure nullo l'invariante del campo base:

$$(18) \quad H \equiv \overset{\circ}{g}^{\alpha\beta} \tau_{,\alpha} \tau_{,\beta}.$$

Conviene allora distinguere le soluzioni del sistema (III) in due categorie subordinate alle due seguenti nelle quali si possono raggruppare le soluzioni del sistema (16) stesso:

- a) soluzione del sistema (16) identicamente nulla;
- b) soluzioni del sistema (16) non identicamente nulle.

In corrispondenza alla categoria a), il sistema (III) si riduce al solo sistema algebrico e lineare costituito da dieci equazioni omogenee nelle dieci incognite $\overset{\circ}{\lambda}_{\alpha\beta}$, e di struttura identica a quella del sistema (16) il quale, allorché è solo, individua i moltiplicatori in assenza della particella di prova. Grazie alla proprietà di quest'ultimo sistema ⁽⁷⁾, la discussione del sistema (III) nel caso a) si conclude così: allorché l'invariante H, definito dalla (18), è diverso da zero, la soluzione più generale del sistema (III) si può esprimere con le formule

$$(IV) \quad \begin{cases} \overset{\circ}{\lambda}_{00} = \overset{\circ}{\lambda}_{00} \tau_{,0} \tau_{,0} \\ \overset{\circ}{\lambda}_{0i} = \overset{\circ}{\lambda}_{00} \tau_{,0} \tau_{,i} + \overset{\circ}{\lambda}_{0i} \tau_{,0} \\ \overset{\circ}{\lambda}_{ik} = \overset{\circ}{\lambda}_{00} \tau_{,i} \tau_{,k} + \overset{\circ}{\lambda}_{0k} \tau_{,i} + \overset{\circ}{\lambda}_{0i} \tau_{,k} \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

(7) Cfr. loco secondo citato in ⁽⁶⁾.

nelle quali è $s = 1$ e $\bar{\lambda}_{\alpha\alpha} \equiv \bar{\lambda}_{\alpha\alpha}$ sono quattro parametri arbitrari; l'eliminazione di essi permette di affermare che nel caso *a*) ed allorché è $H \neq 0$, quattro è il numero dei moltiplicatori che restano arbitrari nella soluzione del sistema (III); allorché invece l'invariante H è nullo, la soluzione più generale del sistema (III) si può esprimere con le formule

$$(V) \quad \begin{cases} \bar{\lambda}_{00} = \bar{\lambda}_{00} \tau_{,0} \tau_{,0} \\ \bar{\lambda}_{0i} = \bar{\lambda}_{00} \tau_{,0} \tau_{,i} + \bar{\lambda}_{0i} \tau_{,0} \\ \bar{\lambda}_{ik} = \bar{\lambda}_{00} \tau_{,i} \tau_{,k} + \bar{\lambda}_{0k} \tau_{,i} + \bar{\lambda}_{0i} \tau_{,k} + \bar{\lambda}_{ik} \end{cases}$$

nelle quali, come prima, è $s = 1$ e $\bar{\lambda}_{\alpha\alpha} \equiv \bar{\lambda}_{\alpha\alpha}$ sono quattro parametri arbitrari; i sei parametri $\bar{\lambda}_{ik} \equiv \bar{\lambda}_{ki}$ devono invece soddisfare al sistema seguente costituito da quattro equazioni lineari ed omogenee

$$(VI) \quad \begin{cases} \sum_i \bar{g}^{ik} \bar{\lambda}_{ik} = 0 \\ \sum_k \tau_{,k} \bar{\lambda}_{ik} = 0 \end{cases}$$

nel quale è $s = 1$; grazie alla struttura di questo sistema si possono esprimere quattro parametri $\bar{\lambda}_{ik}$ scelti ad arbitrio, in funzione dei due rimanenti. Quando dunque è $H = 0$, le soluzioni *a*) del sistema (III) dipendono da sei parametri arbitrari, od equivalentemente, come risulta eliminando questi parametri, tali soluzioni lasciano arbitrari sei convenienti moltiplicatori fra i $\bar{\lambda}_{\alpha\beta}$ ed esprimono i rimanenti quattro moltiplicatori mediante i precedenti.

Discutiamo ora l'arbitrarietà delle ulteriori soluzioni del sistema (III), e cioè quelle di categoria *b*), dapprima nella ipotesi che sia diverso da zero l'invariante H definito dalla (18). In tale ipotesi, la soluzione più generale del sistema (16) è espressa dal sistema (IV) con $s = 0$. Sostituendo nel sistema (17) la precedente soluzione del sistema (16), il sistema (17) diviene un sistema algebrico non omogeneo di dieci equazioni lineari nelle dieci incognite $\bar{\lambda}_{\alpha\beta}$. Il determinante di tale sistema è identico a quello del sistema (16); d'altra parte fra i primi membri delle equazioni del sistema (16) intercedono quattro relazioni lineari ed omogenee, come si può constatare immediatamente componendo il primo membro delle (16) con $\tau^{/\nu} \equiv \bar{g}^{\nu\sigma} \tau_{,\sigma}$; affinché il sistema (17) nelle incognite $\bar{\lambda}_{\alpha\beta}$ sia possibile, è dunque necessario che siano verificate fra i termini delle (17) dipendenti dalle $\bar{\lambda}_{\alpha\beta}$ quattro relazioni corrispondenti alle precedenti; tali relazioni assicurano altresì la risolubilità del sistema (17) rispetto alle $\bar{\lambda}_{\alpha\beta}$; infatti la caratteristica del determinante del sistema (16), e quindi quella

della matrice quadrata del sistema (17) relativa alle $\overset{1}{\lambda}_{\alpha\beta}$, è proprio sei ⁽⁸⁾. Dunque, allorché è $H \neq 0$, condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema (17) sia risolubile rispetto alle $\overset{1}{\lambda}_{\alpha\beta}$ è che i quattro parametri arbitrari $\overset{0}{\lambda}_{\alpha\beta}$, dai quali dipende la soluzione non identicamente nulla delle (16) nell'ipotesi $H \neq 0$, soddisfino ad un sistema lineare ed omogeneo costituito da quattro equazioni; tale sistema si ottiene precisamente annullando il secondo ed il quarto addendo delle equazioni (17) composti con $\tau^{1\nu}$ ed ivi sostituendo la soluzione generale del sistema (16) corrispondente ad $H \neq 0$. Ora si constata che tale sistema si riduce a quattro identità, risultando soddisfatto da valori qualsivoglia dei parametri $\overset{0}{\lambda}_{\alpha\beta}$. Pertanto le (17) si riducono ad un sistema lineare non omogeneo di dieci equazioni in dieci incognite $\overset{1}{\lambda}_{\alpha\beta}$ nel quale i termini dipendenti dalle $\overset{1}{\lambda}_{\alpha\beta}$ hanno struttura identica a quella del sistema (16); la soluzione più generale delle (III) si esprime allora mediante otto parametri arbitrari, e cioè i quattro $\overset{0}{\lambda}_{\alpha\beta}$ e quattro convenienti moltiplicatori fra i $\overset{1}{\lambda}_{\alpha\beta}$. In definitiva, allorché l'invariante H definito dalla (18) è diverso da zero, le soluzioni del sistema (III) di categoria *a*) dipendono soltanto da quattro moltiplicatori $\overset{0}{\lambda}_{\alpha\beta}$ che restano arbitrari, quelli di categoria *b*) dipendono da otto moltiplicatori che restano arbitrari.

Sia ora $H = 0$; fra i primi membri delle equazioni del sistema (16) intercedono allora sei (e soltanto sei) relazioni indipendenti, e precisamente le quattro identità che sussistono anche allorché è $H \neq 0$ ed in più due ulteriori identità ⁽⁹⁾; altrettante relazioni indipendenti intercedono pertanto fra i termini delle equazioni (17) relativi ai moltiplicatori $\overset{1}{\lambda}_{\alpha\beta}$, poiché la matrice di questi coefficienti è identica a quella dei coefficienti omologhi del sistema (16). Le soluzioni di categoria *b*) del sistema (16) dipendono da sei moltiplicatori che restano arbitrari ⁽⁷⁾; tali soluzioni sono espresse dai sistemi (V) e (VI) con $s = 0$, eliminando da essi i parametri $\overset{0}{\lambda}_{\alpha\beta}$; affinché il sistema (17) nelle incognite $\overset{1}{\lambda}_{\alpha\beta}$ sia allora possibile, occorre e basta che i sei moltiplicatori del sistema (16) che restano arbitrari, soddisfino ad un sistema di sei equazioni lineari ed omogenee, e cioè al sistema tratto dalle (17) e costituito dalle relazioni corrispondenti a quelle che intercedono tra i termini delle (17) che contengono le $\overset{1}{\lambda}_{\alpha\beta}$.

Ora si constata che in tale sistema espresso mediante i parametri, tenendo conto dei sistemi (V) e (VI) con $s = 0$, risultano ancora identità quelle rela-

(8) Cfr. loco primo citato in ⁽⁶⁾, Nota I, § 3.

(9) Si considerino infatti i due versori di specie temporale del campo base, di componenti μ_i^α ($i = 2, 3$), così precisati: essi hanno entrambi nulla la componente temporale, appartengono al piano tangente alla superficie di equazione (13) e sono tra loro ortogonali; è cioè: $\mu_2^0 \mu_3^0 \hat{g}_{00} = -1$, $\mu_i^0 \equiv 0$, $\mu_i^\alpha \tau_{,\alpha} = 0$ ($i = 2, 3$), $\mu_2^0 \mu_3^\alpha \hat{g}_{0\alpha} = 0$. Si ottengono allora due identità componendo i primi membri della (16) rispettivamente con $\mu_2^\mu \mu_3^\nu$ e con $(\mu_2^\mu \mu_2^\nu + + \mu_3^\mu \mu_3^\nu)$. (Cfr. loco citato in ⁽⁶⁾, Nota II, § 6).

zioni che lo sono per le soluzioni δ) allorché è $H \neq 0$. Sono invece equazioni le due relazioni corrispondenti alle due identità che sussistono fra i primi membri delle (16) nel solo caso $H = 0$. Soddisfatte, come è possibile, tali equazioni, le quali riguardano i soli parametri $\bar{\lambda}_{ik}$, il sistema (17) è risolubile. La sua soluzione più generale si esprime mediante sei convenienti moltiplicatori fra i $\bar{\lambda}_{\alpha\beta}$; la soluzione generale del sistema (III) di categoria δ) allorché è $H = 0$ è allora fornita dalla soluzione generale del sistema (17) e dal sistema (V) con $s = 0$, nel quale i parametri $\bar{\lambda}_{ik}$ costituiscono una soluzione del sistema (VI) con $s = 0$, e del precedente sistema di condizioni caratteristiche di risolubilità delle equazioni (17) le quali si riducono, per quanto dianzi affermato, a due sole equazioni. Esprimendo allora la soluzione del sistema (V) mediante i moltiplicatori anziché mediante i parametri, si può affermare che il numero N dei moltiplicatori che restano arbitrari nella soluzione δ) del sistema (III) allorché è $H = 0$, è il seguente:

$$N = 10.$$

Tale numero è pertanto maggiore del numero dei moltiplicatori arbitrari che esprimono le soluzioni di categoria α) del sistema (III), il quale è quattro per $H \neq 0$, sei per $H = 0$, ed è pure maggiore del numero dei moltiplicatori arbitrari che esprimono le soluzioni di categoria δ) del sistema (III) il quale per $H \neq 0$ è otto. La più bassa caratteristica della matrice del sistema (III) si ha pertanto allorquando è $H = 0$, sia nel caso α) che nel caso δ). D'altra parte poiché tutte le soluzioni del sistema (III) sono incluse o fra quelle di categoria α) o fra quelle di categoria δ), si può concludere affermando che le ipersuperficie Σ di equazione (13), individuate da

$$(19) \quad H \equiv g^{\alpha\beta} \tau_{,\alpha} \tau_{,\beta} = 0,$$

concedono ai fenomeni retti dal sistema (I), discontinuità più late di quelle concesse da generiche ipersuperficie dello spazio-tempo; ciò è quanto dire che la caratteristica della matrice del sistema (III) si abbassa allorquando è soddisfatta l'equazione (19). La (19) è pertanto, nel senso di Hadamard, l'equazione delle varietà caratteristiche in presenza di una particella di prova, qualunque sia la rappresentazione della particella di prova stessa. Si può allora concludere che la presenza di una particella di prova nel campo base (comunque rappresentata), non altera la propagazione ondosa nel campo base di fenomeni che ivi hanno sede, poiché la (19) è la medesima equazione che individua i fronti d'onda nel campo base in assenza della particella di prova.

Inalterate restano perciò le linee bicaratteristiche, che ancora sono geodetiche del campo base, proprio come la linea oraria L che dà il moto della particella di prova, allorché essa si identifica ad un polo di primo ordine⁽²⁾. La particella di prova altera invece, almeno genericamente, le discontinuità gravitazionali sul fronte d'onda, le quali sono precisate dalla (14) in corrispondenza ad ogni soluzione del sistema (III), perché i moltiplicatori arbi-

trari soluzione del sistema (16), debbono soddisfare, in presenza di una particella di prova, ad equazioni che mancano in assenza della particella stessa.

4. - PROPAGAZIONE DELLA PERTURBAZIONE INDOTTA NEL CAMPO BASE DAL MOTO DI UNA PARTICELLA DI PROVA.

Il particolare fenomeno costituito dal moto di una particella di prova, comunque rappresentata, nel campo base induce, almeno a priori, una perturbazione i cui fronti d'onda sono individuati dal sistema (III), assumendo in esso $\overset{\circ}{\lambda}_{\alpha\beta} \equiv 0$, sono cioè individuati dalla soluzione α , del sistema (III), discussa nel § 3. Si può pertanto affermare: il particolare fenomeno costituito dal moto di una particella di prova, comunque rappresentata, induce una perturbazione nel campo base, ed essa si propaga con gli stessi fronti d'onda (13), individuati dalla equazione (19), comuni alla propagazione nel campo base di generiche azioni gravitazionali, sia in assenza che in presenza della particella di prova stessa.

Meccanica. — *Carattere tensoriale dell'azione Einsteiniana.* Nota di FRANCA GRAIFF, presentata (*) dal Socio B. FINZI.

È noto che le equazioni di campo della relatività generale, esternamente alla materia, possono considerarsi le equazioni di Eulero-Lagrange dedotte da un principio di Hamilton, quando si assuma, come densità di azione (energia gravitazionale), una funzione \mathfrak{R}^* costruita col tensore fondamentale della varietà riemanniana V_4 , nella quale si opera, e con i corrispondenti simboli di Christoffel.

Einstein stesso, nel dare forma lagrangiana alle sue equazioni di campo, osservò che, mentre la variazione dell'azione totale era un invariante (e aveva quindi significato invariantivo il suo annullarsi), l'azione stessa non lo era perché la sua densità \mathfrak{R}^* non poteva considerarsi una densità scalare⁽¹⁾: non hanno infatti carattere tensoriale i simboli di Christoffel con i quali è costruita e con i quali si annulla, ed è noto che può sempre scegliersi un riferimento per il quale questi ultimi sono nulli in un dato punto.

Segue che anche altri enti ed identità formati con \mathfrak{R}^* (come lo pseudo-tensore di energia e le identità di conservazione alle quali soddisfa), non hanno carattere tensoriale.

Sembrerebbe quindi che l'energia gravitazionale, il corrispondente tensore energetico, come pure un principio di conservazione non avessero la possibilità di essere espressi mediante enti tensoriali.

Questo trova la sua giustificazione nel fatto che è sempre possibile scegliere un riferimento, per il quale gli effetti *locali* della gravitazione siano eliminati; così come è sempre possibile, in uno spazio del tutto vuoto (pseudo-euclideo) creare *ovunque* un campo gravitazionale mediante un cambiamento del riferimento.

Vi è però una profonda differenza tra queste due possibilità, di creare o annullare un campo gravitazionale: infatti, se questo è dovuto a presenza di materia (spazio curvo) non possiamo eliminarlo *ovunque* con un opportuno riferimento.

Inoltre è vero che i simboli di Christoffel non hanno carattere tensoriale, ma lo hanno le differenze tra i simboli di Christoffel di una generica varietà riemanniana V_4 , ed i corrispondenti simboli di uno spazio pseudo-euclideo E_4 , riferito alle stesse variabili. Un cambiamento di coordinate porta una variazione sia negli uni che negli altri, variazioni che si compensano in modo tale che le differenze hanno carattere tensoriale.

(*) Nella seduta del 13 giugno 1961.

(1) A. EINSTEIN, *Hamiltonsches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie*, Sitz, Preuss. Akad. Wissenschaften, 1916; cfr. anche: EDDINGTON, *The mathem. Theory of Relativity*, Cambridge 1954; WEYL, *Time, space, matter*, Dover 1922.

Queste ultime possono allora considerarsi le forze del campo gravitazionale, spogliate dall'inerzia.

D'altra parte, se il riferimento è tale che la metrica di E_4 assuma forma pseudopitagorica, (come è sempre possibile) le differenze tra i simboli di Christoffel delle due varietà vengono a coincidere con i simboli di Christoffel della varietà riemanniana, essendo identicamente nulli quelli di E_4 .

Si può allora pensare che la funzione \mathfrak{R}^* sia la forma che la densità gravitazionale assume in questo particolare riferimento, mentre in un altro, del tutto generico, essa potrà costruirsi sostituendo ai simboli di Christoffel le differenze sopra considerate.

In questo ordine di idee, anche lo pseudotensore di energia assumerà significato tensoriale, e così pure le identità di conservazione.

In questa Nota preciso e sviluppo i concetti esposti, pervenendo alla definizione di una densità scalare gravitazionale, di un tensore energetico e delle relative identità di conservazione.

In questo modo i procedimenti ed i risultati di Einstein riguardanti la funzione \mathfrak{R}^* , assumono validità tensoriale.

1. Si considerino due varietà quadridimensionali E_4 e V_4 , pseudoeuclidea la prima, riemanniana la seconda, le cui metriche, con riferimenti del tutto generici, siano rispettivamente:

$$(1) \quad ds^2 = a^{ik}(x) dx^i dx^k \quad i, k = 1 \dots 4$$

$$(2) \quad ds'^2 = a'_{ik}(x') dx'^i dx'^k.$$

Se $\left\{ \begin{smallmatrix} j \\ i \ k \end{smallmatrix} \right\}$ sono i simboli di Christoffel di E_4 , $\left\{ \begin{smallmatrix} j \\ i \ k \end{smallmatrix} \right\}'$ quelli di V_4 , le loro differenze:

$$(3) \quad \left\{ \begin{smallmatrix} j \\ i \ k \end{smallmatrix} \right\}' - \left\{ \begin{smallmatrix} j \\ i \ k \end{smallmatrix} \right\}$$

costituiscono un sistema triplo di funzioni (nelle 8 variabili x^i, x'^i) non aventi alcun carattere tensoriale.

Non hanno infatti questo carattere i simboli di Christoffel presi singolarmente e, finché le due quaterne di variabili x^i e x'^i sono tra loro indipendenti, un cambiamento della prima non ne subordina uno della seconda (o viceversa) in modo tale che la legge di trasformazione delle differenze (3) sia quella caratteristica dei tensori.

Ma è noto ⁽²⁾ che il semplice legame:

$$(4) \quad x^i = x'^i$$

implicando cambiamenti di riferimento contemporanei ed uguali in E_4 e V_4 dà natura tensoriale a queste differenze ⁽³⁾.

Quindi con la posizione (4) la (2) diventerà:

$$(2') \quad ds'^2 = a'_{ik}(x) dx^i dx^k$$

mentre la (3) definisce il seguente tensore triplo sia di E_4 che di V_4 :

$$(3') \quad \rho^j_{ik} = \left\{ \begin{matrix} j \\ i \ k \end{matrix} \right\}' - \left\{ \begin{matrix} j \\ i \ k \end{matrix} \right\}.$$

Le (3') stabiliscono inoltre un semplice legame tra le derivate covarianti di un tensore eseguite in E_4 , e quelle in V_4 : se con una barra (/) si indica la derivazione covariante in E_4 , con due barre (//) quella in V_4 , si avrà ad esempio per un vettore:

$$(5) \quad v_{i//k} = v_{i/k} - v_j \rho^j_{ik}$$

e formule analoghe si avranno per i tensori di ordine n ⁽⁴⁾.

Nel caso particolare poi che ci si valga di un riferimento per il quale la metrica di E_4 assuma forma pseudopitagorica, il corrispondente tensore fondamentale coinciderà con le η_{ik} ($\eta_{ik} = 0$ per $i \neq k$; $\eta_{11} = 1$; $\eta_{22} = \eta_{33} = \eta_{44} = -1$ ed i simboli di Christoffel risulteranno di conseguenza nulli: in questo caso particolare, allora il tensore (3') assumerà l'espressione dei simboli di Christoffel di V_4 , mentre la derivata covariante in E_4 coinciderà con la derivata ordinaria.

Con queste premesse e da questo punto di vista, ogni ente di V_4 , di natura tensoriale o no, costruito anche con i simboli di Christoffel e con le loro derivate ordinarie, potrà sempre considerarsi la forma che un ente tensoriale, subordinato alle due varietà V_4 ed E_4 , legate dalla (4), assume in un particolare riferimento.

Per averne l'espressione, in un riferimento generico, basterà sostituire ai simboli di Christoffel il tensore triplo (3') e alle loro derivate ordinarie le derivate covarianti in E_4 . Mediante poi le immediate estensioni delle (5), si può sempre passare dalle derivate covarianti in E_4 a quelle in V_4 .

Così, ad esempio, la solita forma del tensore di Riemann contratto di V_4 :

$$(6) \quad \left\{ \begin{matrix} j \\ i \ j \end{matrix} \right\}'_{,k} - \left\{ \begin{matrix} j \\ i \ k \end{matrix} \right\}'_{,j} + \left\{ \begin{matrix} j \\ l \ k \end{matrix} \right\}' \left\{ \begin{matrix} l \\ i \ j \end{matrix} \right\}' - \left\{ \begin{matrix} j \\ l \ j \end{matrix} \right\}' \left\{ \begin{matrix} l \\ i \ k \end{matrix} \right\}' \quad (5)$$

(3) Una situazione analoga si trova considerando i coseni direttori di una terna cartesiana ortogonale (O, x) rispetto ad un'altra (O', x') : $\alpha_{ik'} = \cos x^i x'^{k'}$; gli indici i e k' si comportano ciascuno come gli indici di un vettore, per un cambiamento rispettivamente della terna (O, x) e (O', x') . Ma, se considero i due spazi euclidei E, E' riferiti alle terne (O, x) e (O', x') rispettivamente, e li metto in corrispondenza biunivoca in modo tale che l'uno si sovrapponga all'altro mediante uno spostamento rigido che porti la terna (O, x) a coincidere con la (O', x') , allora devo ammettere il legame (4) tra le terne x, x' , per definizione stessa di spostamento rigido. Di conseguenza un cambiamento della terna (O, x) implica un analogo cambiamento della (O', x') (e viceversa). Proprio per questa ragione gli α_{ik} che, in questo caso, individuano la «rotazione» dello spostamento rigido dato, hanno natura tensoriale. (Cfr. B. FINZI, M. PASTORI, *Calcolo tensoriale e applicazioni*, Bologna 1961, cap VIII).

(4) T. LEVI CIVITA, loco citato.

(5) La virgola indica derivazione ordinaria.

potrà considerarsi un'espressione particolare del tensore stesso, che, in un riferimento del tutto generico, potrà scriversi:

$$(6') \quad R_{ik} = \rho_{ij|k}^j - \rho_{ik|j}^j + \rho_{ik}^j \rho_{ij}^l - \rho_{ij}^j \rho_{ik}^l$$

oppure, mettendo in evidenza la derivata in V_4 :

$$(6'') \quad R_{ik} = \rho_{ij||k}^j - \rho_{ik||j}^j - \rho_{ik}^j \rho_{ij}^l + \rho_{ij}^j \rho_{ik}^l.$$

2. Con queste premesse, anche la \mathcal{R}^* di Einstein, lo pseudo-tensore di energia e le identità di conservazione, assumano significato tensoriale.

Posto, per brevità,

$$(7) \quad \alpha^{ik} \equiv \sqrt{-a'} a'^{ik}, \quad a' = \|a'_{ik}\|$$

la densità gravitazionale, presa in considerazione da Einstein è la seguente ⁽⁶⁾:

$$(8) \quad \mathcal{R}^* = \alpha^{ik} \left[\left\{ \begin{matrix} j \\ l \ k \end{matrix} \right\}' \left\{ \begin{matrix} l \\ i \ j \end{matrix} \right\}' - \left\{ \begin{matrix} j \\ l \ j \end{matrix} \right\}' \left\{ \begin{matrix} l \\ i \ k \end{matrix} \right\}' \right].$$

Il principio di Hamilton

$$(9) \quad \delta \int_{\tau} \mathcal{R}^* dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 = 0$$

si traduce nelle note equazioni di campo, esternamente alla materia:

$$(10) \quad R_{ik} \equiv \left[\frac{\partial \mathcal{R}^*}{\partial \alpha_{,j}^{ik}} \right]_{,j} - \frac{\partial \mathcal{R}^*}{\partial \alpha^{ik}} = 0$$

legate dalle solite identità del Bianchi, che possono così esprimersi:

$$(11) \quad \left(\alpha^{kr} R_{ik} - \frac{1}{2} R_{pq} \alpha^{pq} \delta_i^r \right)_{,r} \equiv \left(\frac{\partial \mathcal{R}^*}{\partial \alpha_{,j}^{sk}} \alpha_{,i}^{sk} - \mathcal{R}^* \delta_i^j \right)_{,j}.$$

Qualora le (10) siano soddisfatte, queste ultime affermano che il cosiddetto pseudo-tensore energetico:

$$(12) \quad \mathcal{E}_{,i}^j \equiv \frac{\partial \mathcal{R}^*}{\partial \alpha_{,j}^{sk}} \alpha_{,i}^{sk} - \mathcal{R}^* \delta_i^j$$

soddisfa le identità di conservazione:

$$(13) \quad \mathcal{E}_{i,j}^j = 0.$$

Facciamo ora la sostituzione prevista. L'espressione più generale della densità gravitazione sarà:

$$(8') \quad \mathcal{L} = \alpha^{ik} [\rho_{ik}^j \rho_{ij}^l - \rho_{ij}^j \rho_{ik}^l]$$

mentre le equazioni di campo assumeranno la forma:

$$(10') \quad R_{ik} \equiv \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_{,j}^{ik}} \right]_{,j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha^{ik}} = 0$$

(6) Cfr. EINSTEIN, EDDINGTON, loci citati.

e le identità del Bianchi diverranno:

$$(11') \quad \left(\alpha^{kr} R_{ik} - \frac{1}{2} R_{pq} \alpha^{pq} \delta_i^r \right)_{|r} \equiv \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_{|j}^{sk}} \alpha_{|i}^{sk} - \mathcal{L} \delta_i^j \right)_{|j}.$$

Qualora le (10') siano soddisfatte, esse forniscono una densità tensoriale doppia (il tensore energetico):

$$(12') \quad \mathcal{S}_i^j \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_{|j}^{sk}} \alpha_{|i}^{sk} - \mathcal{L} \delta_i^j$$

a divergenza identicamente nulla, per le (13), in E_4 ; mentre in V_4 la sua divergenza sarà:

$$(13') \quad \mathcal{S}_{i|j}^j = - \mathcal{S}_{j|}^k \rho_{ik}^j.$$

Non c'è alcuna necessità di verificare le equazioni sopra scritte, essendo già esse (di natura tensoriale) verificate per un particolare riferimento.

Cosmogonia. — *Sul limite superiore della intensità del campo magnetico in una protogalassia.* Nota di ANDRZEJ G. PACHOLCZYK ^(*), presentata ^(**) dal Corrisp. C. AGOSTINELLI.

La condizione di instabilità magneto-gravitazionale di un mezzo stratificato, ottenuta nel lavoro ⁽¹⁾, può essere scritta nella forma

$$(1) \quad 2 \pi G \rho_0 = \frac{4 \pi^2 V_s^2}{\lambda_*^2} + \Theta(\kappa) \frac{4 \pi^2 V_{ao}^2}{\lambda_*^2}$$

dove λ_* è la lunghezza d'onda critica della perturbazione propagantesi nella direzione perpendicolare alla direzione del campo magnetico, V_s e V_{ao} sono rispettivamente: la velocità del suono e la velocità di Alfvén nel piano centrale, ρ_0 è la densità del mezzo nel piano centrale, G è la costante della gravitazione. $\Theta(\kappa)$ è la funzione dell'argomento $\kappa = V_{ao}/V_s$, data nella Tabella I.

TABELLA I.

Valori della funzione $\Theta(\kappa)$

κ^2	Θ
0	0,00
1,4	0,21
2	0,26
3,3	0,40
5	0,47
10	0,50
100	0,50

L'equazione (1) mostra ⁽²⁾, che questa condizione di instabilità rappresenta la somma delle forze agenti su un elemento di fluido scostato dalla posizione di equilibrio per effetto della perturbazione.

(*) Università di Varsavia, Osservatorio Astronomico, e Accademia Polacca delle Scienze, Istituto di Astronomia.

(**) Nella seduta del 13 giugno 1961.

(1) A. G. PACHOLCZYK, «Atti della Accademia Nazionale dei Lincei», 30, 738 (1961).

(2) B. С. Сафронов, «Доклады Академии Наук С.С.С.Р.», 139, 53 (1960).

I risultati dei lavori ^(3,4,5) permettono di aggiungere alla somma (1) la forza causata dalla rotazione non uniforme del sistema. Così la condizione di instabilità diventa

$$(2) \quad 2 \pi G \rho_0 = \frac{4 \pi^2 V_s^2}{\lambda_*^2} + \Theta(x) \frac{4 \pi^2 V_{ao}^2}{\lambda_*^2} + 2 \Omega \left[\frac{d}{dr} (\Omega r) + \Omega \right]$$

dove Ω è la velocità angolare di rotazione, r è la coordinata perpendicolare all'asse di simmetria del mezzo (asse della rotazione). Assumendo che il meccanismo di instabilità magneto-gravitazionale sia responsabile della generazione dei bracci spirali nei sistemi galattici, si può determinare il limite superiore del campo magnetico in un modello della protogalassia stratificata, rotante non uniformemente, avente una simmetria assiale e dotata di un campo magnetico trasversale. Se l'intensità di questo campo è più grande del valore critico risultante dalla condizione di instabilità, i bracci spirali di dimensioni date non possono essere formati da questo meccanismo di instabilità. Per le dimensioni osservate dei bracci spirali dell'ordine di 1 kpc e per le densità del gas della protogalassia in vicinanza del Sole dell'ordine di $4,2 \cdot 10^{-24}$ g·cm⁻³ questo limite superiore del campo magnetico della protogalassia è uguale a

$$(3) \quad H = 4 \cdot 10^{-6} \text{ gauss.}$$

Ora bisogna fare qualche osservazione sul carattere di questo limite superiore del campo magnetico (3).

1. La forma della condizione di instabilità (1), (2) (dipendente in generale dalla relazione tra il campo magnetico e la densità del mezzo) è stata ottenuta nel caso di un campo magnetico proporzionale alla densità del mezzo. Si può aspettare, che in condizioni astrofisiche la relazione tra il campo magnetico e la densità del mezzo venga caratterizzata dalla relazione $H \sim \rho^n$ con $n = 1/2$ (questo caso corrisponderebbe alla proporzionalità della pressione magnetica e della pressione fluidodinamica). Siccome però nel caso di $n = 1/2$ il termine della (1), descrivente l'interazione magnetofluidodinamica sarebbe più grande che nel caso di $n = 1$, il limite superiore del campo magnetico determinato in tale caso diventerebbe più piccolo di quello dato dalla (3).

2. Le dimensioni dei condensamenti formati da parte della instabilità dipendono soprattutto dallo spettro di Fourier della perturbazione e dal tipo della funzione caratterizzante il tempo di sviluppo dei condensamenti stessi. Siccome la lunghezza critica λ_* è la più corta lunghezza d'onda, capace

(3) W. FRICKE, «Astrophysical Journal», 120, 356 (1954).

(4) A. G. PACHOLCZYK, J. S. STODÓŁKIEWICZ, «Acta Astronomica», 10, 1 (1960); «Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences», 7, 503 (1959).

(5) A. G. PACHOLCZYK, «Atti della Accademia Nazionale dei Lincei», 28, 357 (1960).

di cagionare l'instabilità, si può aspettare che il campo magnetico nella protogalassia è più piccolo, di quello dato dalla (3).

3. Il valore (3) si rivolge ad un modello della protogalassia gasosa nella quale i bracci spirali si formano da parte della instabilità magneto-gravitazionale. Lo sviluppo dei bracci spirali gasosi può condurre ad un certo aumento del campo magnetico, stringendo le linee di forza magnetica « congelate » nel gas. Le investigazioni radioastronomiche eseguite recentemente a Jodrell Bank ⁽⁶⁾ mostrano, che il campo magnetico galattico non sorpassa attualmente il valore di $5 \cdot 10^{-6}$ gauss.

(6) R. D. DAVIES, C. H. SLATER, W. L. H. SHUTER, P. A. T. WILD, « Nature », 187, 1088 (1960).

Fisica matematica. — *Sul teorema di unicità per le equazioni di Maxwell in un mezzo ferromagnetico.* Nota di ANNA MARIA ZOLI, presentata (*) dal Corrisp. D. GRAFFI.

1. Come è noto in molti sistemi elettrici impiegati nella tecnica si usano materiali ferromagnetici in cui si manifestano i complessi fenomeni della saturazione e dell'isteresi. Pertanto, anche prescindendo dal fenomeno dell'isteresi, le proprietà di tali materiali si lasciano descrivere solo da una relazione non lineare fra il vettore induzione \mathbf{B} e il campo magnetico \mathbf{H} .

Si presenta quindi abbastanza spontaneo il problema di conoscere se anche in presenza di materiali ferromagnetici in cui \mathbf{B} sia una funzione univoca, ma non lineare, di \mathbf{H} le equazioni del campo elettromagnetico, corredate da opportune condizioni iniziali e al contorno, determinano in modo univoco il campo stesso. Ora mentre nel caso del campo statico questo teorema di unicità è conosciuto da tempo ^(*), non mi risulta che tale teorema sia conosciuto nel caso del campo variabile.

In questa Nota mi propongo appunto di esporre un teorema di unicità per le equazioni di Maxwell valido anche in presenza di corpi ferromagnetici, perfettamente analogo a quello valido nel caso in cui tutte le equazioni del campo sono lineari. Dimostro più precisamente che il campo elettromagnetico \mathbf{E} , \mathbf{H} è determinato in modo unico, per ogni valore positivo t del tempo, in un volume V contenente materiali ferromagnetici, ma senza isteresi, quando siano assegnati il campo impresso in tutto V per ogni $t > 0$, i valori di \mathbf{E} e \mathbf{H} in tutto V per $t = 0$ e, per ogni $t > 0$, il componente tangenziale del campo elettrico \mathbf{E}_t o il componente tangenziale del campo magnetico \mathbf{H}_t sulla superficie σ che limita V . Ammetterò che \mathbf{E} e \mathbf{H} siano funzioni continue, assieme alle loro derivate prime, in tutto il dominio quadridimensionale (VT) formato dai punti di V e dagli istanti t compresi fra 0 e T (T positivo e del resto arbitrario) e mi limiterò a considerare un corpo ferromagnetico isotropo per cui il vettore induzione \mathbf{B} risulterà parallelo al vettore \mathbf{H} . Ammetterò ancora che il coefficiente di proporzionalità μ fra \mathbf{B} e \mathbf{H} , detto permeabilità magnetica, sia funzione positiva continua e derivabile almeno due volte del quadrato del modulo del vettore campo magnetico e che risulti valida la relazione

$$(I) \quad \frac{\mu(H^2)}{2} + \mu'(H^2)H^2 > 0$$

dove μ' indica la derivata prima di μ rispetto a H^2 .

(*) Nella seduta del 13 giugno 1961.

(I) Cfr. D. GRAFFI, *Alcuni problemi non lineari della Fisica Matematica*, « Rendiconti del Seminario Matematico della Università e del Politecnico di Torino », 14, 54-55.

Questa ipotesi è di più difficile verifica sperimentale: come è noto μ è infatti una funzione positiva di H^2 che raggiunge il suo massimo per un certo valore H_m^2 di H^2 risultando sempre crescente per $H^2 < H_m^2$ e decrescente per $H^2 > H_m^2$. La (1) che è manifestamente valida per $H^2 < H_m^2$, risulta comunque valida fino a valori di H^2 largamente superiori a H_m^2 . In ogni caso il teorema di unicità, dimostrato in questa Nota vale per tutte le soluzioni in cui il massimo valore di H^2 rende verificata la (1).

2. Nelle mie ipotesi le equazioni di Maxwell, indicando con \mathbf{E}_i il campo impresso e con γ la conduttività elettrica, possono scriversi:

$$(1) \quad \begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \gamma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{cases}$$

Suppongo, ragionando per assurdo, che esistano in (VT) due diverse soluzioni \mathbf{E} , \mathbf{H} ed $\mathbf{E} + \mathbf{E}_i$, $\mathbf{H} + \mathbf{H}_i$ delle (1); si avranno in corrispondenza due vettori induzione che indico con \mathbf{B} e $\mathbf{B} + \mathbf{B}_i$ e risulteranno verificate dai vettori \mathbf{E}_i , \mathbf{H}_i , \mathbf{B}_i le equazioni:

$$(2) \quad \begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H}_i = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}_i}{\partial t} + \gamma \mathbf{E}_i \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_i = -\frac{\partial \mathbf{B}_i}{\partial t} \end{cases}$$

Per il ben noto procedimento con cui si giunge al teorema di Poynting dalle (2) si ricava:

$$(3) \quad dW_i + dQ_i + d\mathfrak{I}_i = 0$$

essendo

$$(4) \quad \begin{aligned} dW_i &= \int_V \left(\mathbf{E}_i \times \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}_i}{\partial t} + \mathbf{H}_i \times \frac{\partial \mathbf{B}_i}{\partial t} \right) dV dt \\ dQ_i &= \int_V \gamma \mathbf{E}_i^2 dV dt \\ d\mathfrak{I}_i &= \int_S \mathbf{E}_i \wedge \mathbf{H}_i \times \mathbf{n} d\sigma. \end{aligned}$$

Per le assegnate condizioni al contorno o $\mathbf{E}_{i,t} = 0$ oppure $\mathbf{H}_{i,t} = 0$, per cui $d\mathfrak{I}_i \equiv 0$; e poiché $dQ_i \geq 0$ dalla (3) risulta

$$(5) \quad \int_V \left(\frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial \mathbf{E}_i^2}{\partial t} + \mathbf{H}_i \times \frac{\partial \mathbf{B}_i}{\partial t} \right) dV \leq 0.$$

Il problema che mi propongo, ai fini delle dimostrazione del teorema di unicità, consiste nel calcolare un opportuno valore maggiorante per l'integrale di $\mathbf{H}_i \times \frac{\partial \mathbf{B}_i}{\partial t}$.

A tale scopo osservo che, posto

$$(6) \quad |\mathbf{H} + \mathbf{H}_1|^2 = x_1 \quad |\mathbf{H}|^2 = x$$

nelle ipotesi fatte risulta:

$$\mathbf{B}_1 = [\mu(x_1) - \mu(x)] (\mathbf{H} + \mathbf{H}_1) + \mu(x) \mathbf{H}_1$$

da cui

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \frac{\partial (\mu(x) \mathbf{H}_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} [\mu(x_1) - \mu(x)] (\mathbf{H} + \mathbf{H}_1) + [\mu(x_1) - \mu(x)] \frac{\partial (\mathbf{H} + \mathbf{H}_1)}{\partial t}.$$

Sussiste poi l'identità:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\mu(x_1) - \mu(x)] &= \mu'(x_1) \frac{\partial x_1}{\partial t} - \mu'(x) \frac{\partial x}{\partial t} = \mu'(x) \left[\frac{\partial x_1}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t} \right] + \\ &+ [\mu'(x_1) - \mu'(x)] \frac{\partial x_1}{\partial t}. \end{aligned}$$

ove $\mu'(x_1)$ e $\mu'(x)$ rappresentano le derivate rispetto a x di $\mu(x_1)$ e $\mu(x)$ rispettivamente; d'altra parte, detti ϑ e ϑ' due numeri opportuni compresi fra 0 e 1, in base al teorema del valore medio, si ha:

$$\mu'(x_1) - \mu'(x) = \mu''(x + \vartheta(x_1 - x)) [x_1 - x],$$

$$\mu(x_1) - \mu(x) = \mu'(x + \vartheta'(x_1 - x)) [x_1 - x].$$

Inoltre, tenendo presenti le posizioni (6), è chiaro che:

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = 2(\mathbf{H} + \mathbf{H}_1) \times \frac{\partial (\mathbf{H} + \mathbf{H}_1)}{\partial t} \quad \frac{\partial x}{\partial t} = 2\mathbf{H} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

ed anche

$$x_1 - x = H^2 + H_1^2 + 2\mathbf{H} \times \mathbf{H}_1 - H^2 = H_1^2 + 2\mathbf{H} \times \mathbf{H}_1.$$

Si può intanto concludere che:

$$\begin{aligned} (7) \quad \mathbf{H}_1 \times \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} &= \mathbf{H}_1 \times \frac{\partial (\mu(x) \mathbf{H}_1)}{\partial t} + \mathbf{H}_1 \times (\mathbf{H} + \mathbf{H}_1) \left\{ 2\mu'(x) \mathbf{H}_1 \times \frac{\partial (\mathbf{H} + \mathbf{H}_1)}{\partial t} + \right. \\ &+ 2\mu'(x) \mathbf{H} \times \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial t} + \frac{\partial (\mathbf{H} + \mathbf{H}_1)^2}{\partial t} \mu''(x + \vartheta(x_1 - x)) [H_1^2 + 2\mathbf{H} \times \mathbf{H}_1] \left. \right\} + \\ &+ \mathbf{H}_1 \times \frac{\partial (\mathbf{H} + \mathbf{H}_1)}{\partial t} \mu'(x + \vartheta'(x_1 - x)) [H_1^2 + 2\mathbf{H} \times \mathbf{H}_1]. \end{aligned}$$

Osservo ora che sussistono le identità:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 \times \frac{\partial (\mu(x) \mathbf{H}_1)}{\partial t} &= \frac{\partial (\mu(x) H_1^2)}{\partial t} - \frac{\mu(x)}{2} \frac{\partial H_1^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu(x)}{2} H_1^2 \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu(x)}{2} \right) H_1^2 \\ \mathbf{H}_1 \times \mathbf{H} 2\mu'(x) \mathbf{H} \times \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial t} &= 2\mu'(x) \cdot \mathbf{H} \times \mathbf{H}_1 \frac{\partial (\mathbf{H} \times \mathbf{H}_1)}{\partial t} - 2\mu'(x) \mathbf{H} \times \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_1 \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \\ &= \mu'(x) \frac{\partial (\mathbf{H} \times \mathbf{H}_1)^2}{\partial t} - 2\mu'(x) \mathbf{H} \times \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_1 \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [\mu'(x) (\mathbf{H} \times \mathbf{H}_1)^2] - \\ &- \frac{\partial \mu'(x)}{\partial t} (\mathbf{H} \times \mathbf{H}_1)^2 - 2\mu'(x) \mathbf{H} \times \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_1 \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \end{aligned}$$

mentre i rimanenti termini al secondo membro di (7) si possono maggiorare in valore assoluto e in tutto (VT), nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
 & \left| \mathbf{H}_i \times \mathbf{H} \frac{\partial (\mathbf{H} + \mathbf{H}_i)}{\partial t} \cdot \mathbf{H}_i \times \frac{\partial (\mathbf{H} + \mathbf{H}_i)}{\partial t} \right| < M' H_i^2 \\
 & \left| \mathbf{H}_i \times \mathbf{H} \frac{\partial (\mathbf{H} + \mathbf{H}_i)^2}{\partial t} \mu''(x + \vartheta(x_i - x)) H_i^2 \right| < M'' H_i^2 \\
 & \left| 2(\mathbf{H} \times \mathbf{H}_i)^2 \frac{\partial (\mathbf{H} + \mathbf{H}_i)^2}{\partial t} \mu''(x + \vartheta(x_i - x)) \right| < M''' H_i^2 \\
 & \left| H_i^2 \left\{ 2 \mu'(x) \mathbf{H}_i \times \frac{\partial (\mathbf{H} + \mathbf{H}_i)}{\partial t} + 2 \mu'(x) \mathbf{H} \times \frac{\partial \mathbf{H}_i}{\partial t} + \right. \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial (\mathbf{H} + \mathbf{H}_i)^2}{\partial t} \mu''(x + \vartheta(x_i - x)) [\mathbf{H}_i^2 + 2 \mathbf{H} \times \mathbf{H}_i] + \right. \\
 & \quad \left. + \mathbf{H}_i \times \frac{\partial (\mathbf{H} + \mathbf{H}_i)}{\partial t} \mu'(x + \vartheta(x_i - x)) \right\} \right| < N' H_i^2 \\
 & \left| 2 \mathbf{H}_i \times \frac{\partial (\mathbf{H} + \mathbf{H}_i)}{\partial t} \mu'(x + \vartheta(x_i - x)) \mathbf{H} \times \mathbf{H}_i \right| < N'' H_i^2
 \end{aligned}$$

dove le M e le N sono costanti opportune.

Se si nota poi che, nelle ipotesi fatte, sono pure lecite in tutto (V, T) le seguenti maggiorazioni:

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{\partial \left(\frac{\mu(x)}{2} \right)}{\partial t} H_i^2 \right| < K' H_i^2 \\
 & \left| \frac{\partial \mu'(x)}{\partial t} (\mathbf{H} \times \mathbf{H}_i)^2 + 2 \mu'(x) \mathbf{H} \times \mathbf{H}_i \cdot \mathbf{H}_i \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right| < K'' H_i^2
 \end{aligned}$$

è evidente che la (5), ove si indichi con L la più grande delle costanti positive M, N, K e con φ l'angolo compreso fra i due vettori \mathbf{H} e \mathbf{H}_i , può scriversi, previa integrazione da 0 a t del primo e secondo membro e tenendo presente, che, per le assegnate condizioni iniziali, è $\mathbf{E}_i = 0$, $\mathbf{H}_i = 0$ per $t = 0$:

$$(8) \quad \int_V \left\{ \frac{\mathbf{E}_i^2}{2} + \left[\frac{\mu(x)}{2} + \mu'(x) H^2 \cos^2 \varphi \right] H_i^2 \right\} dV \leq L \int_0^t dt \int_V H_i^2 dV.$$

Ora se $\mu'(x) > 0$ si ha $\frac{\mu(x)}{2} + \mu'(x) H^2 \cos^2 \varphi \geq \frac{\mu(x)}{2}$;

se invece $\mu'(x) < 0$ $\frac{\mu(x)}{2} + \mu'(x) H^2 \cos^2 \varphi \geq \frac{\mu(x)}{2} + \mu'(x) H^2$.

Detto allora $\mu_m/2$ un valore minorante per $\frac{\mu(x)}{2}$ e $\frac{\mu(x)}{2} + \mu'(x) H^2$, in (VT) (questo valore minorante risulterà positivo per le ipotesi fatte), si avrà che per tutti i valori di x , cioè di H^2 , per cui è valida la ipotesi su $\frac{\mu(x)}{2} + \mu'(x) H^2$, sussiste la diseuguaglianza:

$$H_i^2 \left(\frac{\mu(x)}{2} + \mu'(x) H^2 \cos^2 \varphi \right) > \frac{\mu_m}{2} H_i^2.$$

Le (8) diviene pertanto:

$$\int_V (\epsilon E_x^2 + \mu_m H_x^2) dV \leq \frac{2L}{\mu_m} \int_0^t dt \int_V (\epsilon E_x^2 + \mu_m H_x^2) dV$$

e quindi, in base al lemma di Gronwall ⁽²⁾, si conclude che in ogni istante t dell'intervallo $(0, T)$ è:

$$\int_V (\epsilon E_x^2 + \mu_m H_x^2) dV = 0$$

da cui necessariamente $\mathbf{E}_x \equiv 0$, $\mathbf{H}_x \equiv 0$; il teorema di unicità risulta così completamente provato.

(2) Cfr. G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, vol. I, cap. I, § 5.3.

Fisica. — *Considerazioni intorno alla costante universale elettromagnetica γ* ^(*). Nota di GIOVANNI LAMPARIELLO, presentata ^(**) dal Socio E. PERUCCA.

Nel sistema dei concetti che formano la base della metrologia di Giorgi assume particolare rilievo l'idea che al vuoto, considerato come sede di un campo elettromagnetico, competano due proprietà quantitative da esprimere mediante due costanti dimensionate ϵ_0 e μ_0 , la prima detta dagli elettrotecnici permittività, la seconda permeabilità magnetica (del vuoto). Queste figurano nell'espressione matematica delle densità volumiche di energia elettrica w_e e magnetica w_m , essendo

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E}^2, \quad w_m = \frac{1}{2} \mu_0 \mathbf{H}^2,$$

dove \mathbf{E} ed \mathbf{H} sono rispettivamente l'intensità elettrica e la forza magnetica del campo in quel generico punto.

Nella metrologia di Gauss invece i quadrati di \mathbf{E} e di $\mathbf{H}^* = 4\pi \mathbf{H}$ sono grandezze dimensionalmente omogenee ad una densità volumica di energia.

Ora nella teoria maxwelliana del campo elettromagnetico il campo non è solo sede di energia localizzata, ma anche sede di corrente di energia.

L'introduzione nella dottrina elettrica di questa importantissima grandezza è dovuta, com'è noto, al Poynting⁽¹⁾.

Le ricerche di quest'Autore e le immortali esperienze di Hertz conducono al risultato che la densità areica di corrente di energia elettromagnetica è un vettore \mathbf{S} proporzionale al prodotto vettoriale di \mathbf{E} per \mathbf{H}^*

$$\mathbf{S} \sim \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}^*.$$

Nella metrologia di Gauss la costante di proporzionalità è $c/4\pi$, essendo c la velocità della luce nel vuoto, sicché si ha

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}^* = c \mathbf{E} \wedge \mathbf{H},$$

(*) Cfr. E. COHN, *Das elektromagnetische Feld*, Leipzig, Teubner, 1900; E. PERUCCA, *Fisica generale e sperimentale*, 7^a ed. vol. 2^o, tomo 1^o e tomo 2^o, Torino, Utet, 1960, ove tale costante è indicata con γ_0 .

(**) Nella seduta del 13 giugno 1961.

(1) Cfr. J. H. POYNTING, *On the transfer of energy in the electromagnetic field*, «London Philosophical Transactions», vol. 175 Parte 2^a, 1884, p. 343; O. HEAVISIDE, *Electrician*, vol. 14, 10 gennaio 1885, p. 178; 21 febbraio 1885, p. 306. L'introduzione della grandezza analoga al vettore di Poynting nella teoria matematica delle vibrazioni elastiche viene attribuita dagli Autori russi ad UMOW (1845-1915) dell'Università di Mosca, cfr. S. E. FRISCH-A. W. TIMOREWA, *Lehrgang der allgemeinen Physik*, Teil 1, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1955, p. 392 oppure vol. 1^o dell'opera originale russa, Mosca 1958, p. 431.

mentre nel sistema di misure SI ⁽²⁾, la costante di proporzionalità è supposta priva di dimensioni ed eguale all'unità positiva, cioè si ha

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}.$$

Nel medesimo sistema internazionale di misure oltre a codesta omogeneità dimensionale si è condotti ad affermare l'omogeneità dimensionale di altre due coppie di grandezze:

intensità di corrente elettrica e tensione magnetica;

impulso di tensione elettrica e flusso di induzione magnetica che intervengono nella formulazione integrale delle equazioni di Maxwell.

È allora interessante domandarsi a quali conseguenze si pervenga se si ammette che

a) \mathbf{S} non sia omogenea ad $\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}$;

b) l'intensità di corrente elettrica I non sia omogenea ad una tensione magnetica V_m ;

c) la tensione elettrica V_e non sia omogenea alla velocità di variazione temporale di un flusso di induzione magnetica $\frac{d\Phi_B}{dt} = \dot{\Phi}_B$.

Ciò significa che l'intensità polare magnetica (o massa magnetica) P dev'essere considerata come una grandezza fondamentale accanto ad una carica elettrica Q .

Quest'idea, forse accennata da Duhem e Mascart, è stata esposta da E. Cohn nell'opera citata alla nota ⁽¹⁾ ed analizzata da H. A. Lorentz nella sua celebre monografia sulla teoria di Maxwell ⁽³⁾.

Se si indica con γ una costante dimensionata tale che sia

$$\mathbf{S} = \gamma \mathbf{E} \wedge \mathbf{H},$$

è interessante dimostrare che è:

$$(I) \quad I = \gamma V_m$$

$$(II) \quad \dot{\Phi}_B = -\gamma V_e.$$

La costante γ è stata chiamata dal Fleischmann costante di concatenazione e dal Perucca costante universale dell'elettromagnetismo. Trattasi di una terza costante, oltre ϵ_0 e μ_0 , che però non è indipendente da queste (cfr. le ultime righe di questa Nota).

A priori dunque sarebbero tre le costanti da introdurre (oltre ϵ_0 e μ_0) tutte aventi diritto di chiamarsi elettromagnetiche. Indicate con $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ tali costanti e posto

$$\mathbf{S} = \gamma_1 \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}$$

$$I = \gamma_2 V_m$$

$$\dot{\Phi}_B = \gamma_3 \dot{V}_e,$$

(2) Sigla del Sistema Internazionale MKSA°Kcd, secondo le decisioni della XI Conferenza Generale dei Pesi e misure (Paris, ottobre 1960).

(3) Cfr. * Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften *, Bd. V, zweiter Teil, pp. 86-87.

si tratta di far vedere che è:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = -\gamma_3 (= \gamma).$$

Per quanto riguarda le dimensioni delle grandezze che figurano in codeste formule, si hanno le seguenti equazioni dimensionali

$$[\mathbf{S}] = [\mathbf{W} \mathbf{L}^{-2} \mathbf{T}^{-1}]$$

$$[\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}] = [\mathbf{F} \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{F} \mathbf{P}^{-1}] = [\mathbf{F}^2 \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Q}^{-1}]$$

pertanto

$$\left[\frac{\mathbf{S}}{\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}} \right] = \left[\frac{\mathbf{W}}{\mathbf{L}^2 \mathbf{T}} \frac{\mathbf{P} \mathbf{Q}}{\mathbf{F}^2} \right] = \left[\frac{\mathbf{W}}{(\mathbf{F} \mathbf{L})^2 \mathbf{T}} \mathbf{P} \mathbf{Q} \right] = \left[\frac{\mathbf{P} \mathbf{Q}}{\mathbf{W} \mathbf{T}} \right]$$

e infine

$$[\gamma_1] = \left[\frac{\mathbf{P} \mathbf{Q}}{\mathbf{H}_m} \right].$$

Abbiamo qui indicato con \mathbf{F} , \mathbf{W} , \mathbf{H}_m , \mathbf{P} , \mathbf{Q} i simboli di forza, energia, azione, intensità polare magnetica, carica elettrica; inoltre \mathbf{L} , \mathbf{T} sono i comuni simboli di lunghezza e tempo. Nella struttura dimensionale della costante γ accanto all'importantissima grandezza fisica « azione » figurano le grandezze \mathbf{P} e \mathbf{Q} con parità di diritti.

Si ha ancora:

$$[\mathbf{I}] = [\mathbf{Q} \mathbf{T}^{-1}] \quad , \quad [\mathbf{V}_m] = [\mathbf{W} \mathbf{P}^{-1}]$$

$$\left[\frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}_m} \right] = [\mathbf{Q} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{P}] = \left[\frac{\mathbf{P} \mathbf{Q}}{\mathbf{H}_m} \right]$$

$$[\dot{\Phi}_B] = [\mathbf{P} \mathbf{T}^{-1}] [\mathbf{V}_e] = [\mathbf{W} \mathbf{Q}^{-1}]$$

$$\left[\frac{\dot{\Phi}_B}{\mathbf{V}_e} \right] = [\mathbf{P} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{Q}] = \left[\frac{\mathbf{P} \mathbf{Q}}{\mathbf{H}_m} \right].$$

Queste considerazioni dimostrano l'uguaglianza dimensionale, ma non ancora che la costante γ_1 si identifica con le costanti γ_2 e γ_3 . Che sia proprio così si deduce dal principio dell'energia nel modo seguente.

Sia τ una regione qualunque di contorno σ sede di campo elettromagnetico. La densità volumica di energia totale è espressa da

$$w = 1/2 \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + 1/2 \mu_0 \mathbf{H}^2$$

e quindi la velocità di variazione dell'energia contenuta in τ è data da

$$1/2 \frac{d}{dt} \int_{\tau} (\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \mu_0 \mathbf{H}^2) d\tau = \int_{\tau} (\varepsilon_0 \mathbf{E} \dot{\mathbf{E}} + \mu_0 \mathbf{H} \dot{\mathbf{H}}) d\tau.$$

Questa, per il principio di conservazione dell'energia, deve essere eguale al flusso entrante della densità areica di corrente di energia \mathbf{S} , cioè:

$$-\int_{\sigma} \mathbf{S}_n d\sigma = -\int_{\tau} \operatorname{div} \mathbf{S} d\tau = -\gamma_1 \int_{\tau} \operatorname{div} (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}) d\tau.$$

Dunque, per l'arbitrarietà di τ , dev'essere

$$\varepsilon_0 \mathbf{E} \dot{\mathbf{E}} + \mu_0 \mathbf{H} \dot{\mathbf{H}} + \gamma_1 \operatorname{div} (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}) = 0$$

oppure

$$(\varepsilon_0 \mathbf{E} \dot{\mathbf{E}} - \gamma_1 \operatorname{rot} \mathbf{H}) \mathbf{E} + (\mu_0 \mathbf{H} \dot{\mathbf{H}} + \gamma_1 \operatorname{rot} \mathbf{E}) \mathbf{H} = 0.$$

Poiché quest'equazione dev'essere soddisfatta per qualunque coppia di grandezze \mathbf{E} , \mathbf{H} è necessario e sufficiente che, in qualunque punto del campo e in qualunque istante, si abbia

$$\varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}} - \gamma_1 \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$$

$$\mu_0 \dot{\mathbf{H}} + \gamma_1 \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0.$$

Questa è la forma differenziale delle equazioni di Maxwell nel vuoto.

Da essa si deduce che la costante γ_1 , figura in entrambe le equazioni come fattore dei rotori di \mathbf{H} e di \mathbf{E} e quindi, nella forma integrale, come fattore delle tensioni circuitali magnetica ed elettrica.

Resta così dimostrata l'identità delle tre costanti, salvo il segno per quanto riguarda γ_3 ⁽⁴⁾.

Le considerazioni di Hund e Westphal che mirano ad uno scopo analogo a quello raggiunto nella presente Nota si inseriscono in una esposizione della teoria di Maxwell che è classica, ma che offre il fianco alla seguente obiezione: sviluppando dapprima la teoria dei campi stazionari, poi quella dei campi quasi stazionari ed infine la teoria dei campi rapidamente variabili, per cui vengono stabilite anzitutto la legge di concatenazione di Ampère ampliata poi dalla introduzione della corrente di spostamento e successivamente la legge di induzione di Faraday, *si impedisce di cogliere l'unità del campo elettromagnetico*, giacché nel caso di una corrente non stazionaria non solo si verifica l'esistenza del campo magnetico ad essa concatenato, ma si verifica altresì il fenomeno dell'induzione elettromagnetica (concatenazione di un campo elettrico ad un campo magnetico variabile temporalmente). Così pure insieme col fenomeno dell'induzione elettromagnetica si verifica il fenomeno del campo magnetico concatenato con la corrente indotta (tutt'altro che trascurabile tanto è vero che sulla sua esistenza è fondata la legge di Lenz).

Da queste riflessioni segue che quando si stabilisce il sistema delle equazioni di Maxwell nel caso del campo elettromagnetico più generale non è giusto dire che l'una delle equazioni esprime la legge di Ampère-Maxwell e l'altra la legge di Faraday-Maxwell.

L'importanza della concezione di Maxwell sta tutta nella compattezza del sistema per cui la \mathbf{E} (o la \mathbf{H}) che figura in una delle equazioni è la stessa \mathbf{E} (o la \mathbf{H}) che figura nell'altra.

(4) Cfr. F. HUND, *Theoretische Physik*, Bd. II, Teubner, Stuttgart 1957; W. WESTPHAL, *Physik*, Berlin, Springer, 1956.

Tale concezione è stata compresa ancora più completamente da Hertz il quale ha per primo proposto di sviluppare la teoria elettromagnetica introducendo le equazioni di Maxwell assiomaticamente.

Riteniamo qui soltanto di aver conseguito un progresso metodologico dal punto di vista dimensionale ispirandoci all'idea di dedurre le equazioni di Maxwell dalle esperienze di Poynting e di Hertz (anziché, come si fa ordinariamente, dalle esperienze di Ampère e di Faraday) e dal principio della conservazione dell'energia congiunta all'idea (che negli ultimi tempi ha trovato numerosi consensi nella letteratura tedesca ed è largamente sviluppata nell'opera del Perucca) di introdurre una metrologia pentadimensionale in cui l'intensità polare magnetica o massa magnetica interviene con gli stessi diritti di grandezza fondamentale come la carica elettrica. In una qualunque delle opere citate, si dimostra poi che fra le costanti ε_0 , μ_0 , γ , c sussiste la relazione

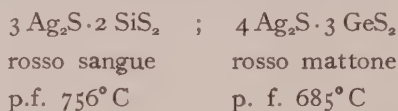
$$\gamma^2 = \varepsilon_0 \mu_0 c^2.$$

Chimica inorganica. — *Sui solfogermanati d'Argento* (*). Nota II di MARIA FIORENTINI POTENZA e MARIO ELLI, presentata (**) dal Socio L. CAMBI.

1. — Questa Nota riguarda le ulteriori ricerche compiute sul sistema $\text{GeS}_2\text{—Ag}_2\text{S}$ in prosecuzione di quelle già comunicate in precedenza (1).

Le indagini chimiche e cristallografiche riferite nelle Note precedenti, riguardarono soprattutto il tratto del sistema $\text{Ag}_2\text{S—GeS}_2 \cdot 4 \text{Ag}_2\text{S}$; l'estensione attuale fino al 48 % mol circa di GeS_2 ci ha confermato il diagramma termico e l'esistenza del composto $4 \text{Ag}_2\text{S} \cdot 3 \text{GeS}_2$ di colore rosso mattone fusibile inalterato a 685° .

Il sistema presenta cioè parziale analogia con quello $\text{Ag}_2\text{S—SiS}_2$, dove L. Cambi (2) ha definito un composto analogo ma non coincidente:



2. — M. FIORENTINI POTENZA — *Studio röntgenografico.*

Le ricerche sul sistema $\text{Ag}_2\text{S—GeS}_2$ vengono qui proseguite con il confronto tra i diffrattogrammi X delle miscele situate a destra del massimo termico corrispondente all'argirodite ($t^\circ = 950$).

I diffrattogrammi dei più significativi campioni di polvere ripresi in condizioni standard CuK_α , 40 KV, 9 mA, velocità $1^\circ/\text{min}$ —1200 mm/h³ sono riuniti nella seguente Tabella I (ved. anche fig. 1).

Dalla Tabella si osserva che, passando dalla argirodite pura alle miscele a Ge crescente, fino al composto cui corrisponde la formula $4 \text{Ag}_2\text{S} \cdot 3 \text{GeS}_2$ (42,85 % mol GeS_2) i riflessi di diffrazione dell'argirodite diminuiscono tutti di intensità proporzionalmente alla diminuzione della quantità di argirodite, mantenendo quasi tutti inalterati i rapporti fra le intensità delle righe; ma il riflesso $3,22\text{--}3,23 \text{ \AA}$ compare con intensità pressoché invariata fino al secondo massimo termico, corrispondente al $4 \text{Ag}_2\text{S} \cdot 3 \text{GeS}_2$.

Questo produce uno spettro di righe che si differenzia apprezzabilmente dall'argirodite tranne che per il riflesso $3,22 \text{ \AA}$ (e relativi ordini superiori 1,60 ecc.) che, come si è detto, si mantiene praticamente costante di intensità dal primo al secondo massimo termico.

(*) Ricerche eseguite presso l'Istituto di Mineralogia, Petrografia e Geochimica dell'Università Statale di Milano e presso il Laboratorio del Consorzio per la Laurea in Chimica Industriale dell'Università Statale di Milano con assegnazione del C.N.R.

(**) Nella seduta del 13 giugno 1961.

(1) L. CAMBI e M. ELLI, questi « Rend. » (8), XXX, 1, 11 (1961); M. FIORENTINI POTENZA, idem (8), XXX, 1, 16 (1961).

(2) « Rend. Ist. Lomb. Sc. e Lett. » (II), XLV, 113 (1912).

TABELLA I.

Argirodite (21 % mol. di GeS_2)		$4 \text{Ag}_2\text{S} \cdot 3 \text{GeS}_2$ (42,85 % mol di GeS_2)		GeS_2	
I	$d_{(\text{A})}$	I	$d_{(\text{A})}$	I	$d_{(\text{A})}$
12	3,22	3	3,23	7	3,36
35	3,05	9	3,10	7	3,35
8	2,99	17	2,975	22	3,12
8	2,82	5	2,83	5	2,93
22	2,68	9	2,66	9	2,83
10	2,46	6	2,499	5	2,76
8	2,43	10	2,458	3	2,69
7	(2,37)	1	(2,34)	8	2,52
5	2,18	6	2,19	6	2,433
13	2,05	2	2,02	8,5	2,295
7	1,95	5	1,956	6	2,264
15	1,87	8	1,836	12,5	2,164
5	1,78	4	1,693	39,5	2,108
3	1,60	7	1,630	5	2,033
		4	1,610	4	1,957
				31,5	1,904
				5	1,850
				12	1,797
				5	1,720
				6	1,675
				9	1,645
				39	1,560
				4	1,513
				20	1,421
				5	1,305
				3	1,267
				12,5	1,237

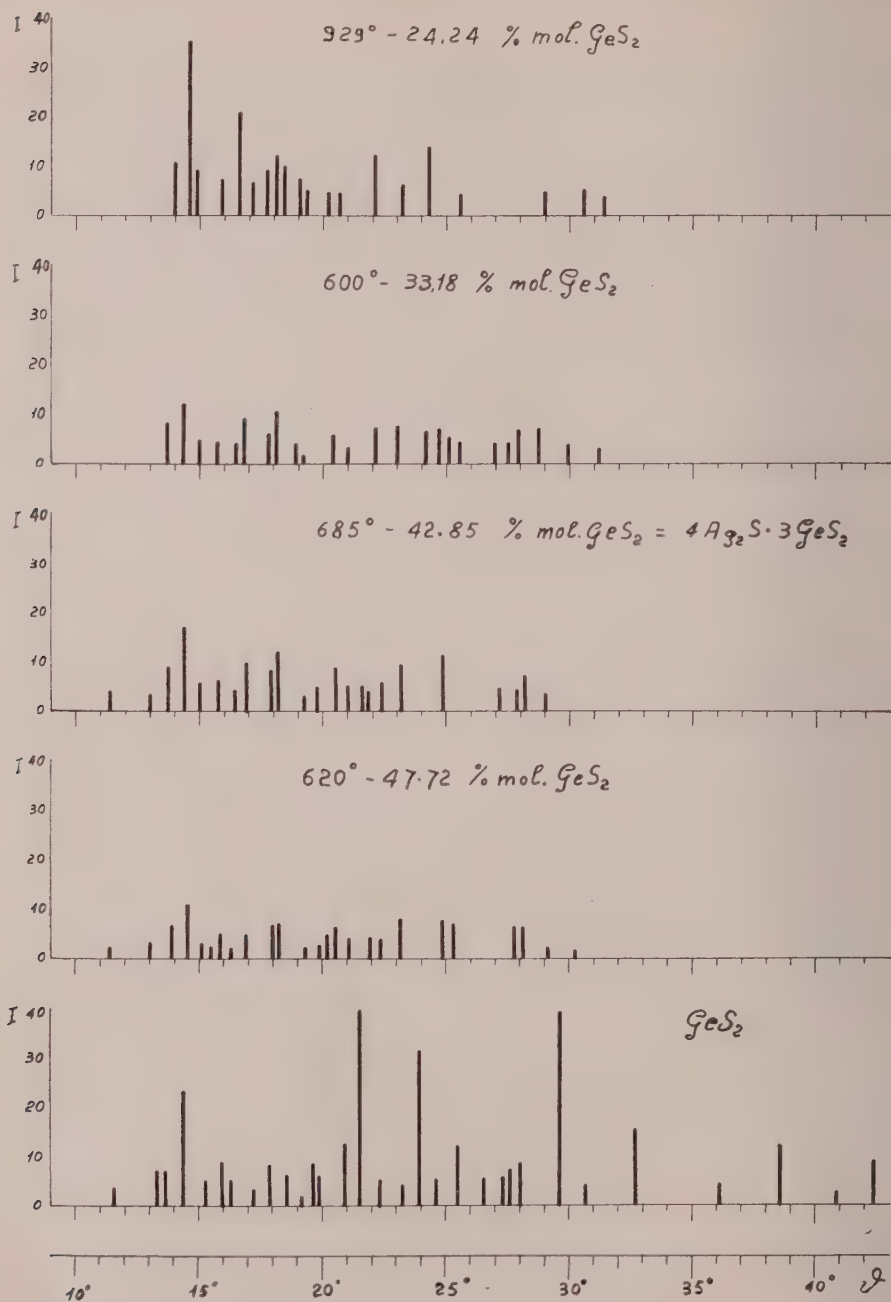


Fig. 1.

Si ritiene fuori discussione che vi sia compenso tra la diminuzione della $3,22-23 \text{ \AA}$ della argirodite e l'aumento della riga quasi identica del presunto composto corrispondente al II mass. term.

Al di là di questo massimo però, dalla parte delle curve di equilibrio del GeS_2 puro, la decrescita di questo riflesso, come era presumibile, riprende ad essere regolarmente proporzionale a quella delle righe di tutto il resto dello spettro.

Da un confronto grossolano e sommario quindi, risulterebbe che argirodite e $4\text{Ag}_2\text{S} \cdot 3\text{GeS}_2$ siano due composti strutturalmente non molto differenti, con probabili rapporti di isotopia.

Confrontando infine la successione di riflessi della miscela corrispondente al massimo term. 685°C con la successione di riflessi ottenuti da GeS_2 (Tabella I, colonna 3) cristallino puro sintetizzato da L. Cambi e M. ELLI si ha una definitiva conferma che il massimo in questione è effettivamente attribuibile alla formazione di un altro composto tra Ag_2S e Ge_2S diverso da GeS_2 , ma soprattutto diverso dalla argirodite con la quale essendo probabilmente isotipo può determinare un campo intermedio di miscibilità parziale o totale, analogo del resto a quello già intuito da L. Cambi nel 1912, nei solfosilicati.

Non disponendo per il momento di cristalli del nuovo composto individuato, non ci è possibile portare altri valori cristallografici sulla cella elementare, oltre allo spettro di Debye.

3. - M. ELLI - *Ricerche chimiche.*

Per le preparazioni venne seguita la stessa tecnica descritta nella Nota precedente. La temperatura venne mantenuta fra $500-600^\circ\text{C}$, per la ragguardevole tensione di dissociazione dei solfosali della zona interessante.

Le stesse analisi termiche vennero eseguite non superando i 10° al disopra del punto di fusione delle miscele, operando sempre in atmosfera di A.

Le analisi chimiche vennero compiute per fusione con $\text{Na}_2\text{O}_2-\text{Na}_2\text{CO}_3$, e successiva distillazione del GeCl_4 .

All'incremento del tenore di GeS_2 , rispetto all'argirodite, le masse assumono sempre più l'aspetto non metallico, con il colore rosso mattone. La grana cristallina dei solfosali ricchi in GeS_2 tende a divenire più fine, in relazione al loro aspetto salino. Queste miscele sono sensibili all'umidità atmosferica, liberando lentamente H_2S . L'HCl conc. le attacca molto lentamente.

L'analisi roentgenografica che precede ha rivelato che il composto in questione

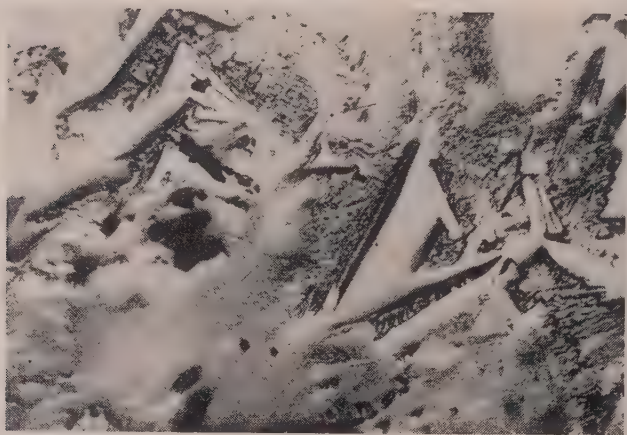


possiede una struttura molto simile a quella dell'argirodite, e ciò potrebbe confermare l'ipotesi dell'esistenza di un campo di soluzioni solide, sia pure ristretto, fra i due solfosali, già accennata da L. Cambi.

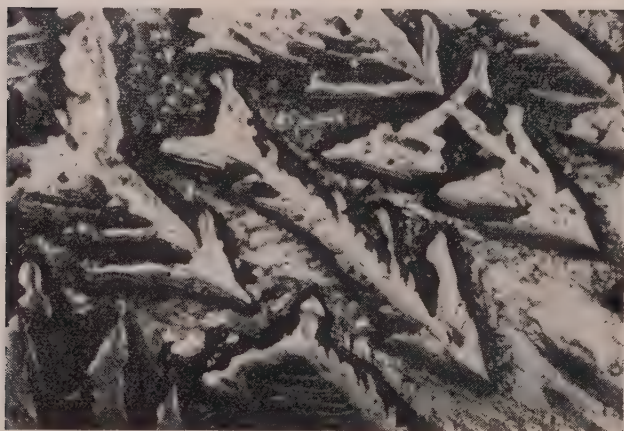
Le microfotografie (fig. 2) riguardano i campioni delle diverse miscele fuse ottenute in riferimento al diagramma termico della Nota precedente.



1



2



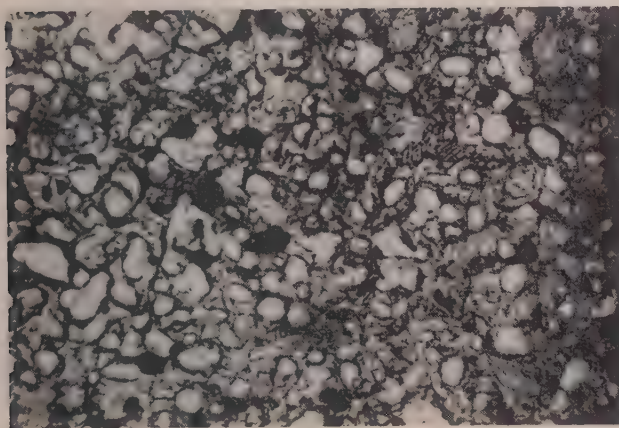
3

Fig. 2.

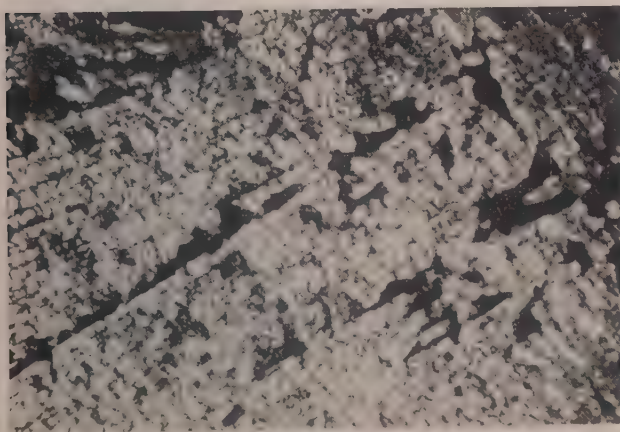
1) Ag_2S : attacco HNO_3 caldo, $D \times 70$, 2) Eutet. ($\text{Ag}_2\text{S} + \text{Argirodite}$): 10,26% mol. GeS_2 , $D \times 70$,
 3) Argirodite + eutet.: 18,74% mol. GeS_2 $D \times 70$.



4



5



6

Segue: Fig. 2.

- 4) Argirodite: 21,00 % mol. GeS_2 , $D \times 70$, 5) Argirodite + 4 $\text{Ag}_2\text{S} \cdot 3\text{GeS}_2$: 33,41 % mol. GeS_2 , $D \times 70$
6) 4 $\text{Ag}_2\text{S} \cdot 3\text{GeS}_2$ 42,85 % mol. GeS_2 , $D \times 70$.

Geologia. — *Il traforo del Monte Bianco; prime osservazioni geologiche sul tratto dalla progressiva 1300 alla progressiva 2500 (parte italiana)* ^(*). Nota di PAOLO BAGGIO e ROBERTO MALARODA, presentata ^(**) dal Socio GB. DAL PIAZ.

La presente Nota rappresenta la seconda parte della descrizione geologica preliminare del settore italiano del traforo del M. Bianco. Essa rientra nel programma di studi predisposto dal « Gruppo di ricerche per il traforo del Monte Bianco » del Comitato per la Geografia, Geologia e Mineralogia del C.N.R., auspice l'Accademia Nazionale dei Lincei. La raccolta sistematica dei dati e dei materiali viene cortesemente eseguita dal personale della Divisione Geomineraria del C.N.E.N. (Gruppo α diretto dal dott. P. Baggio) mano a mano che procede l'avanzamento della galleria.

I lavori di perforazione, che erano giunti il 14 dicembre 1959 alla progr. di m 1304,30 hanno raggiunto la progr. di m 2503 il giorno 3 gennaio 1961.

Come è stato fatto per la Nota precedente ^(*) vengono illustrate qui soltanto le osservazioni di maggior rilievo, rimandando per la trattazione definitiva a successivi studi che sono in programma. Anche qui l'esposizione, volutamente a carattere sommario, vien riferita ad un grafico nel quale sono indicate le caratteristiche principali delle rocce cristalline, le giaciture dei piani di scistosità, le zone più importanti per i fenomeni tettonici di cataclasi e milonisi, le faglie e diaclasi più evidenti, nonché le venute d'acqua incontrate. Come per la Nota precedente i dati sono desunti dai grafici e dai rapporti redatti periodicamente dal Gruppo α del C.N.E.N. ⁽²⁾ o sono frutto di osservazioni fatte personalmente dagli Autori nel corso dei sopralluoghi.

(*) Lavoro compreso nel programma di studi sul traforo del M. Bianco, eseguito presso l'Istituto di Geologia dell'Università di Torino e presso il Laboratorio di Torino del C.N.E.N., con il contributo finanziario del Consiglio Nazionale delle Ricerche e sotto gli auspici dell'Accademia Nazionale dei Lincei. Ringraziamo il prof. A. Bianchi, Presidente del competente Comitato del C.N.R. ed il prof. Gb. Dal Piaz per aver promosso gli studi sul traforo e, per il C.N.E.N., che ha fornito il personale per i rilievi in galleria, il prof. F. Ippolito, Segretario Generale, e l'ing. F. Pantanetti, Capo della Divisione Geomineraria. L'ing. G. Catalano, Direttore dei lavori del traforo, ci ha favorito con la consueta cortesia in occasione dei rilievi e dei sopralluoghi.

(**) Nella seduta del 13 maggio 1961.

(1) P. BAGGIO, G. ELTER e R. MALARODA, *Il traforo del Monte Bianco; prime osservazioni geologiche sul tratto dall'imbocco italiano alla progr. 1300*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. 8^a, 28, 470-476. 1 tav. A questa Nota rinviamo per le citazioni della bibliografia essenziale più recente.

(2) La sorveglianza e la raccolta dei dati e dei campioni, per questo come per il precedente tratto della galleria, è opera soprattutto dei sigg. per. min. G. Mezzacasa e geom. G. Gioria, che ci è grato qui ringraziare per la collaborazione.

L'esecuzione del grafico è stata condotta secondo quanto dettagliatamente illustrato nella Nota precedente (pp. 471-472). Data la maggior complessità dei fenomeni da illustrare si è dovuto però ricorrere ad una maggiore scala e ad una rappresentazione con più colori. Questo ha, d'altro canto, permesso di adottare una stessa scala per rappresentare la larghezza della calotta (fascia centrale della colonna a colori, e l'altezza dei piedritti (fascie laterali della colonna a colori) della galleria. Ne risulta, rispetto alla rappresentazione precedente, una più precisa ubicazione dei materiali e delle strutture ed una più efficace figurazione del loro andamento, spesso variabile. In particolare vi si trovano, nella rappresentazione della calotta, riprodotte le reali direzioni dei piani di milonisi e delle superfici limite tra i diversi tipi petrografici.

La roccia dominante, nel tratto di galleria considerato, è data dalla più banale facies del «protogino» a grana grossa, nel quale si osservano dei grandi fenocristalli di feldispato potassico, talora a tendenza idiomorfa, talaltra chiaramente lenticolati, e una più o meno evidente tessitura scistosa indicata dalle lamelle di biotite (Tav. II, figg. 1, 2, 3). In più punti si osservano entro al «protogino» normale locali variazioni di facies più che altro dovute a differenti rapporti tra i componenti femici ed i fenocristalli di feldispato potassico (Tav. II, fig. 2).

Abbastanza comune è però anche una facies di «protogino» in cui la tessitura scistosa è totalmente, o in gran parte, assente. Ciò si verifica, sia in conseguenza di fenomeni di aplitizzazione tardiva con apporto essenzialmente di quarzo (come per esempio tra le progr. 1830 e 1950⁽³⁾, 2170 e 2260), sia per una già iniziale netta prevalenza dei componenti sialici sulla biotite (come per esempio tra le progr. 2025 e 2060 e alle progr. 2150-2160) (Tav. III, fig. 1).

Tra le progr. 2345 e 2395, come pure tra 2420 e 2470, compare un nuovo tipo litologico. Si tratta di un granito aplitico microgranulare con caratteri di notevole omogeneità, salvo per quanto riguarda la presenza, abbastanza comune, di tracce di orientazione nelle lamelle biotitiche. Il granito ha bordi quanto mai sfumati ed il passaggio dal «protogino» ad esso avviene normalmente per graduale riassorbimento di parte della biotite e dei fenocristalli di feldispato potassico di cui si può seguire la progressiva diminuzione in dimensioni entro spazi dell'ordine del metro o meno (Tav. III, fig. 2; Tav. VI, fig. 2; Tav. VII, figg. 1 e 2).

Masse minori di granito identico si trovano, sotto forma di chiazze, lenti, o con andamento filoniano, anche a progressive menz avanzate (Tav. III, fig. 3), come per esempio alla progr. 2195 ove il granito microgranulare ha evidenti rapporti di discordanza rispetto ai piani di scistosità del «protogino». Nella fascia periferica tuttavia esso contiene relitti dei fenocristalli

(3) Dalla progr. 1830 alla progr. 1895 manca ogni accenno di orientazione negli individui di biotite, mentre tra le progr. 1900 e 1950 compare una tessitura scistosa appena accennata.

feldispatici sempre meno visibili quanto più ci si allontana da essa. L'osservazione microscopica ha dimostrato che la loro scomparsa è dovuta ad evidente corrosione ad opera del quarzo di formazione tardiva. Entro al granito microgranulare, alla progr. 2418, compaiono delle bande granatifere visibili anche macroscopicamente.

In due punti, e precisamente alle progr. 2040 e 2110 circa, si osservano due filoni di aplite granitica microgranulare della potenza di qualche decimetro. Filoncelli minori della stessa roccia, non indicabili nel grafico, sono stati segnalati anche in qualche altra località.

Lungo tutto il tracciato della galleria ora in esame sono state incontrate a più riprese delle intercalazioni a contorno ellittico, ed anche lenticolare appiattito, di una roccia a composizione essenzialmente biotitico-plagioclasica in cui il componente femico è nettamente più abbondante che nelle rocce già descritte. Si tratta di materiali con aspetto relativamente omogeneo e grana fine. Le dimensioni sono molto variabili, passando da pochi centimetri a qualche decimetro, e, più raramente, al metro. Se l'incluso ha forma lenticolata la sua orientazione corrisponde perfettamente a quella della tessitura scistosa localmente dominante nella roccia che lo ospita.

Una maggior frequenza di inclusi si è notata specialmente tra le seguenti progr.: 1950-2000, 2050-2130, 2275-2325, in aree occupate prevalentemente dal «protogino» normale. Inclusi dello stesso tipo si trovano però anche entro al «protogino» in via di aplitizzazione o in quello privo di orientazione scistosa; essi mancano invece del tutto entro le facies granitiche microgranulari.

La sopra riportata distribuzione degli inclusi, nonché le caratteristiche di composizione e di orientazione, ed il fatto che si osservano talora inclusi sul punto di essere permeati dalla frazione sialica e dispersi entro alla massa della roccia circostante (Tav. IV, figg. 2, 3, 4), fanno pensare che essi rappresentino dei relitti di rocce preesistenti (*septa*) in via di progressiva assimilazione.

Molto comuni sono pure, in tutte le facies del «protogino», le sacche, a contorno perlopiù irregolare, talora invece arrotondate e disposte a lenti o a nastro, costituite da concentrazioni di grossi individui di feldispato potassico a tendenza idiomorfa o anche completamente idiomorfi (Tav. III, figg. 3, 4). Le dimensioni di questi addensamenti di materiale feldispatico sono molto variabili e, quando si tratti di nastri, esse possono interessare l'intera sezione della galleria. Abbastanza comunemente si nota che queste sacche feldispatiche si localizzano in corrispondenza dei già descritti *septa* biotitico-plagioclasici, formando attorno ad essi un'aureola completa, o rivestendoli parzialmente (Tav. IV, fig. 1).

Uno dei fenomeni che più colpiscono, particolarmente evidenti sulle pareti umide della galleria, è dato dagli sciami di biotite, ora più ora meno, talora molto estesi o marcati (Tav. VI, figg. 1 e 2). In essi la biotite spicca già alla osservazione macroscopica, come alternantesi a fasce di roccia aplitizzata (Tav. V, figg. 1 e 2). Spesso l'orientazione degli sciami è più o meno concordante con quella della tessitura del «protogino», ma sembrano parti-

colarmente interessanti quei casi, non eccezionali, in cui si nota una chiara discordanza (Tav. V, figg. 3 e 4). È evidente allora che si tratta di concentrazioni di biotite dovute ad una, almeno parziale, migrazione del minerale che accompagna una aplitizzazione delle rocce vicine e segna, in genere, la separazione fra le facies di granito aplitico microgranulare ed il « protogino ». Ciò è particolarmente visibile alla progr. 2192, località cui la fotografia della Tav. V, fig. 1 si riferisce, e alla progr. 2245.

Sciami di biotite neogenica sono spesso evidentemente legati a zone di milonisi, cui impartiscono una caratteristica tinta nerastra, più raramente bronzea. Si tratta di un fenomeno che conferma su vasta scala la neoformazione di biotite già da noi descritta nelle blastocataclasiti e nelle blastomiloniti della zona marginale del massiccio cristallino (vedi Nota precedente).

Non si può escludere che in qualche caso apparenti addensamenti biotitici siano invece l'effetto di una maggior aplitizzazione delle rocce circostanti e che in essi quindi la biotite sia tutta data da relitti antichi. Questa possibilità sembra confortata dal fatto che talora sciami di biotite costituiscono un'aureola, o rappresentano la prosecuzione sfumata, di *septa* biotitico-plagioclasici.

Lo studio microscopico eseguito sulle rocce sopra elencate ha avuto carattere esclusivamente preliminare, intendendosi con esso solo ricercare una più esatta definizione dei tipi litologici e dei fenomeni più generali e chiaramente evidenti.

Per quanto riguarda la composizione mineralogica delle rocce dominanti, e cioè del « protogino », del « protogino » in via di aplitizzazione e del granito aplitico microgranulare, si può notare la presenza degli stessi minerali (quarzo, feldispati potassici, plagioclasì, biotite) di cui varia solo la percentuale relativa in modo che si ha un graduale aumento di quarzo ed una diminuzione dei feldispati potassici e della biotite passando dalla facies protoginica alla facies granitica microgranulare. Gli occhi del « protogino » e le sacche feldispatiche sono sempre costituite da grandi individui di feldispati potassici perlopiù pertitici. I rapporti di corrosione e sostituzione che caratterizzano le strutture di tutte le rocce esaminate permettono di stabilire l'esistenza di una antica biotite che può essere sostituita da tutti gli altri componenti essenziali (Tav. VII, fig. 3). I plagioclasì, a composizione albitico-oligoclasica, spesso deformati con flessioni dei piani di geminazione e più o meno fortemente sericitizzati o saussuritizzati, appartengono probabilmente a più generazioni tardive come, in qualche caso, è reso evidente dai rapporti strutturali (fig. 1).

Chiaramente tardivo rispetto a questi componenti è il feldispato potassico, a volte presentante la grata microclinica, perlopiù con aspetto di tipica pertite. Da esso sono formati, come si è detto, i fenocristalli che possono presentare inclusi gli altri componenti più antichi e particolarmente i plagioclasì. Al contatto fra questi ultimi, in genere a contorno profondamente corrosivo (Tav. VI, figg. 3 e 4), ed il feldispato potassico si forma un caratte-

ristico orlo di reazione in cui è scomparsa l'alterazione sericitica (Tav. VII, fig. 4) e talora compaiono delle strutture mirmechitiche. Esiste anche una generazione di plagioclasio albitico molto tardivo, che può dar luogo ad individui granulari ma che è più facilmente riconoscibile come tale quando forma degli orli al contatto fra diversi individui di feldispato potassico.

Il tratto più caratteristico delle strutture delle rocce cristalline del Monte Bianco ora esaminate è però dato dall'apporto finale di quarzo, che dà luogo a tipici aggregati pavimentosi. Questi aggregati possono corrodere tutti i minerali prima elencati e penetrare entro ad essi in corrispondenza a micro-

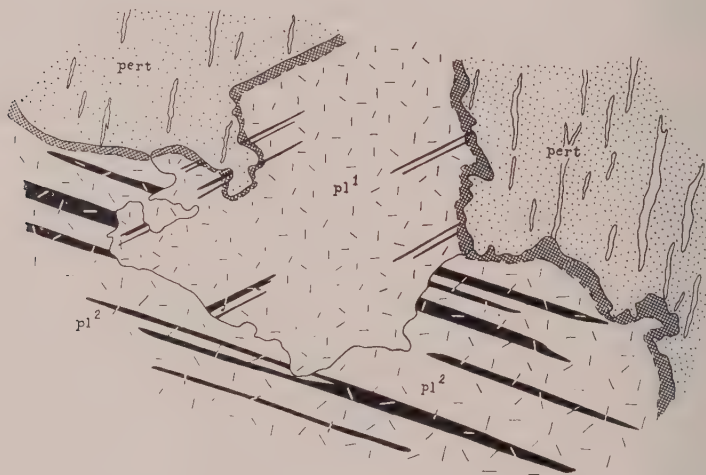


Fig. 1. - Sezione sottile del « protogino » aplittizzato, presso il contatto con il granito aplitico microgranulare, alla progr. 2418. Sono evidenti due individui di plagioclasio appartenenti a due diverse generazioni (corrosioni di pl^2 su pl^1) ed un individuo di feldispato potassico pertitico (pert) posteriore ad entrambe ($\times 87$).

fratture (Tav. VI, figg. 3 e 4; Tav. VII, figg. 1 e 2). Quando il fenomeno della mobilizzazione del quarzo assume rilevanza particolare la roccia appare anche macroscopicamente nettamente aplittizzata e si passa cioè ai tipi di « protogino » in via di aplittizzazione ed ai graniti aplitici microgranulari.

All'apporto del quarzo appare legata la mobilizzazione della biotite di cui, in certi punti, tendono a scomparire anche gli ultimi relitti mentre in altre zone, talora limitrofe alle prime, si ha una rideposizione di biotite neoformata in piccoli individui. Questo conferma quanto si osserva macroscopicamente sulle pareti della galleria, ove è dato rilevare la presenza di sciame biotitici fiancheggianti, talora anche ripetutamente, il bordo di contatto tra il granito aplitico microgranulare e le rocce meno aplittizzate (vedi grafico e Tav. V, figg. 1 e 2).

Fra i vari componenti del «protogino», che maggiormente risentono di questa metasomatosi finale, è il feldispato potassico, di cui vengono riasorbiti rapidamente i fenocristalli e che tende a diminuire, anche quantitativamente, rispetto al quarzo ed al plagioclasio.

Aumenti percentuali di quarzo e biotite di neoformazione si notano anche in tutte le blastocataclasiti e le blastomiloniti, per cui appare evidente che, almeno in parte, la mobilizzazione dei suddetti minerali è legata alle zone di più intense deformazioni postcristalline del massiccio.

Deformazioni postcristalline che colpiscano il quarzo e la biotite di ultimo apporto metasomatico sono piuttosto rare e non accentuate, soprattutto in relazione con la generale diffusione dei fenomeni di cataclasi e milonisi nell'area considerata, fenomeni di cui nelle microstrutture, anche delle rocce meno cataclastiche, resta traccia nelle deformazioni dei vecchi plagioclasii e del feldispato potassico (Tav. VI, figg. 3 e 4; Tav. VII, figg. 1 e 2).

Per quanto riguarda le azioni cataclastiche e milonitiche conviene notare che, poiché tutte le rocce sono più o meno colpite da esse, nel grafico sono state indicate solo le zone ove il fenomeno raggiunge particolare intensità, anche se essa è stata distinta come debole con il segno del quadrello 10 della leggenda. Oltre alla indicazione generica, rappresentata dal segno che compare nella colonna inferiore del grafico, sono indicate con segni particolari (quadrelli 8 e 9 della leggenda), sovrapposti al colore, le principali aree ove le rocce sono più esattamente definibili come vere e proprie cataclasiti e miloniti. In tutti i casi in cui questi materiali sono stati sottoposti all'esame microscopico si è constatato che si tratta di blastocataclasiti e blastomiloniti, tipi litologici già descritti nella Nota precedente.

Come risulta dal grafico aree di accentuata cataclasi si trovano particolarmente nel tratto tra le progr. 1300 e 1470 (in corrispondenza al margine del massiccio cristallino e in continuazione a quelle indicate nel grafico della Nota precedente), dalla progr. 1560 alla 1700, dalla 1735 alla 1810, e infine dalla 2020 alla 2075. Molto diffusa è la cataclasi in tutte le rocce del tratto compreso tra le progr. 2100 e 2500.

I piani di faglia, milonisi e diaclasi hanno orientazioni abbastanza variabili, come risulta dalla rappresentazione riassuntiva data col segno convenzionale nella colonna inferiore del grafico. Un fatto abbastanza singolare è che, nonostante la relativa eterogeneità dei tipi litologici incontrati in questo tratto di galleria, non si è mai potuto notare uno spostamento di entità apprezzabile nei materiali situati sulle due labbra dei numerosi piani di milonisi, anche quando l'entità della deformazione della roccia milonitica e la potenza di essa sembrerebbe indicare un importante movimento. Ciò vale in particolare per i filoni aplitici e specialmente per quello della progressiva 2110, tagliato ma non sensibilmente spostato da numerosi piani di milonisi subparalleli.

La rappresentazione completa delle giaciture dei giunti tettonici, dei piani di faglia e milonisi nel tratto di galleria ora considerato è più efficace-

mente sintetizzata dai due diagrammi di proiezione polare sul reticolo di Schmidt ad aree equivalenti (figg. 2 e 3). La fig. 2 riguarda le giaciture dei giunti e delle diaclasi rilevate in galleria; in essa compare una cintura periferica di massimi contigui, corrispondenti a zone di maggior densità di punti e quindi di maggior frequenza di piani di giunti. Un massimo di primo ordine corrisponde alla direzione N-45° E, mentre massimi di secondo ordine interessano un intervallo di direzioni compreso tra N-20° E e N-30° E. Carattere generale è, in questi casi, la subverticalità dei giunti i cui punti rappre-



Fig. 2. - Diagramma per contorni (sul reticolo di Schmidt) delle giaciture di 1050 giunti e diaclasi rilevati tra le progressive 1400 e 2500.

sentativi vengono perciò a cadere alla periferia della proiezione adottata. Inoltre risaltano pure bene alcuni massimi minori che corrispondono a giaciture diverse dalle precedenti e più precisamente a N-5° 10° E, con inclinazione di 85° a SE e, ancora più nettamente, a E-W con inclinazione di 65° a N. È interessante sottolineare come queste zone di giaciture prevalenti siano costituite quasi totalmente da giunti di tensione, talora caratterizzati da specchi di movimento relativo a piccole striature, in buona parte collegati a zone di milonisi o cataclasi. Al centro della proiezione si notano due aree a densità di punti relativamente piccola se confrontata con le precedenti, ma che presentano invece un interesse particolare essendo attri-

buibili esclusivamente a giunti di distensione orizzontali o con giaciture prossime alla orizzontalità (N-10° 20° E con inclinazione di circa 10° a SE). Evidentemente nel complesso il numero di questo tipo di giunti è decisamente inferiore all'altro ed è sempre collegato a superfici di movimento che si sono rilevate in galleria. I giunti di distensione suborizzontali, presentano un riempimento di quarzo e clorite, talora accompagnati da solfuri (FeS₂, Fe As S). Altrove, entro a zone cataclastiche, si trova pure dell'epidoto pistacitico assieme a clorite.

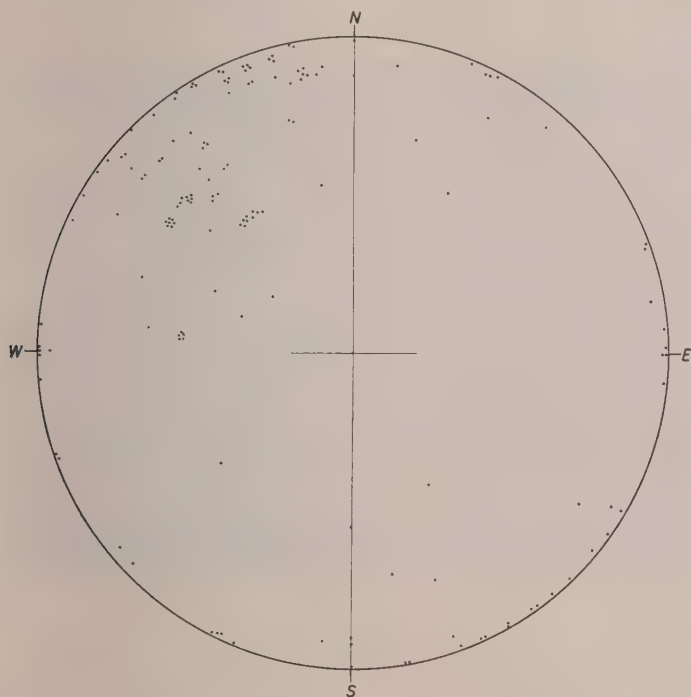


Fig. 3. - Diagramma per punti (sul reticolo di Schmidt) delle giaciture delle superfici di faglia, milonisi e cataclasi tra le progressive 1300 e 2500.

La proiezione di Schmidt relativa alle superfici di movimento (fig. 3) non permette di arrivare alla costruzione del diagramma per contorni, sia per il numero complessivo piuttosto scarso di piani di faglia, di milonisi e cataclasi di cui è stato possibile rilevare la giacitura e sia per la dispersione dei loro punti rappresentativi nella proiezione stessa. Si può notare tuttavia una decisa tendenza di questi ultimi a localizzarsi nel quadrante di NW, in parte sovrapponendosi alle aree periferiche di massima densità stabilite per i giunti di tensione, in parte denotando invece inclinazioni minori.

Il fenomeno di autoclasi, già manifestatosi con notevole intensità in corrispondenza alle blastocataclasiti di «protogino», descritte nella prece-

dente Nota, ha continuato a verificarsi, generalizzandosi per i diversi tipi di rocce cristalline, anche in questo secondo tratto di galleria. Fa eccezione tuttavia il segmento compreso tra le progr. 2150 e 2300, dove esso è scomparso quasi completamente. Le osservazioni al riguardo hanno stabilito che una diminuzione sensibile dell'autoclasi si verifica generalmente in corrispondenza alle zone più colpite da fenomeni di cataclasi e milonisi, zone in cui la roccia si presenta meno compatta. Il fenomeno si produce particolarmente in calotta e nella zona di saldatura tra questa ed il piedritto, meno frequentemente in corrispondenza ai piedritti anche se allora con più visto-

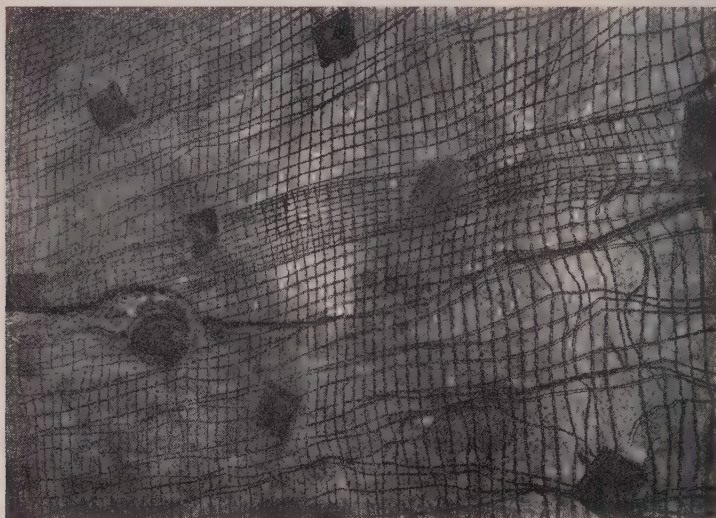


Fig. 4. - Protezione contro i fenomeni di autoclasi realizzata mediante reti metalliche fissate con chiodi ad espansione.

sità. I blocchi di distacco hanno forma di scaglie e lastre, talora concoidali, meno frequentemente di massi piuttosto appiattiti, che si sagomano generalmente sulla sezione scavata della galleria.

I sistemi di protezione a reti metalliche fissate con chiodi ad espansione (fig. 4) si sono dimostrati comunque sufficienti per salvaguardare dalla sua pericolosità.

Le giaciture dei piani di scistosità del «protogino» e quelle, meno evidenti, delle anatessiti e del granito microgranulare sono simboleggiate nella colonna superiore del grafico. Le direzioni sono in media N-30° 40° E, salvo alle progr. oltre la 2270 in cui si approssimano molto a quella N-S.

Molto comuni sono le giaciture verticali, intorno alle quali oscillano delle immersioni verso SE (tra la progr. 1500 e 1570, e alle progr. 2270-2285) o, più spesso, verso NW (progr. 1580-1825, 1900-1955, 1985-2025,

2060-2090, 2405-2500) con valori di inclinazione minimi, di 80° verso SE e di 75° verso NW.

Nel tratto di galleria cui si riferisce la presente Nota non sono comparse venute idriche di portata considerevole. Si tratta perloppio di semplici stillicidi che sono stati indicati nella parte superiore del grafico col segno ondulato azzurro già usato nella prima Nota. Fra questi stillicidi meritano cenno per una maggior portata (misurata a pochi giorni dal momento in cui le venute furono raggiunte con l'avanzamento) solo i seguenti: alla progr. 2030 litri 2,5 al sec, alla progr. 2169 litri 4 al sec, alla progr. 2229 litri 3 al sec.

La temperatura delle principali venute d'acqua in galleria, periodicamente controllata, permette di anticipare per ora solo poche osservazioni a carattere generale. Si nota in genere che, mentre la temperatura ambiente della galleria va progressivamente aumentando con l'avanzamento, di valori che, per esempio al 16 Novembre 1960, variavano da 5°,8 alla progr. 375 a 15°,2 alla progr. 2229, analogo aumento si riscontra nelle temperature delle acque che, alla medesima data, passavano da 11°,3 alla venuta della progr. 375, a 21°,8 alla venuta della progr. 2229. Fanno eccezione le due polle alla progr. 1169 e alla progr. 2030 che si sono mantenute sempre a temperatura leggermente superiore a quella non solo delle venute precedenti ma anche delle venute immediatamente successive. Le temperature più interessanti per questo confronto sono riportate nel seguente specchio:

progr.	t. al 26-9-1960	t. al 13-10-1960	t. al 16-11-1960	t. al 31-12-1960
1040	16°,9	16°,9	17°,0	17°,0
1169	20°,6	20°,7	19°,6	19°,4
1347	16°,1	15°,9	16°,7	16°,8

Analogamente, per quanto riguarda la polla della progr. 2030, si hanno le seguenti misure:

progr.	t. al 13-10-1960	t. al 16-11-1960	t. al 31-12-1960
1733	21°,2	21°,4	21°,4
2030	22°,7	23°,2	23°,5
2071	21°,4	—	—
2169	—	22°,7	22°,8

In complesso, sia per quanto riguarda la temperatura delle acque che per quanto concerne quella ambiente, le condizioni incontrate finora si possono definire favorevoli. Anche la roccia non ha presentato, come del resto previsto, inconvenienti di rilievo se si eccettuano i già ricordati fenomeni di autoclasi. Le frequenti zone di milonisi e cataclasi non hanno costituito

un ostacolo all'avanzamento. Per quanto riguarda il tratto di galleria considerato nella Nota precedente è solo da ricordare un limitato sollevamento della platea, verificatosi a rivestimento avvenuto, tra le progr. 806 e 818, in corrispondenza a filladi giuresi ove già si erano registrati dei crolli all'avanzamento. Il fenomeno, manifestatosi nel settembre 1960 e cui si è fatto fronte con armature in legno, non ha avuto ulteriore accentuazione.

SPIEGAZIONI DELLE TAVOLE

TAVOLA I.

Grafico del tratto di galleria tra le progressive 1300 e 2500 dall'imbocco italiano: 1. « Protogino » normale con facies di gneiss occhiadino (embrechiti occhiadine). - 2. « Protogino » in via di aplitizzazione per progressiva perdita della biotite ed incipiente riassorbimento dei fenocristalli di feldispato potassico; talora « protogino » privo o povero di orientazione anche se localmente ancora ricco in biotite (anatessiti occhiadine). - 3. Granito aplitico microgranulare, perlopiù con residui di orientazione scistosa (anatessiti), raramente con tipica tessitura granitica. - 4. Relitti di gneiss biotitici entro al « protogino » (*septa*). - 5. Sacche, di norma irregolari, talora sciami e fascie, di feldispattizzazione, con addensamenti di fenocristalli di feldispato potassico a tendenza idiomorfa. - 6. Sciami di biotite, in genere derivanti da mobilizzazione tardiva, spesso discordanti rispetto alla tessitura del « protogino », perlopiù associati a zone di feldispattizzazione, di aplitizzazione, o costituenti un'aureola intorno ad alcuni relitti di gneiss biotitici. - 7. Filoni di graniti aplitici e di apliti granitiche microgranulari. - 8. Cataclasi e blastocataclasi. - 9. Miloniti e blastomiloniti. - 10. Zone di cataclasi, di laminazione, di diaciasi; aree con più diffusa permeazione di vene quarzitiche (parte sinistra del quadrello: debole intensità - parte destra del quadrello: media intensità). - 11. Idem con intensità forte. - 12. Giaciture dei piani di scistosità. Nelle zone ove manca l'indicazione vi sono delle facies prive di tessitura scistosa (« protogino » aplitizzato tra le progr. 1830 e 1895) oppure essa è stata obliterata dai fenomeni di cataclasi e milonisi (come per es. tra le progr. 1300 e 1470). - 13. Giaciture delle diaciasi (tratteggio) e delle faglie principali (linea continua). - 14. Stillicidi e venute d'acqua con portate inferiori a 10 litri/sec.

TAVOLA II.

Fig. 1. - « Protogino »; facies normale. In alto a sinistra è visibile una zona di decolorazione in corrispondenza ad un giunto. Progr. 2160.

Fig. 2. - « Protogino »; facies normale. Zona con listature a composizione variabile. Progr. 1798.

Fig. 3. - « Protogino »; facies normale con occhi lenticolati in corrispondenza a zone più o meno milonitiche. Progr. 2162 ($\times 0,25$).

Fig. 4. - « Protogino »; facies normale passante ad una fascia particolarmente ricca di feldispato (in alto). Progr. 2010 ($\times 0,27$).

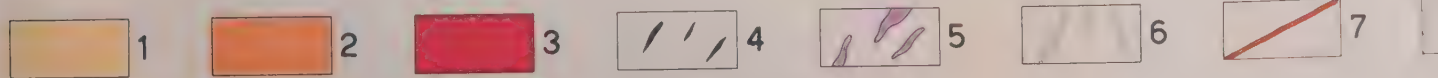
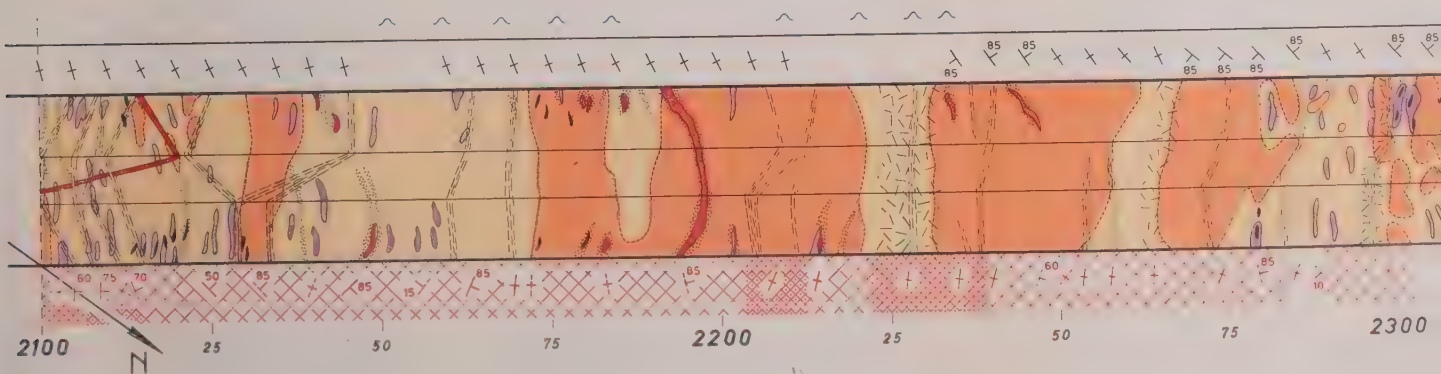
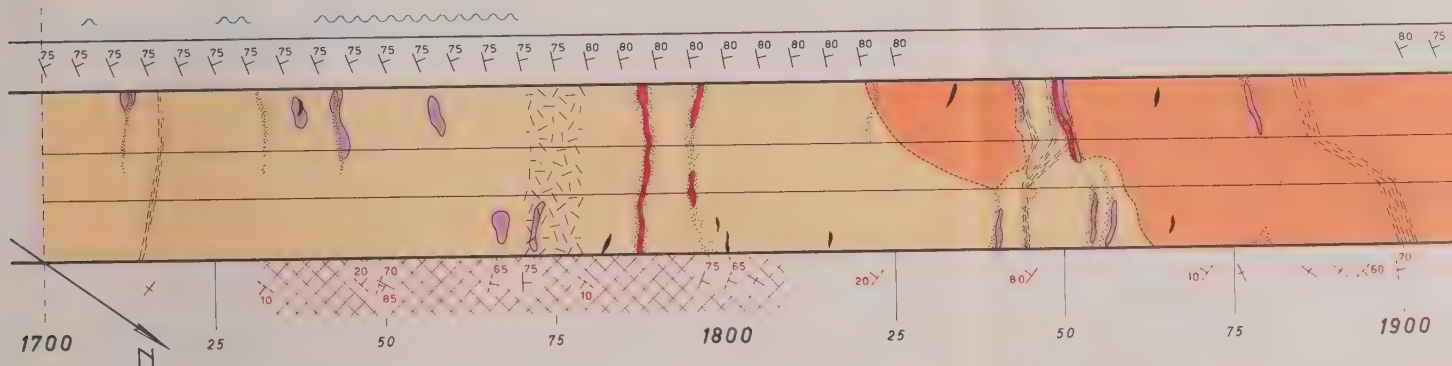
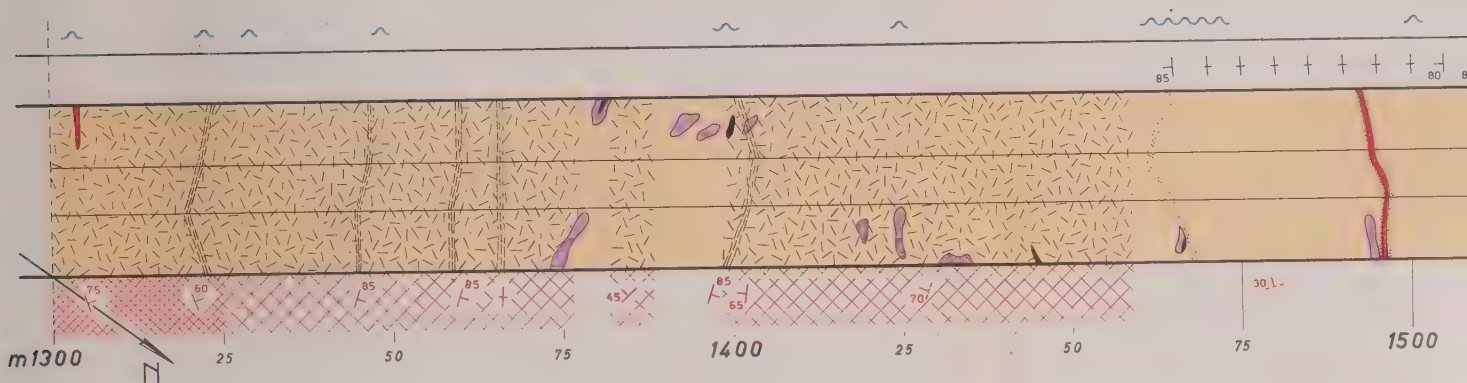
TAVOLA III.

Fig. 1. - « Protogino » aplitizzato. Progr. 1830 ($\times 0,47$).

Fig. 2. - Granito aplitico microgranulare. Progr. 2423 ($\times 0,59$).

Fig. 3. - Sacca pegmatitica irregolarmente lenticolare entro il « protogino » in facies normale. In alto un filone di granito aplitico microgranulare. Progr. 2052.

Fig. 4. - Sacca pegmatitica tipicamente irregolare ed a bordi sfumati entro il « protogino » in facies normale. Progr. 2042.



P. BAGGIO e R. MALARODA - *Trafo M. Bianco*,
 progressive 1300-2500, - TAV. I.

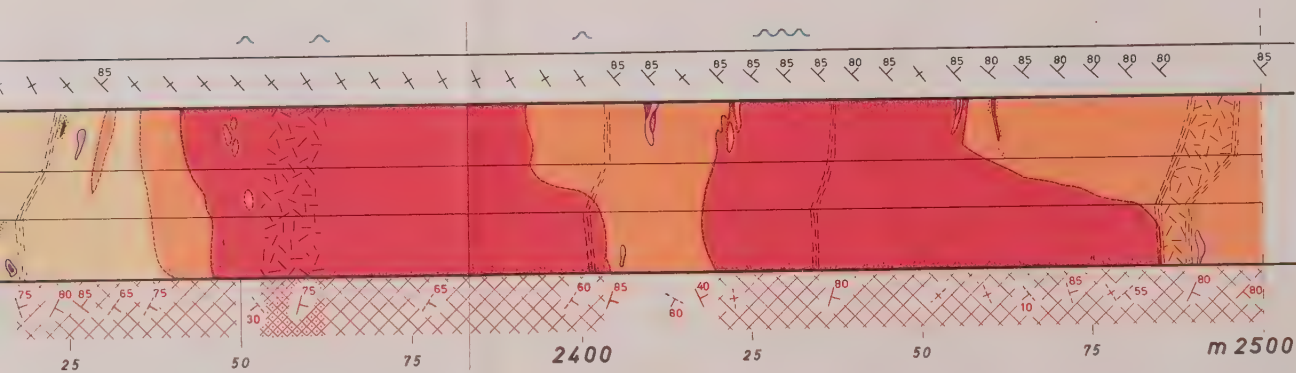
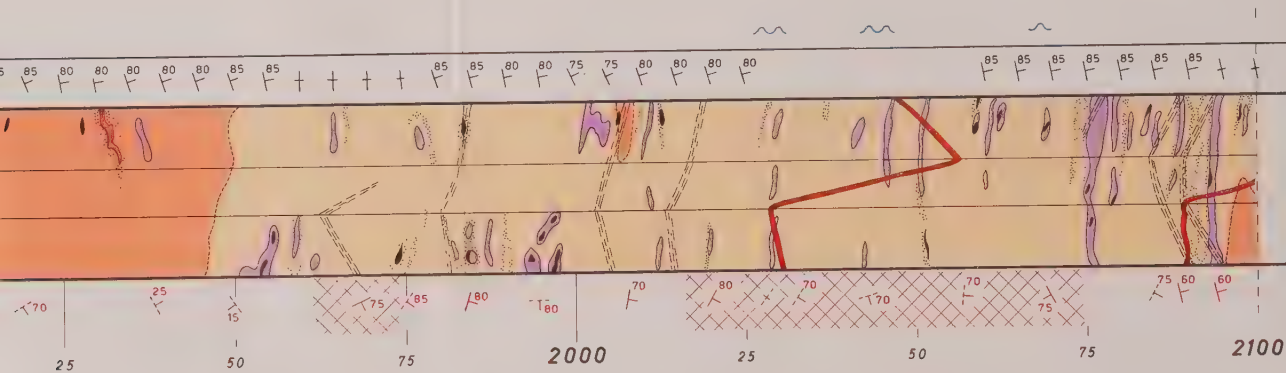
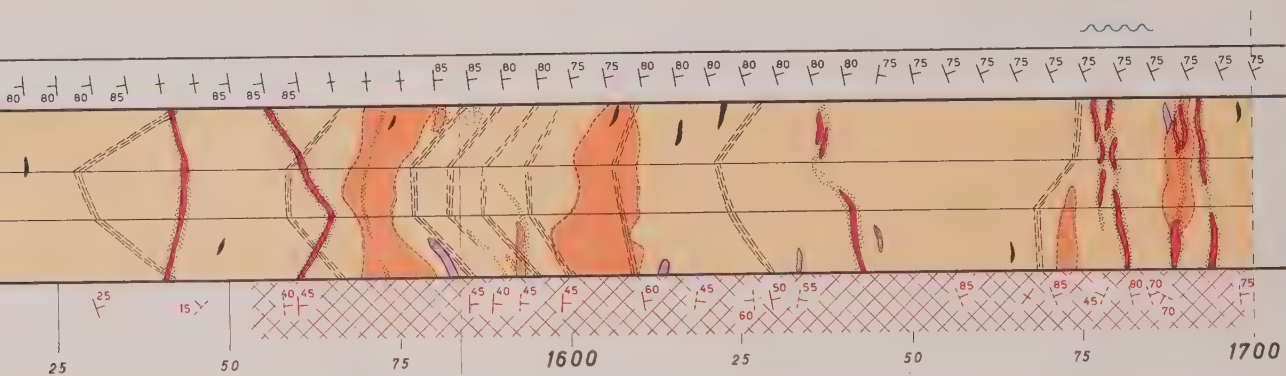




Fig. 1.



Fig. 2.



Fig. 3.

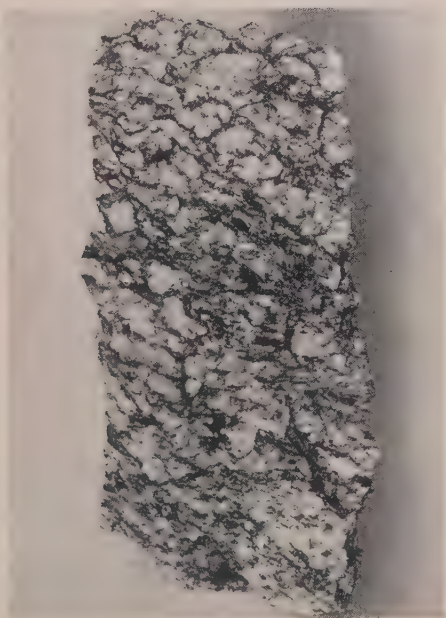


Fig. 4.



Fig. 1.



Fig. 2.



Fig. 3.

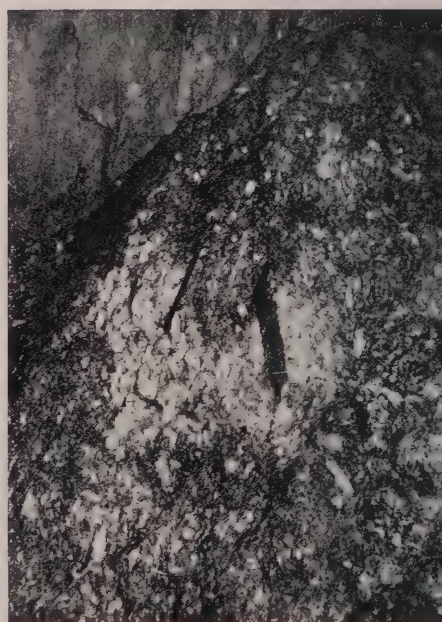


Fig. 4.



Fig. 1.



Fig. 2.



Fig. 3.



Fig. 4.



Fig. 1.

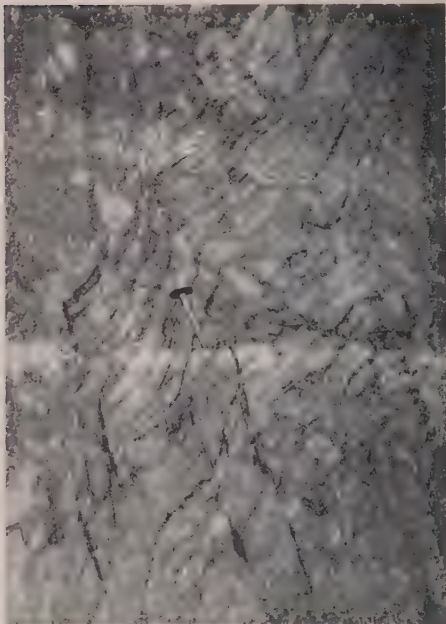


Fig. 2.

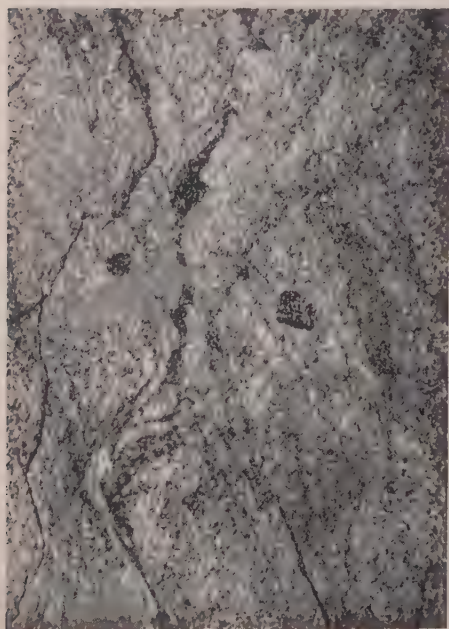


Fig. 3.

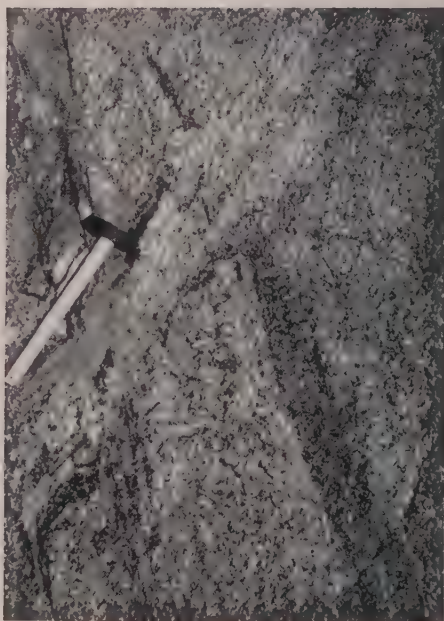


Fig. 4.



Fig. 1.



Fig. 2.

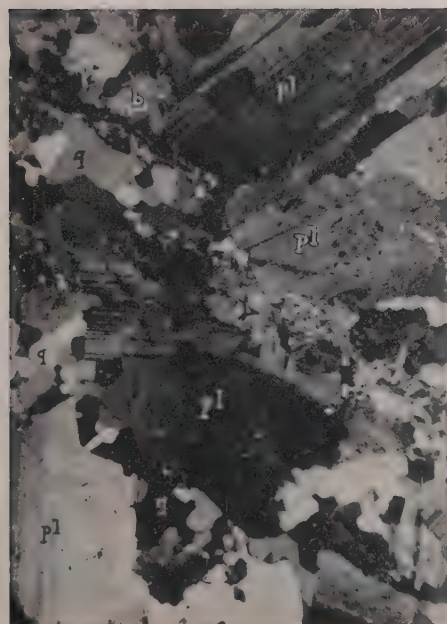


Fig. 3.



Fig. 4.

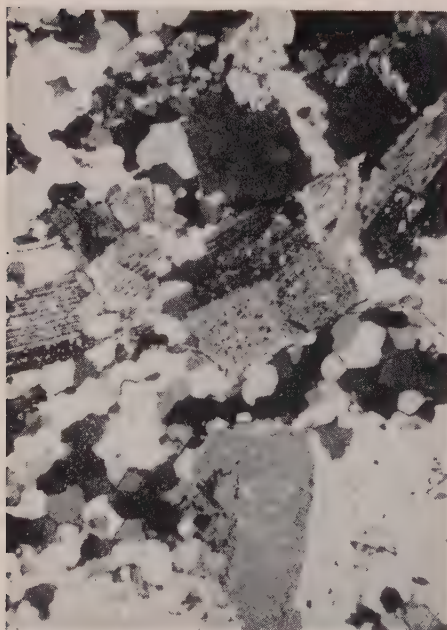


Fig. 1.

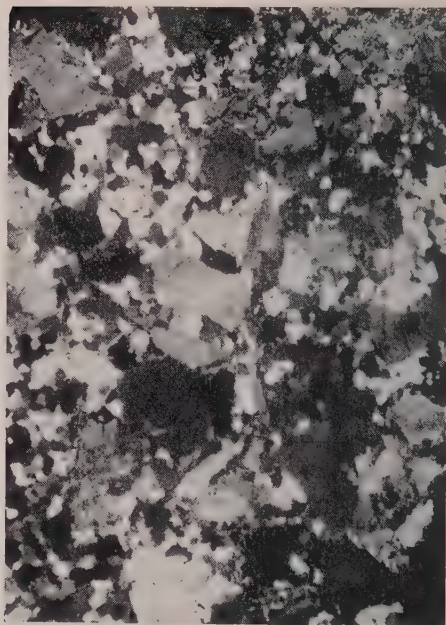


Fig. 2.

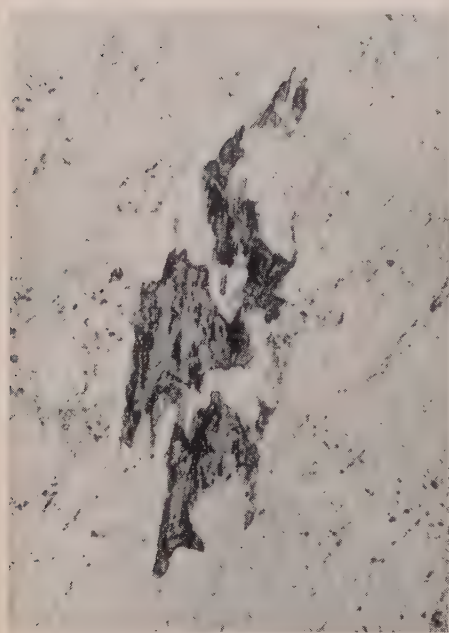


Fig. 3.

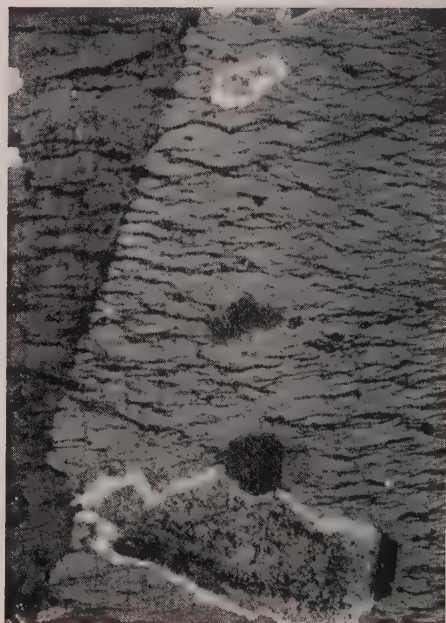


Fig. 4.

TAVOLA IV.

Fig. 1. — *Septum* biotitico-plagioclasico microgranulare ad andamento irregolare benché grossolanamente concordante con il « protogino » in facies normale in cui è incluso. Si noti la piccola sacca pegmatitica localizzatasi presso l'estremità inferiore del *septum*. Progr. 2058.

Fig. 2. — *Septa* biotitico-plagioclasici microgranulari in via di completa assimilazione. Nelle zone circostanti si osservano sacche pegmatitiche e plaghe di granito aplitico microgranulare. Progr. 2412.

Fig. 3. — *Septum* biotitico-plagioclasico in vari stadi di assimilazione, colpito da piccole dislocazioni e fiancheggiato da irregolari fasce di applitizzazione. La roccia circostante è un « protogino » in facies normale. Progr. 2112.

Fig. 4. — *Septum* biotitico-plagioclasico microgranulare in via di completa assimilazione entro al « protogino » applitizzato passante ad una fascia di granito aplitico microgranulare. Progr. 1497 ($\times 0,25$).

TAVOLA V.

Fig. 1. — Zona di passaggio fra granito aplitico microgranulare (a destra in basso) e « protogino » (a sinistra in alto). Parallelamente al limite si osservano degli sciami biotitici più o meno distanziati mentre, da sinistra a destra, vanno diminuendo per graduale riassorbimento ad opera del quarzo, i fenocristalli di feldispato potassico. Si noti il caratteristico andamento ondulato all'interno dello sciame biotitico più esterno (dal centro-sinistra al basso-sinistra); in ognuna delle concavità di esso si localizza un singolo individuo di feldispato potassico. Progr. 2192.

Fig. 2. — Fascia di granito aplitico microgranulare, con ripetuti sciami di biotite, entro al « protogino » applitizzato. Progr. 2195.

Fig. 3. — Sciami di biotite paralleli a zone di maggior applitizzazione (al centro, dal basso in alto) che tagliano il « protogino » in facies normale. La tessitura di quest'ultimo è resa ancora visibile da un *septum* non interamente assimilato (in alto-destra). La mobilitazione finale del quarzo e della biotite che hanno dato luogo al fenomeno è evidentemente legata ad antichi piani di movimento di cui si intravede traccia a sinistra in basso. Progressiva 2092.

Fig. 4. — Ibidem, particolare della parte superiore in cui è meglio visibile il *septum* entro al « protogino » applitizzato.

TAVOLA VI.

Fig. 1. — Sciami di biotite nel granito aplitico microgranulare. Lo sciame parte da una fascia milonitica, di cui si intravede l'inizio nel lato inferiore del campione, rispetto alla quale è nettamente discordante. Progr. 1542 ($\times 0,22$).

Fig. 2. — Granito aplitico microgranulare con rari fenocristalli di feldispato potassico e due sciami di biotite a nastro subverticali. Progr. 2424.

Fig. 3. — Sezione sottile di blastocataclasite fortemente biotitizzata. Progr. 1788. Gruppo di plagioclasti deformati (pl), compenetrati e corrosi lungo le fratture dall'aggregato pavimentoso di quarzo (q). Qua e là plaghe di sericite e di biotite (b) di neoformazione (Nicols incr., $\times 24$).

Fig. 4. — Idem. Corrosione e sostituzione dell'antico plagioclasio (pl) e del feldispato potassico (k) ad opera dell'aggregato pavimentoso di quarzo (q) e di albite di nuova generazione (ab). Lungo i piani di movimento aggregati saussuritici ed abbondante sericite e biotite di neoformazione (s-b) (Nicols incr., $\times 41$).

TAVOLA VII.

Fig. 1. -- Sezione sottile di granito aplitico microgranulare. Progr. 2450. La massa di fondo, costituita dall'aggregato pavimentoso microgranulare di quarzo, fa da cemento a numerosi relitti della roccia preesistente. Ben visibili al centro quattro maggiori frammenti di un unico plagioclasio geminato. In alto-destra (nero) ed in basso-centro (grigio) si vedono degli individui di feldispato potassico pertitico fratturati (in alto) e contenenti relitti di plagioclasio riassorbito (in basso) (Nicols incr., $\times 37$).

Fig. 2. -- Idem. Numerosi relitti dei minerali più antichi (plagioclasio sericitizzato, feldispato potassico, poca biotite), spesso riassorbiti e fratturati, immersi entro la massa di fondo di ultima generazione costituita da aggregato microgranulare pavimentoso di quarzo (Nicols incr., $\times 17$).

Fig. 3. -- Sezione sottile di «protogino» in facies normale. Progr. 2101. Individuo di biotite parzialmente cloritizzata, profondamente corroso ed incluso in un fenocristallo di feldispato potassico pertitico (Solo polarizz., $\times 153$).

Fig. 4. -- Sezione sottile di «protogino» in facies normale. Progr. 2020. Particolare di un fenocristallo geminato di feldispato potassico contenente inclusi numerosi individui di plagioclasio corrosi, alterati al centro, e con orletto di reazione periferico. Sopra l'individuo più grande di plagioclasio è visibile anche un granulo di quarzo (quasi estinto) (Nicols incr., $\times 28$).

Embriologia. — *Risultati di ulteriori esperimenti con nucleosidi purinici e pirimidinici sullo sviluppo delle uova di Ascidie*^(*). Nota di TOMMASA CUSIMANO, presentata ^(**) dal Socio G. COTRONEI.

1. Secondo la rappresentazione proposta da Watson e Crick (1953) la molecola del DNA è costituita da due catene affrontate di nucleotidi: le due catene, a polarità opposta, corrono parallele, e girano elicoidalmente intorno ad un asse comune. Dalle catene, costituite da una successione regolare di una molecola di pentoso e una di fosfato, si distaccano lateralmente le basi puriniche e pirimidiniche. Nel DNA, il pentoso è il 2-deossiribosio; le basi sono: adenina, guanina (purine); timina e citosina (pirimidine).

Le basi puriniche di una catena sono collegate con le basi pirimidiniche dell'altra da ponti di idrogeno.

Le coppie sono esclusivamente A-T; e G-C. La successione delle basi in una catena determina, quindi, la successione delle basi nell'altra catena.

La rappresentazione di Watson e Crick dà plausibile ragione del meccanismo della riproduzione del DNA a livello molecolare, e spiegazione di come potrebbe essere contenuta l'informazione specifica nella molecola.

Il problema più importante della biologia attuale è quello che concerne il meccanismo della sintesi degli acidi nucleici.

Dal punto di vista embriologico il problema si pone in questo modo: l'uovo che si sviluppa, sintetizza i suoi acidi nucleici a partire da molecole semplici (basi, acido fosforico, pentoso) o da molecole complesse (nucleosidi, nucleotidi)? In ogni caso vi è un *pool* di precursori nell'uovo che si sviluppa?

Ricerche recenti tendono a mostrare che, almeno in alcune sorta di uova, i precursori sono presenti in quantità abbondante. La sintesi degli acidi nucleici, che avviene con tanta rapidità nei primi momenti dello sviluppo, si compirebbe a loro spese: in seguito la sintesi avverrebbe mediante un'altra via.

2. Ricerche sul meccanismo con cui si compie la sintesi degli acidi nucleici sono state fatte sul materiale embriologico con l'impiego degli analoghi; poco sono stati impiegati, invece, i precursori normali (basi, nucleosidi, nucleotidi).

Per quanto concerne le uova di Ascidie le prime ricerche del genere furono compiute da Waddington e Mancuso (1955) con l'impiego della adenina e della 8-aza-guanina. I due Autori, nei riguardi della adenina rilevarono che essa blocca lo sviluppo embrionale.

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Zoologia dell'Università di Palermo, sotto la direzione del prof. G. Reverberi.

(**) Nella seduta del 13 giugno 1961.

Reverberi et alii (1960), affrontarono più largamente il problema facendo uso anche della timidina. Con sorpresa fu rilevato che la timidina a differenza dell'adenina, non interferisce con uno sviluppo normale.

3. Con una ricerca ancora più estesa io ho considerato (Cusimano, 1961) l'azione dei diversi nucleosidi purinici e pirimidinici sullo sviluppo. I risultati ottenuti mostrarono che tutti i nucleosidi impiegati a differenza della timidina, alla concentrazione 1 mM, sono tossici. L'azione più tossica è esercitata dalla citidina e dalla deossi-adenosina.

4. - Nella ricerca che costituisce l'oggetto della presente Nota, le uova di *Ascidie* furono trattate con combinazioni di diversi nucleosidi come segue:

1) 2 nucleosidi purinici; 2) 2 nucleosidi pirimidinici; 3) 1 nucleoside purinico + 1 pirimidinico; 4) 2 nucleosidi purinici + 1 pirimidinico; 5) 2 pirimidinici + 1 nucleoside purinico; 6) 2 nucleosidi purinici + 2 pirimidinici (cfr. Tabella I e II).

TABELLA I.

% di larve natanti.

Nucleosidi	Combinazioni	N. esper.	Concentrazioni (mM)		
			1 mM	0,5 mM	0,3 mM
1 purinico + 1 purinico	A + G	12	—	—	50 %
1 pirimidinico + 1 pirimidinico	C + T	12	—	20 %	60 %
	C + U	12	—	—	40 %
	T + U	12	—	—	40 %
	A + C	30	—	—	—
1 purinico + 1 pirimidinico	A + U	30	—	—	—
	A + T	30	—	—	60 %
	G + C	34	30 %	—	60 %
	G + U	34	60 %	—	90 %
	G + T	34	50 %	—	80 %

A = adenosina; C = citidina; G = guanosina; U = uridina; T = timidina.

TABELLA II.

, % di larve natanti.

Nucleosidi	Combinazioni	N. esper.	Concentrazioni (mM)
			1 mM
2 purinici + 1 pirimidinico	A + G + T	6	—
	A + G + C	6	—
	A + G + U	6	—
1 purinico + 2 pirimidinici	T + C + G	6	—
	T + U + A	6	—
	T + U + G	6	—
	T + C + A	6	—
2 purinici + 2 pirimidinici	A + G + C + U	6	—
	A + G + C + T	6	—
	A + G + U + T	6	—

A = adenosina; C = citidina; G = guanosina; U = uridina; T = timidina.

I risultati ottenuti furono i seguenti:

a) *Trattamento con 2 nucleosidi purinici* (adenosina + guanosina). — Alla concentrazione 1 mM i due nucleosidi riescono tossici: lo sviluppo delle uova si arresta poco dopo la gastrulazione. Non si ottennero mai larve natanti ma solo ammassi embrionali informi; nei casi migliori si ebbero embrioni endocapsulari con macchie pigmentate, il più spesso esterne.

A concentrazione 0,5 mM le anomalie risultarono attenuate: le larve si presentarono anomale cefalicamente e caudalmente: spesso presentarono un solo palpo invece di tre, coda storta e ripiegata. Frequentemente le larve non furono capaci di uscire dalle membrane; quelle che ne uscirono rimasero sul fondo del recipiente e presentarono movimenti anomali.

A concentrazione 0,3 mM si ebbe sviluppo di larve natanti, normali nel 50 % dei casi.

b) *Trattamento con 2 nucleosidi pirimidinici*. — Le concentrazioni 1 mM determinano effetti tossici in tutte e tre le seguenti combinazioni: citidina + timidina; citidina + uridina; timidina + uridina.

Anche le concentrazioni 0,5 mM sono tossiche, soprattutto nelle due combinazioni C + U ; T + U; nella combinazione T + C si ebbe un 20% di larve natanti.

Per concentrazioni 0,3 mM si ebbe uno sviluppo normale di larve nel 40-60% dei casi.

c) *Trattamento con 1 nucleoside purinico + 1 pirimidinico.* - Effetti tossici notevoli furono ottenuti (a tutte le concentrazioni) nelle seguenti combinazioni: adenosina + citidina; adenosina + uridina. La combinazione adenosina + timidina, invece, permette uno sviluppo normale nel 60% dei casi e solo alla concentrazione 0,3 mM.

Le combinazioni G + C, G + U, G + T consentono uno sviluppo normale nel 50% dei casi già a 1 mM. Le concentrazioni più lievi permettono uno sviluppo normale dal 50 al 90%.

d) *Trattamento con 2 nucleosidi purinici + 1 pirimidinico;* ovvero *con 1 nucleoside purinico + 2 pirimidinici;* ovvero *con 2 nucleosidi purinici + 2 pirimidinici.*

Tutte queste combinazioni produssero alle concentrazioni usate uno sviluppo profondamente anomalo (Tabella II).

DISCUSSIONE.

1° I risultati sopra esposti si prestano più facilmente alla discussione se riferiti alla soluzione 1 mM. Facendo riferimento a tale concentrazione si può stabilire quanto segue:

a) il trattamento delle uova con 2 nucleosidi purinici, o, rispettivamente, con 2 nucleosidi pirimidinici produce un arresto di sviluppo;

b) il trattamento con 2 nucleosidi di cui 1 purinico l'altro pirimidinico dà uno sviluppo (abbastanza) normale esclusivamente nelle concentrazioni in cui il *partner* purinico è rappresentato dalla *guanosina* (G + C ; G + U; G + T); nelle combinazioni in cui, invece, il *partner* purinico è rappresentato dalla adenosina lo sviluppo rimane bloccato;

c) il trattamento con 3 nucleosidi, di cui 2 purinici e 1 pirimidinico, ovvero di cui 2 pirimidinici e 1 purinico, produce arresto di sviluppo;

d) il trattamento con 4 nucleosidi di cui 2 purinici e 2 pirimidinici produce, anche, arresto di sviluppo.

In tutti i casi l'arresto di sviluppo avviene alla fine della gastrulazione o alla neurulazione. La segmentazione dell'uovo non risulta colpita dal trattamento; anche la gastrulazione si compie con modalità assolutamente normali.

2° Il primo risultato generale che emerge da questi esperimenti è dunque che lo sviluppo embrionale, se fatto compiere in presenza di quantità *non usuali* di costituenti purinici e pirimidinici « fisiologici », viene profondamente alterato.

Un secondo risultato generale è costituito dal fatto che la inibizione dello sviluppo cade nel periodo cruciale delle sintesi, più precisamente nel periodo che prelude al differenziamento dei territori embrionali.

3° Le anomalie di sviluppo descritte possono essere spiegate con diverse ipotesi: in ogni caso il sistema che sembra direttamente colpito è quello degli acidi nucleici.

I trattamenti usati possono colpire la sintesi e la funzione o del DNA o dell'RNA o di ambedue. I rapporti tra DNA e RNA citoplasmatico sono oggi rappresentati abbastanza soddisfacentemente: ogni alterazione prodotta nel sistema di informazione (DNA) è automaticamente registrata nel RNA nucleare. Dall'RNA nucleare l'informazione passa poi ai complessi ribonucleoproteici citoplasmatici. Questi formano il « template » su cui si costituiscono infine le proteine specifiche. I trattamenti in questione potrebbero agire sul template ribosomico o sul sistema che ad esso trasporta gli aminoacidi. In ogni caso le spese finali del trattamento ricadono sulla sintesi delle proteine specifiche.

Mentre la spiegazione delle anomalie qui ottenute potrà venire dall'uso dei precursori marcati si può fare qualche rilievo.

Fu detto che anomalie più gravi si ebbero quando le uova furono trattate o con due nucleosidi purinici o con due nucleosidi pirimidinici. Nel DNA quanto nel RNA le basi affrontate sono sempre una purinica l'altra pirimidinica; se le nuove catene si costituiscono con coppie puriniche o pirimidiniche affrontate ne seguirebbe alterazione della molecola e forse perdita del suo « significato » biologico.

Il trattamento delle uova con un nucleoside purinico ed uno pirimidinico sembra meno compromettente per lo sviluppo almeno nei casi in cui la coppia purino-pirimidinica è quella « naturale » ($G + C$; $G + U$).

Delle difficoltà di interpretazioni però rimangono sempre: così non possono spiegarsi i risultati prodotti dalla coppia $A + T$ che è una coppia naturale. Anche inspiegabile è il risultato che si ottiene nel caso in cui il trattamento è fatto con quattro nucleosidi di cui i due purinici e i due pirimidinici sono normali ($A + T + G + C$), ($A + G + C + U$).

Embriologia. — *Sviluppo di frammenti dell'uovo vergine di Ascidia malaca ottenuti mediante centrifugazione* (*). Nota di ROSA LA SPINA, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

1. Il significato morfogenetico dei diversi costituenti ovulari non può essere studiato meglio che sui frammenti ottenuti dall'uovo vergine mediante centrifugazione e successivamente fecondati. Con questo metodo i due, o più, frammenti che si ottengono, risultano quantitativamente e qualitativamente diversi. Generalmente si ha un frammento « jalino » e un frammento « scuro »; quest'ultimo contiene i granuli di pigmento e di tuorlo che, invece, non sono presenti nel frammento jalino; i due frammenti, però, differiscono per molti altri componenti, strutturali e chimici.

L'analisi citochimica e l'analisi delle ultrastrutture col microscopio elettronico dei frammenti dell'uovo di *Ciona*, ottenuti mediante centrifugazione, è stata da poco iniziata. Secondo questa ricerca il frammento « jalino » possiede notevoli quantità di RNA e di glicogeno; strutturalmente, poi, è costituito da reticolo endoplasmatico di Palade, puro.

Il frammento « scuro », invece, possiede anche granuli di tuorlo, mitocondri e granuli di pigmento; esso possiede anche il nucleo dell'uovo (fuso metafaseico).

Il frammento « jalino » dopo fecondazione possiede solo il nucleo spermatico, ed è quindi aploide; il frammento « scuro », invece, dopo fecondazione, è diploide.

Fu comunicato in un lavoro precedente (Reverberi e La Spina, 1959) [1] che il frammento « scuro » è capace di svilupparsi in una larva natante, proporzionata e completa, solo diversa dal normale per grandezza; il frammento jalino, al contrario, non è capace, il più spesso, neppure di segmentarsi. Le cause di quest'ultimo avvenimento furono riferite all'assenza di mitocondri, e cioè di materiale eneigetico sotto forma utile (ATP); ma non è però escluso che oltre i mitocondri altri fattori siano in giuoco.

2. Il problema dei fattori causali dello sviluppo dei frammenti « jalini » e « scuri » è stato ora ripreso in considerazione su *Ascidia malaca*.

L'uovo di *A. malaca* si spezza molto facilmente e molto regolarmente per centrifugazione; i due frammenti ottenuti, sono lievemente diversi per grandezza. La loro costituzione chimica e la loro struttura al M. E. non è stata ancora studiata; un'informazione preziosa, tuttavia, ci è fornita da un lavoro di Urbani e Urbani-Mistruzzi (1947) [2]: ambedue i frammenti si mostrerebbero Nadi-positivi, e quindi, molto probabilmente possederebbero mitocondri. I due frammenti sono d'aspetto leggermente diversi; il più pigmentato (cfr. Urbani, e Urbani-Mistruzzi) è il più leggero o centripeto.

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Zoologia dell'Università di Palermo, sotto la direzione del prof. G. Reverberi.

(**) Nella seduta del 13 giugno 1961.

Il nucleo dell'uovo può restare incluso tanto nel frammento centripeto quanto in quello centrifugo; l'uno o l'altro, quindi, dopo fecondazione, può essere diploide, a seconda dei casi.

3. Lo studio dello sviluppo dei frammenti dell'uovo vergine centrifugato di *A. malaca* fu compiuto da Almagià (1946) [3], la quale notò che *ambedue* i frammenti, dopo fecondazione, sono capaci di svilupparsi. La segmentazione è come quella di uova in miniatura, in *ambedue* i frammenti; si ha gastrulazione in modo normale e alcuni territori si differenziano; nelle esperienze dell'Almagià lo sviluppo non andò oltre questo stadio: mai si ebbero forme che rassomigliassero alle larve normali.

Nelle mie ricerche ho avuto un risultato migliore.

I punti principali che emergono dalla mia ricerca sono i seguenti:

a) *ambedue* i frammenti, dopo fecondazione, iniziano lo sviluppo. Quelli che contengono il nucleo dell'uovo compiono le modificazioni morfologiche tipiche della fecondazione, ed emettono i globuli polari. La segmentazione si presenta in *ambedue* i frammenti secondo lo schema tipico dell'uovo intero: anche il ritmo delle segmentazioni è quello dell'uovo intero;

b) la gastrulazione è normale. In numerosi casi *ambedue* le sorta di frammenti danno larve più o meno normali; in ogni modo esse sono provviste di tutte le strutture ordinarie. Le piccole larve ottenute posseggono, infatti, coda e tronco: nella coda, che è mobile, si riscontrano, nella disposizione usuale, le cellule cordali e le cellule muscolari; nel tronco si nota vescicola cerebrale interna, organi sensoriali, intestino, a volte palpi.

4. Lo studio in sezione delle piccole larve ottenute non è stato ancora compiuto; non ci si attende tuttavia sorprese perché le larve ottenute, essendo trasparenti, rivelano in ogni dettaglio tutti i loro sistemi organici. Le uniche differenze tra le larve ottenute dai frammenti e quelle che si ottengono dalle larve normali sono date da storture, da ripiegamenti della coda, dall'assenza (spesso) dei palpi.

5. Questo risultato, trattandosi delle uova di *Ascidia*, è assai significativo. Esso infatti conferma che l'uovo vergine di Ascidie è un « sistema armonico equipotenziale » nel senso di Driesch. Un altro dato importante è rappresentato dal fatto che le due sorta di frammenti che si sviluppano in larve normali posseggono in partenza (come dimostrato da Urbani e Urbani-Mistruzzi) mitocondri.

Il valore dei mitocondri nei riguardi della morfogenesi embrionale, è illustrato dalle numerose ricerche eseguite nel nostro Laboratorio (cfr. Reverberi, 1961) [4].

BIBLIOGRAFIA.

- [1] G. REVERBERI e R. LA SPINA, « Exper. », XV/3, 122 (1959).
- [2] E. URBANI e L. URBANI-MISTRUZZI, « Pubbl. Staz. Zool. Napoli », 21, 69 (1947).
- [3] F. ALMAGIÀ, « Pubbl. Staz. Zool. Napoli », 20, 179 (1946).
- [4] G. REVERBERI, *The embryology of the Ascidians*. Adv. in Morphog. 1 (1961)

Zoologia. — *Ancora sulla genesi e sessualizzazione degli elementi germinali in esemplari rigeneranti di Spirorbis pagenstecheri*^(*).
Nota di ANNA STAGNI, presentata^(**) dal Socio U. D'ANCONA.

Due precedenti Note sulla rigenerazione di *Spirorbis pagenstecheri*^(1,2) hanno dimostrato anche per questo Polichete Serpulide una notevole attitudine alla rigenerazione posteriore, quando il taglio venga effettuato a livelli acheti, ma soprattutto hanno messo in evidenza la sorprendente rapidità della maturazione germinale femminile nei primi due metameri dell'addome rigenerante. È in questi due segmenti infatti che solitamente avviene nell'animale sano, riproducentesi, lo sviluppo della serie gametogenetica femminile, mentre in tutti i restanti metameri dell'addome si svolge la gametogenesi maschile.

Gli elementi ovogenetici sono originati da mesoblasti con localizzazione perivasale⁽³⁾. Un gruppo cospicuo di mesoblasti è disposto a manicotto intorno ad un grosso vaso che decorre obliquo e tortuoso nella regione acheta.

La inconsueta rapidità della ovogenesi che conduce alla formazione di ovociti in secondo stadio di accrescimento a volte già a due giorni di distanza dall'operazione, rendeva di un certo interesse ripetere i tagli a livelli diversi (fig. 1 a, b, c) per saggiare più minutamente questa subitanea capacità di maturare degli animali rigeneranti.

Vennero così ripetuti tagli di asportazione dell'addome, ma praticandoli a livelli più alti che nella serie di ricerche precedenti, cioè subito al di sotto del grosso stomaco (fig. 1 a). Il frammento rigenerante veniva in questo modo ad essere costituito dal capo, dai tre metameri toracici e da un breve tratto di regione acheta e privato pertanto, in gran parte, della più grossa riserva di mesoblasti del corpo.

I rilievi effettuati ad intervalli hanno messo in evidenza una quasi assoluta assenza di fenomeni rigenerativi in questi monconi cefalo-toracici, assenza che appare ad un esame superficiale sorprendente se paragonata con la vivacità e l'imponenza della rigenerazione, quando il livello di taglio sia spostato di poco al di sotto. Confrontando ad esempio quadri istologici di esemplari di sei giorni rigeneranti, dopo i due tipi di tagli, si osserva che

(*) Istituto di Zoologia della Università di Bologna diretto dal prof. E. Vannini e Centro di Studio per la Biologia del C.N.R. diretto dal prof. G. Montalenti.

(**) Nella seduta del 13 giugno 1961.

(1) A. STAGNI, *Primi appunti ed osservazioni sulla ricostituzione degli elementi germinali durante la rigenerazione di Spirorbis pagenstecheri*, « Rend. Accad. Naz. Lincei », serie VIII, 27, p. 71 (1959).

(2) A. STAGNI, *Fenomeni rigenerativi e origine degli elementi germinali in Spirorbis pagenstecheri*, « Boll. Zool. », 26, p. 397 (1959).

(3) E. VANNINI e A. STAGNI, *Sulla localizzazione perivasale di una cospicua riserva di neoblasti in Spirorbis pagenstecheri*, « Rend. Accad. Naz. Lincei », ser. VIII, 29, p. 126 (1960).

nel caso del taglio alto che esclude in gran parte, ma non interamente, la riserva di mesoblasti acheta, non è intervenuta la formazione di alcun metamero addominale e neppure il breve tratto acheto mancante è stato rigenerato. Viceversa nel caso del taglio più basso un buon numero di metameri addominali sono stati ricostituiti nello stesso spazio di tempo e ovogenesi e spermatogenesi stanno attuandosi.

Nei corti monconi cefalo-toracici, ad una settimana dall'operazione, l'intestino accenna appena ad incurvarsi ed il suo epitelio è ricoperto direttamente da un sottile strato epidermico appiattito (Tav. I, fig. 2). Ancora a

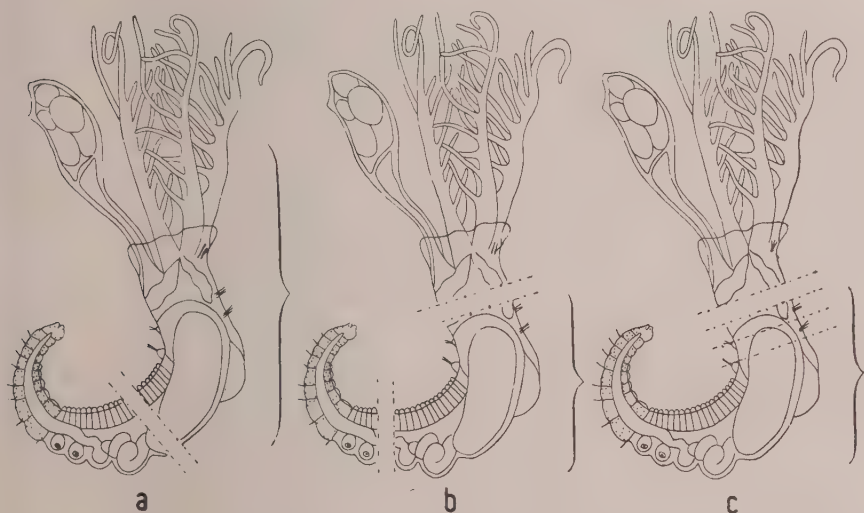


Fig. 1. — Schemi dei tagli eseguiti a diverso livello nei tre tipi di operazione. Il frammento di cui è stata seguita la rigenerazione è quello indicato dal segno a griffa. a) taglio in zona acheta alta, a livello della parte terminale dello stomaco; b) doppio taglio con asportazione del capo più un breve tratto toracico e dell'addome; c) taglio di asportazione del capo con un tratto più o meno lungo del torace; le linee tratteggiate indicano le possibili variazioni dei livelli di taglio.

quindici giorni dall'operazione la rigenerazione è insignificante e bisogna giungere ad una ventina di giorni ed oltre di tempo per osservare in alcuni esemplari la ricostituzione di una sola grossa formazione vescicolosa che segue ad un tratto breve di regione acheta rigenerata.

La sessualità tace completamente anche se non esigua è la scorta dei mesoblasti circondanti il tratto di vaso che decorre aderente alla parete dello stomaco.

Sembra dunque che l'ablazione della più cospicua riserva di mesoblasti del corpo di *Spirorbis pagenstecheri*, in regione acheta, inibisca una attiva rigenerazione posteriore ed escluda un orientamento sessuale dei pochi mesoblasti conservati. Quest'ultimo fatto non stupisce, data l'assenza della sede competente alla maturazione dei gameti.

Su un altro gruppo di esemplari vennero effettuati due tagli in luogo di uno, con asportazione contemporanea della regione cefalica e dell'addome (fig. 1 *b*). Ciò fu fatto per osservare se le possibilità rigenerative, rimanendo *in situ* la grossa riserva di mesoblasti acheti, fossero migliori di quelle ora descritte (pur aggravandosi la lesione), e soprattutto se si verificasse un precoce differenziamento sessuale come nel caso dei frammenti cefalo-toraco-acheti, studiati nei lavori precedenti. La rigenerazione fu però di poco momento, probabilmente per l'aggravio della doppia superficie di taglio. Essa procedette con molta lentezza posteriormente e pigramente anche in direzione cefalica, limitandosi per molti giorni alla chiusura della ferita.

Ad una ventina di ore dalla operazione i mesoblasti perivasali acheti si dimostrano fortemente basofili con nucleo provvisto di nucleolo cospicuo. Sulla superficie anteriore di lesione si osservano i bordi rovesciati dell'epitelio intestinale (Tav. I, fig. 3).

Molto caratteristico è il comportamento di questi frammenti toraco-acheti che spesso presentano il torace idropico. Essi hanno curiosi movimenti rotatori intorno all'asse di avvolgimento della spira, movimenti che ricordano quelli delle larve di *Spirorbis*. Ad oltre un giorno di distanza dall'operazione una breve porzione di intestino è rigenerata in direzione posteriore ed incurvata ad uncino. Il lume, nella parte ricostituita, ha diametri uguali a quelli dello stomaco situato cefalicamente ad essa.

A quattro, cinque giorni di distanza dal taglio, mentre permangono i movimenti rotatori si osserva che anche la porzione anteriore dell'animale operato viene ripiegandosi ad uncino assumendo un caratteristico aspetto che può definirsi di « torace chino ». Le due estremità monche dell'intestino vengono così a trovarsi piuttosto vicine fra loro mentre tutto l'animale è incurvato ad anello. Ad una settimana circa dal taglio, la membrana toracica accenna a rigenerare e si annuncia sotto forma di lobo proliferato dall'ectoderma, ventralmente.

In questi due gruppi di operazioni dunque la rigenerazione è ben lungi dal dimostrare la vivacità e rapidità riscontrate nella ricostituzione dell'addome, quando si effettuino tagli a metà della regione acheta. Inoltre, quando manchi la regione cefalica, i mesoblasti perivasali, anche se presenti in un certo numero, non iniziano precocemente il differenziamento gametogenetico.

Più attraenti, per i risultati raggiunti, sono gli aspetti che seguono all'asportazione della sola porzione anteriore del corpo. I tagli, in questo gruppo di operazioni, interessarono il capo più uno, due o tre metameri toracici (fig. 1 *c*). La rigenerazione anteriore è spesso di poco momento e procede lentamente, comunque si hanno cenni rigenerativi talvolta anche quando venga asportato tutto il torace insieme al capo. In questi ultimi casi io ho a volte ottenuto rigenerazione delle chete (delle 3 paia di setole dorsali e delle 2 paia di uncini ventrali) e della membrana toracica dopo un periodo di circa otto, dieci giorni. Nel caso dell'asportazione del capo con un solo metamero toracico si può giungere più precocemente già alla ricostituzione

degli abbozzi dei tentacoli. Più spesso però i suddetti accenni rigenerativi si notano ad una ventina di giorni di distanza dal taglio ed in parecchi casi in tempi ancora più lontani.

Accennerò solo brevemente al comportamento degli esemplari operati ed ai quadri istologici della rigenerazione e mi diffonderò invece un po' più a lungo sugli aspetti della sessualità, scopo principale di queste osservazioni. L'atteggiamento di questi frammenti è, a poche ore di distanza dal taglio, di « torace chino ». Quasi sempre il taglio viene aggravato dal disfacimento di poco materiale gastrico al di sotto della superficie lesa. Il processo di cicatrizzazione della ferita conduce ad un sottile strato di epitelio intestinale su cui, a diretto contatto, è sovrapposta l'epidermide pure assottigliata.

L'asportazione del capo determina una rapida smaturazione degli animali operati. Uova e spermatozoi vengono espulsi dall'addome, le uova in vitellogenesi rapidamente si disgregano così che nei primi due metameri addominali si rinvencono sferulette sparse di tuorlo derivate da grossi ovociti vitellati (Tav. I, fig. 4). Il disgregamento non sembra interessare gli ovociti non ancora in vitellogenesi. Nei metameri maschili si ha, nello spazio di uno o due giorni, la scomparsa degli elementi gametogenetici preesistenti, in modo che l'addome si presenta completamente vuoto (Tav. I, fig. 5).

Questi animali acefali ricominciano però ben presto a produrre elementi germinali e, come è loro consuetudine, in parte indipendentemente dall'entità e dalla velocità rigenerativa delle parti anteriori asportate. Essi rigenerano quasi esclusivamente ovociti i quali si originano, sia nei loro propri metameri, in numero abbastanza cospicuo, sia posteriormente nei segmenti solitamente maschili (Tav. I, fig. 6). Gli ovociti eterotopici si rinvencono in numero non esiguo nel terzo e quarto metamero addominale, scarsi ed isolati nei rimanenti. A volte addirittura nell'ultimo segmento addominale si possono trovare ovociti in secondo periodo di accrescimento.

Gli ovociti neoformati nello spazio di pochi giorni rientrano in vitellogenesi, a livello dei primi tre, quattro metameri (Tav. II, fig. 7 a, b, c). Non ho mai notato, durante i miei non lunghi periodi di osservazione, ovociti in vitellogenesi in segmenti più caudali, dove, qualche volta, si avvera anche una scarsa moltiplicazione spermatogoniale. È molto evidente in questi esemplari, nell'insieme piuttosto vuoti di cellule sessuali, la genesi degli elementi germinali a ridosso dei vasi sanguigni che decorrono tortuosamente lungo i setti e le pareti dei metameri. Negli animali normali in sessualità attiva, data la stipatezza delle cellule sessuali e la precoce separazione degli spermatogoni dal vaso di origine, i quadri istologici sono invece molto meno chiari.

In complesso dunque *l'asportazione del capo*, accompagnata o non da estesa ablazione toracica, *determina uno scompenso nell'espressione del gradiente addominale di sessualità, che si traduce con una estensione in direzione caudale della parte ovogenetica*. Infatti mentre negli animali normali, come ho già accennato all'inizio, la gametogenesi femminile è limitata ai due primi

metameri dell'addome, in questi *Spirorbis* acefali tutti i segmenti addominali, non escluso l'ultimo, danno origine a ovociti isolati. Questi, negli esemplari da me studiati non oltrepassano il secondo periodo di accrescimento se situati nei metameri più caudali al quarto, raggiungono invece la vitellogenesi nei primi quattro metameri, ma a quanto sembra, non prima che l'animale abbia rigenerato i gangli della regione cefalica. In questi medesimi esemplari, con ovociti in vitellogenesi e gangli ricostituiti, in qualche metamero si riscontra talvolta anche l'inizio di una moltiplicazione di spermatogoni.

In armonia con quanto è noto per altri Policheti, ciò può suggerire la esistenza di correlazioni neurosecretorie, attivanti il completamento della gametogenesi femminile e l'avvio di quella maschile.

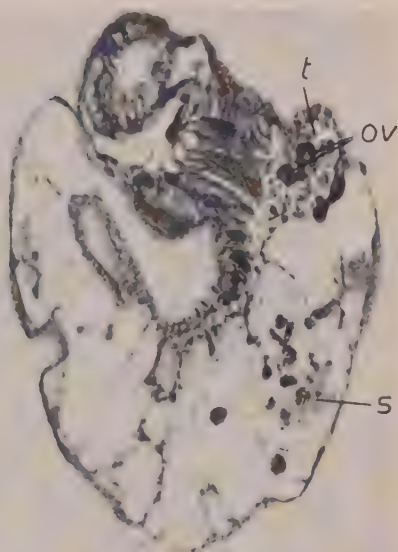
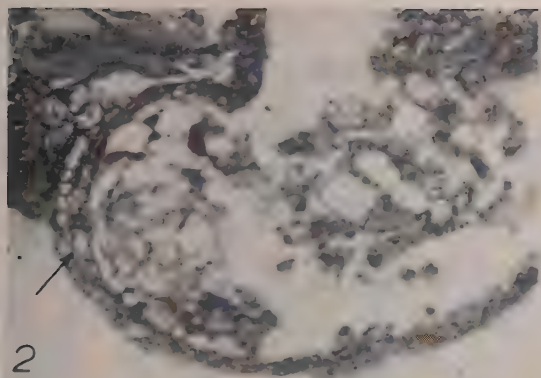
SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

TAVOLA I.

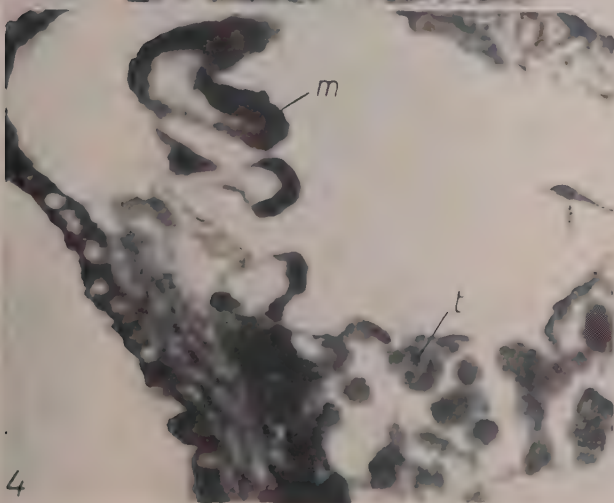
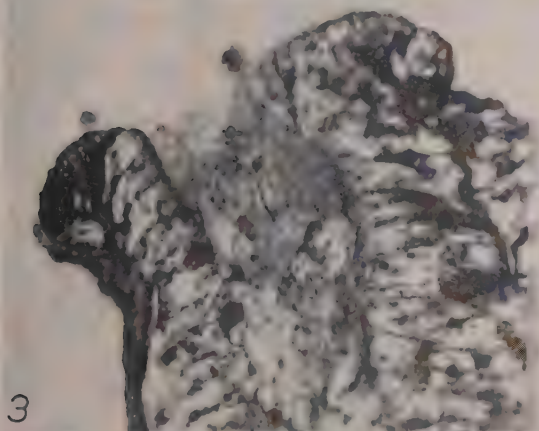
- Fig. 2. - Estremità dell'intestino rigenerata e brevemente ripiegata ad uncino, di un frammento cefalo-toracico una settimana dopo l'operazione. L'epitelio di rivestimento del corpo è, a questo livello (freccia), a diretto contatto col sottostante epitelio intestinale. 450 X.
- Fig. 3. - Bordi dell'epitelio intestinale rovesciati, a livello della ferita anteriore in un moncone toraco-acheto di 20 ore dall'operazione. 450 X.
- Fig. 4. - Frammento toraco-acheto-addominale, una settimana dopo l'operazione. Particolare della zona acheta (in alto) col vaso tortuoso circondato da mesoblasti (*m*) e del primo metamero addominale (più sotto) con sferule di tuorlo (*t*) derivate dal disfacimento di un grosso ovocita in vitellogenesi. 615 X.
- Fig. 5. - Frammento toraco-acheto-addominale, 4 giorni dopo l'operazione. I metameri maschili contengono solo pochi residui di elementi spermatogenetici (*s*); nei metameri femminili, ovociti in previtellogenesi (*ov*) ben conservati e sferule di tuorlo disgregate (*t*) di ovociti vitellati. La regione toracica (in alto) è « chinata ». 145 X.
- Fig. 6. - Moncone toraco-acheto-addominale 7 giorni dopo l'operazione. Si sono rigenerati ovociti (*ov*), oltre che nei primi due metameri addominali, anche in segmenti più caudali, compreso l'ultimo. 225 X.

TAVOLA II.

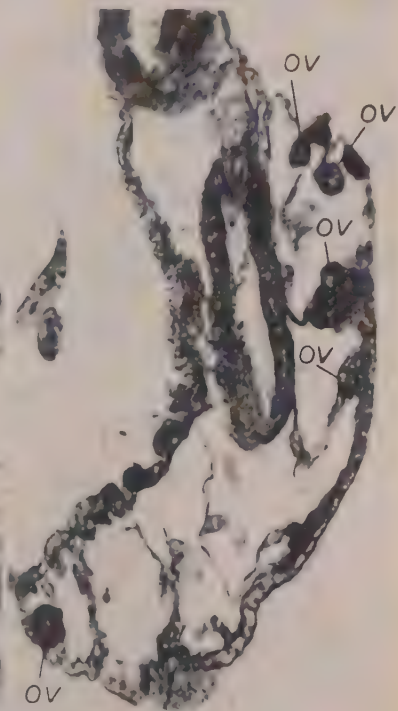
- Fig. 7. - Moncone toraco-acheto-addominale 7 giorni dopo l'operazione. Tre sezioni successive del medesimo esemplare (*a, b, c*) mostrano che anche gli ovociti eterotopici del IV metamero addominale (a destra in *a, b, c*) hanno raggiunto la vitellogenesi come l'ovocita in sede normale del I metamero (a sinistra, in *c*). 225 X.



5



4



6

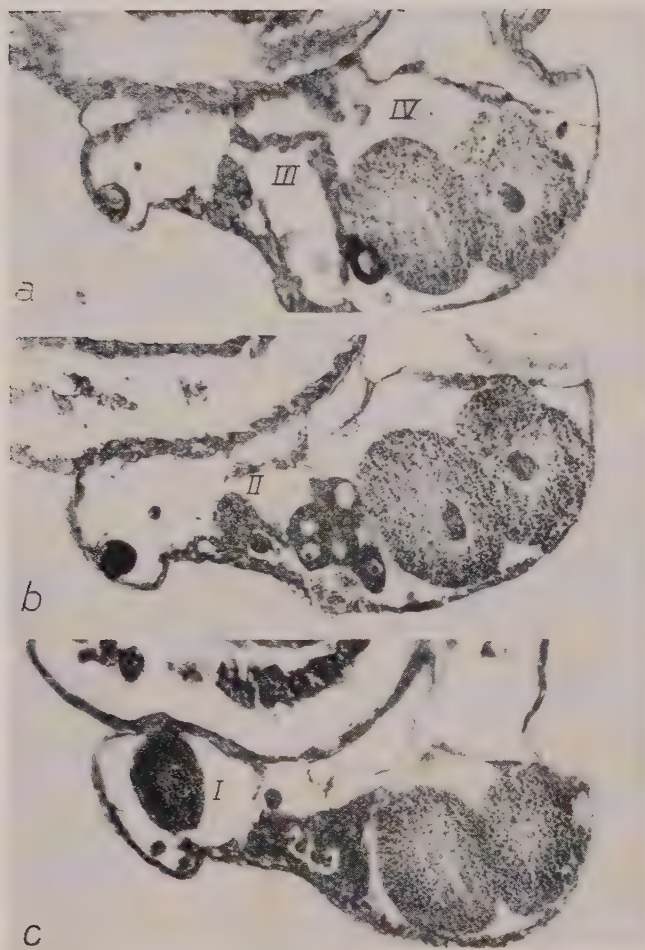


Fig. 7.

Biologia. — *Sulla sede delle placche motrici della muscolatura della coda rigenerata dei Sauri* (*). Nota di GUIDO FILOGAMO e PIER CARLO MARCHISIO, presentata (**) dal Socio G. LEVI.

Le nozioni relative alla sede delle placche motrici delle fibre muscolari striate sono scarse ed imprecise; ciò potrà sembrare singolare, sulla base delle numerose ricerche che sono state a tutt'oggi condotte su tali espansioni. Coers (1953) e Schwarzacher (1957) hanno studiato, da questo punto di vista, vari muscoli di diversa lunghezza e composizione in varie specie tra i Mammiferi e nell'Uomo. Di norma vi è una placca per ciascuna fibra muscolare, situata nelle aree centrali della fibra; nel muscolo gracile anteriore di topo, nel quale le fibre muscolari sono più brevi della lunghezza del muscolo, l'89% delle fibre sono provviste di una sola placca situata nel terzo medio (Schwarzacher); solamente le fibre muscolari più lunghe possiedono due placche motrici. Tra i Rettili, in *Lacerta*, esiste, come è noto, una sola placca per fibra muscolare, situata nella parte media della fibra. Perroncito (1902) ha invero riscontrato, in particolare in *Lacerta viridis*, l'esistenza di placche motrici all'estremità terminale delle fibre muscolari, in corrispondenza dell'attacco al tendine. Queste espansioni si ritrovano soprattutto nei muscoli dorsali e più raramente del torace e degli arti.

Noi abbiamo studiato, in un considerevole numero di esemplari, la sede delle placche motrici nella muscolatura della coda normale e della coda rigenerata di *Lacerta (Podarcis) muralis* Laurenti e di *Lacerta viridis* Laurenti. Le code, rigenerate dopo autotomia della coda normale erano lunghe da pochi millimetri a circa cm. 10-15; in qualche esemplare erano rigenerate in laboratorio dopo recisione. Il materiale fu trattato in parte con i metodi di impregnazione argentea (Cajal-de Castro e Bielschowsky-Gros); in parte con il metodo al cloruro d'oro del Ruffini; fu impiegato anche il metodo Koelle per l'ACHE (acetilcolinesterasi) che si rivelò particolarmente dimostrativo per la sua costante riuscita su lunghi tratti di coda.

RISULTATI.

In preparati al cloruro d'oro, nel tratto di coda a monte dell'autotomia, come nelle code normali, le placche motrici della muscolatura striata risultano situate nella zona media delle fibre muscolari e mai in corrispondenza della estremità terminale (figg. 1-2). Il componente nervoso delle placche, come si rileva nelle preparazioni allestite mediante impregnazione argentea

(*) Dall'Istituto di Anatomia Umana Normale, Istologia ed Embriologia dell'Università di Torino, diretto dal prof. Francesco Loreti.

(**) Nella seduta del 13 giugno 1961.

e con cloruro d'oro, proviene da fascetti decorrenti in seno al miotomo, in direzione perpendicolare alle fibre muscolari. La reazione di Koelle pone in chiara evidenza l'ACHE in tutte le placche; questa reazione ci ha fornito preparati molto dimostrativi nei riguardi dell'uniformità della loro sede (fig. 3): condizione meno facilmente apprezzabile dopo dissociazione dei muscoli trattati con il cloruro d'oro secondo il Ruffini.

Lo studio della estremità terminale della coda normale di giovani esemplari in accrescimento, ha dimostrato come tipiche placche motrici siano presenti nei tratti intermedi delle fibre muscolari di tutti i miotomi, non escluso il più distale (figg. 4-5); le giunzioni neuro-muscolari si stabiliscono adunque molto precocemente nel corso del normale sviluppo in lunghezza della coda.

Nelle code rigenerate sono assenti placche motrici nella sede tipica per la coda normale. In quelle rigenerate da tempo (3-15 cm di lunghezza), le preparazioni al cloruro d'oro dimostrano che le fibre muscolari sono provviste di una placca all'estremità (figg. 6-7). La reazione di Koelle mette in chiara evidenza l'ACHE anche in queste placche motrici terminali, fornendo preparati molto dimostrativi nel confronto dell'uniformità di sede delle placche stesse (figg. 8-9). Il metodo al cloruro d'oro non permette, nelle fibre muscolari di code rigenerate di recente (1-3 cm di lunghezza), la dimostrazione di placche motrici, pur risultando, come dimostra il metodo Cajal, che le fibre nervose sono sparse in alto numero nel blastema rigenerativo e nei miosetti. La reazione di Koelle è invece intensamente positiva, anche in questi precoci esemplari di code rigenerate, all'estremità terminale delle fibre muscolari, al confine con il mesenchima del miosetto (fig. 10); non è però possibile localizzare esattamente la sede della reazione. Anche la reazione di Koelle è negativa, di regola, negli ultimi tre o quattro miomeri; eccezionalmente in rigenerati di recente formazione, relativi al periodo primavera-estate, il reperto è negativo per tutta la lunghezza del rigenerato, tranne che nel miomero posto immediatamente a valle del vecchio moncone.

DISCUSSIONE.

Dalle esposte osservazioni risulta che nella coda rigenerata dei Sauri le placche motrici hanno sede, costantemente, all'estremità terminale delle fibre muscolari; mentre nelle normali condizioni risultano situate nel tratto intermedio. Il reperto di Perroncito sulla sede abnorme delle placche non riguarda il materiale da noi considerato.

Risulta inoltre che, nello sviluppo normale dei miotomi della coda, le fibre nervose raggiungono le fibre muscolari in fase precoce, quando queste ultime sono relativamente arretrate nell'accrescimento, e pressapoco nel tratto intermedio delle fibre stesse: subito si costituisce l'abbozzo della placca motrice. Continuando la fibra muscolare a crescere nelle due direzioni, la placca rimane nella sua sede originale, verso la parte media della fibra.

Invece, secondo le nostre osservazioni, nella coda rigenerata, gli abbozzi della placca motrice si costituiscono in un periodo più inoltrato di quanto avviene nello sviluppo della coda normale; e soltanto quando le fibre muscolari hanno raggiunto una considerevole lunghezza, le placche motrici si delineano all'estremità distale della fibra muscolare e vi rimangono definitivamente. Il ritardo nel costituirsi delle giunzioni neuro-muscolari ha evidentemente corrispondenza con la ben nota flaccidità delle code rigenerate, in periodo precoce (Woodland, 1922).

Dissentiamo adunque dal Terni (1917), secondo il quale le fibre nervose rigenerate entrano precocemente in connessione con gli organi periferici: evidentemente questo Autore è stato tratto in inganno dal gran numero di fibre nervose nel rigenerato, dimostrabili in preparati con il metodo Cajal.

Riteniamo che la sede insolita delle placche dipenda dalla circostanza, che le fibre nervose raggiungano con notevole ritardo le fibre muscolari rigenerate, di fronte a quel che accade durante l'organogenesi della coda normale, per la seguente ragione: l'organogenesi si svolge di norma, secondo un piano caratterizzato da un preciso parallelismo tra grado di accrescimento e di differenziazione delle fibre muscolari e quello dei neuroni destinati ad innervarle. Nella coda rigenerata, le condizioni sono molto diverse da quelle dell'ontogenesi normale. Già Terni, nelle sue note ricerche, aveva dimostrato, che all'innervazione sensitiva della coda rigenerata presiedono i neuroni degli ultimi tre gangli spinali, i quali si ipertrofizzano in grado rilevante in relazione alla circostanza, che il territorio di innervazione è più esteso; Stefanelli (1944) ha confermato questa condizione per i neuroni radicolari preposti ad innervare le fibre muscolari rigenerate. Ambedue gli Autori hanno osservato che l'ipertrofia è lenta e tardiva.

Si può pertanto ammettere che, per effetto della sproporzione tra ipertrofia dei neuroni radicolari motori del moncone, lenta e tardiva, ed il rapido accrescimento delle fibre muscolari della coda rigenerata, le fibre nervose non si connettano con le fibre muscolari, se non quando queste ultime hanno raggiunto un grado considerevole di lunghezza e di maturità. Sembra verosimile che la placca motrice non possa costituirsi, così tardivamente, nella parte media della fibra muscolare, la quale ha già raggiunto la sua organizzazione definitiva; ma si costituisca nella sua parte distale, la quale ha un grado di maturità inferiore nel confronto delle parti restanti della fibra stessa.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] C. COËRS, « Arch. Biol. », 64, 495 (1953).
- [2] H. G. SCHWARZACHER, « Acta Anatomica », 30, 758 (1957).
- [3] A. PERRONCITO, « Boll. Soc. Medico-Chirurgica », Pavia, 14, 1 (1902).
- [4] W. N. F. WOODLAND, « Quart. J. Micr. Sci. », 65, 63 (1921).
- [5] T. TERNI, « Arch. It. Anatomia », 17, 507 (1919-1920).
- [6] A. STEFANELLI, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », 19, 4 (1944).

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

TAVOLA I.

- Fig. 1. - Fibre muscolari dissociate di coda normale di *Lacerta muralis*. Met. al cloruro d'oro. Numerose placche motrici verso la parte media delle fibre. Ingr. 85×.
- Fig. 2. - Id. Placche motrici verso la parte media delle fibre muscolari. Ingr. 350×.
- Fig. 3. - Sezione longitudinale di coda normale di *Lacerta muralis* in fase di accrescimento. Met. Koelle. ACHE nelle placche motrici: distribuzione uniforme verso la parte media delle fibre muscolari, a distanza dai miogetti. Ingr. 24×.
- Fig. 4. - Id. Particolare (in basso e a destra) del miotomo distale. Ingr. 50×.
- Fig. 5. - Id. Particolare. ACHE in una placca motrice. Ingr. 700×.

TAVOLA II.

- Fig. 6. - Fibre muscolari dissociate di coda rigenerata di *Lacerta viridis*. Met. al cloruro d'oro. Placche motrici all'estremità terminale delle fibre. Ingr. 90×.
- Fig. 7. - Id. Ingr. 350×.
- Fig. 8. - Sezione longitudinale di coda rigenerata di *Lacerta muralis*. Met. Koelle. ACHE nelle placche motrici: distribuzione uniforme all'estremità terminale delle fibre muscolari al confine con i miogetti. Ingr. 25×.
- Fig. 9. - Id. Particolare. ACHE in una placca motrice terminale. A sinistra: fasci collagenei. Ingr. 800×.
- Fig. 10. - Sezione longitudinale dell'estremo prossimale di un corto rigenerato (2 cm. di lungh.). Met. Koelle. Reazione positiva all'estremità dei miomeri, al confine con i miogetti. Ingr. 100×.





Biologia. — *Nuove esperienze sulle regolazioni nervose nelle parabiosi fra embrioni di Anfibi anuri* (*). Nota di ALDO ROSSI, presentata (**) dal Corrisp. A. STEFANELLI.

In un precedente lavoro (Rossi e Ingravalle 1960 [1]) è stato descritto che due sistemi nervosi si possono fondere, con continuità fra gli strati omologhi di cellule e di fibre nervose, unendo in parabiosi due embrioni allo stadio di placca neurale previa asportazione di un lembo di ectoderma confinante con la placca neurale (*Rana esculenta* + *Rana esculenta*; *Bufo bufo* + *Bufo bufo*). Malgrado l'estesa fusione, i due sistemi nervosi si sono però regolati solo parzialmente e nello stesso tempo si è constatato che le corde dei due individui sono rimaste nettamente separate. Dati i rapporti anatomici che vincolano la placca neurale alla corda dorsale, si è concluso che i due sistemi nervosi si sono incompletamente regolati a causa dell'azione separatrice esercitata dalle due sottostanti corde dorsali.

In precedenza D'Ancona e Nuti (1936 [2]) e Sala (1950 [3]) hanno constatato che operando più tardivamente (stadio di bottone codale - *Rana esculenta* + *Rana esculenta*) i sistemi nervosi di due embrioni uniti in parabiosi, generalmente non si fondono essendo diminuite le capacità citotropiche fra gli elementi cellulari nervosi. Gli Autori hanno osservato però che a questo stadio, parti encefaliche si possono ancora fondere se parti omologhe del tubo neurale vengono unite tramite superfici cruenti. Inoltre Stefanelli, Thermes e Poddie (1950 [4]) hanno constatato che il midollo spinale anche molto più tardivamente dello stadio di bottone codale mantiene la capacità di fondersi con una parte omologa, tramite superfici cruenti.

Ricerche personali (Rossi 1960, 1961 [5, 6]) hanno rivelato che, asportando il solo strato dell'ependima presuntivo o *periectoderma* di Ruffini (Fisiogenia 1925 [7]) di tutta la placca neurale di *Rana esculenta*, di *Bufo bufo* e di *Bufo viridis*, si formano cervelli pieni oppure cervelli con ventricoli molto ridotti o gravemente malformati. Dall'analisi di numerosi casi si è giunti alla conclusione che l'occlusione delle cavità ventricolari è avvenuta in seguito alla fusione delle due pareti laterali della placca neurale durante la morfogenesi del tubo neurale, fusione causata dall'eliminazione dello strato dell'ependima presuntivo (1961 [6]).

Di conseguenza, avendo constatato che l'asportazione dello strato dell'ependima presuntivo provoca estese fusioni tra gli strati omologhi di cellule e di fibre di uno stesso tubo neurale, nel presente lavoro si è cercato di vedere se si potesse ottenere una più ampia fusione e regolazione fra i

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata «G. B. Grassi» dell'Università di Roma e nel Centro di Neuroembriologia del C.N.R.

(**) Nella seduta del 13 giugno 1961.

due embrioni uniti in parabiosi (placca contro placca), eliminando lo strato dell'ependima presuntivo.

Placche neurali, di *Rana esculenta* allo stadio 13 (secondo le tabelle di sviluppo della *Rana pipiens* compilate da Schumway 1940 [8]) sono state completamente private dello strato dell'ependima presuntivo esattamente su tutta la placca neurale, con l'aiuto di sottili capelli innestati in bacchette di vetro. Gli embrioni così operati sono stati posti in cavità scavate nella paraffina e uniti in parabiosi dorso-dorsale e antero-anteriore. Le operazioni sono state eseguite in soluzione Holtfreter diluita a metà, rispetto alla concentrazione normale; dopo la cicatrizzazione e la fusione dei due embrioni, le coppie parabiontiche sono state passate in una soluzione fisiologica formata da una parte di soluzione di Holtfreter e da tre parti di acqua distillata. Nei giorni successivi le coppie parabiontiche sono state passate progressivamente in acqua di fonte.

Sono stati presi in esame sette casi che sono stati fissati 7, 14, 18, 30, 33 e 35 giorni dopo l'operazione. Come fissativo è stato usato il Bouin acetico; le sezioni seriate di 10 μ sono state colorate con il Mallory-Azan oppure con il metodo Bodian al protargolo (Bayer) per mettere in evidenza le fibre nervose.

Dall'esame macroscopico risulta che i parabionti si sono sviluppati rimanendo intimamente uniti lungo tutta la parte dorsale: pertanto essi formano una unità che presenta un'unica coda con quattro pinne disposte, due a due, su due piani ortogonali; due apparati digerenti separati, quattro vescicole otiche, quattro occhi e quattro fossette olfattorie. Si è osservato inoltre che l'unica coda, pur non avendo un movimento perfettamente simile a quello della coda dei normali girini, tuttavia è ancora un efficiente organo per la locomozione della coppia parabiontica; infine data la netta separazione dei due apparati digerenti si è osservato che ogni individuo è capace di nutrirsi indipendentemente dall'altro.

L'esame microscopico ha messo in evidenza che si sono realizzate estese fusioni e regolazioni fra i sistemi nervosi dei due individui uniti in parabiosi; tali regolazioni tra i due sistemi nervosi sono molto più complete di quelle ottenute nella precedente ricerca (Rossi e Ingravalle 1960 [1]) unendo due placche neurali affiancate previa asportazione di un lembo di ectoderma confinante con i due sistemi nervosi.

In alcuni casi esaminati, le regolazioni e le fusioni tra i due sistemi nervosi sono del tutto peculiari: infatti le due placche neurali appartenenti originariamente ai due individui uniti in parabiosi, non si sono regolate a formare un unico tubo neurale, bensì due tubi neurali affiancati. Ogni tubo neurale risulta costituito dalla regolazione di una metà sinistra della placca neurale di un individuo con la metà destra della placca dell'altro individuo ad essa giustapposta. Quindi, tenendo conto della disposizione delle rispettive corde dorsali, i due nuovi sistemi nervosi risultano disposti ortogonalmente rispetto ad esse.

Esaminando in serie i vari livelli del neurasse della coppia parabiontica si osserva che nel telencefalo i due tubi neurali si sono uniti in modo da for-

mare un unico telencefalo dovuto alla fusione e alla regolazione delle corrispondenti emiregioni telencefaliche di ciascun individuo. In qualche altro caso, invece di formarsi un unico telencefalo si sono formati due telencefali: le due vescicole di ognuno di questi telencefali appartengono però ciascuna a un parabionte.

Questa peculiare regolazione in due sistemi nervosi, risulta ancora più evidente al livello del diencefalo, del mesencefalo e del rombencefalo. Mentre in alcuni casi questa regolazione si mantiene nel midollo allungato e nel midollo spinale, in altri casi si forma un unico tubo neurale oppure i due sistemi nervosi si separano completamente fra di loro.

Nei casi in cui si è avuta una estesa regolazione si è osservato che nella regione diencefalica le rispettive zone del chiasma dei nervi ottici e gli infundiboli mantengono un regolare orientamento mentre i due diencefali regolati risultano disposti ortogonalmente rispetto a questi ultimi. In un caso si osserva che i nervi ottici di ogni individuo, non si decussano nella metà controlaterale, ma ogni nervo ottico rimane connesso con il proprio lato. Tale fatto avviene in quanto, con la costituzione dei due nuovi diencefali, le metà diencefaliche di uno stesso individuo rimangono nettamente separate. Nei casi in cui invece si è formata una unica massa diencefalica le fibre dei due nervi ottici di ogni individuo si decussano normalmente.

Nella regione mesencefalica si osserva in più casi una perfetta regolazione dei due mesencefali. In un paio di casi, due metà della placca giustapposte hanno dato origine ad un mesencefalo, mentre le altre due metà hanno dato origine ad un'unica massa mesencefalica, a sua volta formata di due mesencefali incompletamente separati.

Anche per quanto riguarda la regione rombencefalica, si sono avute delle nette separazioni fra i due rombencefali (fig. 2). È particolarmente interessante notare che in ogni rombencefalo le fibre nervose di un lato si decussano con quelle del lato opposto come se queste fibre appartenessero a due metà rombencefaliche di uno stesso individuo, mentre in realtà ogni metà appartiene ad un individuo diverso. In una Nota in collaborazione con A. Stefanelli sarà trattato il destino della fibra di Mauthner.

Nel midollo spinale si constata che in qualche caso la duplice regolazione si perde gradualmente. In tali casi si nota infatti che le emiregioni dei due sistemi nervosi regolati si separano gradualmente e nello stesso tempo si fondono con le corrispondenti emiregioni dello stesso individuo e quindi si ricostituiscono i due sistemi nervosi propri di ogni parabionte. I due sistemi nervosi ricostituiti rimangono però collegati tra di loro tramite due pareti di tela sterile delimitando nel contempo un'unica cavità.

Tale condizione non persiste lungo tutto il midollo spinale perché i due sistemi nervosi appartenenti ai due individui, nuovamente si fondono e si regolano in un unico midollo spinale, con una o due cavità endodimali.

Come situazione generale si osserva che le pareti delle cavità ventricolari dei due sistemi nervosi sono abbastanza ben delimitate ma in alcune zone le cellule nervose si estendono nella cavità ventricolare formando delle

reti e delle travate che spesso raggiungono il lato opposto del tubo neurale. Anche nei punti in cui i sistemi nervosi dei due individui si sono separati, possono persistere dei ponti cellulari, lungo i quali passano fasci di fibre che connettono i due neurassi. Spesso fra le reti e le travate di cellule e di fibre nervose, si formano dei canali di varia lunghezza e ampiezza delimitati frequentemente anche da un solo strato di cellule di aspetto ependimale.

Talvolta al di sopra della rete di cellule proliferate dalle pareti ventricolari, si forma uno strato di cellule di aspetto ependimale; tale strato, spesso monocellulare, si estende da un lato all'altro del neurasse, per cui la parete delimitante la cavità ventricolare risulta spostata più dorsalmente alla sua posizione primitiva.

Le corde dorsali, come si è già detto restano duplici e collocate nella loro originale sede. Tuttavia con la progressiva riduzione volumetrica del midollo spinale le due corde si avvicinano sempre più l'una all'altra. Nella parte terminale della coda le due corde si affiancano ed infine si fondono in un'unica corda. Nella zona di fusione delle due corde il midollo spinale in alcuni casi si è nuovamente sdoppiato mentre in altri si è spostato lateralmente alla corda. Infine la muscolatura assiale dei due parabionti è rimasta individuale e disposta nelle normali sedi.

Nel precedente lavoro (Rossi e Ingravallo 1960 [1]) pur avendo unito in parabiosi embrioni di *Rana esculenta* allo stesso stadio di placca neurale si è osservato solo una parziale regolazione fra i due sistemi nervosi, malgrado che questi si siano intimamente fusi con continuità fra gli strati omologhi di cellule e di fibre nervose. In quelle esperienze però i due embrioni sono stati uniti affiancati parallelamente o giustapposti cefalicamente, previa asportazione di un lembo di ectoderma confinante con la placca e lasciando completamente integro lo strato dell'ependima presuntivo. Sotto quelle condizioni sperimentali si è osservato che mentre i due sistemi nervosi si sono fusi e parzialmente regolati, le sottostanti corde dorsali sono rimaste invece nettamente separate. Dati i rapporti anatomici che vincolano la placca neurale alla sottostante corda dorsale, si è concluso che la regolazione fra i due sistemi nervosi è stata ostacolata dalla mancata fusione delle due sottostanti corde dorsali, in una unica corda.

Nel presente lavoro, si è constatato invece che malgrado la netta separazione delle due corde dorsali i due sistemi nervosi si sono fusi e notevolmente regolati. Ciò è stato favorito sia dall'eliminazione dello strato dello ependima presuntivo (come è stato già descritto, con questa operazione si asporta solo uno strato monocellulare - Rossi 1961 [6]) sia dal tipo particolare di parabiosi, che hanno permesso un più diretto contatto tra le placche neurali e fra gli elementi cellulari nervosi.

La peculiare regolazione fra le due placche neurali è interpretabile se si tien conto che, giustapponendo le due placche neurali, la metà sinistra e quella destra di ogni placca si trovano contrapposte rispettivamente con la metà destra e con quella sinistra dell'altra placca neurale; quindi in pratica,

con la giustapposizione delle due placche, ogni lato si trova accoppiato con una metà controlaterale similmente a quanto avviene in una normale neurulazione con la formazione del tubo neurale. Il fatto che le rispettive metà delle due placche contrapposte hanno formato due sistemi nervosi, convalida che allo stadio in cui è stata fatta l'operazione (stadio di fine gastrula), nel neurasse vi sono attive capacità regolative.

Particolarmente interessante è il fatto che la regolazione dei due tubi neurali si è realizzata indipendentemente dalla posizione delle corde dorsali e della muscolatura assiale. Inoltre, né la forma né la distribuzione degli strati di cellule e di fibre nervose sono stati influenzati dalle due corde dorsali e dai muscoli assiali. È noto dalle esperienze di Lehmann (1926, 1928, 1935 [9, 10, 11]) e di Holtfreter (1933, 1934 [12, 13]) che l'abbozzo cordo mesodermico ha un fondamentale ruolo nella determinazione della placca neurale e che singolarmente la corda e la muscolatura possono influire sulla forma del canale endimale e sulla topografia degli strati di cellule e di fibre nervose.

Tuttavia le ricerche personali su embrioni di *Rana esculenta* e di *Bufo bufo* (Rossi 1960 [14]) e quelle di Kitchin (1949 [15]) su embrioni di *Amblystoma punctatum*, hanno dimostrato che operando la cordoectomia allo stadio di placca neurale, il tubo neurale non subisce rilevanti modificazioni strutturali in seguito alla mancanza della corda dorsale o alla fusione dei miotomi sotto il neurasse.

Anche nelle presenti ricerche si è chiaramente osservato che la peculiare regolazione dei due sistemi nervosi giustapposti si è realizzata indipendentemente dalla presenza o dalla disposizione di questi organi assili (corda dorsale e muscolatura assiale), per cui si deve concludere che allo stadio di fine gastrula, lo sviluppo del tubo neurale procede ormai per intrinseche proprietà morfogenetiche e non viene più sensibilmente influenzato dalla corda dorsale e dalla muscolatura assiale.

In conclusione, nella presente ricerca si è osservato che unendo in parabiosi dorso-dorsale e antero-anteriore due embrioni di *Rana esculenta* (allo stadio di fine gastrula = stadio 13 secondo Schumway 1940) previa asportazione dello strato dell'endimma presuntivo o *perietoderma* di Ruffini, i rispettivi sistemi nervosi si fondono e si regolano in un modo del tutto peculiare. Infatti i due sistemi nervosi, invece di regolarsi in un unico sistema nervoso, si sviluppano in due sistemi nervosi ognuno dei quali è formato dalla regolazione di due emiplacche giustapposte appartenenti quindi ciascuna ad un individuo differente. Pertanto i due sistemi nervosi risultano disposti ortogonalmente rispetto alle due corde dorsali (che invece restano nella loro normale sede) e fra loro sono più o meno a contatto con le rispettive piastre basilari.

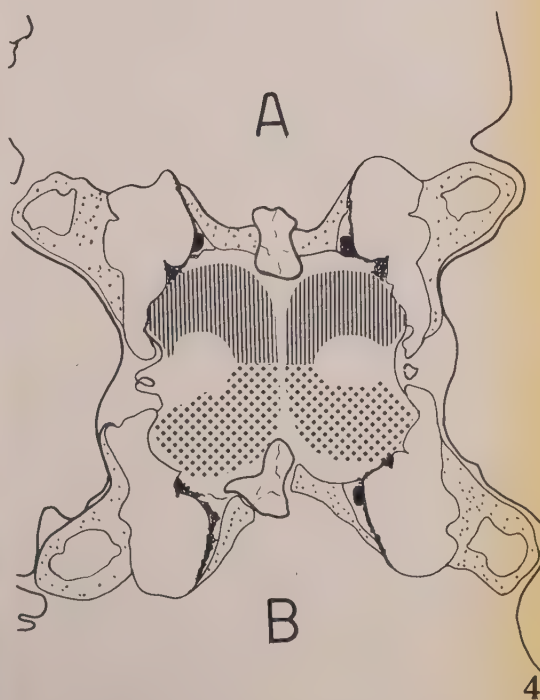
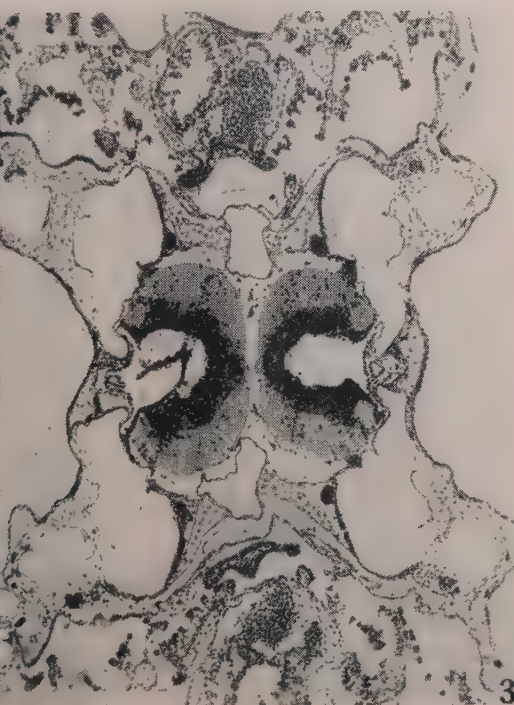
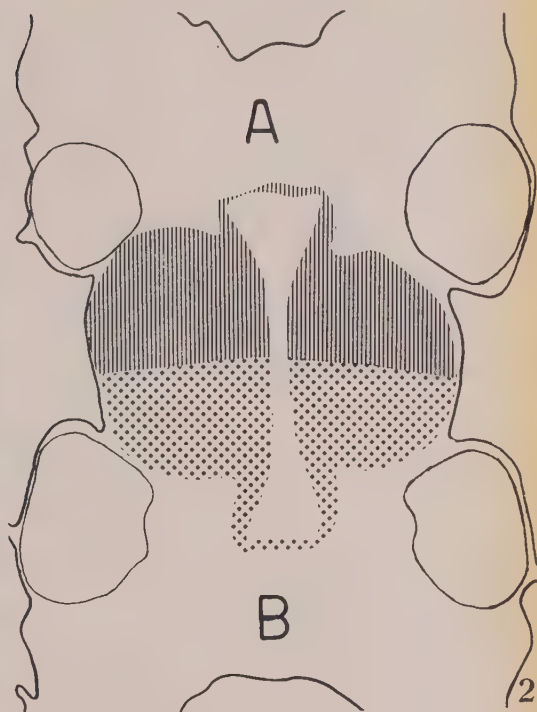
Si può così concludere che la regolazione e la morfogenesi dei due sistemi nervosi, formati ognuno dalla partecipazione dei due parabionti, non sono stati influenzati dalla presenza delle corde dorsali e della muscolatura assiale che sono rimasti nelle loro naturali sedi.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] A. ROSSI e C. INGRAVALLE, *Regolazioni nervose nelle parabiosi fra embrioni di Anfibi anuri*, « Arch. Ital. Anat. Embr. », 65, 93 (1960).
- [2] U. D'ANCONA e F. NUTI, *Unioni ependimali e fusioni perfette dei sistemi nervosi centrali negli innesti di embrioni di rana*, « Arch. Zool. », 23, 311 (1936).
- [3] M. SALA, *Ricerche sul potere regolativo del sistema nervoso degli Anfibi anuri*, « Comm. Pont. Ac. Sci. », 14, 97 (1950).
- [4] A. STEFANELLI, G. THERMES e M. PODDIE, *La rigenerazione del midollo spinale delle larve in Anfibi anuri e sue relazioni con la corda dorsale*, « Riv. Biol. », 42, 239 (1950).
- [5] A. ROSSI, *Esperienze di asportazione dell'ependima presuntivo in embrioni di Anfibi anuri*, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. 8^a), 29, 438 (1960).
- [6] A. ROSSI, *Nuove esperienze sull'asportazione dello strato dell'ependima presuntivo in embrioni di Anfibi anuri*, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. 8^a), 30, 565, (1961).
- [7] A. RUFFINI, *Fisiogenia*, Editore F. Vallardi (Milano) (1925).
- [8] W. SCHUMWAY, *Stages in the normal development of Rana pipiens*. - I. *External form*, « Anat. Rec. », 78, 139 (1940).
- [9] F. E. LEHMANN, *Entwicklungsstörungen in der Medullaranlage von Triton, erzeugt durch Unterlagerungsdefekte*, « Arch. Entw. mech. », 108, 243 (1926).
- [10] F. E. LEHMANN, *Die Bedeutung der Unterlagerung für die Entwicklung der Medullarplatte von Triton*, « Arch. Entw. mech. », 113, 123 (1928).
- [11] F. E. LEHMANN, *Die Entwicklung von Rückenmark, Spinalganglien und Wirbelanlagen in chordalosen Körperregionen von Tritonlarven*, « Rev. suisse Zool. », 42, 405 (1935).
- [12] J. HOLTGRETER, *Organisierungsstufen nach regionaler Kombination von Entomesoderm mit Ektoderm*, « Biol. Zentralbl. », 53, 404 (1933).
- [13] J. HOLTGRETER, *Formative Reize in der Embryonalentwicklung der Amphibien dargestellt an Explantationsversuchen*, « Arch. exp. Zell-forsch. », 15, 281 (1934).
- [14] A. ROSSI, *Esperienze di cordoectomia in embrioni di Anfibi anuri*, « Riv. Biol. », 53, 367 (1960).
- [15] I. C. KITCHIN, *The effects of notochordectomy in Amblystoma mexicanum*, « J. Exp. Zool. », 112, 393 (1949).

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA I

- Fig. 1. - Sezione seriata al livello della regione diencefalo-mesencefalica di una parabiosi dorso-dorsale e antero-anteriore fra embrioni di *Rana esculenta*, presa in esame 30 giorni dopo l'operazione. Come risulta dalla:
- Fig. 2. - I sistemi nervosi dei due parabionti, A (tratteggiato) e B (punteggiato), si sono fusi e regolati in due nuovi sistemi nervosi, ciascuno dei quali è formato dalla compartecipazione di una emiplacca destra di un individuo con l'emiplacca sinistra dell'altro individuo.
- Fig. 3. - Sezione seriata della stessa parabiosi, al livello della regione rombencefalica. Come risulta evidente anche dalla:
- Fig. 4. - I due rombencefali si sono formati dalla fusione e regolazione di una emiplacca destra di un individuo con l'emiplacca sinistra dell'altro individuo e viceversa. I due nuovi sistemi nervosi, risultano pertanto disposti ortogonalmente rispetto alle due corde dorsali, rispettivamente appartenenti l'una all'individuo A e l'altra all'individuo B. Ogni unità della scala in calce alla Tavola è uguale a 50 μ .



Biologia. — *Osservazioni istochimiche sulla distribuzione della fosfatasi acida nella rigenerazione del midollo spinale caudale del Tritone* (*). Nota di BRUNO BERTOLINI, presentata (**) dal Corrisp. A. STEFANELLI.

La fosfatasi acida è uno degli enzimi che hanno delle relazioni caratteristiche e ben definite con i diversi stati funzionali della cellula nervosa.

Esistono molti lavori sulla distribuzione di questo enzima nel sistema nervoso; di essi ricordo qui soltanto quelli, da cui queste relazioni appaiono in maniera più evidente.

Le variazioni di attività della fosfatasi acida mostrano un evidente parallelo con i processi del differenziamento istologico (Moog 1944 [1], nello sviluppo embrionale del pollo; Stefanelli, Cataldi e Ieradi 1961 [2], nel differenziamento della retina), con il grado di attività fisiologica del neurone (Kobayashi e Farner 1960 [3] nei neuroni neurosecretori; Schimke 1959 [4], nei neuroni della retina, eccitata o meno dallo stimolo luminoso), con lo stato di reazione per resezione dei prolungamenti (Bodian e Mellors 1945; Smith e Luttrell 1947) [5].

L'attività fosfatasica acida aumenta inoltre nel tratto distale di un nervo sezionato, scomparendo con la fine del processo di degenerazione (Heinzen 1947; Bodian 1947; Smith 1948) [6], e nell'estremità delle fibre rigeneranti dal moncone del nervo sezionato (Samorajski 1957) [7].

Le attività fosfatasiche nella rigenerazione della coda del Tritone sono state studiate con metodo biochimico da Ghiretti (1950 [8]); dalle osservazioni di questo autore risulta che l'attività della fosfatasi acida, presente nel complesso dei differenti tessuti del rigenerato, raggiunge un massimo quando i processi di istolisi e di sdifferenziazione sono nel pieno del loro svolgimento.

Data l'importanza della fosfatasi acida nel metabolismo del tessuto nervoso, si è voluta studiare la localizzazione dell'attività fosfomonoesterasica acida, nella rigenerazione del midollo spinale caudale del Tritone.

Gli Urodeli, unici tra i Vertebrati, hanno la capacità di rigenerare parti molto estese del sistema nervoso centrale, con totale restituzione morfologica e funzionale, e quindi il fenomeno ha un particolare interesse per la sua completezza.

Ho pertanto preso in esame un gruppo di 25 Tritoni adulti (*Triturus cristatus* Laur.) a cui è stata amputata la coda a metà circa della sua lunghezza;

(*) Lavoro eseguito nel Centro di Neuroembriologia del C.N.R., presso l'Istituto di Anatomia comparata «G. B. Grassi» dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta del 13 giugno 1961.

gli animali sono stati mantenuti a 18-19°C, e regolarmente alimentati, finché il rigenerato non aveva raggiunto una lunghezza di 5-6 mm, ad una ventina di giorni dall'operazione.

Le code rigeneranti, insieme ad un tratto del moncone della vecchia coda, sono state fissate e successivamente trattate secondo diverse tecniche.

Sei di esse, e dei tratti di midollo spinale caudale e del tronco, sono stati fissati in formolo-calcio a pH 7, impregnati in gomma-saccarosio (Holt 1959 [9]) e sezionati al congelatore.

L'attività fosfataseica è stata rivelata incubando le sezioni a pH 6,5 con α -naftil-fosfato e mediante la copulazione simultanea con esazo-parosnilina (Barka 1960 [10]).

Sono stati eseguiti anche dei controlli, incubando le sezioni senza substrato, od in presenza di 1 cc di NaF 0,008M, come inibitore, su 100 cc del mezzo di incubazione.

Altri rigenerati sono stati preparati con diverse tecniche istologiche ed istochimiche (Cajal II, Mallory-Azan, blu di toluidina, galloccianina, fissazione in Gendre e PAS); due animali sono stati iniettati con blu tripan, per verificare le capacità fagocitarie di determinate cellule.

Nel midollo spinale la attività fosfataseica acida appare localizzata nel citoplasma dei neuroni, mentre il nucleo ed il nucleolo appaiono inattivi; non è possibile decidere se in qualche caso vi sia una attività nella cromatina aderente alla membrana nucleare.

Più reattivi sono i neuroni più grandi e differenziati delle corna anteriori e posteriori e le cellule marginali (Bertolini 1959 [11]), mentre le cellule del grigio periventricolare, che circondano l'ependima, sono poco o nulla reattive.

Anche l'ependima è fortemente reattivo, ma l'attività è limitata all'apice delle cellule, affacciato sul lume del canale centrale, mentre il resto del corpo cellulare è inattivo (fig. 6).

Nella coda in rigenerazione è possibile seguire tutto il processo di differenziamento del tubo neurale su di uno stesso esemplare, poiché, mentre l'apice è costituito dall'ampolla apicale, formata da cellule indifferenziate in attiva proliferazione e migrazione, man mano che si procede in senso prossimale i neuroblasti si vengono differenziando, fino a ricostituire un completo midollo spinale (Stefanelli e Capriata 1943 [12]).

La distribuzione della fosfatasi acida è caratteristica anche nel processo di rigenerazione.

Nell'ampolla apicale, e lungo tutto il tubo ependimale ancora indifferenziato, le cellule mostrano un'attività non molto intensa, diffusa in tutto il citoplasma, con una certa accentuazione all'estremità rivolta verso il canale centrale (figg. 1-4, 7-8); la distribuzione è quindi diversa da quella che si ha nell'ependima differenziato, in cui la localizzazione apicale e l'inattività del resto del corpo cellulare sono molto nette.

Più cefalicamente, dove è già possibile distinguere uno strato ependimale, uno strato di neuroblasti che si vengono differenziando ed un primo

strato di sostanza bianca, l'ependima conserva ancora la disposizione dell'attività fosfatasica che è stata descritta per i tratti più caudali (fig. 5).

I neuroblasti in differenziazione hanno una intensa attività, che aumenta sempre più man mano che si procede verso le regioni più differenziate del midollo rigenerante (fig. 9).

Le fibre della sostanza bianca sono invece sempre inattive.

Nella sostanza bianca del midollo in rigenerazione appaiono delle singole cellule reattive, che si possono identificare come cellule di glia e come cellule marginali.

Nel midollo spinale differenziato le cellule gliali della sostanza bianca non sono reattive, mentre una forte reattività resta nei neuroni marginali.

Dal confronto con i preparati eseguiti con il metodo argentico e con i preparati colorati con blu di toluidina o con gallocianina, risulta chiara la stretta relazione tra la comparsa delle neurofibrille e della sostanza tigroide e l'aumento dell'attività enzimatica; resta però difficile decidere se la notevole intensità dell'attività, nei neuroni in differenziamento, sia da porre in relazione con la sintesi delle pentosonucleoproteine citoplasmatiche, o direttamente con la sintesi delle proteine specifiche della cellula nervosa, o con ambedue, e quale sia il ruolo dell'enzima in queste sintesi.

Interessante è anche la diversa distribuzione della fosfatasi nell'ependima del midollo differenziato ed in quello del tratto rigenerante.

Negli Anfibi, ed in generale negli Anamni, l'ependima è costituito da cellule cilindriche, con un prolungamento basale ramificato, che spesso raggiunge la superficie esterna del neurasse; questo tipo di ependima ha una elevata attività metabolica, dimostrata dalla ricchezza in enzimi, tra cui la fosfatasi acida, e dalle funzioni di deposito e di trasporto del glicogeno, ed ha quindi un ruolo molto importante nel neurasse, per le sue funzioni trofiche e di sostegno.

Negli Amnioti, con condizioni intermedie nei Rettili, l'ependima embrionale ha una struttura simile a quella descritta per gli Anamni, ma poi, col differenziamento del tessuto nervoso, perde il prolungamento basale, e si riduce ad una sorta di epitelio cubico, che ha una scarsa attività.

Le funzioni che l'ependima svolge negli Anamni vengono assunte, negli Amnioti, dalla glia, che nei primi è invece assai scarsa e di struttura molto primitiva.

Anche la attività fosfatasica acida manca in questo secondo tipo di ependima (Leduc e Wislocki 1952 [13])⁽¹⁾.

La elevata attività fosfatasica acida e la sua localizzazione apicale nell'ependima del Tritone appaiono perciò legate alla funzione specifica che le sue cellule svolgono.

L'ampolla apicale ed il tubo ependimale rigenerante presentano invece una reattività diffusa, ed uniformemente distribuita tra tutte le cellule.

(1) Per la bibliografia sull'ependima rimando a LEVI (1935) [14] e ad OKSCHE (1958) [15].

La distribuzione dell'enzima in queste cellule indifferenziate è quindi molto differente da quella che si ha nell'ependima differenziato, ed inoltre la ripartizione omogenea dell'enzima appare simile a quella che si ha nel sistema nervoso embrionale (Moog 1944 [1]; Stefanelli, Cataldi e Ieradi 1961 [2]).

Successivamente la fosfatasi si localizza in alcune cellule, mostrando una evidente relazione con i processi del differenziamento, ed infine persiste in determinati tipi cellulari del midollo spinale differenziato, in rapporto all'instaurarsi di specifiche funzioni.

In conclusione, anche nel processo di rigenerazione del midollo spinale, la fosfatasi acida presenta un'azione difasica, legata dapprima ai processi di accrescimento del sistema nervoso embrionale, od in questo caso al processo di proliferazione riparativa, ed in un secondo momento ai processi del differenziamento, ed alla graduale assunzione delle funzioni specifiche; questa azione difasica è del tutto paragonabile a quella descritta da Stefanelli, Cataldi e Ieradi (1961 [2]), nello sviluppo della retina.

Presenza di macrofagi nel lume dell'ampolla apicale.

Un'altra caratteristica del midollo spinale in rigenerazione è la frequente presenza di cellule libere nel lume del canale ependimale.

Ho ritenuto opportuno riportarne qui la descrizione, benché non si tratti di cellule nervose, dato che esse si possono osservare quasi costantemente in tutti i midolli rigeneranti.

Queste cellule presentano un'attività enzimatica intensissima, e quindi spiccano molto chiaramente nelle sezioni (fig. 10).

Sono in genere di forma rotondeggiante, e spesso mostrano nel citoplasma degli scarsi granuli di pigmento.

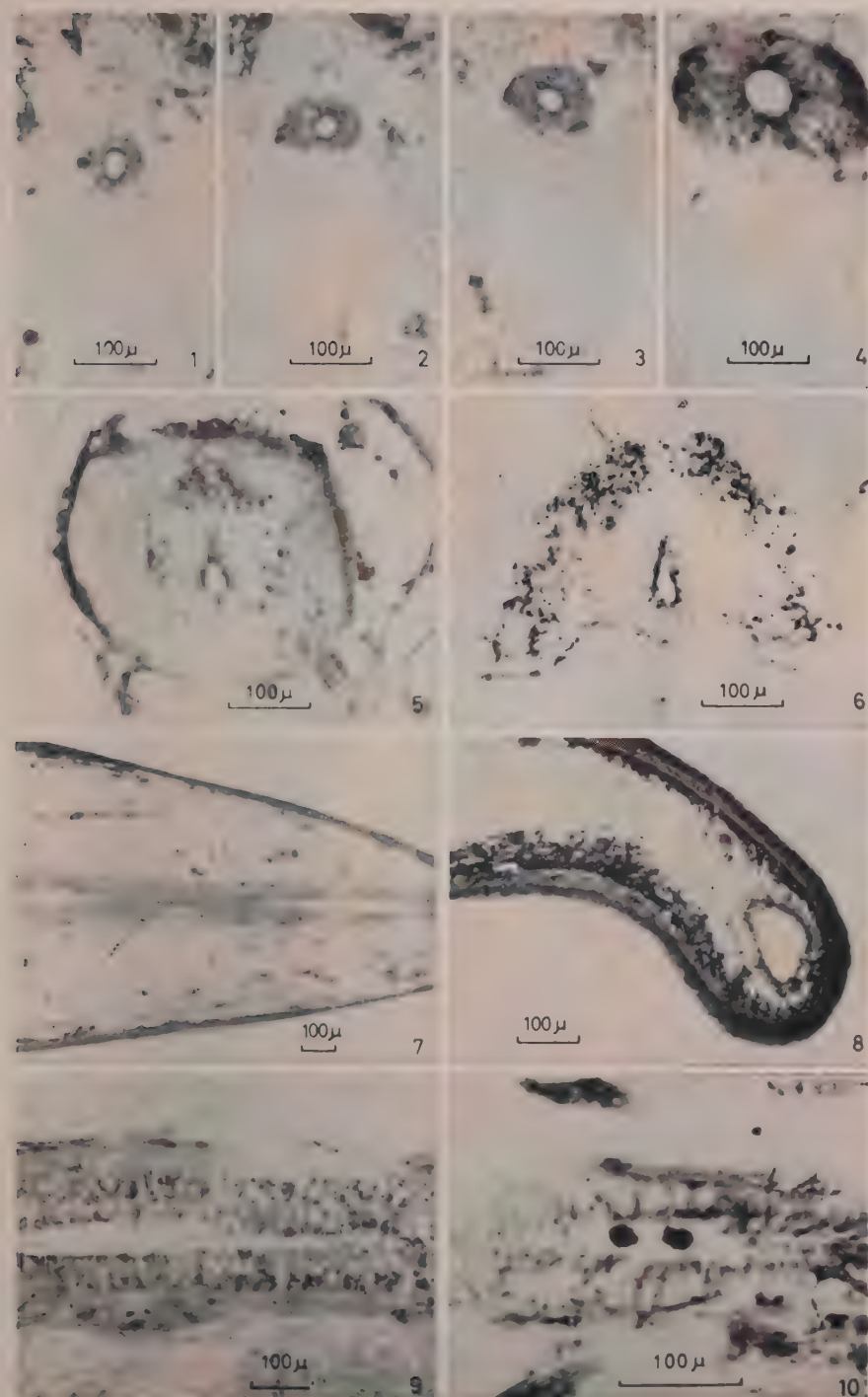
Cellule simili si trovano sparse anche nel mesenchima del rigenerato.

Nei preparati eseguiti con il metodo di Mallory-Azan, ho potuto osservare alcune di queste cellule nell'atto di attraversare la parete dell'ampolla apicale, ed altre che avevano inglobato frammenti cellulari od eritrociti; questi fenomeni erano particolarmente notevoli in qualche caso in cui erano evidenti dei processi di degenerazione in parte dell'ampolla.

Queste cellule sono perciò identificabili come macrofagi, e la loro attività fagocitaria è confermata dalla assunzione di blu tripan, negli animali in cui era stata iniettata questa sostanza.

La loro attività fagocitaria, durante la migrazione nel mesenchima, si esercita anche nei riguardi dei granuli di pigmento che i melanofori perdono di frequente tra le cellule circostanti, e ciò spiega la presenza di questi granuli nel citoplasma dei fagociti.

Non ho mai potuto osservare forme di transizione tra queste cellule ed i melanofori, e non ho mai osservato melanofori all'interno del canale ependimale, per cui posso escludere che si tratti di melanoblasti in via di differenziazione.



Macrofagi endoventricolari sono stati osservati anche da Komnick (1961 [16]) nello *Xenopus* adulto.

La elevata attività della fosfatasi acida in queste cellule è probabilmente in relazione con le funzioni di digestione intracellulare, catalizzate da quel complesso di idrolasi che sono contenute nei lisosomi (De Duve, 1959 [17]).

BIBLIOGRAFIA.

- [1] F. MOOG, « Biol. Bull. », 86, 51 (1944).
- [2] A. STEFANELLI, E. CATALDI e L. A. IERADI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (1961) (in corso di stampa).
- [3] M. KOBAYASHI e D. S. FARNER, « Zeitschr. f. Zellforsch. », 53, 1 (1965).
- [4] R. T. SCHIMKE, « J. Biol. Chem. », 234, 700 (1959).
- [5] D. BODIAN e R. C. MELLORS, « J. Exp. Med. », 1, 469 (1945); W. K. SMITH e C. LUTTRELL, « Anat. Rec. », 97, 426 (1947).
- [6] B. HEINZEN, « Anat. Rec. », 98, 193 (1947); D. BODIAN, « Soc. Exp. Biol. Symposia », 1, 170 (1947); W. K. SMITH, « Anat. Rec. », 102, 523 (1948).
- [7] T. SAMORAJSKI, « J. Histochem. Cytochem. », 5, 15 (1957).
- [8] F. GHIRETTI, « Experientia », 6, 98 (1950).
- [9] S. J. HOLT, « Exp. Cell Res. », 7 (Suppl.), 1 (1959).
- [10] T. BARKA, « Nature », 187, 248 (1960).
- [11] B. BERTOLINI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (serie 8*), 27, 103 (1959).
- [12] A. STEFANELLI e A. CAPRIATA, « Ric. di Morfologia », 20-21, 605 (1943).
- [13] E. H. LEDUC e G. B. WISLOCKI, « J. Comp. Neurol. », 97, 241 (1952).
- [14] G. LEVI, *Trattato di Istologia*, Torino 1935.
- [15] A. OKSCHE, « Zeitschr. f. Zellforsch. », 48, 74 (1958).
- [16] H. KOMNICK, « Roux' Arch. f. Entw-mech. », 153, 14 (191).
- [17] C. DE DUVE, « Exp. Cell Res. », 7 (suppl.), 169 (1959).

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA I

Figg. 1-4. - Sezioni trasversali, ad intervalli successivi, di uno stesso midollo spinale rigenerante.

Fig. 5. - Midollo spinale alla base del rigenerato.

Fig. 6. - Sostanza grigia del midollo spinale del tronco.

Fig. 7. - Sezione frontale del midollo rigenerante.

Fig. 8. - Ampolla apicale.

Fig. 9. - Reattività nei neuroblasti in via di differenziazione.

Fig. 10. - Due macrofagi intensamente reattivi nel lume del canale endimale.

(Tutte le fotografie rappresentano sezioni in cui è stata messa in evidenza l'attività fosfatasica acida).

Biologia. — *Fenomeni riparativi e rigenerativi in segmenti di midollo spinale in condizioni di isolamento nell'adulto di un Anfibio urodelo* (*). Nota di MILENA MARINI e VITO MARGOTTA, presentata (**) dal Corrisp. A. STEFANELLI.

È noto fin dalle osservazioni di Spallanzani⁽¹⁾ sulla rigenerazione della coda delle Salamandre, seguite dalle ricerche di numerosi Autori⁽²⁾, che negli Anfibi urodela adulti il midollo spinale conserva notevolissime capacità rigenerative. Stefanelli e Coll. hanno eseguito una completa analisi dei fenomeni citologici nella rigenerazione del midollo spinale degli Anfibi urodela, sia in seguito ad amputazione della coda⁽³⁾, sia mediante asportazione di segmenti di midollo⁽⁴⁾ mettendo in luce l'importanza dell'ampolla apicale.

Lo scopo da noi propostoci era innanzi tutto di accertare se anche un segmento di midollo spinale di Tritone adulto, prelevato dal tronco o dalla coda, posto in completo isolamento morfologico e funzionale, conservasse capacità rigenerative; in caso positivo analizzare i fenomeni citologici di questa rigenerazione e vedere se era possibile, in tal maniera, mettere in luce il significato che possono avere nei processi rigenerativi gli elementi indifferenziati descritti da uno di noi⁽⁵⁾ tra le cellule ependimali degli Anfibi urodela adulti. A tal fine abbiamo isolato i segmenti di midollo trapiantandoli omoplasticamente tra la muscolatura di un altro adulto.

Va ricordato in proposito che, negli Anfibi urodela, trapianti eterotopici di frammenti di sistema nervoso sono stati eseguiti da vari Ricercatori⁽⁶⁾ con intenti diversi, ma sempre riguardanti o gli effetti induttivi sui tessuti dell'ospite o i rapporti che prendono con altri pezzi trapiantati nelle immediate vicinanze; pertanto in nessuna di queste ricerche sono stati analizzati i fenomeni che si verificano nel frammento di tessuto nervoso trapiantato,

(*) Ricerca eseguita nell'Istituto di Anatomia comparata dell'Università di Roma e nel Centro di Neuroembriologia del C.N.R.

(**) Nella seduta del 13 giugno 1961.

(1) L. SPALLANZANI, *Prodromo di un'opera da imprimersi sopra le riproduzioni animali* (Modena 1768).

(2) Ved.: AL. STEFANELLI e A. CAPRIATA, « Ricerche di Morfologia », 20-21, p. 605 (1943); AL. STEFANELLI, « Boll. Zool. », 18, p. 279 (1951). J. PIATT, « Journ. Exptl. Zool. », 129, p. 177 (1955).

(3) AL. STEFANELLI e A. CAPRIATA, op. cit.

(4) AL. STEFANELLI e M. CERVI, « Boll. Soc. It. Biol. Sperim. », 22, p. 756 (1946).

(5) M. MARINI, « Riv. di Neurobiol. », 2, p. 495 (1956).

(6) Ved.: P. WEISS, « Journ. Exptl. Zool. », 113, p. 397 (1950). R. A. LIVERSAGE, « Journ. Exptl. Zool. », 141, p. 75 (1959). V. KIORTSIS e A. DROIN, « Journ. Embryol. and Exptl. Morph. », 9, p. 77 (1961).

a parte alcune considerazioni di Weiss ⁽⁶⁾ limitate all'organizzazione morfologica generale. Va inoltre tenuto presente che tutte queste ricerche sono state eseguite su larve; solo in qualche caso descritto da Weiss e da Liver-
sage ⁽⁶⁾, il frammento di sistema nervoso proveniva da un animale appena metamorfosato, e pertanto mai a differenziamento ultimato; l'ospite comunque era sempre una larva.

In questa Nota preliminare ci limitiamo ad uno sguardo d'insieme dei fenomeni citologici osservati nei segmenti di midollo isolati nel primo mese dopo l'operazione, riservandoci di dare, in un successivo lavoro, completa documentazione di tutti gli stadi intermedi e degli stadi più lunghi di cui le osservazioni sono tuttora in corso.

Ai fini della presente ricerca abbiamo eseguito due serie di trapianti omoplastici eterotopici di segmenti di midollo spinale di un Anfibio urodelo adulto (*Triturus cristatus carnifex* Laur.) su adulto (individui che avevano raggiunto la completa maturità sessuale).

Nella prima serie di operazioni segmenti di midollo codale, di circa 5 mm di lunghezza, provenienti dalla regione prossimale della coda, furono trapiantati allo stesso livello nella muscolatura dorsale della coda di un altro individuo. Nella seconda serie i segmenti di midollo furono prelevati nella regione del tronco, anteriormente ai centri di innervazione dell'arto posteriore, ed impiantati allo stesso livello tra la muscolatura dorsale dell'ospite.

I segmenti di midollo sono stati isolati in soluzione di Holtfreter con Elkosin CIBA all'1 %_∞. L'operazione di impianto è stata effettuata o aprendo una tasca nei tessuti dell'ospite e suturando dopo avervi adagiato il midollo o praticando un tunnel di circa un centimetro ed introducendovi nella zona mediale il segmento di midollo mediante una sottile pipetta. Dopo l'impianto, gli animali sono stati tenuti per 3-4 giorni al buio (onde limitare l'attività motoria) su carta bibula imbevuta di soluzione fisiologica; quindi sono stati messi in acqua, sempre in camera termostatica a 18-20° C.

Dagli animali, sacrificati a vari tempi dopo l'operazione, furono isolati i pezzi contenenti il trapianto e fissati per ogni stadio almeno due pezzi in Bouin e due in liquido di Müller.

Di ogni pezzo fissato in Bouin, sezionato longitudinalmente in serie di 8-10 μ di spessore, furono allestiti in alcuni casi alternativamente preparati impregnati secondo il metodo di Bodian e colorati con il Mallory-Azan; in altri casi sono stati effettuati ambedue i trattamenti sugli stessi preparati. I pezzi fissati in Müller furono sezionati trasversalmente in serie di 5-7 μ di spessore e colorati con il metodo di Mallory o con l'emallume-eosina. Di alcuni segmenti di midollo fissati appena isolati, sono stati allestiti preparati di controllo con gli stessi metodi.

In questa prima serie di esperienze solo in due casi si è formata in corrispondenza del tunnel una piccola protuberanza che all'esame micro-

scopico si è rivelata un ispessimento dell'epidermide provocata evidentemente da proliferazione locale stimolata dal midollo trapiantato, analogamente a quanto è stato osservato da Overton⁽⁷⁾ nella pinna codale di larve di Anfibi urodeli.

In base al tipo di fenomeni citologici riscontrati a carico del midollo trapiantato abbiamo riunito i vari casi finora studiati in tre gruppi.

Gruppo A. - Nel midollo trapiantato, molto precocemente (5 gg. dopo l'operazione) si notano segni rilevanti di degenerazione e infiltrazione di elementi connettivali, tra cui numerosi macrofagi. Le cellule più periferiche della sostanza grigia sono le più compromesse; incipienti fenomeni degenerativi si verificano nella sostanza bianca, la quale perde la normale compattezza. Non possiamo precisare la condizione delle fibre non avendo preparati trattati con impregnazione argentica.

Nonostante le precarie condizioni, nel segmento di midollo si osservano dei fenomeni riparativi che consistono nella chiusura dei due estremi, per la migrazione delle cellule ependimali più vicine alla superficie di taglio e nella formazione di due modeste dilatazioni ampollari.

Comunque in questi casi di rapida degenerazione, dovuta probabilmente al mancato o ritardato instaurarsi dei rapporti vascolari, già 20 gg. dopo l'operazione il tunnel appare riempito solo da connettivo senza più traccia di tessuto nervoso.

Gruppo B. - 15-20 gg. dopo l'operazione il segmento di midollo persiste conservando approssimativamente le sue originarie dimensioni, ma presenta, oltre a segni di degenerazione e infiltrazione di elementi connettivali, specialmente fenomeni di disorganizzazione. La sostanza bianca ha un aspetto reticolare ed esibisce tutti i quadri che caratterizzano la degenerazione di fibre nervose (fascetti di fibre ondulate, fibre moniliformi, residui argirofili di fibre)⁽⁸⁾.

Nella sostanza grigia molti dei neuroni multipolari sono distrutti o irrimediabilmente danneggiati; migliori, per quanto è possibile apprezzarlo, le condizioni del grigio periventricolare; ancora in buono stato le cellule ependimali, tra le quali si notano anche mitosi.

In questo gruppo, malgrado la degenerazione sia meno spinta che nei casi precedenti, è più difficile valutare l'entità dei processi rigenerativi (formazione di ampolle, migrazione di elementi) perché il midollo in certi punti appare ripiegato e contorto, con conseguente deformazione del canale ependimale e disorganizzazione generale. Comunque abbiamo potuto riscontrare agli estremi del segmento la presenza di ampolle apicali di forma più o meno tipica con cellule in cariocinesi. Evidenti, invece, in mezzo ai quadri degenerativi suddetti, i fenomeni rigenerativi di molte fibre, le quali presentano gli aspetti tipici descritti da Perroncito e da

(7) J. OVERTON, « Journ. Exptl. Zool. », 115, p. 521 (1950).

(8) Ved.: G. MARINESCO, *La Cellule Nerveuse* (Paris 1909). G. LEVI, *Trattato di Istologia* (Torino 1954).

Ramon y Cajal ⁽⁹⁾. Tali fibre sono dirette in tutte le direzioni entro il midollo e anch'è fuori di esso; quest'ultime, con andamento irregolare, si insinuano tra gli elementi connettivali che vanno riempiendo il tunnel nei punti non occupati dal midollo.

Gruppo C. — In questo terzo gruppo comprendiamo quei casi in cui il midollo trapiantato, un mese dopo l'operazione non mostra, almeno nella struttura generale, segni di disorganizzazione (fig. 1), ma appare abbastanza disteso, separato dal connettivo, che ha riempito il resto del tunnel, da uno strato di fibre collagene; solo la lunghezza appare ridotta rispetto al momento del trapianto. Ad un esame più attento si osserva che nemmeno questi midolli sono esenti da fenomeni degenerativi, la cui entità varia da caso a caso. Nella sostanza bianca, sebbene più compatta rispetto ai casi precedenti, vi è stata distruzione di fibre, come lo denotano le cavità e i residui argirofilii; con ogni probabilità le fibre degenerate sono quelle che l'atto operatorio ha isolato dai neuroni di origine; quadri di degenerazione in atto si notano a carico dei neuriti di elementi degenerati del midollo trapiantato; le fibre che si conservano illese possono presentare aspetti rigenerativi (fig. 3). Nella sostanza grigia i fenomeni degenerativi sono limitati agli elementi più voluminosi delle colonne motorie e sensitive; inoltre il numero dei neuroni sopravvissuti in questa sede, tranne in un caso, è decisamente superiore che negli esemplari precedenti. Il grigio periventricolare e l'ependima sono integri.

Ma ciò che distingue e caratterizza questo gruppo è la presenza di fenomeni rigenerativi cospicui tuttora in atto. Ai due estremi del segmento di midollo si nota infatti sempre la presenza di tipiche ampolle (fig. 1) con cavità relativamente ampie, delimitate dalle caratteristiche cellule a fiasco (fig. 2). Le cariocinesi sono frequenti (in un caso 20 mitosi per ogni millimetro di lunghezza), oltre che tra le cellule che delimitano le ampolle (fig. 2), anche tra le cellule che tappezzano il canale ependimale (fig. 4), che appare di calibro normale ed uniforme.

Nel grigio periventricolare le cellule sono più addensate rispetto ai controlli e per le dimensioni, l'aspetto dei nuclei e del citoplasma, appaiono a stadi diversi del differenziamento; di norma le più periferiche sono le più voluminose e differenziate (fig. 8). Per i suddetti aspetti il grigio periventricolare di questi midolli ricorda la condizione che si osserva durante lo sviluppo.

Elementi in via di differenziamento si osservano anche in prossimità delle ampolle apicali.

L'ispessimento del grigio periventricolare ed i quadri di differenziamento, osservati in questa sede, ci sembra dimostrino che non solo dalle cellule proliferate nelle ampolle, ma anche da quelle proliferate lungo tutto il canale ependimale, si vadano differenziando nuovi elementi nervosi. Questo

(9) Ved. S. RAMON Y CAJAL, *Degeneration and Regeneration of the Nervous System* (London Oxford 1928).

fatto, che non è chiaramente dimostrabile nei casi in cui attorno al grigio periventricolare restano grandi neuroni delle colonne motorie e sensitive, diviene evidente quando queste cellule sono scomparse o irreparabilmente danneggiate. È appunto nell'esemplare di questo gruppo più colpito da fenomeni degenerativi che abbiamo potuto chiarire il fenomeno, come lo dimostrano le figure 5, 6, e 7.

In questo segmento di midollo, sezionato longitudinalmente, si osserva che le porzioni laterali (D) sono in preda alla degenerazione e invase da elementi connettivali, mentre nella porzione mediale spiccano con chiara evidenza, attorno all'ependima in attività mitotica, due bande ben delimitate di cellule integre (fig. 8). Queste cellule nelle sezioni successive appaiono riunite al di sopra del canale ependimale in un'unica banda (fig. 5 G) all'esterno della quale si osservano gli elementi più voluminosi e differenziati (fig. 6 G); successivamente ancora decorre in corrispondenza un fascetto compatto di fibre orientate (fig. 7 Fn), che presentano l'aspetto tipico degli assoni in sviluppo ⁽¹⁰⁾. Questo fascetto raggiunge l'estremità del midollo, ma non fuoriesce da esso come ha descritto Weiss ⁽⁶⁾ nei trapianti di midollo larvale; tale differenza va attribuita, con ogni probabilità, al fatto che il nostro esame si limita ad un mese dopo l'operazione.

Come è desumibile dai dati analitici esposti, negli Anfibi urodela, anche nell'adulto un segmento di midollo in completo isolamento morfologico e funzionale è in grado di espletare attività rigenerative. Tali attività sono limitate a fenomeni riparativi, quali la chiusura degli estremi beanti con formazione di ampolle apicali, quando per cause estrinseche la degenerazione è molto rapida, analogamente a quanto osservato da Baffoni ⁽¹¹⁾, in segmenti di midollo larvale di Anfibi anuri trapiantati su embrioni al momento del riassorbimento del tuorlo.

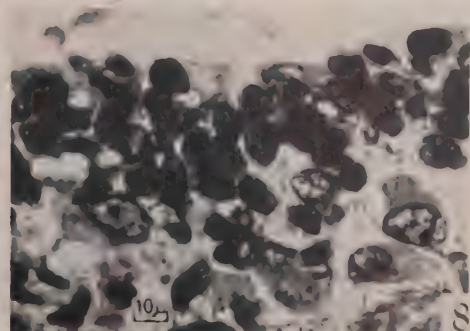
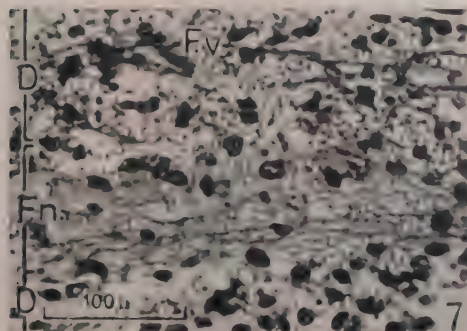
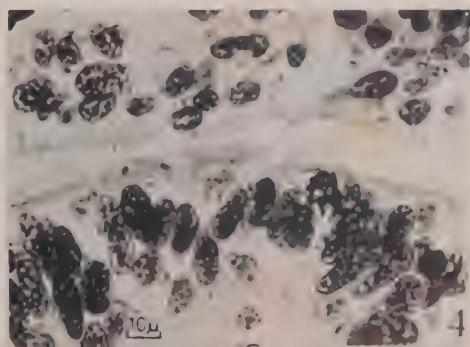
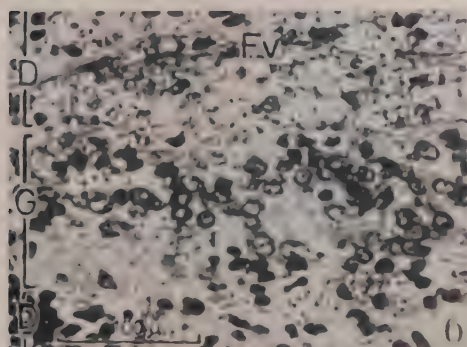
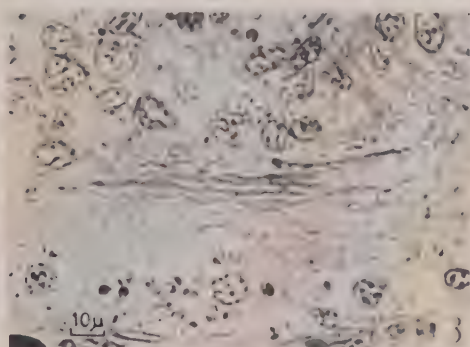
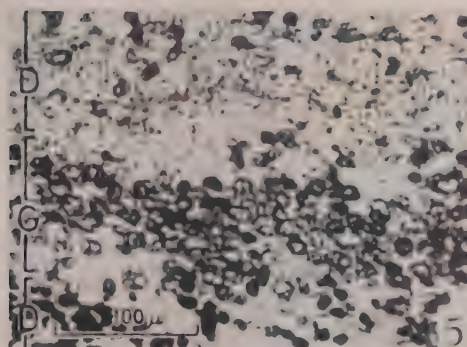
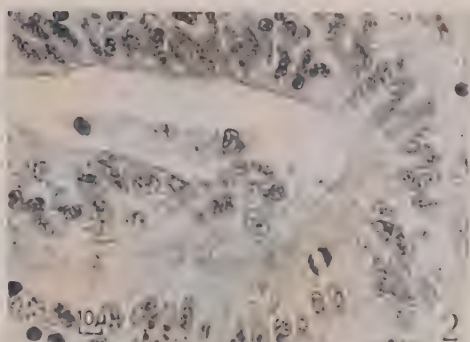
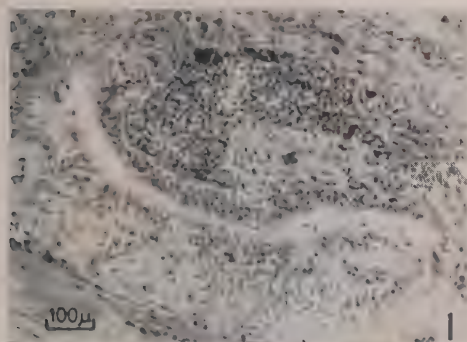
Risulta pertanto confermato anche nell'adulto che, per quanto precarie siano le condizioni in cui può trovarsi, un segmento di midollo isolato cerca di riparare all'integrità perduta formando ai due estremi dilatazioni ampollari, le quali sono il punto di partenza di qualunque tentativo rigenerativo del midollo spinale (Stefanelli ^(2,3,4)).

Qualora invece le condizioni in cui vengono a trovarsi i midolli isolati siano migliori, si può osservare tutta una serie di fenomeni rigenerativi che porta fino al differenziamento di nuove cellule nervose.

I fenomeni rigenerativi non sono limitati ai due estremi del midollo, dove si osservano quadri analoghi a quelli illustrati da Stefanelli e Capriata ⁽²⁾ nella rigenerazione normale in seguito ad amputazione della coda, ma si estendono a tutto il segmento trapiantato, come lo dimostrano la presenza di mitosi tra le cellule ependimali e di neuroni in via di differenziamento nel grigio periventricolare.

(10) Ved. R. G. HARRISON, « Journ. Exptl. Zool. », 9, p. 787 (1910).

(11) G. M. BAFFONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. VIII), 13, p. 176 (1952).



Dalle nostre osservazioni risulta inoltre che i fenomeni rigenerativi, sebbene il segmento di midollo sia in completo isolamento morfologico e funzionale, si svolgono con ordine e hanno la tendenza a ricostituire la tipica struttura; ciò è dimostrato dalla formazione di ampolle apicali con cellule a fiasco ai due estremi del midollo; e dalle modalità dei processi proliferativi e differenziativi di nuovi elementi nervosi lungo tutto il segmento di midollo nel tentativo di sostituire quelli perduti.

Con le presenti ricerche è stato altresì dimostrato che l'attività proliferativa non è limitata alle ampolle, ma si estende lungo tutto l'ependima. Poiché le cellule che tappezzano il canale ependimale non mostrano segni di sdifferenziamento (come lo attesta la persistenza delle ciglia sulla superficie ventricolare e del prolungamento distale) tutto fa pensare che le capacità proliferative siano limitate a quelle cellule che conservano i quadri nucleari del neuroblasta indifferenziato e che sono state descritte da uno di noi ⁽⁵⁾ tra le cellule ependimali dell'adulto. Queste osservazioni pertanto sono in appoggio all'ipotesi che tali elementi indifferenziati giuochino un ruolo di notevole importanza nei fenomeni rigenerativi del neurasse degli Anfibi urodeli adulti.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA I

Fig. 1. — Midollo spinale un mese dopo l'operazione (Bodian).

Fig. 2. — Particolare ingrandito dell'ampolla apicale destra.

Fig. 3. — Particolare ingrandito di fibre rigeneranti.

Fig. 4. — Mitosi sui bordi del canale ependimale (Mallory-Azan).

Figg. 5, 6, 7. — Sezioni longitudinali alterne di un midollo spinale 1 mese dopo l'operazione (D = zona di degenerazione con infiltrazione di cellule connettivali; G = grigio periventricolare; Fv = fibre residue dall'epoca del trapianto; Fn = fibre neoformate) (Bodian-Mallory).

Fig. 8. — Cellule in differenziamento alla periferia del grigio periventricolare (Bodian-Mallory).

Biologia. — *L'andamento dell'attività mitotica nel mielencefalo durante lo sviluppo di un Anfibio urodelo* ^(*). Nota di GIORGIO M. BAFFONI, presentata ^(**) dal Corrisp. A. STEFANELLI.

Da tempo sono in corso ricerche intese a precisare l'andamento dell'attività mitotica nel sistema nervoso centrale durante lo sviluppo di Anfibi (nel periodo embrionale, larvale e post-larvale). In proposito sono stati già resi noti i risultati preliminari relativi alle variazioni del ritmo mitotico nelle regioni del neurasse di un Anfibio anuro ⁽¹⁾.

Tali ricerche sono state concepite nell'intento di valutare le differenze dell'attività proliferativa tra Anfibi che presentano differenti adattamenti ecologici ed al fine di entrare in possesso di un criterio onde precisare l'entità di eventuali modificazioni dell'attività mitotica in seguito a trattamenti sperimentali; a quest'ultimo proposito ricordo che sono stati resi noti i risultati degli effetti dell'ormone tiroideo, il quale provoca una metamorfosi accelerata ed anticipata, sulla attività mitotica al livello delle varie regioni del neurasse dell'Anfibio anuro ⁽²⁾. Dato che le mitosi del neurasse sono localizzate quasi esclusivamente nello strato ventricolare (o neuro-epitelio o strato ependimale o germinativo), ai fini che hanno motivato le presenti ricerche non ci si poteva limitare alla valutazione delle variazioni numeriche dei computi assoluti di mitosi, ma si doveva risalire a valori di densità (frequenza delle mitosi nell'unità di superficie) con il preciso intento di evitare le interferenze dovute allo sviluppo della superficie ventricolare.

In una recente Nota sono stati riferiti i primi risultati sull'andamento dell'attività mitotica nel midollo spinale di un Anfibio urodelo (*Triturus cristatus carnifex* Laur.) ⁽³⁾. Nella presente Nota si riferiscono i risultati ottenuti dall'esame sull'andamento mitotico nel mielencefalo dello stesso Anfibio urodelo; va ricordato che il mielencefalo ed il metencefalo sono due regioni che si sviluppano dal romboencefalo, ma non sono morfologicamente ben distinte; in precedenti osservazioni è stato descritto il ritmo mitotico della regione più rostrale del romboencefalo (dall'istmo alla radice del V°

(*) Ricerca eseguita nell'Istituto di Zoologia ed Anatomia comparata dell'Università di Modena e nel Centro di Neuroembriologia del C.N.R. dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta del 10 giugno 1961.

(1) G. M. BAFFONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. 8^a), XXVI, 598 (1959); « Riv. di Neurobiol. » (Perugia), V, 33 (1959); G. M. BAFFONI e R. PINACCI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. 8^a), XXV, 128 (1958).

(2) G. M. BAFFONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. 8^a), XXIII, 495 (1957); *ivi*, XXVII, 427 (1959); *ivi*, XXVIII, 102 (1960); « Boll. di Zool. », XXVI, 255 (1959).

(3) G. M. BAFFONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. 8^a), XXX, 802 (1961).

paio di nervi cranici) ⁽⁴⁾ allo scopo di stabilire una comparazione tra l'andamento dell'attività proliferativa di un Anuro ⁽⁵⁾ e quello di un Urodelo ⁽⁶⁾; le presenti osservazioni concernono la porzione caudale del romboencefalo e cioè quella regione del neurasse che si estende tra il piano passante per le radici del trigemino e quello passante per il calamo.

Per quanto riguarda i cenni bibliografici, i criterii scelti ed i metodi impiegati nel corso di queste ricerche, rimando a quanto è stato descritto in precedenti lavori ^(1,6); ricordo che ogni valore riportato nella Tabella rappresenta la media aritmetica di almeno tre individui per ogni stadio di sviluppo prescelto (classificato in base alla seriazione proposta da Glücksohn ⁽⁷⁾). Nell'esame del mielencefalo è stato tenuto separato conto delle mitosi nelle due aree funzionali distinte dal *sulcus limitans*: quella mediale (piastra basale) e quella laterale (piastra alare) allo scopo di poter comparare i risultati di densità mitotica del mielencefalo con quelli della regione più craniale del romboencefalo (metencefalo) ⁽⁴⁾.

L'esame dei dati ottenuti (ved. Tabella I) e dell'istogramma da essi ricavato (fig. 1) dimostra che al livello del mielencefalo la più accentuata attività proliferativa si realizza durante il periodo embrionale; al termine del periodo di vita embrionale si verifica una caduta dei valori di densità mitotica, la quale, come quella riscontrata allo stesso periodo nel midollo spinale ⁽³⁾, va ritenuta effetto della « crisi metabolica » (ved.: Cotronei ⁽⁸⁾) che avviene al momento del cambiamento del regime nutrizio, il quale passa dall'utilizzazione delle scorte vitelline a quella dei prodotti della digestione del cibo. All'inizio del periodo larvale il mielencefalo ha assunto il suo aspetto tipico, come lo indica anche il rallentato sviluppo della superficie ventricolare, le frequenze mitotiche aumentano, conservandosi però a livelli molto bassi, e successivamente diminuiscono lentamente e progressivamente fino al termine del periodo larvale; dopo la metamorfosi nel mielencefalo resta qualche sporadico episodio mitotico (densità bassissime).

Se si stabilisce un confronto tra l'andamento dell'attività proliferativa nel mielencefalo dell'Anfibio urodelo con quello osservato nelle regioni contigue nel neurasse dello stesso animale, si constata una marcata rassomiglianza, sia per i livelli raggiunti dei valori di densità che per il loro andamento, tra mielencefalo e quanto riscontrato nella regione metencefalica ⁽⁴⁾; unica differenza è la più elevata attività mitotica nella piastra alare metencefalica, specie verso il termine del periodo larvale; questa differenza diviene comprensibile se si ricorda il significato funzionale dei centri che si sviluppano dalla piastra alare metencefalica, se cioè si mette in rapporto l'incremento mitotico con lo sviluppo del cervelletto ed in particolare con il differenziamento

(4) G. M. BAFFONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. 8^a), XXIII, 90 (1957).

(5) G. M. BAFFONI e E. ELIA, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. 8^a), XXII, 109 (1957).

(6) G. M. BAFFONI, « Boll. di Zool. », XXIV, 135 (1957).

(7) S. GLÜCKSOHN, « Roux' Arch. Entw.-mech. Organ. », CXXV, 341 (1932).

(8) G. COTRONEI, « Mem. Soc. Ital. Sci. (detta dei XL) » (ser. 3^a), XXI, 3 (1919).

di nuovi neuroni cerebellari che contrarranno rapporti funzionali con le vie propriocettive che si sviluppano onde provvedere alla coordinazione motoria nella deambulazione dell'animale metamorfosato (vie spino-cerebellari).

TABELLA I.

Stadio	Età gg	Lunghez. mm	N. Mitosi		Emiarea ventricol.		Densità	
			P. alare	P. basale	P. alare dmm ²	P. basale dmm ²	P. alare	P. basale
36	9	8	126,7		13,79		9,18	
40	12	10	48,0	47,0	6,8	6,1	7,06	7,68
42	15	10,5	26,0	26,0	8,3	8,1	3,12	3,22
45	19	14,5	27,0	8,0	12,3	11,0	2,20	0,73
47	25	15,5	28,0	15,0	14,0	14,0	2,00	1,10
50	47	16,5	22,5	18,0	13,5	13,85	1,66	1,30
52	54	18	38,0	26,5	18,5	16,9	2,05	1,57
55	60	20	73,5	46,5	21,4	16,6	3,43	2,80
58	75	22	68,3	36,0	26,15	18,15	2,61	1,95
60	90	26	36,3	12,6	27,3	17,7	1,32	0,68
62	110	30	34,5	18,5	43,4	33,3	0,79	0,55
63	140	36	21,3	12,6	45,7	36,2	0,47	0,35
—	170	40	8,6	3,3	46,8	37,4	0,18	0,09

A differenza di quanto è stato verificato nel midollo spinale, nel mielencefalo la cavità ventricolare non presenta riduzione di calibro, ma, una volta formatasi, mantiene la stessa morfologia durante lo sviluppo, estendendosi in superficie a causa dell'ispessimento dei fasci ascendenti e discendenti, in concomitanza con il progredire dell'accrescimento somatico; a questo proposito va precisato che la superficie ventricolare aumenta considerevolmente in estensione nel periodo embrionale, mentre in quello larvale tale aumento è molto lento: ciò, analogamente a quanto è stato dimostrato nell'esame sull'andamento dell'attività proliferativa al livello del metencefalo ⁽⁴⁾ dell'Anfibio urodelo: in un primo tempo l'attività mitotica provvede principalmente allo sviluppo in superficie delle pareti mielencefaliche, in un secondo tempo al loro ispessimento ed infine (nell'animale metamorfosato) alle esigenze dell'accrescimento somatico, ed in particolare a compensare

l'ispessimento della sostanza bianca a causa della formazione e della mielinizzazione dei fasci nervosi; nel midollo spinale, invece, è stato visto che i valori di densità mitotica, dopo la caduta che si verifica al termine del periodo embrionale, risalgono all'inizio del periodo larvale, raggiungendo i massimi valori del periodo embrionale; questo differente comportamento tra mielencefalo e midollo spinale, che trova un esatto riscontro nel confronto tra le stesse regioni del neurasse negli Anfibî anuri⁽⁹⁾, va attribuito al fatto

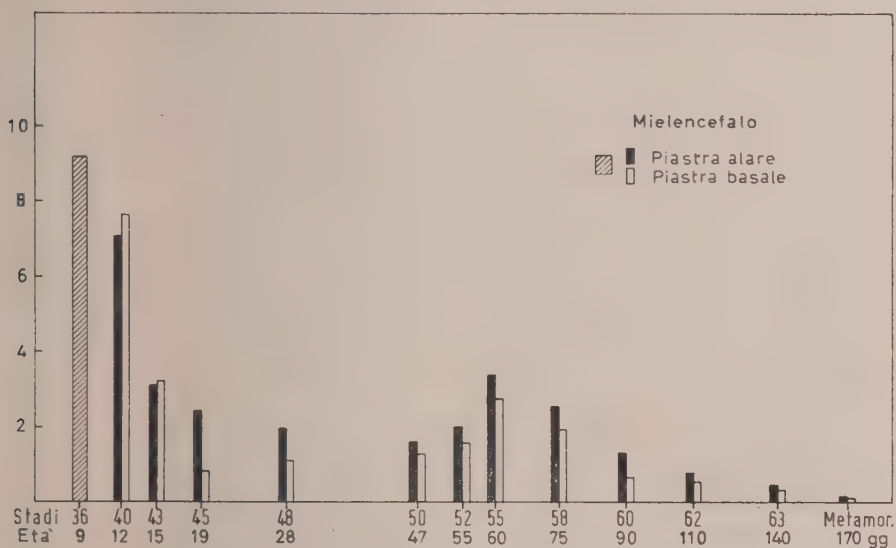


Fig. 1. — Andamento dell'attività mitotica nel mielencefalo di *Triturus cristatus carnifex* durante lo sviluppo.

(Il tempo, sull'ascissa, è in scala logaritmica).

che durante il periodo larvale nel midollo spinale degli Anfibii si differenziano nuovi neuroni onde provvedere all'innervazione degli arti in sviluppo (formazione delle intumescenze cervicale e lombare); invece nel mielencefalo i centri nervosi si differenziano durante il periodo embrionale e nel periodo larvale presentano tuttalpiù un aumento numerico, limitatamente a quei centri che contrarranno rapporti con le regioni rostrali (cervelletto, diencefalo) e caudali (midollo spinale) del neurasse interessate agli adattamenti della vita terrestre; in proposito va anche sottolineato che negli Urodeli durante il periodo larvale non si formano distinti centri cocleari⁽¹⁰⁾, come è stato documentato negli Anuri da Stefanelli e Zacchei⁽¹¹⁾, dato il minor sviluppo

(9) R. PINACCI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. 8^a), XXIX, 150 (1960).

(10) Ved. C. J. HERRICK, « Journ. Comp. Neurol. », L, 1 (1930).

(11) AL. STEFANELLI e A. M. ZACCHEI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. 8^a), VII, 358 (1949).

(spesso assenza) della *papilla basilaris chocleae* negli adulti e la persistenza degli organi di senso della vita acquatica (ad esempio: gli organi della linea laterale), e pertanto le modificazioni del mielencefalo sono di lieve entità e generalmente si limitano a processi di iperplasia di centri preesistenti.

La comparazione tra l'andamento dell'attività mitotica nel mielencefalo dell'Anfibio urodelo con quello dell'Anfibio anuro ⁽⁹⁾ mette in luce come in ambedue gli animali i valori di densità si mantengano relativamente costanti e, durante il periodo larvale, più bassi che nelle regioni contigue del neurasse (rostralmente nel metencefalo e caudalmente nel midollo spinale); inoltre nel mielencefalo dei due Anfibi i valori di densità della piastra alare, per quanto in prevalenza superiori, si mantengono più vicini a quelli della piastra basale che nelle contigue regioni del neurasse. L'unica marcata differenza nell'attività proliferativa del mielencefalo tra Anuri ed Urodeli consiste nel più alto livello dei valori di densità mitotica dell'Anuro; questo fatto, come è già stato accennato a proposito del midollo spinale ⁽³⁾ e precisato in un esame comparativo generale sul ritmo mitotico del neurasse di Anuri ed Urodeli ⁽¹²⁾ non può essere attribuito alla maggior durata del periodo larvale dell'Urodelo (la quale è controbilanciata da un proporzionale accrescimento somatico), bensì va imputato al maggior volume delle cellule che costituiscono lo strato ventricolare dell'Anfibio urodelo che comporta un minor numero di elementi nell'unità di superficie.

CONCLUSIONI. - L'esame dell'andamento dell'attività mitotica nel mielencefalo di un Anfibio urodelo ha messo in evidenza che:

1° l'attività mitotica perdura fino a un mese dopo la metamorfosi; poiché nel neurasse degli Anfibi urodela metamorfosati la glia è rappresentata in gran prevalenza dalle cellule ependimali ⁽¹³⁾, che aumentano mediocrementemente di numero, mentre l'incremento maggiore si ha tra le cellule del grigio periventricolare (ved.: Baffoni ⁽⁴⁾), ciò significa che anche al livello del mielencefalo degli Urodela la determinazione numerica delle cellule nervose avviene tardivamente, probabilmente non prima del termine dell'accrescimento somatico;

2° la massima frequenza mitotica nel metencefalo si verifica durante il periodo embrionale; al termine di questo periodo vi è una forte caduta dei valori di densità mitotica in coincidenza con la « crisi metabolica » dovuta al cambiamento del tipo di nutrizione; la frequenza mitotica riprende all'inizio del periodo larvale oscillando su quote molto basse e decrescendo lentamente e progressivamente fino ad un mese dopo la metamorfosi;

3° durante il periodo larvale i valori di densità mitotica del mielencefalo restano più bassi che nelle regioni contigue del neurasse poiché nel mielencefalo i centri nervosi si differenziano precocemente e non si modi-

(12) G. M. BAFFONI, « Boll. di Zool. » XXVII (in corso di stampa - 1961).

(13) Ved.: C. U. ARIËNS KAPPERS, G. C. HUBER e E. C. CROSBY, *The Comparative Anatomy of the Nervous System of Vertebrates, including Man* (MacMillan Co., New York 1936).

ficano dopo la metamorfosi, mentre nel midollo spinale si sviluppano centri nervosi in rapporto con la formazione degli arti e nel metencefalo in rapporto con la formazione dei propriocettori generali; pertanto nel mielencefalo, come è stato osservato per la piastra basale del metencefalo ⁽⁵⁾, l'attività mitotica del periodo larvale provvede più che ai processi dello sviluppo a quelli dell'accrescimento del neurasse;

4° i valori di densità mitotica del mielencefalo, come quelli del midollo spinale, nell'Anfibio urodelo risultano molto più bassi che nell'Anuro a causa del maggior volume degli elementi che costituiscono lo strato ventricolare.

Biologia. — *Osservazioni critiche sul neo-darwinismo.* Nota di GIOVANNI BLANDINO, presentata (*) dal Corrisp. G. COLOSI.

In questa Nota (**) esporrò una critica al Darwinismo simile a quella già esposta in un libro da me recentemente pubblicato (*Problemi e dottrine di Biologia teorica*. Edizioni Minerva Medica, 1960). Qui, però, prenderò più direttamente in considerazione la formazione graduale di un vivente ed esporrò più dettagliatamente le ragioni per cui in un universo conforme alla ipotesi darwinista l'esistenza di un vivente, non solo è improbabile, ma è impossibile.

Per fissare le idee, presento l'argomentazione darwinista in questa forma molto semplice:

« Se supponiamo che in un dato universo casuale si formi gradualmente un primo vivente, sia pure di struttura semplicissima, e se supponiamo che questo sia soggetto a mutazioni casuali in tutti i sensi e che la selezione operi in modo perfetto, allora diviene inevitabile l'evoluzione di numerosi viventi ».

Critica.

La supposizione della formazione di un vivente è in contraddizione con la supposizione darwinista di un universo casuale⁽¹⁾ di tipo medio senza leggi preferenziali; in un universo conforme all'ipotesi darwinista una struttura regolare (morfologicamente simile ad un vivente) è improbabilissima, ma possibile; invece un « vivente » è impossibile.

L'esistenza di un solo vivente (con la parola « vivente » intendo almeno questo: una struttura regolare per la quale esistano leggi tali da renderne relativamente frequente la formazione⁽²⁾ e da renderne altamente costante la permanenza e la riproduzione) richiede l'esistenza di leggi altamente preferenziali che nella grande maggioranza degli universi teoricamente possibili⁽³⁾ non esistono. Inoltre il numero degli universi in cui quella struttura

(*) Nella seduta del 13 giugno 1961.

(**) Ringrazio vivamente i proff. G. Colosi e G. Zappa per il loro interessamento e per i chiarimenti forniti; ciò non implica una loro responsabilità scientifica in tutto quello che io affermo.

(1) Per qualche precisazione circa l'ipotesi di un universo casuale si veda il libro già citato a pp. 213 e 221.

(2) Introduco nella nozione di vivente « una formazione relativamente frequente » per avere una semplificazione nei calcoli ed una maggiore aderenza alla questione reale.

(3) Più esattamente bisogna considerare questi universi solo in quelle fasi della loro evoluzione nelle quali si realizzano condizioni generali tali da rendere possibile la vita. Infatti è chiaro che neanche leggi preferenziali sono in grado di realizzare i viventi in un ambiente ad altissima temperatura oppure in una condizione di massima entropia di un universo. Ad altissima temperatura è improbabilissima (praticamente impossibile) una struttura orga-

vivente è impossibile, è tanto maggiore quanto più grande è il grado della capacità di formazione, di permanenza e di riproduzione che viene attribuito a quella struttura.

Comunque passiamo ora ad una dimostrazione più precisa. Consideriamo una successione di strutture ⁽⁴⁾ con grado di regolarità ⁽⁵⁾ crescente e perciò con grado di probabilità decrescente; di esse:

a) la prima struttura abbia probabilità $1/1$;

b) la seconda struttura abbia probabilità $1/2$ (cioè tale che la metà delle strutture possibili abbia quel certo grado di regolarità o uno maggiore);

c) in genere la n^{esima} struttura abbia probabilità $1/n$ (cioè tale che solo 1 su n strutture abbia il grado sufficiente di regolarità richiesta).

Allora la probabilità teorica di una successione di n strutture (che decada al termine $n + 1^{\text{esimo}}$) è uguale a $\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdots \frac{1}{n} = \frac{1}{n!}$; cioè su $n!$ successioni possibili (costituite da n strutture) solo una ha il grado di regolarità crescente richiesto.

Consideriamo ora l'insieme di tutti gli universi possibili (cioè con tutti i tipi possibili di leggi) che siano costituiti da 10^{80} particelle elementari (il nostro universo astronomicamente noto contiene meno di 10^{80} particelle) e che durino ciascuno un miliardo di miliardi di anni. Quale è la probabilità media che in essi si formi una successione del tipo sopra indicato con strutture a regolarità crescente fino ad un dato termine n^{esimo} ?

Se $n = 67$, se ogni singola struttura dura anche solo un minuto secondo, se la struttura ultima (la n^{esima}) è costituita di $2 \cdot 10^3$ particelle e in media ogni struttura è costituita di 10^3 particelle, allora in media si realizzerà all'incirca una sola di tali successioni in ognuno di quegli universi durante il periodo di un miliardo di miliardi di anni (10^{18} anni).

Infatti la probabilità di una simile successione di 67 strutture (successive) è minore di 1 su $3,2 \cdot 10^{102}$ e in un universo delle dimensioni e della durata sopraindicate si possono formare, al massimo, appunto $3,2 \cdot 10^{102}$ successioni, poiché:

1° in un medesimo istante possono esistere 10^{77} strutture circoscritte costituite da 10^3 particelle,

nica colloidale (vitale o non vitale); in una condizione di massima entropia dell'universo è improbabilissima una struttura complessa eterogenea (vitale o non vitale). È anche chiaro che, nelle condizioni in cui anche le leggi preferenziali non riescono a determinare la realizzazione di un vivente, a molto maggior ragione non vi riescono i fattori darwinistici « caso e selezione ».

(4) Le strutture in questione (sia regolari che irregolari) debbono essere tutte possibili nelle fasi degli universi indicate nella nota precedente.

(5) La regolarità qui richiesta è almeno una regolarità anatomico-morfologica; ma possiamo anche richiedere una regolarità parzialmente funzionale, del tipo che si può riscontrare anche in una macchina e che è certamente realizzabile anche in un universo senza leggi preferenziali a favore di quella struttura funzionale. Invece non possiamo richiedere una regolarità funzionale completa, del tipo vitale, poiché questo forse è impossibile in un universo senza leggi preferenziali (e ciò di fatto è quello che intendo dimostrare).

2° in un miliardo di miliardi di anni, se ogni struttura dura un secondo, possono esistere $10^{77} \cdot 3,2 \cdot 10^7 \cdot 10^{18} = 3,2 \cdot 10^{102}$ strutture (poiché un anno contiene meno di $3,2 \cdot 10^7$ secondi).

3° le possibili successioni di strutture sono altrettanto numerose quanto le singole possibili strutture iniziali e, d'altra parte, tutte le strutture possono essere strutture iniziali (con eccezioni trascurabili).

Cerchiamo ora quale è la probabilità teorica di una successione di 68 strutture regolari progressive; questa probabilità si ottiene moltiplicando per $1/68$ la probabilità di una successione di 67 strutture. Da ciò segue che tra tutti i possibili universi casuali sopra indicati solamente in 1 su 68 si verifica una successione di 68 strutture ogni 10^{18} anni. Ciò significa che non più di 1 su 68 universi possibili possiede leggi (preferenziali) tali da determinare normalmente e senza speciali fortune una successione di 68 strutture ogni 10^{18} anni.

Col medesimo metodo possiamo cercare la probabilità di una successione di 69 strutture; si giunge alla conclusione che tra tutti gli universi possibili non più di 1 su $68 \cdot 69$ possiede leggi (preferenziali) tali da determinare normalmente la formazione di una successione di 69 strutture.

Cerchiamo infine la probabilità di una successione di 100.000 strutture regolari progressive (la quale in tutto durerebbe meno di 28 ore); tale probabilità è ottenibile moltiplicando la probabilità di una successione di 67 strutture per $\frac{1}{68} \cdot \frac{1}{69} \cdot \frac{1}{70} \cdots \frac{1}{100.000} = \frac{67!}{100.000!} < \frac{1}{10^{456.000}}$.

Ciò significa che non più di 1 su $10^{456.000}$ universi possibili possiede leggi (preferenziali) tali da determinare, normalmente e senza speciali fortune, una successione di 100.000 strutture ⁽⁶⁾ ogni 10^{18} anni. Tutto questo dimostra quello che ho affermato all'inizio, cioè che *l'esistenza di una successione di strutture regolari (e quindi di un vivente) richiede l'esistenza di leggi altamente preferenziali le quali nella grande maggioranza degli universi teoricamente possibili non esistono* ⁽⁷⁾.

(6) L'ultima struttura di questa successione (struttura che ha probabilità $1/100.000$) ha un bassissimo grado di regolarità, molto inferiore a quello riscontrabile in un batterio. Per esempio, un cocco ha un volume inferiore ad un μ^3 ; se ora noi prendiamo un miscuglio di sostanze organiche del volume di $100.000 \mu^3 (= 1/10.000 \text{ mm}^3)$ e se frazioniamo questo volume in 100.000 parti, con estrema probabilità neppure una di queste particelle avrà la regolarità morfologica di un cocco.

Una struttura con un grado di probabilità $1/100.000$ di formerà frequentissimamente in un universo qualsiasi; quello che invece è estremamente improbabile è che essa si formi preceduta da una successione di strutture progressive. Ciò significa che, in regime casuale, la formazione per graduale sviluppo è *complessivamente* molto più improbabile che non la formazione diretta da sostanze inorganizzate.

(7) Si può obiettare: «Ma se il nostro universo fosse *casualmente* proprio uno di quegli universi con leggi altamente preferenziali?».

A questa obiezione posso rispondere così:

1° Ciò, a parte altre considerazioni, è enormemente improbabile.

Questa stessa risposta, se si vuol prendere in considerazione la possibilità da parte nostra di osservare l'esistenza dei viventi (possibilità che suppone già la nostra esistenza) può essere espressa così: Nell'ipotesi casuale, anche ammessa la realizzazione del mio corpo, rimarrebbe sempre estremamente improbabile che io potessi osservare altri organismi

Si noti che quanto precede dimostra che in un universo casuale medio è impossibile la formazione di un vivente *qualsiasi*, non solo di un vivente predefinito.

I darwinisti suppongono, in modo più o meno implicito, che in ogni universo vi debbano inevitabilmente essere leggi tali da determinare, in modo normale, la realizzazione di una qualche successione di strutture regolari, magari per un tempo indefinito; ma ciò non è esatto.

Appunto perché in un universo casuale medio non esistono leggi preferenziali, non solamente la selezione ma neanche un essere intelligente è capace di sceglierli un solo vivente.

Precisazioni.

1° Se, invece di attribuire ad ogni struttura la durata di un secondo, si attribuisce ad essa una durata più o meno lunga, i vantaggi non aumentano né diminuiscono. Se, ad esempio, si attribuisce ad ogni struttura la durata di un'ora, allora si ha il vantaggio che quando la struttura si realizza essa dura più a lungo, però si ha lo svantaggio che il numero delle successioni realizzabili in un dato universo nel tempo di 10^{18} anni è minore e perciò è minore la frazione degli universi in cui esistono leggi preferenziali capaci di determinare normalmente la realizzazione di tale successione ogni 10^{18} anni.

2° Nello sviluppo di un vivente non si ha solo che ad una struttura di un dato grado di regolarità ne segue un'altra di maggiore grado di regolarità, ma si ha anche che la struttura successiva è morfologicamente simile alla precedente (cioè appartiene alla medesima specie biologica). Invece nell'esempio da me sviluppato si richiede molto meno: basta che la struttura successiva abbia un grado di regolarità leggermente superiore a quello della precedente, anche se non è morfologicamente simile ad essa, ma di specie diversa.

3° Spesso i darwinisti introducono ipotesi sussidiarie per facilitare la spiegazione del processo evolutivo. Per esempio, una ipotesi sussidiaria molto frequente è quella di supporre che un carattere, il quale inizialmente darebbe scarsa presa all'evoluzione (poiché fornisce al vivente che lo possiede uno scarso vantaggio nella lotta per la vita), sia genericamente associato ad un altro carattere con forte vantaggio selettivo e venga perciò portato a rimorchio da questo ultimo. Tali ipotesi si riducono, in ultima analisi, ad ammettere che nell'universo considerato esistano leggi preferenziali per

viventi. Dal fatto che esistano leggi preferenziali tali da determinare l'esistenza di un vivente (il mio corpo) non segue che tali leggi abbiano intensità tali da determinare l'esistenza contemporanea di più viventi.

2° Ammettere che il nostro universo sia un universo casuale ma con leggi altamente preferenziali, significa aver già rinunciato all'ipotesi darwinistica. La teoria darwinista infatti non è solamente una ipotesi casuale: è essenzialmente una ipotesi che vuole spiegare l'esistenza dei viventi col caso, ma *senza speciali fortune*.

cui nel passaggio dalla struttura n — 1^{esima} alla struttura n^{esima} vi sia una probabilità maggiore di $1/n$.

Riguardo a tali passaggi fortunati, favoriti da leggi preferenziali, si deve notare quanto segue:

a) tali passaggi fortunati sono possibili ma improbabili, perché molto più probabili sono le leggi preferenziali di trasformazione verso strutture meno regolari della precedente (infatti le strutture meno regolari sono molto più numerose e perciò più probabili sono le leggi preferenziali in loro favore);

b) in una lunga successione di passaggi inevitabilmente vi saranno passaggi fortunati e passaggi sfortunati, ma, con tutta probabilità, nel complesso, non modificheranno la probabilità della intera successione;

c) se poi si vuole ammettere che l'intera successione sia fortunata, cioè sia complessivamente favorita da leggi preferenziali, allora bisogna osservare che ciò è possibile solamente in una fortissima minoranza di universi, mentre nella grande maggioranza di universi ciò è impossibile, come si è dimostrato sopra.

4° La supposizione che in un universo casuale qualsiasi si formi « un primo vivente, sia pure di struttura semplicissima » è una supposizione molto speciosa. A prima vista può sembrare una supposizione del tutto modica e niente affatto esagerata; invece è talmente esagerata da essere contraddittoria. La contraddizione non risulta dal fatto di supporre che in un universo conforme all'ipotesi darwinista si possa formare una struttura semplicissima: ciò è possibile. Ma la contraddizione risulta dal supporre che questa struttura semplicissima possa essere un « vivente », cioè possa avere in sé leggi tali che ne determinino regolarmente la permanenza, la riproduzione e la evoluzione. Supporre che in un ipotetico universo senza leggi preferenziali, si realizzi un vivente, significa supporre che in questo universo esistano leggi altissimamente preferenziali, il che è in contraddizione con l'ipotesi.

La qualifica di « vivente » data ad una struttura non implica solamente il presente di quella struttura, ma anche il suo futuro (oltre alla relativa probabilità di formazione); la parola « vivente » nasconde dietro di sé tutto un universo con leggi altissimamente preferenziali.

Quanto la supposizione in questione sia speciosa lo dimostra il fatto che chi la propone non pensa di dover precisare se quella struttura permarrà per un tempo più o meno lungo, o magari indefinitamente; quasi che ciò non portasse alcuna differenza; invece il permanere di quella struttura anche per un solo secondo in più o in meno, già porta una enorme differenza.

5° Supposta poi la possibilità in un dato universo di una certa struttura vivente, non ne segue affatto la possibilità di una evoluzione con formazione di molti altri svariati viventi, poiché non ne segue che in quell'universo esistano anche leggi preferenziali per la permanenza e la riproduzione di una qualche altra struttura oltre quella supposta possibile, anche se a quella vicina. Infatti, se per la nuova struttura non esistono leggi preferenziali, essa sarà equiprobabile con le strutture irregolari e allora il suo permanere per un tempo successivo avrà la stessa probabilità del suo formarsi direttamente da materia inorganizzata (cfr. libro citato, p. 226). I

fattori della microevoluzione non possono, perciò, essere diversi da quelli della macroevoluzione.

6° Secondo i darwinisti la selezione può, in linea teorica, spiegare qualsiasi fatto di evoluzione; perciò tutto il loro sforzo sta nel dimostrare l'alto potere discriminatorio della selezione naturale. Essi suppongono, in altri termini, che l'unico punto della dottrina darwinista al quale, se mai, potrebbe essere mossa una critica, sia l'efficienza della selezione naturale. A me pare che, come affermano molti studiosi, il potere discriminatorio della selezione naturale sia molto minore di quanto i darwinisti sostengono; tuttavia questa critica è, a mio parere, enormemente secondaria. La critica principale, essenziale, da farsi alla concezione darwinista è che in un ipotetico universo senza leggi preferenziali i viventi sono addirittura impossibili; quindi la selezione naturale in un universo conforme all'ipotesi darwinista non ha neanche senso, poiché che senso può avere la « lotta per la vita », « la sopravvivenza del più adatto » e « la morte del meno adatto » in un universo in cui non può esistere neanche un vivente ?

La concezione darwinista è del tutto insostenibile anche se la selezione naturale fosse perfetta. La selezione naturale non è capace di spiegare sufficientemente alcun fatto evolutivo poiché non spiega l'esistenza della leggi preferenziali; essa non è il fattore costruttivo dell'evoluzione poiché essa non pone nell'universo leggi preferenziali.

La selezione biologica naturale è un fatto reale e importante solo in un universo con leggi preferenziali tali per cui le strutture viventi siano realizzabili. Non è un paradosso polemico dire che: la selezione biologica ha senso solo nelle teorie dell'evoluzione per cause fondamentalmente interne.

Certo se si parla di selezione in *sensu lato*, intendendo il fatto che alcune strutture si trasformano mentre altre persistono per due o più unità di tempo, allora questa selezione si verifica in tutti gli universi possibili (quantunque la persistenza sia molto rara). Ma quando parliamo di selezione biologica intendiamo qualcosa di più; in termini probabilistici intendiamo essenzialmente questo: che, tra due strutture aventi in certe condizioni una probabilità di persistenza superiore alla equiprobabilità, una viene alterata e perde la superprobabilità di persistenza mentre l'altra non viene alterata e mantiene la superprobabilità di persistenza.

In altra forma: ogni singolo evento selettivo per sé non ha alcuna influenza sul futuro (e perciò non *incomincia* mai ad averla) poiché dopo un atto selettivo le varie strutture possono comportarsi in tutti i modi possibili. Se dopo un atto selettivo le strutture hanno una superprobabilità di persistenza ciò è da attribuirsi ad altri fattori.

Altre forme di dimostrazione.

Un altro modo, particolarmente semplice, di dimostrare che nella grande maggioranza degli universi casuali la realizzazione di un vivente non è solamente improbabile, ma addirittura impossibile, è il seguente.

Se le leggi di un certo universo sono tali che in esso un vivente possa formarsi con relativa frequenza e possa con notevole costanza permanere e generare, allora la frequenza di esistenza della struttura regolare di quel vivente supererà rapidamente la frequenza di esistenza che la medesima struttura dovrebbe avere nell'ipotesi di equiprobabilità, anzi giungerà a superare facilmente la stessa frequenza di esistenza che *tutto il gruppo* delle strutture regolari può avere nella grande maggioranza degli universi possibili.

Quindi un vivente non può esistere nella grande maggioranza degli universi possibili.

Facciamo un esempio. Si può dimostrare ⁽⁸⁾ che tra tutte le strutture possibili aventi la mole di 70 kg non più di una su $10^{308.759}$ ha una regolarità morfologica del grado di un vivente; cioè il gruppo delle strutture morfologicamente regolari aventi la mole di 70 kg ha una probabilità non maggiore di 1 su $10^{308.759}$.

Ne segue che certamente nella grande maggioranza degli universi possibili il gruppo di quelle strutture morfologicamente regolari avrà una probabilità di realizzazione non maggiore di $1/10^{308.750}$, che è almeno un miliardo di volte superiore a quella di equiprobabilità.

Ma se in un universo, costituito di 10^{80} particelle elementari, nel periodo di un miliardo di miliardi di anni esistesse un solo vivente (o una catena di viventi discendenti) per mille anni e se quel vivente avesse la mole di 70 kg, allora la frequenza di esistenza della struttura di quel vivente sarebbe $t/(t \cdot 10^{15} \cdot 10^{52})$.

Infatti, se supponiamo che ogni struttura duri per un certo intervallo o unità di tempo, possiamo indicare con t il numero di queste unità contenute in mille anni. Allora t esprime il numero di unità di tempo durante le quali permane la struttura regolare di quel vivente o, se si vuole, il numero di strutture regolari che si realizzano in quell'universo; $t \cdot 10^{15}$ esprime il numero di unità di tempo contenute in un miliardo di miliardi di anni; 10^{52} esprime il numero massimo di strutture, circoscritte e aventi quella mole, realizzabili contemporaneamente in quell'universo ⁽⁹⁾; complessivamente il denominatore della frazione sopra scritta esprime il numero di tutte le strutture che possono realizzarsi in quell'universo durante 10^{18} anni.

Ora $t/(t \cdot 10^{15} \cdot 10^{52})$ è uguale a $1/10^{67}$ ed è enormemente maggiore di $1/10^{308.750}$, che esprime la frequenza massima che l'intero gruppo delle strutture morfologicamente regolari di quella mole può avere nella grande maggioranza degli universi casuali.

Quindi nella grande maggioranza degli universi casuali il vivente sopra indicato non può realizzarsi.

La dimostrazione ora data è valida indipendentemente dalla via di formazione di quel vivente, cioè sia se esso si forma per graduale evoluzione, sia se si forma immediatamente da materia inorganizzata.

(8) Cfr. libro citato, p. 222.

(9) Cfr. libro citato, p. 229.

Una ultima osservazione di qualche interesse. Se in un certo universo esistono leggi preferenziali per cui un vivente può realizzarsi formandosi per graduale evoluzione, allora anche la formazione di questo vivente immediatamente da sostanze non organizzate, sebbene improbabilissima, è più probabile di quanto dovrebbe essere in un regime di equiprobabilità. Infatti per l'alta capacità che hanno i viventi di autoregolarsi e di riparare le alterazioni, anche se inizialmente si formassero strutture non perfettamente regolari, ma vicine alla struttura regolare, queste poi, per le leggi naturali, si « aggiusterebbero » producendo la struttura regolare.

COMMEMORAZIONI

Commemorazione del Socio Alberto Chiarugi

tenuta (*) dal Socio SERGIO TONZIG

Parlarvi di Alberto Chiarugi, rievocarne la figura, illustrarvene l'opera, è certo un molto onorifico compito; ma è anche un compito oltremodo difficile e, credetelo, molto doloroso. La personalità di Chiarugi era grande e complessa; la sua opera è stata vasta e acutamente originale; e, se lo sbigottimento che provammo alla notizia della sua morte è andato, a distanza di oltre quindici mesi, attenuandosi, sempre più cresce in noi un senso di accorata nostalgia e di cocente rimpianto. Poco più di un anno è passato; ma già, sedate le contrastanti passioni, rasserenatisi i giudizi, la figura di Alberto Chiarugi va acquistando contorni sempre più precisi e, al rievocarla, sempre più cresce in noi l'ammirazione e l'affetto. Non sembri strano se ho accennato a passioni ed a giudizi contraddittori. Così poderosa e tanto umana era la sua personalità, ch'egli poteva trovarsi al centro dei più opposti sentimenti: egli poteva essere adorato o detestato; mai e a nessuno indifferente. Qualunque siano stati i nostri rapporti con lui, anche se non sempre pacati, o facili, o lieti, io credo che ora, quando ripensiamo a lui, ci accorgiamo di averlo sempre amato ed ammirato; ci accorgiamo, in ogni modo, di amarlo e di ammirarlo ora. Noi, cultori della sua stessa disciplina, ci rendiamo ora esatto conto di quanto profonda sia l'orma ch'egli ha lasciato, e come il suo nome sia destinato a rimanere fra quelli che non si dimenticano.

Per oltre trent'anni io sono stato legato a Chiarugi da rapporti di amicizia, di non comune stima e di singolare affetto. Credo di non presumere dicendo che tali sentimenti erano, fra noi, reciproci anche se, com'è umano, non sempre privi di contrasti. E ciò rende anche più forte e più sentita la commozione che provo al parlarvi di lui.

Ve ne parlerò in modo relativamente breve. Anche se costituite un uditorio di altissimo livello, voi non siete tuttavia degli specialisti della sua stessa materia; ed io non credo sia opportuno fare qui una particolareggiata disanima della sua opera. Vorrei solo riuscire a dirvi perché il nome di Chiarugi merita la nostra ammirazione, perché la sua memoria merita il nostro affettuoso rimpianto.

(*) Nella seduta del 13 giugno 1961.

* * *

La vita di Chiarugi non presenta vicende clamorose, episodi drammatici e nemmeno avvenimenti degni di particolare interesse. Al contrario, essa fu di una semplicità addirittura lineare, senza scossa alcuna e sempre lieta nel seriso, almeno, che nessun ostacolo mise mai in forse – o semplicemente ritardò – le sue affermazioni; e che i riconoscimenti di cui cominciò a godere giovanissimo, non gli mancarono più sino alla fine.

Nato a Firenze nel novembre del 1901, da Giulio e da Elena Lenzi, Chiarugi trovò nella sua stessa casa l'ambiente ideale perché nascesse in lui, e poi sempre più si sviluppasse, l'amore alla scienza; amore che la stessa personalità del Padre, ed il suo continuo esempio, fecero sì ch'egli concentrasse verso le scienze naturali. Era ancora studente di liceo quando, frequentando l'Istituto Anatomico e sotto la direzione paterna, egli cominciò ad usare il microscopio e ad addestrarsi nelle tecniche e nelle osservazioni istologiche. Durante le villeggiature estive, inoltre, il Padre stesso l'accompagnava in montagna: l'effetto di quelle gite fu in certo modo determinante per gli interessi naturalistici del giovanetto il quale cominciò, sin d'allora, a farsi un erbario di piante alpine. Avvenne così che, quando giunse all'Università, Chiarugi già possedeva un non comune bagaglio di conoscenze. Direi di più: egli già era perfettamente orientato, già aveva scoperto i suoi interessi e fatto già le sue scelte. Il seme che i suoi successivi Maestri, Enrico Carano e Giovanni Negri, avrebbero poi gettato nel suo spirito, cadde nei solchi che la scuola paterna – o la consuetudine col Padre – già vi avevano tracciato: già al suo primo presentarsi all'Università, egli era completamente preparato ad accoglierlo – quel seme – ed a farlo vigorosamente germogliare. Lo studio dell'anatomia microscopica delle piante e lo studio della vegetazione (beninteso in certi loro aspetti ben determinati) furono infatti i due grandi filoni ch'egli coltivò sino alla morte con entusiasmo sempre rinnovato e con sempre più acuta personalità, ricavandone quelle stupende sintesi di pensiero che, mentre costituivano il suo più intimo godimento, rappresentano la più genuina espressione della sua figura scientifica. Voglio dire che, se si occupò prevalentemente di morfologia e di studi della vegetazione, egli non riguardava questi capitoli della Botanica come fine a sé stessi ma piuttosto come strumenti efficaci per pervenire alla Sistematica che, considerata come interpretazione della dinamica dello sviluppo evolutivo dei viventi, rappresentava per lui l'estrema vetta della ricerca biologica.

Toccò ad Enrico Carano (che, regolarmente tornato nell'autunno del 1921, solo il 15 febbraio 1923 poté essere nominato – per singolari traversie accademiche – professore incaricato all'Università di Firenze), toccò dico a Carano di accogliere Chiarugi, appunto nel febbraio del '23, all'Istituto Botanico come allievo interno. Sotto la guida di Carano, Chiarugi si laureò nel 1924; e, di Carano, Chiarugi fu poi assistente per il breve tempo che il nostro indimenticabile Collega rimase a Firenze, sino al suo trasferimento

all'Università di Roma che avvenne nell'ottobre del 1925. Fu dunque brevissimo il periodo durante il quale Chiarugi convivse - se così posso dire - assieme a Carano. Ma, come ho appena accennato, l'insegnamento di Carano cadde su un terreno già fertile. Carano era, fondamentalmente, un anatomico ed un embriologo; e nella *forma mentis* di Chiarugi - che già per suo conto aveva cercato di trasferire in campo botanico la scienza che aveva reso illustre il Padre suo - l'impronta lasciata dai primi insegnamenti di Carano fu così profonda da non cancellarsi mai più. Con Carano, del resto, Chiarugi mantenne sempre rapporti molto stretti e che si fecero sempre più affettuosi a mano a mano che lo stesso evolversi della carriera di Chiarugi li rendeva meno reverenziali.

All'Istituto Botanico, sin da studente, Chiarugi aveva intanto conosciuto la signa Emilia Messeri che, da compagna dei suoi studi, sarebbe poi stata l'eletta compagna della sua vita.

Il successore di Carano, alla cattedra fiorentina di Botanica, fu Giovanni Negri. Io ritengo per fermo che se un altro fosse stato il nuovo direttore dell'Istituto Botanico di Via Lamarmora, e se il suo orientamento scientifico fosse stato diverso da quello che fu proprio di Negri, Chiarugi avrebbe pienamente approfittato del suo insegnamento così da pienamente eccellere in quel qualsiasi altro campo in cui fosse stato incitato a cimentarsi. Lo dimostra il vivo interesse che, specialmente negli ultimi anni della sua vita, quando sempre più meditato e più profondo si faceva il suo pensiero scientifico e, lasciati i problemi particolari, egli pervenne ad una visione più generale e più organicamente unitaria della scienza delle piante, egli pose alla fisiologia vegetale. Ma fu certo gran ventura che il suo secondo Maestro sia stato Giovanni Negri. Avvenne così che il fascino per la morfologia vegetale e per lo studio della vegetazione, da cui egli era stato preso alla scuola del Padre - che fu certo il primo suo maestro e fors'anche il suo maestro più vero nel senso che gli infuse l'entusiasmo per la scienza e, in un modo o nell'altro, ne concretò la forma - poté poi essere assestato, rinvigorito e indirizzato successivamente dai nostri più eminenti specialisti prima della anatomia e poi della geografia vegetale.

Ma il periodo di tirocinio fu eccezionalmente breve. Le ali crebbero a Chiarugi con estrema rapidità ed egli fu ben presto in grado di volare da sé. Laureato nel 1924, nel 1927 conseguì la libera docenza, nel 1929 ottenne l'incarico della direzione dell'Istituto Botanico e del corso ufficiale di Botanica nell'Università di Siena e nel 1930, ternato all'unico concorso di Botanica cui partecipò, fu nominato titolare della cattedra di Botanica alla Università di Pisa.

Se, come dirò, il periodo fiorentino era stato quello di più intensa attività di ricerca, il periodo pisano fu caratterizzato dalla sua più fervida attività di maestro. A Pisa, Chiarugi rimase per vent'anni e, nel 1950, ritornò a Firenze dove occupò la cattedra che Negri, collocato fuori ruolo per limiti d'età, aveva frattanto lasciato libera. I vincoli di stretta amicizia e di affettuosa collaborazione tra Chiarugi e Negri non si erano mai allentati; ma

con il ritorno di Chiarugi a Firenze, si instaurò fra i due una ancora più intima cooperazione scientifica ed una mirabile unione di spiriti che durò fino a quando, a pochi mesi l'uno dall'altro, non li colse entrambi la morte.

* * *

Fare una sintesi efficace dell'opera scientifica di Chiarugi è cosa che la sua stessa varietà e la sua profondità di pensiero rendono assai ardua. Chiarugi lavorò in più campi, da quello embriologico e cariologico a quello geobotanico, da quello anatomico a quello fitopaleontologico, da quello sistematico a quello morfologico, a quello floristico; ma, sebbene si tratti di capitoli tanto diversi delle scienze botaniche, direi che ciò che meglio caratterizza il lavoro di Chiarugi è che egli utilizzò le più varie specializzazioni della Botanica come altrettanti metodi di studio al servizio di un unico problema. Chiarugi non si abbandonò mai a incursioni disordinate, o non sufficientemente giustificate, in argomenti disparati. Egli non indulse mai ad improvvisazioni o a ricerche fra loro slegate. Direi che i suoi scritti di contorno si riducono, essenzialmente, a quelli commemorativi, alle necrologie, a qualche notizia storica ed alle poche segnalazioni di fatti d'interesse naturalistico. Tutto il grosso della sua opera è costituito da ricerche fra di loro strettamente concatenate, la cui varietà segue un meditato filo logico, così da costituire un tutto unico, tutto insieme rivolto all'indagine di un unico grande problema che Chiarugi inseguì per tutta la vita, la cui fisionomia egli chiarì in maniera progressivamente più nitida e dal cui fascino egli fu sempre più preso: il significato della specie.

Chiarugi non fu un sistematico nel senso tradizionale e non lasciò, oserei, dire, scritto alcuno di sistematica tassonomica. Non era la nomenclatura, non era la speciografia che lo interessavano: la sua sistematica era l'interpretazione della specie, dei meccanismi della sua genesi, del perché dei suoi caratteri distintivi, dei suoi rapporti con altre specie. Erborizzatore ed erbarista, la sua era, tuttavia, una sistematica dinamica; ed è chiaro che, così concepita, una tal sistematica rappresenta il frutto finale della più grande varietà di discipline biologiche, realizzabile solo come conclusione di larga sintesi e di acuto pensiero. Pur conscio delle sue eccezionali capacità di riflessione e d'intuito, Chiarugi valutava appieno l'enorme difficoltà di una siffatta scienza alla cui costruzione non è possibile pervenire se non attraverso studi di tipo il più diverso, tanto descrittivi come sperimentali. D'altra parte, figlio di un morfologo e allievo di un altro morfologo e di un interprete di fatti naturali, Chiarugi non aveva la mentalità sperimentale. Egli se ne rendeva conto e più volte, nei momenti di maggiore intimità, quando lungamente passeggiavamo insieme per le vie di Roma o durante le poche escursioni compiute insieme, quando lungamente discutevamo delle nostre ricerche, e il suo discorso si faceva più infiammato, e la passione per i suoi studi gli faceva venire meno l'abituale controllo e trasparire il suo entusiasmo, ho

colto in lui, per questo motivo, un senso di cruccio. Egli ben capiva come, per una tal sistematica e per un tale lavoro di sintesi, l'intervento sperimentale, fisiologico o genetista che sia, è di decisiva importanza. E tuttavia, da leale servitore della scienza, egli impiegò sempre tutte le sue forze a far bene le ricerche che più gli erano congeniali, e mai tentò di fare quello per cui sentiva di non aver sufficiente inclinazione. Oserei anche dire che lo splendore ch'egli attribuiva all'ideale di cui era innamorato, gli incuteva una tale reverenza e talmente lo faceva umile, ch'egli quasi non ardiva rivelarne il nome. Sta di fatto che a questa sua sistematica di conclusiva sintesi egli non dedicò nessun lavoro vero e proprio, limitandosi a parlarne in quei suoi scritti che, pur rappresentando più di tutti gli altri lo specchio della sua più matura e più vera personalità, sono meno originali come contributi scientifici: intendo alludere a quelli compilati per farne oggetto di conferenze o di relazioni generali. La sintesi, egli la meditava continuamente e sempre la perseguì, facendosene guida delle sue ricerche; di essa talora parlava, con i suoi intimi, con gli allievi più amati, o quando si stabiliva, con l'interlocutore, un'atmosfera magica di corrispondenza spirituale. Allora egli irradiava entusiasmo, allora era impossibile resistere al suo fascino, allora si sentiva in lui il maestro e quasi l'apostolo della sua amatissima scienza. Sicuramente, egli vagheggiò, durante tutta la sua vita, la bellezza dell'edificio compiuto; egli ne prevedeva le forme e se ne estasiava assorto. Non disse mai di averlo costruito, ma lavorò seriamente e coscienziosamente ad accumulare quanti più mattoni e quanto miglior materiale poté perché la costruzione crescesse.

Forse ho divagato, e ve ne chiedo venia. Mi è tuttavia sembrato che non si possa presentare l'opera di Chiarugi senza prima cercare di farne comprendere lo spirito.

* * *

Il gruppo di lavori più significativo, e nel quale Chiarugi dà la massima prova delle eccezionali sue doti, è senza dubbio quello a carattere embriologico-cariologico, nella sua quasi totalità compiuto negli anni di assistentato. Il gruppo si apre con una Nota lineea presentata dal Corrispondente Carano nella seduta del 13 gennaio 1924, quando Chiarugi era ancora studente. Si tratta di una comunicazione preventiva alla voluminosa Memoria pubblicata in altra sede, l'anno successivo, e dedicata all'embriologia delle Cistacee. È questo il primo impegnativo lavoro di Chiarugi e già esso ha uno svolgimento magistrale. A parte il suo obiettivo e grande valore scientifico, questo lavoro presenta un particolare interesse perché in esso c'è già tutto Chiarugi che, dunque, i successivi anni di lavoro avrebbero affinato e irrobustito ma che, già in questo lavoro, è tutto presente con il suo metodo, i suoi interessi, i suoi ultimi obiettivi. C'è il Chiarugi metodico e prudente che nulla dice se non è ben documentato e se non ha esaminato la questione da ogni possibile punto di vista: ed il lavoro, di 94 pagine e con 164 disegni

da lui stesso eseguiti, è un modello di paziente diligenza e dà conto dei risultati dell'esplorazione di 5 generi e 13 specie di Cistacee che vengono minutamente studiate dal punto di vista embriologico, dal punto di vista embriogenetico, dal punto di vista citologico e dal punto di vista sistematico; lo studio di ogni singola specie ed il loro esame critico e comparativo riguarda la struttura dell'archesporio, l'andamento della meiosi, il numero dei cromosomi, lo sviluppo della generazione aploide, il gametofito femminile, l'apparato delle sinergidi, le antipodi, la fecondazione, lo sviluppo dell'albume e l'embriogenesi. E c'è il Chiarugi che pone citologia ed embriologia al servizio dei problemi di sistematica e di filogenesi: il lavoro si conclude con una revisione critica della classificazione dei generi delle Cistacee, nella cui famiglia, in base al numero dei cromosomi, l'autore riconosce due principali phylum (*Cistus* e *Halimium* da un lato, *Helianthemum*, *Fumana* e *Tuberaria* dall'altro) nell'ambito dei quali, ed in base ai caratteri dell'archesporio, discute il valore dei generi che vi sono compresi.

La Memoria, sulla quale mi sono un poco soffermato per il suo significativo valore biografico, è, a breve scadenza, seguita da altra analoga che studia, con pari maestria e con altrettanto larga raccolta di dati, la cariologia e l'embriologia delle Asteracee. Ma tra l'una e l'altra, e sempre sulle Asteracee, Chiarugi aveva pubblicato una ancora più voluminosa Memoria (126 pagine e 82 disegni) dedicata ai fenomeni di aposporia e apogamia in *Artemisia nitida*. È quasi impossibile riassumere in breve il contenuto di lavori tanto densi di dati e di concetti: solo perché ciò serve a raffigurare la personalità scientifica di Chiarugi dirò che, fatto lo studio cariologico di *Artemisia nitida*, rilevati i caratteri della sua micro- e della sua macrosporogenesi e dopo essersi soffermato a discutere e a chiarire i concetti di aposporia e di apogamia, l'autore si serve dei dati raccolti per interpretare l'origine della pianta studiata e ricostruirne la storia filogenetica; infine, esaminata l'area distributiva di *Artemisia nitida* in confronto di quella di altre Artemisie alpine, egli stabilisce l'epoca della sua origine e, sulla scorta delle sue anomalie cariologiche e della sua "incapacità a formare semi fertili", giunge a considerarla come una specie relitta ed in via di estinzione.

Vedono la luce, nel medesimo intensissimo periodo di lavoro, altre due fondamentali Memorie di Chiarugi. La prima, di 129 pagine e con numerosi disegni, con la quale l'autore coordina e chiarifica i risultati ottenuti dagli studi sull'embriologia delle Angiosperme nel precedente mezzo secolo; lavoro che dimostra la sua precoce maturità di pensiero, propone una razionale classificazione del gametofito femminile delle Angiosperme in base ai suoi vari tipi di costruzione e di sviluppo e rappresenta veramente un punto di riferimento ed una tappa nella storia dell'embriologia vegetale. La seconda, di 250 pagine e circa 250 figure, è stata svolta con la collaborazione di Eleonora Francini ed è dedicata ai fenomeni di apomissia in *Ochna serrulata*. La mole stessa del lavoro fa capire come non sia possibile riassumerlo ma solo indicarne per sommi capi il contenuto. 24 pagine sono dedicate alla esposizione dei reperti cariologici, altre 103 pagine costituiscono il rendiconto e

la discussione delle ricerche embriologiche, impeccabile ed esauriente modello di completo svisceramento d'un problema. Tutto il resto, vale a dire quasi 80 pagine, è dedicato all'analisi critica dei risultati ottenuti ed all'interpretazione del ciclo ontogenetico e dei processi embriologici della pianta studiata e, soprattutto, del determinismo delle anomalie di morfogenesi, dei fatti di restituzione e dello sviluppo apomittico, del disordine ormonico e della esuberanza di fattori vegetativi come indice di una costituzione genetica anormale, infine della genesi di *Ochna serrulata* alla luce delle ricerche cariolologiche ed embriologiche.

Dello stesso gruppo di lavori, e dello stesso torno di tempo, non è possibile sottacere, fra gli altri, quello dedicato allo studio dell'evoluzione delle cellule del tappeto e della formazione del periplasmodio in alcune Asteracee. Né trascurare di porre in rilievo la larga risonanza che queste ricerche, specialmente quelle sulla embriologia delle Cistacee e delle Asteracee, su *Artemisia nitida* e sull'apomissia in *Ochna serrulata*, hanno avuto nella letteratura straniera, soprattutto tedesca.

Intanto, ancora mentre era assistente, Chiarugi aveva avviato la serie di lavori di carilogia. Anche nelle ricerche di tipo embriologico, di cui già ho fatto cenno, la carilogia ha notevole parte; ma essa figura come protagonista in tutto un altro gruppo di lavori nei quali, peraltro, l'autore se ne vale non come fine a sé stessa ma come arma di singolare efficacia nella risoluzione di problemi di sistematica. Nel primo di questi lavori, dedicato allo studio della poliploidia nel genere *Knautia*, tale carattere è ancora implicito; ma esso si rivela già vigorosamente nel lavoro sui generi *Ionopsidium* e *Bivonaea* con speciale riguardo agli endemismi di Toscana e di Spagna, nel quale lo studio sistematico-morfologico dei due generi e le considerazioni sul significato fitogeografico dell'*Ionopsidium Savinianum*, in rapporto alle sue esigenze ecologiche e alle sue affinità sistematiche, traggono particolare significato dalle indagini cariolologiche.

Segue a breve distanza un altro studio, anche questo un vero modello nel suo genere, dedicato alla sistematica di *Vitaliana primulaeflora*. Lo scopo del lavoro è prettamente sistematico; ed in esso, infatti, l'autore studia la posizione sistematica del genere *Vitaliana*, i suoi rapporti con i generi affini, la sua variabilità, le varietà comprese nella specie esaminata ed altri consimili caratteri. Ma, per giungere alle sue conclusioni, Chiarugi prende le mosse dall'analisi carilogica, cui deve la possibilità di stabilire l'indipendenza del genere *Vitaliana* dai generi *Aretia* e *Primula*, nonché l'autonomia del genere *Aretia* dal genere *Androsace*. Ed è anche importante sottolineare come un altro pilastro, su cui Chiarugi fonda le sue conclusioni, sia costituito dallo studio della distribuzione fitogeografica e dei caratteri ecologici di *Vitaliana primulaeflora* e della storia del suo popolamento nelle alte montagne dell'Europa. Nasce così, anche in Italia, quella sistematica su base carilogica e fitogeografica, o quella carilogia a finalità sistematiche che Chiarugi amava indicare col nome di citogenetica e che, assieme all'aspetto embriologico, dà l'impronta più caratteristica alla scuola di Chiarugi e traduce in atto il suo

sforzo di sintesi dei diversi tipi di studi di biologia vegetale, allo scopo di comprendere la formazione naturale ed il significato della specie. Su questa via soprattutto, con la quale egli si era inserito nelle grandi correnti di pensiero che informavano già di sé le grandi scuole citologiche e genetiche di numerosi altri Paesi, Chiarugi s'è sforzato di indirizzare i suoi allievi; personalmente, egli concorre ad innalzare l'edificio ch'è stato il miraggio di tutta la sua attività, con una serie di contributi fra i quali ricordo gli studi carilogici e sistematici sui generi *Kerneria* e *Rhizobotrya*, quelli sulla cariologia della *Coffea arabica*, il contributo alla citogenetica del genere *Ionopsidium*, il saggio d'una revisione cito-sistematica della flora italiana e, soprattutto, il bellissimo studio sulla posizione sistematica e sul significato fitogeografico di *Primula palinuri*, attraverso l'indagine citogenetica. Sono lavori, questi ultimi, del periodo di piena maturità; come dello stesso periodo, e frutto di profonde meditazioni, sono le splendide relazioni che Chiarugi presentò a congressi o ad accademie e nelle quali egli si compiacque di dar forma concreta ai suoi tentativi di sintesi. Esse documentano l'altezza del suo pensiero e, in certo modo, rappresentano il suo testamento spirituale. Ricordo la relazione presentata al IX Congresso Internazionale di Genetica a Pallanza, dal titolo « La poliploidia somatica nelle piante »; ma, soprattutto, ricordo la lettura tenuta all'Accademia Italiana di Scienze Forestali e intitolata *Citogenetica forestale*, nonché quella letta in questa stessa sala nell'aprile del 1959, in occasione del colloquio internazionale dal tema « Evoluzione e Genetica » organizzato dalla nostra Accademia. In questo medesimo ambito, voglio anche ricordare l'ultima sua fatica: una monografia intitolata « Tavole cromosomiche delle *Pteridophyta* » nella quale egli riunisce tutti i numeri cromosomici accertati nelle Pteridofite. « Le nostre conoscenze carilogiche sulle felci. . . (egli dice) rappresentano un inestimabile aiuto per meglio comprendere il meccanismo della speciazione, i rapporti sistematici e le possibili derivazioni filogenetiche fra i vari gruppi tassonomici ». E, poco più avanti, egli aggiunge: « Le tavole cromosomiche delle *Pteridophyta* sono state da prima da me redatte per la scelta di utili esempi da servire al genetista per meglio intendere il laborioso e secolare travaglio filogenetico degli organismi, tanto a livello microevolutivo quanto a livello macroevolutivo, e vengono ora pubblicate per servire da guida sia al carilogogo per conoscere quello che è stato fatto e dove è pubblicato, sia al sistematico per valutare come il kariogramma delle singole specie possa essere utilizzato per la classificazione delle varietà, delle specie, dei generi e delle famiglie nell'ambito di un gruppo tassonomicamente molto controverso, sia al geobotanico per chiarire meglio la distribuzione geografica dei *taxa* in rapporto al loro grado di poliploidia e alla loro origine ».

Quasi presago della sua prossima fine, Chiarugi ha così espresso, non senza una certa solennità, quasi dettasse il suo testamento, quelli che erano stati gli interessi ch'egli aveva perseguito per tutta la sua vita. È da dire che, morendo, egli ha lasciato parzialmente incompiuto questo suo ultimo lavoro la cui pubblicazione, peraltro senza ritocco alcuno, è avvenuta postuma.

* * *

Il passaggio a Pisa, in seguito alla sua nomina a professore di ruolo, segna una svolta nell'attività di Chiarugi. La meta dei suoi studi è sempre la medesima ma, personalmente, egli la perseguirà, d'ora in avanti, con metodo differente.

Il periodo pisano coincide con quello più fiorente e più fecondo della sua opera di Maestro. Egli la impernia, fondamentalmente, ancora sull'embriologia e sulla citogenetica ed a questi studi – con vigoroso entusiasmo e con paziente perseveranza – egli avvia la piccola folla di allievi che affluiscono all'Istituto Botanico attratti dalla sua parola animatrice ed affascinati dalla sua personalità. L'Istituto Botanico pisano diventa, in breve tempo, un operoso centro di lavoro, fra i più vivi e fecondi, uno dei pochissimi che – in campo botanico – avesse, in Italia, una sua caratteristica fisionomia. Ai suoi allievi, Chiarugi trasmette la sua passione per gli studi di embriologia e di citogenetica, così fondando quella fervida scuola dalla quale dovranno uscire i due più caratteristici e più completamente suoi allievi ad entrambi i quali l'indirizzo citogenetico avuto dal loro Maestro dovrà permettere di salire ad una cattedra di Genetica: intendo dire i professori d'Amato e Battaglia. A molti altri, peraltro, Chiarugi profuse da Pisa il suo insegnamento; ed è estremamente significativo che, se anche hanno poi continuato la loro carriera in altre sedi o, addirittura, sono passati ad altri interessi, essi non hanno più perduto l'impronta scientifica data loro da Chiarugi né mai, pur col lungo volgere degli anni, essi hanno cessato di pensare a Chiarugi come ad un punto di riferimento e come al Maestro impareggiabile il cui influsso, a distanza di luogo e di tempo, ha sempre continuato a guidarli nella loro attività scientifica.

Si direbbe tuttavia che, fondando una scuola, Chiarugi abbia consegnato, e quasi completamente donato, ai suoi allievi il metodo d'indagine embriologico e citogenetico, per conto suo sviluppando – sempre al servizio della sua sistematica filogenetica – altri due metodi – quello geobotanico e quello fitopaleontologico – che meglio caratterizzeranno il resto della sua attività, pur progressivamente cedendo all'opera di rielaborazione, di riflessione e di pensiero di cui egli ha fatto oggetto gli scritti sintetici che ho in precedenza ricordato.

Dei gruppi di lavori geobotanici e fitopaleontologici dirò pochissimo, non perché essi non meritino rilievo ma perché, a mio parere, sono secondari rispetto a quelli di tipo embriologico e citogenetico.

Di floristica e di geobotanica, Chiarugi s'era occupato sino dagli albori della sua attività di botanico; e proprio di floristica sono le sue prime due pubblicazioni fatte mentre era ancora ai primi anni di Università: due note commoventi per la loro semplicità e per la diligenza e lo spirito d'osservazione che dimostrano nel poco più che adolescente Chiarugi. Ciascuna è lunga cinque righe e, con esse, il ragazzo dà notizia di « un'altra stazione dell'*Ari-*

stolochia altissima presso Firenze » e de « l'*Allium moschatum* nuovo inquilino della Flora Toscana ». Ancora di floristica sono due altre pubblicazioni fatte da studente, una delle quali particolarmente interessante dal punto di vista biografico perché rappresenta il primo frutto delle erborizzazioni fatte durante i soggiorni alpini in compagnia del Padre; ciò che, poco dopo, ha dato occasione ad altre tre note. Non mi soffermo su un altro manipolo di note floristiche, pubblicate da assistente, se non per osservare che nelle ultime di esse, sotto l'evidente influenza della scuola di Negri, l'aspetto geobotanico diviene prevalente su quello floristico. Sorvolo su due altri gruppetti di brevi note a carattere floristico e fitogeografico pubblicate nel periodo pisano o, rispettivamente, dopo il ritorno a Firenze, queste ultime in prevalenza rappresentate da sommarie illustrazioni di territori attraversati durante escursioni della Società Botanica oppure – ed allora si tratta di diligenti guide-itinerari – da escursioni fitogeografiche internazionali. Due di queste pubblicazioni, tuttavia, non mi sembra possibile sottacere: quella dedicata alla « vegetazione dell'Appennino nei suoi aspetti d'ambiente e di storia del popolamento montano », nella quale egli si afferma autorevolmente come fitogeografo dando un'ardita soluzione originale e dinamica della differenziazione dei piani altimetrici della vegetazione; e quella che, col titolo di *Adumbratio Florae Aethiopicae*, rappresenta l'introduzione allo studio della Flora dell'Africa Orientale da lui organizzato nel 1953.

Ma, soprattutto, il periodo pisano di Chiarugi è caratterizzato dalla pubblicazione della vigorosa serie di « ricerche sulla vegetazione dell'Etruria marittima » composta di undici voluminosi contributi dei quali, oltre alla premessa generale, Chiarugi ha personalmente curato i numeri 1, 3 e II, quest'ultimo nel 1955; mentre gli altri portano le firme di Francini, Tongiorgi, Marchetti e Corti, in parte allievi suoi, in parte allievi di Negri, ma alla cui formazione egli ha fortemente contribuito. Si tratta di un impegnativo e fondamentale insieme di ricerche il cui obiettivo è « di preparare i materiali per la migliore conoscenza fitogeografica della parte occidentale dell'Italia centrale più direttamente influenzata dal clima marino ». « Lo studio della vegetazione attuale non vi è limitato all'analisi statistica delle forme biologiche delle fitocenosi », ma è esteso « a tutti gli aspetti dell'analisi ecologica, compresi i problemi dell'edafismo ». « Particolare cura è rivolta... allo studio degli endemismi e delle specie relitte, che meglio c'informano sulle condizioni primitive della vegetazione o che testimoniano condizioni geografiche, climatiche e floristiche diverse dalle attuali. Notevolmente sviluppate sono le ricerche micro- e macropaleontologiche sul quaternario (torbe, argille palustri e lacustri, travertini, tufi, ecc.), destinate ad informarci sulle oscillazioni climatiche e sulle variazioni floristiche glaciali, interglaciali e postglaciali, che hanno portato all'assestamento attuale della vegetazione ». È questo l'aspetto di tali ricerche che vorrei mettere in particolare evidenza. Già dal primo contributo di tutta la serie, dedicato allo studio dei cicli forestali postglaciali nell'Appennino etrusco attraverso l'analisi polinica di torbe e depositi lacustri presso l'Alpe delle Tre Potenze e il M. Ron-

dinaio, Chiarugi pubblica una serie di diagrammi pollinici che gli permettono interessanti deduzioni sulla storia della vegetazione. Dopo quelli di Dalla Fior, pubblicati pochi anni prima, questi di Chiarugi sono tra i primissimi studi fatti in Italia sulla storia della vegetazione ricostruita attraverso l'analisi pollinica; con essi, egli si ricollega alla sua solida competenza di fitopaleontologo e, in modo particolare, di paleoxilologo, frutto della quale è un nutrito gruppo di studi sui legni fossili e su altri residui vegetali fossili (Codiacee, *Lepidodendrales*) provenienti da quelle che erano le colonie italiane in Africa. Quanto profonda fosse la cultura di Chiarugi nel campo anche della storia della vegetazione, lo dimostra la splendida relazione fatta alla nostra Accademia in occasione d'un convegno sulle epoche glaciali. Ma, soprattutto, mi pare sia da insistere sul fatto che embriologia, cariologia, fitogeografia e storia della vegetazione erano concepite da Chiarugi in maniera unitaria, come altrettante strade convergenti ad un'unica meta: la comprensione della filogenesi, dei rapporti tra specie e specie, in una parola l'interpretazione della sistematica.

La produzione scientifica di Chiarugi comprende anche alcuni lavori di anatomia e di teratologia eseguiti, per lo più, mentre egli era ancora studente o nel breve periodo di assistentato; ricordarne l'esistenza valeva la pena ma su di essi non mi posso fermare, come non mi posso fermare, del resto, sui numerosi scritti di varia indole (fra i quali un corso di «Lezioni di Fisiologia vegetale») che completano l'ampia opera del nostro compianto Collega.

*
* * *

Tutti quanti avete conosciuto Chiarugi, ed io potrei dispensarmi dal ricordarne gli altri dati biografici - oltre a quelli che già ho citato - se non fosse l'opportunità ch'essi rimangano, per dir così, archiviati negli Atti della nostra Accademia. L'attività di Chiarugi non rimase limitata alle mura del suo Istituto né confinata alle materie cui diede i propri originali contributi. Partecipò attivamente alla vita del Consiglio Nazionale delle Ricerche dei cui Comitati per la Biologia e la Medicina e per l'Agricoltura e la Zootecnia fu membro dal 1950 e, nel primo di essi, membro anche del consiglio direttivo. Ancora al Consiglio Nazionale delle Ricerche fu membro della Commissione per la protezione della Natura. Nel 1947 ottenne la costituzione di un Centro di Studio per la Citogenetica Vegetale del C.N.R., che diresse sino alla morte. Nel 1948 fondò il giornale *Caryologia* che portò sino al vol. XII, per il cui vol. XIII, successivamente uscito, lasciò, morendo, quasi tutto il materiale, e la cui notorietà ed importanza gli valse d'essere scelto come sede di pubblicazione degli Atti del IX Congresso Internazionale di Genetica. A Firenze, dov'era Presidente dell'Erbario Centrale Italiano (Ente coordinato al C.N.R.) promosse la «Fondazione Parlatore» e ridiede vita al giornale *Webbia* ch'egli diresse dal vol. VI al vol. XI. Dal 1930 era

Segretario generale della Società Botanica Italiana. Dal 1945 al 1950 fu Presidente della Società Toscana di Scienze Naturali. Era inoltre Presidente della Società Italiana di Antropologia e Etnologia nonché dell'Istituto Italiano di Preistoria e Protostoria. È stato Vice-Direttore della Scuola normale di Pisa dal 1944 al 1950 e Preside della Facoltà di Scienze dell'Università di Pisa nel 1945-46 e nel 1947-50. Nel 1956 organizzò e diresse la XI Escursione Fitogeografica Internazionale attraverso le Alpi Orientali. Fu Presidente d'onore nei Congressi Internazionali di Botanica a Stoccolma (1950) e a Parigi (1954). Ebbe il Premio del Ministero della Pubblica Istruzione per le Scienze Naturali giudicato dalla nostra Accademia nel 1927; la medaglia d'oro dell'Accademia dei XL nel 1928 e la medaglia d'oro ai benemeriti della Scuola nel 1959. Era Socio corrispondente delle Accademie delle Scienze di Torino, di Bologna e di Lucca; Socio ordinario della Colombaria di Firenze, dell'Accademia dei Georgofili, dell'Accademia Italiana di Scienze Forestali, dell'Istituto di Studi Etruschi e dell'Istituto Italiano di Paleontologia Umana. Nel febbraio del 1947 fu eletto Socio Corrispondente della nostra Accademia e nell'ottobre dello stesso anno, a soli quarantasei anni di età, fu fatto Socio Nazionale. Purtroppo, alla rapidità ed alla precocità di tutta la sua carriera, doveva far riscontro l'imatura sua morte che avvenne il 25 febbraio 1960, a poco più di 58 anni di età, quando ancora era nel pieno delle iniziative, delle idee e dei progetti.

* * *

Mi sono dilungato più di quanto intendessi e, tuttavia, vorrei chiedervi il consenso di aggiungere ancora qualche parola su Chiarugi uomo. La sommaria analisi della sua attività potrebbe bastare per una relazione di concorso e, in ogni modo, ha il carattere di un rendiconto troppo freddamente burocratico. Da sola, non basterebbe a rendere la figura di Chiarugi ed a giustificare il rimpianto per la sua scomparsa.

Come scienziato e come maestro, Chiarugi fu certo una fra le più notevoli figure del nostro tempo. La sua opera scientifica è tutta frutto di pensiero e, con l'eccezione degli inevitabili scritti che chiamerei di circostanza, sta tutta insieme e forma un unico edificio. Chiarugi ha sempre sdegnato, si direbbe, gli spunti suggeriti dal caso o comunque estranei al suo piano principale di ricerca; i suoi lavori sono tutti profondamente meditati e, se anche di tanto varia indole, sono tutti addentellati fra di loro come gli ingranaggi di un'unica macchina. Ciò dà alla sua produzione un non comune carattere di consapevolezza e di serietà e spiega l'importanza dei suoi risultati. Dotato di una intelligenza acutissima e di una eccezionale capacità di afferrare i collegamenti tra fatti apparentemente diversi, Chiarugi aveva una profondissima cultura ed una infinita capacità di paziente riflessione. Si chiamava Chiarugi ed aveva una mentalità essenzialmente chiarificatrice. Innamoratosi d'un problema scientifico a carattere così generale com'è quello che ho più volte ricordato, direi che, per tutta la sua vita, Chiarugi ha sempre

cercato di chiarirne gli aspetti che gli apparivano fondamentali, con intelligenza, con metodo e con riflessione; così da accumulare dei risultati di sicuro significato e così che la sua vita di studio fosse di concreta utilità al chiarimento del problema prediletto ed al progresso della scienza. Questo egli ha fatto con perseveranza, con onestà e con scrupolo, e per questo noi l'ammiriamo.

Aveva doti innate di grande maestro. Traspariva da lui una tale serietà, quando parlava di scienza, e poneva nel suo dire una tale convinzione, un così vibrante entusiasmo ed una siffatta forza di persuasione che era quasi impossibile non rimanerne incantati. Privo di qualsiasi enfasi, sfornito di doti oratorie deteriori, egli soggiogava immancabilmente il suo interlocutore con la sola forza del suo entusiasmo e, per elementare che fosse il problema che presentava, era difficile non rimanerne presi e convinti non solo della sua importanza, ma che valesse anche la pena di gettarsi nel suo studio. Sapeva far intravedere, al di là di ogni singolo problema, una meta finale di luminosa bellezza. Era un animatore di entusiasmi, ed io penso che il potente fascino che da lui sprigionava fosse dovuto all'evidenza della sincerità del suo sconfinato – peraltro tanto serio – amore per la scienza. Ecco perché gli riusciva così facile attirare tanti giovani ed infondere loro, in maniera incancellabile, la passione da cui egli era intimamente pervaso. Personalmente, io ricordo le tante ore di cammino fatte con lui, dai Lincei alla Stazione di Termini, e poi a Piazza Venezia, e poi ancora alla Stazione, su e giù per Roma, d'inverno come d'estate, sempre parlando della nostra Botanica, dei nostri lavori, dei nostri progetti, entrambi riscaldati dai nostri entusiasmi scientifici, io tutto preso dal suo fervore.

* * *

Tanto amore e tanta dedizione alla sua scienza lo rendevano assolutamente sicuro di sé, lui che, per natura, era un timido ed un emotivo. Amantissimo della sua terra, io penso ch'egli considerasse la Toscana come la principale regione del mondo, e la valle dell'Arno (lo scrisse in un suo lavoro scientifico) come il faro luminoso del mondo civile. Io ricordo tanti viaggi fatti insieme da Firenze a Roma o da Roma a Firenze, e l'orgoglio incontenibile col quale, durante il percorso toscano, egli mi illustrava quanto si poteva vedere dal treno dandomi un'infinità di notizie geologiche, fitogeografiche e storiche. E forse un poco – ma non del tutto – in maniera paradossale, io penso che tutta la Toscana si riassume, per lui, nella città di Firenze; questa nell'Università e l'Università nel suo Istituto. E ancora un poco – ma non del tutto – in maniera paradossale, io penso che, per lui, la Botanica consistesse tutta, essenzialmente, nei capitoli ch'egli studiava; e la Botanica italiana nella sua scuola. Ciò non poteva non cagionar contrasti, talora non lievi, con colleghi botanici e non botanici; ed io stesso ne ebbi alcuni con lui, l'ultimo particolarmente grave. In seguito ad esso, la nostra antica amicizia parve finita; ed io confesso, non senza una qualche vergogna, che gli negai

il saluto e che incontrandolo, ovunque ciò avvenisse, ostentavo di voltargli le spalle. È stato un lungo periodo durante il quale io ho profondamente sofferto sia per i motivi che avevano determinato la nostra rottura sia anche perché, sebbene non volessi in alcun modo ammetterlo – con me stesso meno che con qualsiasi altro – io ero disperato di non aver più la sua amicizia. Ciò nondimeno io non avrei mai fatto nulla per riallacciare qualche rapporto e mi sforzavo anzi, in ogni maniera, di rendere definitiva la rottura. Io desidero esprimere qui la mia affettuosa gratitudine a quello fra voi, qui presente, alla cui discreta e garbata iniziativa io debbo se l'amicizia fra Chiarugi e me poté, in seguito, nuovamente rinsaldarsi. Penso, con costernata confusione, che, senza il suo amichevole intervento, non ci saremmo più riavvicinati. Ma, proprio in questa sala e proprio in un giorno di votazioni per la nomina di nuovi soci, egli ci condusse l'uno all'altro e fece sì che ci demmo la mano.

La pace fu, così, fatta; ma, per allora, fu una pace formale. Formalmente appunto, i nostri rapporti ridivennero corretti; ma rimasero freddi. Troppo profondo era stato il dissidio perché rancore e sospetto potessero cadere ad un tratto; tanto più che in quello stesso giorno, e poi in altre occasioni, noi ebbero altri scontri, non fondamentali peraltro significativi. Ciò nonostante, le nostre relazioni si mantennero cortesi; ma io devo ammettere che continuavo ad evitarlo. Prima avevamo la consuetudine di consumare insieme i nostri pasti, quando eravamo qui a Roma; ora io abbandonai tutte le abituali trattorie solo per non dovermi incontrare con lui. Un giorno, era giorno di seduta per la nostra Accademia, lo intravvidi al Ministero. Mi attardai, allora, in questo e in quell'ufficio per dargli il tempo di andarsene; e, finalmente uscito io pure e dovendo far colazione, feci un'accurata scelta della trattoria dove potevo ritenermi sicuro che non l'avrei incontrato. Accadde invece che, inopinatamente, varcatane la soglia, me lo trovai seduto proprio vicino alla porta. Rimasi interdetto e mi avvidi che interdetto rimase anche lui. E tuttavia, facendo – se così mi è lecito dire – di necessità virtù, mi avvicinai al suo tavolo. Egli fece l'atto di offrirmi una sedia ed io presi posto accanto a lui. Eravamo entrambi molto imbarazzati e ci guardavamo di sottocchi mentre, pian piano e di mala voglia, quasi che il boccone fosse destinato ad andarci di traverso, a cagione che eravamo vicini, avevamo cominciato a mangiare. Le poche frasi convenzionali furono presto finite ed ora ce ne stavamo in silenzio come più nulla avessimo da dirci. Ma eravamo vicini; e l'inaspettata vicinanza riapriva una piaga e, progressivamente sgelandoci, ci faceva sempre più sentire – credo di poter dire ad entrambi – quanto desideravamo l'amicizia l'uno dall'altro. Io sapevo ch'egli era ammalato e che il male andava aggravandosi; e provavo per lui una grande e accorata compassione. Cominciai ad informarmi della sua salute, ma non più con le fredde parole di prima; e bastò questo perché il molto che avevamo da dirci ci venisse tutt'insieme alle labbra. Entrati in argomento, l'imbarazzo che prima mi teneva scomparve e io cominciai a rovesciargli addosso un torrente di accuse e di recriminazioni. Usavo le frasi più taglienti e le

parole più dure che mi riusciva di trovare: non più per offenderlo, come pure sarebbe stata la mia prima intenzione, ma per dirgli tutto nella maniera più chiara, anche se più brutale. Egli se ne stava quieto e silenzioso, sotto la valanga che l'investiva e, stranamente, mi pareva sollevato. Il volto gli si era fatto disteso e lievemente atteggiato ad un composto sorriso. Io ero furibondo con me stesso perché, quanto più vuotavo il sacco, tanto più sentivo sfuggirmi la rabbia che, fino allora, aveva sostenuto il mio sfogo. "Per quel che mi hai fatto", gli dissi a un certo momento, "vorrei saperti odiare; invece non posso a meno di amarti, come ti ho sempre profondamente amato". Egli era visibilmente commosso. Eravamo entrambi molto commossi. Non dimenticherò mai il suo sorriso ed i suoi occhi pieni di gioia e di infinita (e forse presaga) malinconia, mentre mi tendeva la mano. Gliela strinsi con effusione. Eravamo tornati amici. Eravamo colmi di felicità.

Io mi debbo scusare per avervi tenuti qui ad ascoltare un episodio personale che non presumo certo vi potesse interessare. L'ho tuttavia ricordato perché i miei dissapori con Chiarugi erano molto noti nel piccolo mondo della Botanica italiana; ed io volevo chiarire quali siano sempre stati i miei sentimenti per lui, ed affermare la sincera lealtà di questo mio omaggio alla sua memoria.

So molto bene che, in questo genere di discorsi, si suole porre in evidenza le sole doti più luminose di chi è commemorato; e che è considerato di dubbio gusto accennare anche alle sue ombre. In realtà non sono mai esistiti uomini fatti solo di luci senza alcuna ombra; cosicché la loro figura viene alterata e fatta quasi disumana, e ne viene reso irrealistico il ricordo, quando essi vengono presentati in maniera troppo unilaterale. Un bassorilievo od un quadro, d'altra parte, prendono vigore dal gioco delle luci e delle ombre e sono le ombre che mettono in risalto le luci. Chiarugi, in ogni modo, era un tal uomo che la sua figura nulla ha da temere dall'essere presentata con le sue tante luci e con le sue poche ombre; ed è così, com'era di fatto da vivo, che egli merita di essere ricordato. Anche perché le sue ombre fanno risaltare, e quasi testimoniano, una fra le più care e più patetiche qualità di Chiarugi: voglio dire la sua grande umanità. Scienziato e maestro, egli era anche uomo; e noi così lo vogliamo ricordare, perché così lo abbiamo ammirato e amato. Caro Chiarugi! nella commozione di quest'ora io sono felice di dargli pubblica testimonianza d'averlo sempre profondamente amato. Le sue debolezze, in fondo, erano la conseguenza stessa della sua completa dedizione alla scienza ed alla scuola. Essendosi egli donato alla Botanica, era naturale che, talvolta, egli pensasse alla Botanica un po' come a cosa sua. L'ha pagata, del resto, questa sua cosa; e l'ha pagata con la sua stessa vita. Giacché io sono convinto che, se, invece di quel suo spendersi senza misura, invece di quella sua sfrenata attività e di quel suo ansioso appassionarsi ai problemi del suo Istituto e della sua Scuola, egli avesse preso le cose con maggior pacatezza e con più distacco, specialmente quando il male lo colse la prima volta e proprio mentre egli era, per così dire, in servizio (giacché stava guidando

una escursione fitogeografica internazionale nella regione delle Dolomiti), oggi egli sarebbe ancora qui con noi.

Caro Chiarugi! Sempre assorto in meditazioni scientifiche, ricercatore sagace, interprete originale ed efficace dei problemi cui dedicò con esemplare serietà l'intera sua vita di studioso, maestro trascinatoro ed instancabilmente entusiasta, la sua memoria non potrà mai cancellarsi in quanti lo conobbero e che più gli furono vicini. La sua figura si pone fra quelle che maggiormente hanno onorato la Botanica italiana e questa stessa nostra Accademia.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio Anziano G. Levi chiede di essere dispensato dalla presidenza che viene pertanto assunta dal Collega Cassinis il quale, dopo il prof. Levi, è il primo, nell'ordine di anzianità, tra i Soci presenti.

Il Socio Anziano Cassinis, prima di dare la parola al prof. Tonzig che commemorerà il compianto Socio Alberto Chiarugi, rivolge un pensiero di reverente omaggio alla memoria dell'illustre Scienziato, del quale tutti i Soci altamente apprezzavano le grandi doti di Botanico e di Uomo di profonda cultura.

Porge quindi il saluto dell'Accademia alla vedova signora Emilia Messeri, ai figliuoli e agli altri familiari dello Scomparso che assistono alla seduta, nonché ai rappresentanti di Università e di corpi scientifici che sono intervenuti alla presente manifestazione e il cui elevato numero è una conferma dell'affettuosa e profonda stima della quale Alberto Chiarugi ovunque godeva.

Sono infatti presenti il prof. Luigi Campedelli, per il Rettore dell'Università di Firenze; il prof. Giovanni Sansone, Preside della Facoltà di Scienze matematiche, fisiche e naturali della predetta Università in rappresentanza della Facoltà stessa, unitamente al già citato prof. Campedelli, al prof. Guglielmo Righini e al prof. Guido Carobbi, quest'ultimo anche in rappresentanza della Facoltà di Farmacia dell'Ateneo fiorentino; il prof. Mario Benazzi, Preside della Facoltà di Scienze dell'Università di Pisa, che rappresenta anche il prof. Giuseppe Martinoli - successore del Chiarugi - e i proff. Francesco D'Amato, Emilio Battaglia ed Ezio Tongiorgi; il prof. Luigi Desole, per l'Istituto Botanico e la Facoltà di Farmacia dell'Università di Sassari; i proff. Alessandro De Filippo e Roberto Corti della Facoltà di Agraria di Firenze; i proff. Carlo Cappelletti, Raffaele Ciferri, Eleonora Francini Corti, Vittorio Marchesoni, Albina Messeri e Vincenzo Rivera, rispettivamente Direttori degli Istituti Botanici delle Università di Padova, Pavia, Bari, Camerino, Messina e Roma; inoltre il prof. Alessandro Marcello, Direttore della Rete fenologica italiana del C.N.R. e il prof. Giuliano Monteluci.

Numerosissimi i messaggi di adesione pervenuti.

Il Socio Tonzig pronuncia l'orazione commemorativa.

Il Socio Anziano Cassinis ringrazia il Collega Tonzig per le sue nobili ed elevate parole e rinnova ai familiari del compianto prof. Chiarugi i sentimenti del più vivo cordoglio dell'Accademia e suo personale per la perdita dell'illustre Scienziato.

CONGRESSI

Il Socio Anziano Cassinis comunica che l'Accademia è stata invitata al Convegno Internazionale, che avrà luogo a Ragusa di Dalmazia dal 6 all'11 ottobre p. v., nella ricorrenza del 250° anniversario della nascita di Ruggero

Boscovich e chiede se qualche Collega abbia in animo di prender parte al Convegno stesso.

Il Socio Zagar comunica di essere stato ufficialmente invitato alla suddetta manifestazione e dichiara che sarebbe onorato di assumere la rappresentanza dell'Accademia se i Colleghi crederanno di designarlo.

La Classe, ad unanimità, dà mandato in tal senso al Collega Zagar.

Il Socio D'Ancona informa la Classe che dal 29 settembre al 1° ottobre p. v. avrà luogo a Padova, per iniziativa di quella Università e dell'Accademia Patavina di Scienze Lettere ed Arti, un Simposio nella ricorrenza del 300° anniversario della nascita di Antonio Vallisneri, naturalista e medico insigne, nato il 3 maggio 1661, allievo della Scuola del Malpighi a Bologna e Professore di Medicina pratica e teorica all'Università di Padova.

Dopo aver brevemente ricordato la figura e l'opera del grande Scienziato, che condusse importanti ricerche con acuto spirito di osservazione e con metodi moderni specialmente sulla generazione degli insetti, sui fossili, sui parassiti, sull'origine delle fontane, il Socio D'Ancona conclude proponendo che l'Accademia dia la sua adesione all'importante manifestazione.

Il Socio Anziano Cassinis rivolge viva preghiera al Collega D'Ancona di assumere egli stesso la rappresentanza dei Lincei.

Il Socio D'Ancona ringrazia e propone che i Colleghi Aloisi e Bianchi, i quali anch'essi fanno parte del Comitato promotore, si associno a lui.

Il Socio Anziano Cassinis è senz'altro d'accordo e la Classe delibera di incaricare i Colleghi D'Ancona, Aloisi e Bianchi di costituire una delegazione in rappresentanza dell'Accademia.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Socio Anziano Cassinis annuncia che il Premio Internazionale delle Comunicazioni «Cristoforo Colombo», che viene conferito nell'ottobre di ogni anno in Genova, in occasione del Convegno Internazionale delle Comunicazioni, è riservato per il corrente anno alle comunicazioni terrestri su rotaia. L'Accademia è stata invitata a far pervenire alla Presidenza del Consiglio Nazionale delle Ricerche, entro il 31 agosto 1961, la segnalazione di quella persona o Ente che sia ritenuto meritevole del Premio in oggetto, in considerazione del lavoro scientifico e tecnico svolto nell'ultimo quadriennio. Per tale ragione, il Socio Anziano Cassinis prega i Colleghi di voler inoltrare al più presto le loro eventuali proposte al riguardo alla Presidenza dell'Accademia che adotterà le definitive decisioni da comunicare, nel termine prescritto, al C.N.R.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Anziano Cassinis presenta i libri pervenuti in omaggio, mettendo in particolare evidenza la bella opera del Collega Colonnetti dal titolo «Grandi primati italiani», il libro IV del 1° volume del «Trattato di storia della Medi-

cina », eseguito sotto la direzione del prof. A. Pazzini, e la pubblicazione contenente gli Atti della « Giornata » sulla profilassi delle malattie infettive prenatali e neonatali, promossa dall'Istituto di Medicina Sociale e svolta a Torino il 5 giugno 1960.

Il Socio Anziano Cassinis comunica quindi che è uscito il fascicolo III (marzo 1961) dei Rendiconti e che è prossima la stampa del IV.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci: Cambi, G. Levi, Finzi, D'Ancona, Tonzig, Perucca, Segre, Stefanelli, Picone e Co-tronei.

Viene data lettura dell'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

AMERIO L. - Sulle equazioni differenziali quasi periodiche negli spazi hilbertiani. Nota I (pres. dal Socio M. PICONE).

AMERIO L. - Sulle equazioni differenziali quasi periodiche negli spazi hilbertiani. Nota II (pres. dal Socio M. PICONE).

COCUCCI S. e MARRÈ E. - Vie di ossidazione della frazione extramitocondriale dei coenzimi piridinici. II. Sulla localizzazione intracellulare della monodeidroascorbico riduttasi nelle piante superiori (pres. dal Socio S. TONZIG).

MUZII E. e CARAVITA S. - Osservazioni sul ricambio interstiziale nel tessuto osseo a fibre intrecciate di Bufo bufo (L.) (pres. dal Corrisp. A. STEFANELLI).

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Miranda, a nome anche dei Colleghi Picone e Sansone, legge la relazione della Commissione incaricata dell'esame della Memoria di András Kósa dal titolo « Alcune estensioni di un metodo di M. Picone nel calcolo delle variazioni e loro applicazioni ».

La relazione, che conclude proponendo la pubblicazione del lavoro nelle Memorie accademiche, è messa ai voti dal Socio Anziano Cassinis e approvata all'unanimità.

Il Socio Picone, anche a nome dei Colleghi Evangelisti e Ferrari, legge la relazione della Commissione incaricata dell'esame della Memoria di E. Belardinelli, G. Marro e E. Sarti dal titolo « Modelli elettrici per reti di distribuzione di gas compressi ».

La relazione, che conclude proponendo la pubblicazione del lavoro nelle Memorie accademiche, è messa ai voti dal Socio Anziano Cassinis e approvata all'unanimità.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 13 giugno 1961

- BEDINI Silvio A. — *The Optical Workshop Equipment of Giuseppe Campani*. Estr. da « Journal of the History of Medicine and Applied Sciences », vol. XVI, 1961, n. 1.
- BERZELIUS Jacob. — *Lettres*. Publiées au nom de l'Académie Royale des Sciences de Suède par H. G. Söderbaum. Suppl. 3 édité par Arne Holmberg. 1: *Lettres à Berzelius dans la collection van Suchtelen à Leningrad*; 2: *Correspondance entre Berzelius et J. Esmark et entre Berzelius et H. M. Th. Esmark*. Uppsala, Almqvist et Wiksells, 1961. Pp. 78, in-8°.
- CALCUTTA MATHEMATICAL SOCIETY. — *Golden Jubilee Commemoration Volume (1958-1959)*. P. I: (*Jubilee Year - 1958*). Calcutta, Golden Jubilee Celebration Committee, s. d. Pp. 248, in-8°.
- CASSINIS Gino. — Vedi: *Onoranze al prof. ing. Gino Cassinis*.
- COLONNETTI Gustavo. — *Interpretacija plastičeskih deformacij kak javlenij nasledstvennosti*. Estr. dall'ed. russa di « Problems of Continuum Mechanics », vol. edito per il 70° anniversario del prof. N. I. Muskhelishvili, 1961.
- *The interpretation of plastic deformation as heredity phenomena*. Estr. da « Problems of Continuum Mechanics », vol. edito per il 70° anniversario del prof. N. I. Muskhelishvili, 1961.
- *Lifting the Abu Simbel temples*. The Italian proposal to lift these huge rock-hewn temples bodily above the rising waters of the Aswan High Dam has been supported by engineers advising the United Arab Republic. One of its authors describes the project. Estr. da « New Scientist », vol. X, 1961.
- COMPTON Robert R. — *Charnockitic rocks of Santa Lucia Range, California*. Extr. da « American Journal of Science », vol. CCLVIII, 1960, novembre.
- CONGRESS (THE THIRD) ON TESTING MATERIALS. — *Proceedings*. Compiled by the Editorial Committee of Japan Congress of Testing Materials with cooperation of the Science Council of Japan. Kyoto, The Japan Society for Testing Materials, 1960. Pp. VIII-163-appendix, con figg.
- Consorzio per la zona industriale apuana 1959-1960*. Carrara, F. Sanguinetti e F.lli, s. d. Pp. 62, in-4°, con tavv.
- CORTI Alfredo. — *Battista Grassi e la trasmissione della malaria*. Pavia, Tipografia del Libro, 1961. Pp. 75, in-8°, con tavv. (Studia Ghisleriana. Collana di Monografie dell'Associazione Alunni del Collegio Ghislieri in Pavia, n. 1).
- « *Giornata* » su la profilassi delle malattie infettive prenatali, nati e neonatali promossa dall'Istituto di Medicina Sociale con la collaborazione della Sezione Piemontese della Società Italiana di Medicina Sociale e delle Cliniche Ostetrico-Ginecologica e Pediatrica dell'Università di Torino. Città di Castello, Tip. Unione Arti Grafiche, 1961. Pp. 461, in-4°, con tavv.
- HAUSER R. et MERCIER J. — *Filage de l'oxyde d'uranium*. Bruxelles, Communauté Européenne de l'Énergie Atomique, 1961. Pp. 18, in-4°, con figg.
- HOLMBERG Arne. — Vedi: BERZELIUS Jacobi.
- HOWARD Arthur David. — *The correction graphs in photogeology*. Estr. da « Photogrammetric Engineering », 1960, giugno.
- LUYTEN Willem J. — Vedi: *Search (A) for faint blue stars*.
- MERCIER J. — Vedi: HAUSER R. et MERCIER J.
- Onoranze al prof. ing. Gino Cassinis. 12 novembre 1960*. Milano, Politecnico di Milano, 1961. Pp. 91, in-8°, con figg.
- PAZZINI Alfredo. — Vedi: *Trattato di storia della medicina*.
- POLITECNICO DI MILANO. — *Inaugurazione del Centro di Studi Nucleari Enrico Fermi -*

- Cesnef. Milano* - 29 ottobre 1960. Milano, Tip. Antonio Cordani, 1961. Pp. 42, in-8°, con figg.
- RIMA Alessandro. — *Contributo allo studio di Giove*. Estr. da « Bollettino della Società Astronomica Ticinese », a. I, 1961.
- *Intensità della pioggia di Chiasso e dintorni. Intensità massime annuali (dedotte dalle osservazioni fatte in Como)*. Estr. da « Rivista Tecnica della Svizzera Italiana », 1961, n. 1.
- Search (A) for blue stars. XXIII: Galactic clusters by Willem J. Luyten*. Minneapolis, The Observatory University of Minnesota, s. d. Pp. 5, in-4°, con tavv.
- SÖDERBAUM H. G. — Vedi: BERZELIUS Jacob.
- STOJAŁOWSKA Wanda. — *Kracionogi (Diplopoda) Polski*. Warszawa, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1961. Pp. 215, in-8°, con figg. (Polska Akademia Nauk. Instytut Zoologiczny).
- Stulecie dzieła Darwina*. Kraków, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1960. Pp. 102, in-8°, con figg. (Polska Akademia Nauk. Odział w Krakowie. Praca Zbiorowa).
- SYMPOSIUM EUROPÉEN SUR LES INHIBITEURS DE CORROSION. X MANIFESTATION DE LA FÉDÉRATION EUROPÉENNE DE LA CORROSION. FERRARA (ITALIE). 28 SEPTEMBRE-I OCTOBRE 1960. — *Comptes-Rendus*. Ferrara, Università degli Studi, 1961. Pp. XXIII-732, in-8°, con figg. e tavv.
- SYMPOSIUM INTERNATIONAL R. J. BOŠKOVIC 1958. — *Actes*. Beograd-Zagreb-Ljubljana, Grafičko Preduzeće « Akademija », 1959. Pp. 127, in-8°, con figg. (Académie Serbe des Sciences. Académie Yougoslave des Sciences et des Arts. Académie Slovène des Sciences et des Arts. Comité Interacadémique, C. I.).
- THALMANN Hans E. — *Foraminifera Fossils*. Estr. da « McGraw-Hill Encyclopedia of Science and Technology », 1960.
- Trattato di storia della medicina*. Vol I, libro IV. Sotto la direzione del prof. A. Pazzini. Roma, Istituto di Storia della Medicina dell'Università, 1961. Pp. 235, in-4° (In ciclostile).
- VAL' FIS A. Z. — *Celye točki v mnogomernyh šarah*. Tbilisi, Izdatel' stvo Akademii Nauk Gruzinskoy SSR, 1959. Pp. 460, in-8°.

A. SIGNORINI e G. COTRONEI.

INDICI DEL VOLUME

INDICE PER AUTORI

A

ADLER G., Principi di massimo relativi alle equazioni di tipo ellittico e parabolico nel caso di condizioni al contorno e di condizioni iniziali rispettivamente non-continue e non-limitate, 178.

— Maggiorazione del gradiente delle funzioni del calore, 357.

— Maggiorazione del gradiente delle soluzioni delle equazioni $\Delta u = f$ e $\Delta u - au'_i = g$, 673.

AGOSTINELLI C., Sulla stabilità dei moti magnetofluidodinamici stazionari. Nota II, 3.

AGOSTONI E., Attività elettrica del diaframma durante respirazione a pressione positiva, 100.

— Analisi della meccanica toraco-addominale durante respirazione a pressione positiva, 791.

AJELLO P., Ulteriori ricerche sulle inclusioni cellulari nel tumore di Sticker, 282.

ALBERGHINA F. e MARRÉ E., Aumento dell'attività glucosio-6-fosfato deidrogenasica in fettine di organi di riserva, 261.

ALLEGRA G., GANIS P., PORRI L. e CORRADINI P., Preparazione dei complessi $TiCl_3(C_5H_5)$ e del $[TiCl_2(C_5H_5)]_2O$ e loro struttura, 44.

— vedi CORRADINI P.

ANTONINI E., vedi ROSSI-FANELLI A.

ARANGIO-RUIZ V., Parole pronunciate nella seduta antimeridiana a Classi riunite del 11 febbraio 1961, 305.

ARNAUDI C. e CARINI S., Azione inibente di alcuni antibiotici sui microrganismi riducenti il colesterolo a coprosterolo, 776.

B

BAFFONI G. M., L'andamento dell'attività mitotica nel midollo spinale di un Anfibio urodelo durante lo sviluppo, 802.

BAFFONI G. M., L'andamento dell'attività mitotica nel mielencefalo durante lo sviluppo di un Anfibio urodelo, 954.

BAGGIO P. e MALARODA R., Il traforo del Monte Bianco; prime osservazioni geologiche sul tratto dalla progressiva 1300 alla progressiva 2500 (parte italiana), 908.

BALLARIO M. C., Sull'altezza dei brillamenti cromosferici in radiazione di idrogeno, 774.

BARASA A. e SHOCHATOVITZ A., Grandezza e densità delle cellule nervose della corteccia cerebrale di *Elephas indicus*, 246.

BARBUTI U., Sopra il prolungamento di misure in reticoli d'insiemi a struttura normale, 173.

BARGIGIA G., vedi CAMBI L.

BASSOTTI L., Costruzione di successioni approssimanti gli autovalori di una trasformazione lineare e compatta, 682.

— Approssimazione globale degli autovalori di una trasformazione lineare e compatta, 828.

BERTI T., D'ANGELI F., LANZANI C. e MENEGHELLI P., Ulteriori ricerche sull'attività antivirale di complessi metallici idrosolubili, 538.

BERTOLINI B., Osservazioni istochimiche sulla distribuzione della fosfatasi acida nella rigenerazione del midollo spinale caudale del Tritone, 943.

BIANCHI A., Commemorazione del Corrispondente Ciro Andreatta, 112.

BLANDINO G., Osservazioni critiche sul neodarwinismo, 960.

BOAGA G., Commemorazione del Socio Corradino Mineo, 576.

BONAVITA V. e GUARNERI R., Sugli isoenzimi della latticodeidrogenasi di tessuto nervoso. — I. Reazione con analoghi piridinici del difosfopiridin-nucleotide ed affinità per l'acido piruvico, 754.

BRAMBILLA I., vedi BRANDI G.

BRANDI G., Determinazione incruenta della pressione di CO_2 nel sangue venoso misto, 554.

BRANDI G., e BRAMBILLA I., Differenza arterovenosa in ossigeno, gettata cardiaca e gettata pulsatoria in funzione del consumo energetico, 559.

— vedi CAVAGNA G.

BRUZZESE T., CASNATI G., PIOZZI F. e VITA-FINZI P., Degradazioni ossidative delle catene alifatiche di sistemi ciclici, 55.

BRUZZONE G., Proprietà strutturali e magnetiche dei composti MX formati dall'Ho con i metalloidi del 5° e 6° gruppo, 208.

BUSULINI L., Osservazioni preliminari di un particolare effetto delle radiazioni nucleari sui processi elettrodici, 53.

C

CAGLIOTI L. e CAINELLI G., Idroborazione. — Olefine ed alcoli dagli enolderivati di chetoni saturi. Nota II, 224.

CAINELLI G., vedi CAGLIOTI L.

CALIGO D., vedi KRALL G.

CALOI P., Sulle onde interne del lago di Bracciano e sulle loro probabili cause, 630.

CAMBI L. e DUBINI PAGLIA E., Complessi Rh^{III} idrazinici: cloruri; cloruri acetati; acetati. Nota VI, 429.

— e BARGIGIA G., Sali Rh^{III} -idrazinici di acidi carbossilici. Nota VII, 636.

— e ELLI M., Sui solfogeramanati: argirotide sintetica. Nota I, 11.

CAPANNA E., Sulla istologia del tetto ottico di un Anfibio anuro (*Rana esculenta* L.), 292.

CAPOREALE G., vedi RODIGHIERO G.

CAPOZZA F., vedi PENTA F.

CAPPELLETTI C., Nuovi apparecchi per misura di precisione dell'accrescimento dei fusti dendrometro e dendrometrografo, 23.

— Ricerche sulla permeabilità delle cuticole alle radiazioni ultraviolette. — I. Piante di duna, 331.

CAPUTO A., vedi ROSSI-FANELLI A.

CARINI S., vedi ARNAUDI C.

CARRARO F., Osservazioni sulla geologia della regione compresa fra Pontebernardo e Sambuco (fianco sinistro della Valle Stura di Demonte, Alpi Marittime), 373.

CASNATI G., vedi BRUZZESE T.

CATALDI E., vedi STEFANELLI A.

CAVAGNA G., BRANDI G., SAIBENE F. e TORELLI G., Isteresi elastica del polmone 395.

CECCHERINI V., vedi STEFANELLI A.

CHIEFFI G. e LUPO C., Identificazione degli ormoni steroidei nei testicoli e negli organi di Bidder di *Bufo vulgaris*, 399.

CHIORBOLI P., vedi MIRONE P.

CILIBERTO C., Sul problema di Darboux, 460.

CIMINO A., MOLINARI E., CRAMAROSSA F. e GHERSINI G., Sulla relazione tra fotoducibilità e fotodesorbimento dell'ossigeno nell'ossido di zinco, 750.

CIMINO M., L'organizzazione dell'Osservatorio Astronomico di Roma per l'osservazione dell'eclisse totale di Sole del 15 febbraio 1961. Risultati generali delle osservazioni, 323.

CIPRIANI C., Hoeferite e Nasinite: due nuovi borati fra i prodotti di Larderello. Parte II, 235.

— e VANNUCCINI P., Hoeferite e Nasinite: due nuovi borati fra i prodotti di Larderello. Parte I, 74.

CLAUSER E., Proprietà di una particella di prova nel campo gravitazionale einsteiniano, 874.

COGNETTI G. e COGNETTI VARRIALE A. M., Ricerche carilogiche su *Macrosiphum rosae* L., *Myzodes persicae* Sulzer e *Brevicoryne brassicae* L. (Homoptera Aphididae), 782.

COGNETTI VARRIALE A. M., vedi COGNETTI G.

COLONNETTI G., Problemi di conservazione dell'equilibrio interno di una massa rocciosa eterogenea in corso di trasferimento, 618.

COLOSI G., Sul valore logico delle teorie darwiniane, 659.

CORRADINI P. e ALLEGRA G., Calcolo della diffrazione ai raggi X dovuta ad una struttura con impacchettamento disordinato di strati aventi struttura ordinata, 182.

— Studio conformazionale di una catena di polimero isotattico in soluzione e calcolo della sua lunghezza quadratica media imperturbata, 516.

— vedi ALLEGRA G.

COSSU A., Connessioni che conservano una struttura quasi complessa, 863.

CRAMAROSSA F., vedi CIMINO A.

CREPAX P., FADIGA E., MASSARINI A. e VOLTATA A., Analisi neurofisiologica degli effetti della imipramina, 795.

CUNIETTI M. e INGHILLERI G., Un metodo di compensazione di un blocco di stri-

sciate. — I. Principio generale e compensazione planimetrica, 368.

- CUNIETTI M. e INGHILLERI G., Un metodo di compensazione di un blocco di strisciate. — II. Compensazione altimetrica ed uso dei dati degli strumenti ausiliari, 512.
CUSIMANO T., Risultati di ulteriori esperimenti con nucleosidi purinici e pirimidinici sullo sviluppo delle uova di Ascidie, 921.

D

- D'AMELIO V. e SALVO A. M., Ulteriori osservazioni sulla ontogenesi della emoglobina dell'embrione di pollo, 786.
D'ANGELI F., vedi BERTI T.
D'ARCANGELO P., Separazione degli zuccheri dello sperma mediante elettroforesi su carta, 562.
DESIO A., Qualche osservazione comparativa fra le serie stratigrafiche dell'Hindu Kush afgano e del Tagikistan (Asia Centrale), 650.
— e LONGINELLI A., Sull'età dei graniti del Baltoro (Karakorum-Himalaya), 437.
DE VITO L., Sul calcolo approssimato degli autovalori delle trasformazioni compatte e delle relative molteplicità. Nota I, 351.
— Sul calcolo approssimato degli autovalori delle trasformazioni compatte e delle relative molteplicità. Nota II, 452.
— Sullo spettro della trasformazione integro differenziale di Volterra, 837.
DOLCHER T., vedi RODIGHIERO G.
DOLCINI B., vedi DOLCINI C.
DOLCINI C. e DOLCINI B., Impiego del blu di bromotimolo per la colorazione delle proteine separate mediante elettroforesi su carta, 271.
— — Impiego dell'etero-poli-acido fosfomolibdico giallo per la colorazione delle proteine separate mediante elettroforesi su carta, 392.
— — Superficie d'espansione su carta da filtro di aliquote di soluzioni proteiche in funzione della concentrazione, 550.
DUBINI PAGLIA E., vedi CAMBI L.
DURAND DELGA M., Le sillons des Flyschs du Crétacé supérieur en Méditerranée occidentale, 62.

E

- ELLI M., vedi CAMBI L.
— vedi FIORENTINI POTENZA M.

F

- FADIGA E., vedi CREPAX P.
FASELLA P., vedi TURANO C.
FERRARESE G., Sulla dinamica dei solidi tubolari: equazioni non linearizzate, 718.
FICHERA G., Sull'approssimazione uniforme delle funzioni olomorfe con funzioni razionali aventi i poli prefissati, 347.
— e PICONE M., Calcolo per difetto del più basso autovalore di un operatore ellittico del secondo ordine, 411.
FILOGAMO G. e MARCHISIO P. C., Sulla sede delle placche motrici della muscolatura della coda rigenerata dei Sauri, 933.
FIORENTINI POTENZA M., Sui solfogermanati: argirodite sintetica. — Ricerche röntgenografiche, 16.
— e ELLI M., Sui solfogermanati d'Argento. Nota II, 902.
FRACASSINI M., vedi HACK M.
FRODA A., Sur l'angle complexe, orienté, de deux vecteurs d'un espace unitaire, 845.

G

- GALLIANI I., vedi OLIVO O. M.
GANIS P., vedi ALLEGRA G.
GAUDIOSI M. R., vedi SACCHI C. F.
GHERSINI G., vedi CIMINO A.
GHIRARDELLI E., Alcuni risultati di esperimenti di asportazione e di trapianto nella regione genitale di embrioni di *Bufo bufo*, 284.
— vedi VANNINI E.
GIARTOSIO A., vedi TURANO C.
GORGONE I., Larve giganti uniche ottenute da due uova di Ascidie fuse allo stadio di 8-blastomeri, 250.
GRAIFF F., Carattere tensoriale dell'azione Einsteiniana, 884.
GRAZIANO M., vedi PIONTELLI R.
GUARNERI R., vedi BONAVITA V.

H

- HACK M. e FRACASSINI M., Studio della polarizzazione della corona: Risultati preliminari ottenuti durante l'eclisse del 15 febbraio 1961 dalla spedizione dell'Osservatorio Astronomico di Merate a Monte Conero (Ancona), 497.
HIEKE-MERLIN O., Ricerche chimico-petrografiche su alcune vulcaniti del Monte Vulture (Lucania), 767.

I

- IANDELLI A., Sulla suscettività magnetica di alcuni composti semimetallici del Samario e Gadolino, 201.
 IERADI L. A., vedi STEFANELLI A.
 IMPERATO S., vedi PONTIERI G.
 INGHILLERI G., vedi CUNIETTI M.

K

- KÓSA A., Un criterio sufficiente per il minimo assoluto nel caso di estremi variabili, 669.
 — Un criterio sufficiente per il minimo assoluto degli integrali doppi nel caso di contorno variabile, 833.
 KRALL G. e CALIGO D., Moltiplicatore critico λ_{cr} per volte autoportanti. Nota I 131.
 — — Moltiplicatore critico λ_{cr} per volte autoportanti. Nota II, 315.
 — — Moltiplicatore critico λ_{cr} per volte autoportanti. Nota III, 421.
 — — Moltiplicatore critico λ_{cr} per volte autoportanti. Nota IV, 608.

L

- LAMPARIELLO G., Considerazioni intorno alla costante universale elettromagnetica, 897.
 LANZANI C., vedi BERTI T.
 LA SPINA R., Sviluppo di frammenti dell'uovo vergine di *Ascidia malaca* ottenuti mediante centrifugazione, 926.
 LA VECCHIA A., vedi PIONTELLI R.
 LETTA G., Un'osservazione sul teorema di Severini-Egoroff, 690.
 LEVI F., Interpretazione teorica del principio di reversibilità di MacHenry, 734
 LONA F., Osservazioni sperimentali sulla ecologia e fisiologia dello sviluppo delle piante annuali dei deserti circummediterranei, 265.
 LONGINELLI A., vedi DESIO A.
 LUPO C., vedi CHIEFFI G.

M

- MALARODA R., vedi BAGGIO P.
 MARCHISIO P. C., vedi FILOGAMO G.
 MARGOTTA V., vedi MARINI M.
 MARINI M. e MARGOTTA V., Fenomeni riparativi e rigenerativi in segmenti di mi-

dollo spinale in condizioni di isolamento nell'adulto di un Anfibio urodelo, 948.

- MARRÉ E., vedi ALBERGHINA F.
 MASSARINI A., vedi CREPAX P.
 MENDIETTA L., I cromosomi di *Chalcides ocellatus* (Forsk), 90.
 MENEGHELLI P., vedi BERTI T.
 MENER K., Frammenti piani autoduali e relative sostituzioni, 713.
 MESSINEO L., Differenze immunologiche delle desossiribonucleoproteine delle cellule bianche normali e leucemiche umane, 103.
 MIRONE P. e CHIORBOLI P., Sull'effetto dell'intorno molecolare sulla frequenza carbonilica, 214.
 — — Spettri Raman e ultrarossi e assegnazione vibrazionale dell'anidride maleica, 526.
 MOLINARI E., vedi CIMINO A.
 MOLNÁR J., Alcune generalizzazioni del teorema di Segre-Mahler, 700.

O

- OLCESE G. L., Struttura e proprietà magnetiche dei composti MX del terbio con i metalloidi del 5° e 6° gruppo, 195.
 OLIVO O. M. e GALLIANI I., Effetto delle lesioni traumatiche sulla attività mitotica dei fibroblasti coltivati *in vitro*, 163.

P

- PACHOLCZYK A. G., Sulla instabilità magnetogravitazionale di un mezzo stratificato, 738.
 — Sul limite superiore della intensità del campo magnetico in una protogalassia, 889.
 PAGNI M., Un problema al contorno per una equazione lineare alle derivate parziali, 467.
 PASINETTI L. E., Sulla possibilità di impiego di microfotogrammi nello studio della corona solare, 507.
 PECORINI G., Su un deposito lacustre oligocenico nella Nurra di Alghero (Sadergna nord-occidentale), 67.
 PENTA F. e CAPOZZA F., Contributo allo studio geologico-tecnico del problema dell'attraversamento dello Stretto di Messina, 155.
 PERALDO BICELLI L., vedi PIONTELLI R.
 PETTINEO B., Sul teorema dell'alternativa per talune equazioni funzionali, 694.

PIATTELLI M., Risultati dell'osservazione radioelettrica dell'eclissi totale di Sole del 15 febbraio 1961, 362.

PICONE M., Sulla condizione di Weierstrass per un'estremante di un integrale, 815.

— e SIGNORINI A., Calcolo di alcuni integrali che intervengono in un criterio sufficiente di minimo assoluto, 603.

— vedi FICHERA G.

PIONTELLI R., PERALDO BICELLI L. e GRAZIANO M., Sovratensione di idrogeno su monocristalli di zinco, 149.

— e LA VECCHIA A., Sovratensione di idrogeno su monocristalli di antimonio, 644.

PIOZZI F., vedi BRUZZESE T.

PONTIERI G. e IMPERATO S., Sulla sensibilità dei componenti complementari alle radiazioni ionizzanti, 274.

PORRI L., vedi ALLEGRA G.

R

RANZOLI F., vedi VANNINI E.

RIGHINI G., vedi RUSSO D.

— vedi TAGLIAFERRI G.

RIGUTTI M. e RUSSO D., Lo spettro della corona solare nell'eclisse del 15 febbraio 1961, 366.

— — Lo spettro di una protuberanza quiescente osservata nell'eclisse solare del 15 febbraio 1961, 487.

RIZZA G. B., Deviazione caratteristica e proprietà globali sulle varietà quasi hermitiane, 472.

RIZZOLI C. e ZANNOTTI M., Studio statistico delle grandezze cellulari nel nucleo dell'ipoglossio nell'uomo di diversa età, 382.

RODIGHIERO G., CAPORALE G. e DOLCHER T., Osservazioni sull'attività citologica di alcune furocumarine e sul loro comportamento di fronte all'acido desossiribonucleinico, 84.

ROSSI A., Nuove esperienze sull'asportazione dello strato dell'ependima presuntivo in embrioni di Anfibi anuri, 565

— Nuove esperienze sulle regolazioni nervose nelle parabiosi fra embrioni di Anfibi anuri, 937.

ROSSI-FANELLI A., WYMAN J., ANTONINI E. e CAPUTO A., Ricerche sul meccanismo dell'equilibrio con l'ossigeno dell'emoglobina. Effetto della concentrazione di emoglobina sulle caratteristiche dell'equilibrio con l'ossigeno, 449.

RUSSO D. e RIGHINI G., Sulle condizioni fisiche del brillamento solare del 3 luglio 1957, 626.

— vedi RIGUTTI M.

S

SABAN G., Sulla curvatura geodetica totale, 854.

SACCHI C. F. e GAUDIOSI M. R., Sul significato ecologico dell'azoto conchigliare nella Elicide dunicola *Euparypha pisana* (Müll.). — II. Analisi di fenotipi differenti in una singola popolazione, 571.

SAIBENE F., vedi CAVAGNA G.

SALVETTI O., Su alcune semplificazioni formali nel calcolo delle intensità delle bande di vibro-rotazione, 761.

SALVO A. M., vedi D'AMELIO V.

SAVELLI R., I gemelli della Canapa, 32.

SEBASTIÃO E SILVA J., Sur le calcul symbolique à une ou plusieurs variables, pour une algèbre localement convexe, 167.

SHOCHATOVITZ A., vedi BARASA A.

SIGNORINI A., vedi PICONE M.

SINGER I., Sur un problème d'isomorphie de S. Banach, 343.

SOMMAVILLA E., Tettonica eruttiva nel gruppo del Buffaure a Sud di Fontanazzo Campestrin in Val di Fassa, 229.

SPERANZA F., Superficie anolonomie e corrispondenze dualistiche, 479.

STAGNI A., Ancora sulla genesi e sessualizzazione degli elementi germinali in esemplari rigeneranti di *Spirorbis pagansstecheri*, 928.

STEFANELLI A., CATALDI E. e IERADI L. A., Istochimica della fosfatasi acida durante lo sviluppo embrionale della retina di pollo, 664.

— ZACCHEI A. M. e CECCHERINI V., Organizzazioni isotipiche nelle riagggregazioni *in vitro* di abbozzi disgregati di retina di embrioni di polli, 818.

STEFANI R., La citologia della partenogenesi in due nuovi Embiotteri dell'Africa tropicale, 254.

SUPINO G., Sopra le onde di traslazione nei canali. — B) Il caso non lineare, 140.

T

TAGLIAFERRI G. e RIGHINI G., Sulla correlazione tra i brillamenti solari e gli atmosferici a 27 KHz, 622.

TALLINI G., Le ipersuperficie irriducibili d'ordine minimo che invadono uno spazio di Galois, 706.

TAMBURINI T. e THIESSEN G., On the existence of a new polarization-effect in stellar spectral-lines, 492.

THIESSEN G., vedi TAMBURINI T.

TONZIG S., Commemorazione del Corrispondente Aldo Pavari, 297.

— Commemorazione del Socio Alberto Chiarugi, 968.

TORELLI G., vedi CAVAGNA G.

TRICOMI F. G., Sulle funzioni che assumono tutti i valori intermedi, 419.

TURANO C., FASELLA P., VECCHINI P. e GIARTOSIO A., Sulla composizione chimica della glutamico-aspartico transaminasi del cuore di Porco. Digestione chimotriptica dell'enzima ed isolamento del peptide contenente il coenzima, 532.

V

VANNINI E. e GHIRARDELLI E., Sui fenomeni regolativi dell'abbozzo genitale in *Bufo bufo*, dopo asportazione del territorio presuntivo dell'organo di Bidder, 107.

— e RANZOLI F., Correlazione del numero di metameri toracici fra schizonte e schizozooide in *Salmacina dysteri*, 94.

VANNUCCINI P., vedi CIPRIANI C.

VECCHINI P., vedi TURANO C.

VENINI C., Spostamento del perielio nell'orbita descritta da una particella materiale elettrizzata nella prima approssimazione dell'ultima teoria unitaria einsteiniana, 728.

VITA-FINZI P., vedi BRUZZESE T.

VITAGLIANO TADINI G., Indagini sugli ibridi intraspecifici in *Asellus aquaticus*, 257.

VOLTA A., vedi CREPAX P.

W

WYMAN J., vedi ROSSI-FANELLI A.

Z

ZACCHEI A. M., vedi STEFANELLI A.

ZAIDMAN S., Solutions presque-périodiques dans le problème de Cauchy, pour l'équation non-homogène des ondes. Nota I, 677.

— Solutions presque-périodiques dans le problème de Cauchy pour l'équation non-homogène des ondes, Nota II, 823.

ZANNOTTI M., vedi RIZZOLI C.

ZIN G., Sui fondamenti dell'elettrodinamica. Nota III, 39.

ZOLI A. M., Sul teorema di unicità per le equazioni di Maxwell in un mezzo ferromagnetico, 892.

INDICE PER MATERIE

A

Analisi matematica. — Principi di massimo relativi alle equazioni di tipo ellittico e parabolico nel caso di condizioni al contorno e di condizioni iniziali rispettivamente non-continue e non-limitate, ADLER G., 178.

— Maggiorazione del gradiente delle funzioni del calore, ADLER G., 357.

— Maggiorazione del gradiente delle soluzioni delle equazioni $\Delta u = f$ e $\Delta u - au'_i = g$ ADLER G., 673.

— Sopra il prolungamento di misure in reticoli d'insiemi a struttura normale, BARBUTI U., 173.

— Costruzione di successioni approssimanti gli autovalori di una trasformazione lineare e compatta, BASSOTTI L., 682.

— Approssimazione globale degli autovalori di una trasformazione lineare e compatta, BASSOTTI L., 828.

— Sul problema di Darboux, CILIBERTO C., 460.

— Sul calcolo approssimato degli autovalori delle trasformazioni compatte e delle relative molteplicità. Nota I, DE VITO L., 351.

— Sul calcolo approssimato degli autovalori delle trasformazioni compatte e delle relative molteplicità. Nota II, DE VITO L., 452.

— Sullo spettro della trasformazione integro-differenziale di Volterra, DE VITO L., 837.

— Sull'approssimazione uniforme delle funzioni olomorfe con funzioni razionali aventi i poli prefissati, FICHERA G., 347.

— Calcolo per difetto del più basso autovalore di un operatore ellittico del secondo ordine, FICHERA G. e PICONE M., 411.

— Un criterio sufficiente per il minimo assoluto nel caso di estremi variabili, KÓSA A., 669.

Analisi matematica. — Un criterio sufficiente per il minimo assoluto degli integrali doppi nel caso di contorno variabile, KÓSA A., 833.

— Un'osservazione sul teorema di Severini-Egoroff, LETTA G., 690.

— Un problema al contorno per una equazione lineare alle derivate parziali, PAGNI M., 467.

— Sulla condizione di Weierstrass per un'estremante di un integrale, PICONE M., 815.

— Calcolo di alcuni integrali che intervengono in un criterio sufficiente di minimo assoluto, PICONE M. e SIGNORINI A., 605.

— Solutions presque-périodiques dans le problème de Cauchy, pour l'équation non-homogène des ondes. Nota I, ZAIDMAN S., 677.

— Solutions presque-périodiques dans le problème de Cauchy pour l'équation non-homogène des ondes. Nota II, ZAIDMAN S., 823.

Analisi funzionale. — Sul teorema dell'alternativa per talune equazioni funzionali, PETTINEO B., 694.

— Sur un problème d'isomorphie de S. Banach, SINGER I., 343.

Astrofisica. — Sull'altezza dei brillamenti cromosferici in radiazione di idrogeno, BALLARIO M. C., 744.

— Studio della polarizzazione della corona: Risultati preliminari ottenuti durante l'eclisse del 15 febbraio 1961 dalla spedizione dell'Osservatorio Astronomico di Merate a Monte Conero (Ancona), HACK M. e FRACASSINI M., 497.

— Sulla possibilità di impiego di microfotogrammi nello studio della corona solare, PASINETTI L. E., 507.

— Sulle condizioni fisiche del brillamento solare del 3 luglio 1957, RUSSO D. e RIGHINI G., 626.

— Sulla correlazione tra i brillamenti solari e gli atmosferici a 27 KHz, TAGLIAFERRI G. e RIGHINI G., 622.

Astronomia. — L'organizzazione dell'Osservatorio Astronomico di Roma per la osservazione dell'eclisse totale di Sole del 15 febbraio 1961. Risultati generali delle osservazioni, CIMINO M., 323.

- Lo spettro della corona solare nell'eclisse del 15 febbraio 1961, RIGUTTI M. e RUSSO D., 366.
- Lo spettro di una protuberanza quiescente osservata nell'eclisse solare del 15 febbraio 1961, RIGUTTI M. e RUSSO D., 487.
- On the existence of a new polarization-effect in stellar spectral-lines, TAMBURINI T. e THIESSEN G., 492.

B

Biochimica. — Ricerche sul meccanismo dell'equilibrio con l'ossigeno dell'emoglobina. Effetto della concentrazione di emoglobina sulle caratteristiche dell'equilibrio con l'ossigeno, ROSSI-FANELLI A., WYMAN J., ANTONINI E. e CAPUTO A., 449.

— Sulla composizione chimica della glutamico-aspartico transaminasi del cuore di Porco. Digestione chimotriptica dell'enzima ed isolamento del peptide contenente il coenzima, TURANO C., FASELLA P., VECCHINI P. e GIARTOSIO A., 532.

Biologia. — L'andamento dell'attività mitotica nel midollo spinale di un Anfibio urodelo durante lo sviluppo, BAFFONI G.M., 802.

- L'andamento dell'attività mitotica nel mielencefalo durante lo sviluppo di un Anfibio urodelo, BAFFONI G.M., 954.

— Osservazioni istochimiche sulla distribuzione della fosfatasi acida nella rigenerazione del midollo spinale caudale del Tritone, BERTOLINI B., 943.

— Osservazioni critiche sul neo-darwinismo, BLANDINO G., 960.

— Sulla istologia del tetto ottico di un Anfibio anuro (*Rana esculenta* L.), CAPANNA E., 292.

— Identificazione degli ormoni steroidi nei testicoli e negli organi di Bidder di *Bufo vulgaris*, CHIEFFI G. e LUPO C., 399.

— Sul valore logico delle teorie darwiniane, COLOSI G., 659.

— Sulla sede delle placche motrici della muscolatura della coda rigenerata dei Sauri, FILOGAMO G., e MARCHISIO P. C., 933.

Biologia. — Alcuni risultati di esperimenti di asportazione e di trapianto nella regione genitale di embrioni di *Bufo bufo*, GHIRARDELLI E., 284.

— Fenomeni riparativi e rigenerativi in segmenti di midollo spinale in condizioni di isolamento nell'adulto di un Anfibio urodelo, MARINI M. e MARGOTTA V., 948.

— Nuove esperienze sull'asportazione dello strato dell'ependima presuntivo in embrioni di Anfibi anuri, ROSSI A., 565.

— Nuove esperienze sulle regolazioni nervose nelle parabiosi fra embrioni di Anfibi anuri, ROSSI A., 937.

— Sul significato ecologico dell'azoto conchigliare nella Elicide dunicola *Euparypha pisana* (Müll.) - II. Analisi di fenotipi differenti in una singola popolazione. SACCHI C. F. e GAUDIOSI M. R., 571.

— Istochimica della fosfatasi acida durante lo sviluppo embrionale della retina di pollo, STEFANELLI A., CATALDI E. e IERADI L. A., 664.

— Organizzazioni isotipiche nelle riaggregazioni *in vitro* di abbozzi disgregati di retina di embrioni di pollo, STEFANELLI A., ZACCHEI A. M. e CECCHERINI V., 818.

— Sui fenomeni regolativi dell'abbozzo genitale in *Bufo bufo*, dopo asportazione del territorio presuntivo dell'organo di Bidder, VANNINI E. e GHIRARDELLI E., 107.

Botanica. — I gemelli della Canapa, SAVELLI R., 32.

C

Chimica. — Preparazione dei complessi $TiCl_3(C_5H_5)$ e del $[TiCl_2(C_5H_5)]_2O$ e loro struttura, ALLEGRA G., GANIS P., PORRI L. e CORRADINI P., 44.

— Proprietà strutturali e magnetiche dei composti MX formati dall'Ho con i metalloidi del 5° e 6° gruppo, BRUZZONE G., 208.

— Osservazioni preliminari di un particolare effetto delle radiazioni nucleari sui processi elettrodi, BUSULINI L., 53.

— Sulla relazione tra fotoconducibilità e fotodesorbimento dell'ossigeno nell'ossido di zinco, CIMINO A., MOLINARI E., CRAMAROSSA F. e GHERSINI G., 750.

— Calcolo della diffrazione ai raggi X dovuta ad una struttura con impacchettamento disordinato di strati aventi struttura ordinata, CORRADINI P. e ALLEGRA G., 182.

Chimica. — Sulla suscettività magnetica di alcuni composti semimetallici del Samario e Gadolino, IANDELLI A., 201.

— Struttura e proprietà magnetiche dei composti MX del terbio con i metalloidi del 5° e 6° gruppo, OLCESE G. L., 195.

Chimica fisica. — Studio conformazionale di una catena di polimero isotattico in soluzione e calcolo della sua lunghezza quadratica media imperturbata, CORRADINI P. e ALLEGRA G., 516.

Chimica inorganica. — Complessi Rh^{III} idrazinici; cloruri; cloruri acetati; acetati. Nota VI, CAMBI L. e DUBINI PAGLIA E., 429.

— Sali Rh^{III}-idrazinici di acidi carbossilici. Nota VII, CAMBI L., DUBINI PAGLIA E. e BARGIGIA G., 636.

— Sui solfogermanati; argirodite sintetica. Nota I, CAMBI L. e ELLI M., 11.

— Sui solfogermanati; argirodite sintetica. — Ricerche röntgenografiche, FIORENTINI POTENZA M., 16.

— Sui solfogermanati d'Argento. Nota II, FIORENTINI POTENZA M. e ELLI M., 902.

Chimica organica. — Degradazioni ossidative delle catene alifatiche di sistemi ciclici, BRUZZESE T., CASNATI G., PIOZZI F. e VITA-FINZI P., 55.

— Idroborazione. — Olefine ed alcoli dagli enolderivati di chetoni saturi. Nota II, CAGLIOTI L. e CAINELLI G., 224.

Citofisiologia. — Osservazioni sull'attività citologica di alcune furocumarine e sul loro comportamento di fronte all'acido desossiribonucleinico, RODIGHIERO G., CAPORALE G. e DOLCHER T., 84.

Citologia. — I cromosomi di *Chalcidoides ocellatus* (Forsk.), MENDIETTA L., 90.

— La citologia della partenogenesi in due nuovi Embiotteri dell'Africa tropicale, STEFANI R., 254.

Commemorazioni. — Commemorazione del Corrispondente Giro Andreatta, BIANCHI A., 112.

— Commemorazione del Socio Corradino Mineo, BOAGA G., 576.

— Commemorazione del Corrispondente Aldo Pavari, TONZIG S., 297.

— Commemorazione del Socio Alberto Chiarugi, TONZIG S., 968.

Comunicazioni varie, 127, 308, 403, 594, 809, 985.

Congressi, 309, 594, 811, 984.

Cosmogonia. — Sul limite superiore della intensità del campo magnetico in una protogalassia, PACHOLCZYK A. G., 889.

E

Elettrochimica. — Sovratensione di idrogeno su monocristalli di zinco, PIONTELLI R., PERALDO BICELLI L. e GRAZIANO M., 149.

— Sovratensione di idrogeno su monocristalli di antimonio, PIONTELLI R., PERALDO BICELLI L. e LA VECCHIA A., 644.

Embriologia. — Risultati di ulteriori esperimenti con nucleosidi purinici e pirimidinici sullo sviluppo delle uova di Ascidie, CUSIMANO T., 921.

— Ulteriori osservazioni sulla ontogenesi della emoglobina dell'embrione di pollo, D'AMELIO V. e SALVO A. M., 786.

— Larve giganti uniche ottenute da due uova di Ascidie fuse allo stadio di 8-blastomeri, GORGONE I., 250.

— Sviluppo di frammenti dell'uovo vergine di *Ascidia malaca* ottenuti mediante centrifugazione, LA SPINA R., 926.

F

Farmacologia. — Ulteriori ricerche sulla attività antivirale di complessi metallici idrosolubili, BERTI T., D'ANGELI F., LANZANI C. e MENEGHELLI P., 538.

Fisica. — Considerazioni intorno alla costante universale elettromagnetica γ , LAMPARIELLO G., 897.

— Sui fondamenti dell'elettrodinamica. Nota III, ZIN G., 39.

Fisica matematica. — Sul teorema di unicità per le equazioni di Maxwell in un mezzo ferromagnetico, ZOLI A. M., 892.

Fisiologia. — Attività elettrica del diaframma durante respirazione a pressione positiva, AGOSTONI E., 100.

— Analisi della meccanica toraco-addominale durante respirazione a pressione positiva, AGOSTONI E., 791.

— Determinazione incruenta della pressione di CO₂ nel sangue venoso misto, BRANDI G., 554.

— Differenza arterovenosa in ossigeno, gettata cardiaca e gettata pulsatoria in funzione del consumo energetico, BRANDI G. e BRAMBILLA I., 559.

Fisiologia. — Isteresi elastica del polmone, CAVAGNA G., BRANDI G., SAIBENE F. e TORELLI G., 395.

— Analisi neurofisiologica degli effetti della imipramina, CREPAX P., FADIGA E., MAS-SARINI A. e VOLTA A., 795.

— Separazione degli zuccheri dello sperma mediante elettroforesi su carta, D'ARCAN-GELO P., 562.

— Impiego del blu di bromotimolo per la colorazione delle proteine separate mediante elettroforesi su carta, DOLCINI C. e DOLCINI B., 271.

— Impiego dell'etero-poli-acido fosfo-molibdico giallo per la colorazione delle proteine separate mediante elettroforesi su carta, DOLCINI C. e DOLCINI B., 392.

— Superficie d'espansione su carta da filtro di aliquote di soluzioni proteiche in funzione della concentrazione, DOLCINI C. e DOLCINI B., 550.

Fisiologia vegetale. — Aumento della attività glucosio-6-fosfato deidrogenasica in fettine di organi di riserva, ALBERGHINA F. e MARRÉ E., 261.

— Nuovi apparecchi per misura di precisione dell'accrescimento dei fusti: dendrometro e dendrometrografo, CAPPELLETTI C., 23.

— Ricerche sulla permeabilità delle cuticole alle radiazioni ultraviolette. — I. Piante di duna, CAPPELLETTI C., 331.

— Osservazioni sperimentali sull'ecologia e fisiologia dello sviluppo delle piante annuali dei deserti circummediterranei, LONNA F., 265.

G

Genetica. — Indagini sugli ibridi intra-specifici in *Asellus aquaticus*, VITAGLIANO TADINI G., 257.

Geodesia. — Un metodo di compensazione di un blocco di strisciate. — I. Principio generale e compensazione planimetrica, CUNIETTI M. e INGHILLERI G., 368.

— Un metodo di compensazione di un blocco di strisciate. — II. Compensazione altimetrica ed uso dei dati degli strumenti ausiliari, CUNIETTI M. e INGHILLERI G., 512.

Geofisica. — Sulle onde interne del lago di Bracciano e sulle loro probabili cause, CALOI P., 630.

Geologia — Il traforo del Monte Bianco; prime osservazioni geologiche sul tratto dalla progressiva 1300 alla progressiva 2500 (parte italiana), BAGGIO P. e MALARODA R., 908.

— Osservazioni sulla geologia della regione compresa fra Ponteburnardo e Sambuco (fianco sinistro della Valle Stura di Demonte, Alpi Marittime), CARRARO F., 373.

— Qualche osservazione comparativa fra le serie stratigrafiche dell'Hindu Kush afgano e del Tagikistan (Asia centrale), DESIO A., 650.

— Sull'età dei graniti del Baltoro (Karakorum-Himalaya), DESIO A. e LONGINELLI A., 437.

— Le sillon des Flyschs du Crétacé supérieur en Méditerranée occidentale, DURAND DELGA M., 62.

— Su un deposito lacustre oligocenico nella Nurra di Alghero (Sardegna nord-occidentale), PECORINI G., 67.

— Contributo allo studio geologico-tecnico del problema dell'attraversamento dello Stretto di Messina, PENTA F. e CAPOZZA F., 155.

— Tettonica eruttiva nel gruppo del Bufaure a Sud di Fontanazzo-Campestrin in Val di Fassa, SOMMAVILLA E., 229.

Geometria. — Sur l'angle complexe, orienté, de deux vecteurs d'un espace unitaire, FRODA A., 845.

— Frammenti piani autoduali e relative sostituzioni, MENDER K., 713.

— Alcune generalizzazioni del teorema di Segre-Mahler, MOLNÁR J., 700.

— Sulla curvatura geodetica totale, SABAN G., 854.

— Superficie anolonomie e corrispondenze dualistiche, SPERANZA F., 479.

— Le ipersuperficie irriducibili d'ordine minimo che invadono uno spazio di Galois, TALLINI G., 706.

Geometria differenziale. — Connessioni che conservano una struttura quasi complessa, COSSU A., 863.

— Deviazione caratteristica e proprietà globali sulle varietà quasi hermitiane, RIZZA G. B., 472.

I

Idrodinamica. — Sopra le onde di traslazione nei canali. — B) Il caso non lineare, SUPINO G., 140.

Istologia. — Grandezza e densità delle cellule nervose della corteccia cerebrale di *Elephas indicus*, BARASA A. e SHOCHATOVITZ A., 246.

- Effetto delle lesioni traumatiche sulla attività mitotica dei fibroblasti coltivati *in vitro*, OLIVO O. M. e GALLIANI I., 163.
- Studio statistico delle grandezze cellulari nel nucleo dell'ipoglosso nell'uomo di diversa età, RIZZOLI C. e ZANNOTTI M., 382.

M

Magnetofluidodinamica. — Sulla stabilità dei moti magnetofluidodinamici stazionari. Nota II, AGOSTINELLI C., 3.

- Sulla instabilità magneto-gravitazionale di un mezzo stratificato, PACHOLCZYK A.G., 738.

Matematica. — Sur le calcul symbolique à une ou plusieurs variables, pour une algèbre localement convexe, SEBASTIÃO e SILVA J., 167.

- Sulle funzioni che assumono tutti i valori intermedi, TRICOMI F. G., 419.

Meccanica. — Proprietà di una particella di prova nel campo gravitazionale einsteiniano, CLAUSER E., 874.

- Problemi di conservazione dell'equilibrio interno di una massa rocciosa eterogenea in corso di trasferimento, COLONNETTI G., 618.

— Sulla dinamica dei solidi tubolari: equazioni non linearizzate, FERRARESE G., 718.

— Carattere tensoriale dell'azione Einsteiniana, GRAIFF F., 884.

— Moltiplicatore critico λ_{cr} per volte autoportanti. Nota I, KRALL G. e CALIGO D., 131.

— Moltiplicatore critico λ_{cr} per volte autoportanti. Nota II, KRALL G. e CALIGO D., 315.

— Moltiplicatore critico λ_{cr} per volte autoportanti. Nota III, KRALL G. e CALIGO D., 421.

— Moltiplicatore critico λ_{cr} per volte autoportanti. Nota IV, KRALL G. e CALIGO D., 608.

— Interpretazione teorica del principio di reversibilità di MacHenry, LEVI F., 734.

— Spostamento del perielio nell'orbita descritta da una particella materiale elettrizzata nella prima approssimazione della

ultima teoria unitaria einsteiniana, VENINI C., 728.

Microbiologia. — Azione inibente di alcuni antibiotici sui microrganismi riducenti il colesterolo a coprosterolo, ARNAUDI C. e CARINI S., 776.

Mineralogia. — Hoeferite e Nasinite: due nuovi borati fra i prodotti di Larderello. Parte II, CIPRIANI C., 235.

— Hoeferite e Nasinite: due nuovi borati fra i prodotti di Larderello. Parte I, CIPRIANI C. e VANNUCCINI P., 74.

N

Neurochimica. — Sugli isoenzimi della latticodeidrogenasi di tessuto nervoso. — I. Reazione con analoghi piridinici del difosfopiridin-nucleotide ed affinità per l'acido piruvico, BONAVITA V. e GUARNERI R., 754.

O

Opere pervenute in dono all'Accademia, 128, 313, 407, 595, 812.

P

Parole pronunciate dal Vice Presidente dell'Accademia nella seduta antimeridiana a Classi riunite dell'11 febbraio 1961, ARANGIO-RUIZ V., 305.

Patologia. — Ulteriori ricerche sulle inclusioni cellulari nel tumore di Sticker, AJELLO P., 282.

— Differenze immunologiche delle desossiribonucleoproteine delle cellule bianche normali e leucemiche umane, MESSINEO L., 103.

— Sulla sensibilità dei componenti complementari alle radiazioni ionizzanti, PONTIERI G. e IMPERATO S., 274.

Personale accademico, 123, 307, 403, 592, 809, 984.

Petrografia. — Ricerche chimico-petrografiche su alcune vulcaniti del Monte Vulture (Lucania), HIEKE-MERLIN O., 767.

Premi in corso di assegnazione presso l'Accademia Nazionale dei Lincei, 596.

Presentazione di libri, 124, 310, 403, 592, 809, 985.

Presentazione di Note e Memorie,
126, 311, 404, 593, 810, 986.

R

Radio-astronomia. — Risultati dell'osservazione radioelettrica dell'eclissi totale di Sole del 15 febbraio 1961, PIATTELLI M., 362.

Relazioni di Commissioni, 405, 811, 986.

S

Spettroscopia molecolare. — Sull'effetto dell'intorno molecolare sulla frequenza carbonilica, MIRONE P. e CHIORBOLI P., 214.
— Spettri Raman e ultrarossi e assegnazione vibrazionale dell'anidride maleica, MIRONE P. e CHIORBOLI P., 526.

Spettroscopia molecolare. — Su alcune semplificazioni formali nel calcolo delle intensità delle bande divibro-rotazione, SALVETTI O., 761.

Z

Zoologia. — Ricerche cariologiche su *Macrosiphum rosae* L., *Myzodes persicae* Sulzer e *Brevicoryne brassicae* L. (Homoptera-Aphididae), COGNETTI G. e COGNETTI VARRIALE A. M., 782.

— Ancora sulla genesi e sessualizzazione degli elementi germinali in esemplari rigeneranti di *Spirorbis pagenstecheri*, STAGNI A., 928.
— Correlazione del numero di metameri toracici fra schizonte e schizozooide in *Salmacina dysteri*, VANNINI E. e RANZOLI F., 94.

INDICI DEI FASCICOLI

FASCICOLO 1.

GENNAIO 1961.

NOTE DI SOCI

AGOSTINELLI C., Sulla stabilità dei moti magnetofluidodinamici stazionari. Nota II	Pag.	3
CAMBI L. e ELLI M., Sui solfogermanati: argirodite sintetica. Nota I (pres. dal Socio <i>L. Cambi</i>)	»	11
FIorentini POTENZA M., Sui solfogermanati: argirodite sintetica. — Ricerche röntgenografiche (pres. dal Socio <i>L. Cambi</i>).	»	16
CAPPELLETTI C., Nuovi apparecchi per misura di precisione dell'accrescimento dei fusti: dendrometro e dendrometrografo	»	23
SAVELLI R., I gemelli della Canapa	»	32

NOTE PRESENTATE DA SOCI

ZIN G., Sui fondamenti dell'elettrodinamica. Nota III (pres. dal Socio <i>E. Perucca</i>)	»	39
ALLEGRA G., GANIS P., PORRI L. e CORRADINI P., Preparazione dei complessi $TiCl_3(C_5H_5)$ e $[TiCl_2(C_5H_5)]_2O$ e loro struttura (pres. dal Socio <i>G. Natta</i>)	»	44
BUSULINI L., Osservazioni preliminari di un particolare effetto delle radiazioni nucleari sui processi elettrolici (pres. dal Corrisp. <i>G. Semeraro</i>)	»	53
BRUZZESE T., CASNATI G., PIOZZI F. e VITA-FINZI P., Degradazioni ossidative delle catene alifatiche di sistemi ciclici (pres. dal Socio <i>A. Quilico</i>)	»	55
DURAND DELGA M., Le sillons des Flyschs du Crétacé supérieur en Méditerranée occidentale (pres. dal Socio <i>G. B. Dal Piaz</i>)	»	62
PECORINI G., Su un deposito lacustre oligocenico nella Nurra di Alghero (Sardegna nord-occidentale) (pres. dal Corrisp. <i>S. Vardabasso</i>)	»	67
CIPRIANI C. e VANNUCCINI P., Hoeferite e Nasinite: due nuovi borati fra i prodotti di Larderello. Parte I (pres. dal Socio <i>G. Carobbi</i>)	»	74
RODIGHERO G., CAPORALE G. e DOLCHER T., Osservazioni sull'attività citologica di alcune furcumarine e sul loro comportamento di fronte all'acido desossiribonucleinico (pres. dal Corrisp. <i>C. Cappelletti</i>)	»	84
MENDIETTA L., I cromosomi di <i>Chalcides scellatus</i> (Forsk) (pres. dal Corrisp. <i>G. Montalenti</i>)	»	90
VANNINI E. e RANZOLI F., Correlazione del numero di metameri toracici fra schizonte e schizozooide in <i>Salmacina dysteri</i> (pres. dal Socio <i>U. D'Ancona</i>)	»	94

AGOSTONI E., Attività elettrica del diaframma durante respirazione a pressione positiva (pres. dal Socio <i>R. Margaria</i>)	Pag. 100
MESSINEO L., Differenze immunologiche delle desossiribonucleoproteine delle cellule bianche normali e leucemiche umane (pres. dal Socio <i>G. Bompiani</i>) »	103
VANNINI E. e GHIRARDELLI E., Sui fenomeni regolativi dell'abbozzo genitale in <i>Bufo bufo</i> , dopo asportazione del territorio presuntivo dell'organo di Bidder (pres. dal Socio <i>U. D'Ancona</i>) »	107

COMMEMORAZIONI

BIANCHI A., Commemorazione del Corrispondente <i>Ciro Andreatta</i> »	112
Personale accademico »	123
Presentazione di libri »	124
Presentazione di Note e Memorie »	126
Comunicazioni varie »	127
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 14 gennaio 1961. »	128

FASCICOLO 2.

FEBBRAIO 1961.

NOTE DI SOCI

KRALL G. e CALIGO D., Moltiplicatore critico λ_{cr} per volte autoportanti. Nota I (pres. dal Socio <i>G. Krall</i>) »	131
SUPINO G., Sopra le onde di traslazione nei canali. – B) Il caso non lineare . . . »	140
PIONTELLI R., PERALDO BICELLI L. e GRAZIANO M., Sovratensione di idrogeno su monocristalli di zinco (pres. dal Corrisp. <i>R. Piontelli</i>) »	149
PENTA F. e CAPOZZA F., Contributo allo studio geologico-tecnico del problema dell'attraversamento dello Stretto di Messina (pres. dal Corrisp. <i>F. Penta</i>) »	155
OLIVO O. M. e GALLIANI I., Effetto delle lesioni traumatiche sulla attività mitotica dei fibroblasti coltivati <i>in vitro</i> (pres. dal Socio <i>O. M. Olivo</i>) . . . »	163

NOTE PRESENTATE DA SOCI

SEBASTIÃO E SILVA J., Sur le calcul symbolique à une ou plusieurs variables, pour une algèbre localement convexe (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>) . . . »	167
BARBUTI U., Sopra il prolungamento di misure in reticoli d'insiemi a struttura normale (pres. dal Corrisp. <i>C. Miranda</i>) »	173
ADLER G., Principi di massimo relativi alle equazioni di tipo ellittico e parabolico nel caso di condizioni al contorno e di condizioni iniziali rispettivamente non-continue e non-limitate (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>) »	178
CORRADINI P. e ALLEGRA G., Calcolo della diffrazione ai raggi X, dovuta ad una struttura con impacchettamento disordinato di strati aventi struttura ordinata (pres. dal Socio <i>G. Natta</i>) »	182

OLCESE G. L., Struttura e proprietà magnetiche dei composti MX del terbio con i metalloidi del 5° e 6° gruppo (pres. dal Socio <i>G. B. Bonino</i>) . . .	Pag. 195
IANDELLI A., Sulla suscettività magnetica di alcuni composti semimetallici del Samario e Gadolino (pres. dal Socio <i>G. B. Bonino</i>)	» 201
BRUZZONE G., Proprietà strutturali e magnetiche dei composti MX formati dall'Ho con i metalloidi del 5° e 6° gruppo (pres. dal Socio <i>G. B. Bonino</i>)	» 208
MIRONE P. e CHIORBOLI P., Sull'effetto dell'intorno molecolare sulla frequenza carbonilica (pres. dal Socio <i>G. B. Bonino</i>)	» 214
CAGLIOLI L. e CAINELLI G., Idroborazione. - Olefine ed alcoli dagli enolderivati di chetoni saturi. Nota II (pres. dal Socio <i>A. Quilico</i>)	» 224
SOMMAVILLA E., Tettonica eruttiva nel gruppo del Buffaure a Sud di Fontanazzo Campestrin in Val di Fassa (pres. dal Corrisp. <i>P. Leonardi</i>)	» 229
CIPRIANI C., Hoeferite e Nasinite: due nuovi borati fra i prodotti di Larderello. Parte II (pres. dal Socio <i>G. Carobbi</i>)	» 235
BARASA A. e SHOCHATOVITZ A., Grandezza e densità delle cellule nervose della corteccia cerebrale di <i>Elephas indicus</i> (pres. dal Socio <i>G. Levi</i>)	» 246
GORGONE I., Larve giganti uniche ottenute da due uova di Ascidie fuse allo stadio di 8-blastomeri (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i>)	» 250
STEFANI R., La citologia della partenogenesi in due nuovi Embiotteri dell'Africa tropicale (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i>)	» 254
VITAGLIANO TADINI G., Indagini sugli ibridi intraspecifici in <i>Asellus aquaticus</i> (pres. dal Corrisp. <i>G. Montalenti</i>)	» 257
ALBERGHINA F. e MARRÉ E., Aumento dell'attività glucosio-6-fosfato deidrogenasica in fettine di organi di riserva (pres. dal Socio <i>S. Tonzig</i>) . . .	» 261
LONA F., Osservazioni sperimentali sull'ecologia e fisiologia dello sviluppo delle piante annuali dei deserti circummediterranei (pres. dal Socio <i>S. Tonzig</i>)	» 265
DOLCINI C. e DOLCINI B., Impiego del blu di bromotimolo per la colorazione delle proteine separate mediante elettroforesi su carta (pres. dal Corrisp. <i>G. Amantea</i>)	» 271
PONTIERI G. e IMPERATO S., Sulla sensibilità dei componenti complementari alle radiazioni ionizzanti (pres. dal Socio <i>L. Califano</i>)	» 274
AJELLO P., Ulteriori ricerche sulle inclusioni cellulari nel tumore di Sticker (pres. dal Corrisp. <i>G. Amantea</i>)	» 282
GHIRARDELLI E., Alcuni risultati di esperimenti di asportazione e di trapianto nella regione genitale di embrioni di <i>Bufo bufo</i> (pres. dal Socio <i>U. D'Ancona</i>)	» 284
CAPANNA E., Sulla istologia del tetto ottico di un Anfibio anuro (<i>Rana esculenta</i> L.) (pres. dal Corrisp. <i>A. Stefanelli</i>)	» 292

COMMEMORAZIONI

TONZIG S., Commemorazione del Corrispondente Aldo Pavari	» 297
Parole pronunciate dal Vice Presidente dell'Accademia, prof. V. Arangio-Ruiz, nella seduta a Classi riunite dell'11 febbraio 1961	» 305
Personale accademico	» 307
Comunicazioni varie	» 308
Congressi	» 309
Presentazione di libri	» 310
Presentazione di Note e Memorie	» 311
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta dell'11 febbraio 1961	» 313

FASCICOLO 3.

MARZO 1961.

NOTE DI SOCI

KRALL G. e CALIGO D., Moltiplicatore critico λ_{cr} per volte autoportanti. Nota II (pres. dal Socio <i>G. Krall</i>)	Pag. 315
CIMINO M., L'organizzazione dell'Osservatorio Astronomico di Roma per l'osservazione dell'eclisse totale di Sole del 15 febbraio 1961. Risultati generali delle osservazioni	» 323
CAPPELLETTI C., Ricerche sulla permeabilità delle cuticole alle radiazioni ultraviolette. - I. Piante di duna	» 331

NOTE PRESENTATE DA SOCI

SINGER I., Sur un problème d'isomorphie de S. Banach (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	» 343
FICHERA G., Sull'approssimazione uniforme delle funzioni olomorfe con funzioni razionali aventi i poli prefissati (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	» 347
DE VITO L., Sul calcolo approssimato degli autovalori delle trasformazioni compatte e delle relative molteplicità. Nota I (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	» 351
ADLER G., Maggiorazione del gradiente delle funzioni del calore (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	» 357
PIATTELLI M., Risultati dell'osservazione radioelettrica dell'eclissi totale di Sole del 15 febbraio 1961 (pres. dal Corresp. <i>G. Righini</i>)	» 362
RIGUTTI M. e RUSSO D., Lo spettro della corona solare nell'eclisse del 15 febbraio 1961 (pres. dal Corresp. <i>G. Righini</i>)	» 366
CUNIETTI M. e INGHILLEERI G., Un metodo di compensazione di un blocco di strisciate - I. Principio generale e compensazione planimetrica (pres. dal Socio <i>L. Solaini</i>)	» 368
CARRARO F., Osservazioni sulla geologia della regione compresa fra Pontebernardo e Sambuco (fianco sinistro della Valle Stura di Demonte, Alpi Marittime) (pres. dal Socio <i>Gb. Dal Piaz</i>)	» 373
RIZZOLI C. e ZANNOTTI M., Studio statistico delle grandezze cellulari nel nucleo dell'ipoglossa nell'uomo di diversa età (pres. dal Socio <i>O. M. Olivo</i>)	» 382
DOLCINI C. e DOLCINI B., Impiego dell'etero-poli-acido fosfo-molibdico giallo per la colorazione delle proteine separate mediante elettroforesi su carta (pres. dal Corresp. <i>G. Amantea</i>)	» 392
CAVAGNA G., BRANDI G., SAIBENE F. e TORELLI G., Isteresi elastica del polmone (pres. dal Socio <i>R. Margaria</i>)	» 395
CHIEFFI G. e LUPO C., Identificazione degli ormoni steroidei nei testicoli e negli organi di Bidder di <i>Bufo vulgaris</i> (pres. dal Corresp. <i>G. Montalenti</i>)	» 399
Personale accademico	» 403
Comunicazioni varie	» 403
Presentazione di libri	» 403
Presentazione di Note e Memorie	» 404
Relazioni di Commissioni	» 405
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta dell'11 marzo 1961	» 407

FASCICOLO 4.

APRILE 1961.

NOTE DI SOCI

FICHERA G. e PICONE M., Calcolo per difetto del più basso autovalore di un operatore ellittico del secondo ordine (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>) . . .	Pag. 411
TRICOMI F. G., Sulle funzioni che assumono tutti i valori intermedi	» 419
KRALL G. e CALIGO D., Moltiplicatore critico λ_{cr} per volte autoportanti. Nota III (pres. dal Socio <i>G. Krall</i>)	» 421
CAMBI L. e DUBINI PAGLIA E., Complessi Rh^{III} idrazinici: cloruri; cloruri acetati; acetati. Nota VI (pres. dal Socio <i>L. Cambi</i>)	» 429
DESIO A. e LONGINELLI A., Sull'età dei graniti del Baltoro (Karakorum-Himalaya) (pres. dal Corrisp. <i>A. Desio</i>)	» 437
ROSSI-FANELLI A., WYMAN J., ANTONINI E. e CAPUTO A., Ricerche sul meccanismo dell'equilibrio con l'ossigeno dell'emoglobina. Effetto della concentrazione di emoglobina sulle caratteristiche dell'equilibrio con l'ossigeno (pres. dal Corrisp. <i>A. Rossi-Fanelli</i>)	» 449

NOTE PRESENTATE DA SOCI

DE VITO L., Sul calcolo approssimato degli autovalori delle trasformazioni compatte e delle relative molteplicità. Nota II (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>) . . .	» 452
CILIBERTO C., Sul problema di Darboux (pres. dal Corrisp. <i>C. Miranda</i>) . . .	» 460
PAGNI M., Un problema al contorno per una equazione lineare alle derivate parziali (pres. dal Socio <i>G. Sansone</i>)	» 467
RIZZA G. B., Deviazione caratteristica e proprietà globali sulle varietà quasi hermitiane (pres. dal Socio <i>B. Segre</i>)	» 472
SPERANZA F., Superficie anolonome e corrispondenze dualistiche (pres. dal Socio <i>B. Segre</i>)	» 479
RIGUTTI M. e RUSSO D., Lo spettro di una protuberanza quiescente osservata nell'eclisse solare del 15 febbraio 1961 (pres. dal Corrisp. <i>G. Righini</i>) . . .	» 487
TAMBURINI T. e THIESSEN G., On the existence of a new polarization-effect in stellar spectral-lines (pres. dal Socio <i>F. Zagar</i>)	» 492
HACK M. e FRACASSINI M., Studio della polarizzazione della corona: Risultati preliminari ottenuti durante l'eclisse del 15 febbraio 1961 dalla spedizione dell'Osservatorio Astronomico di Merate a Monte Conero (Ancona) (pres. dal Socio <i>F. Zagar</i>)	» 497
PASINETTI L. E., Sulla possibilità di impiego di microfotogrammi nello studio della corona solare (pres. dal Socio <i>F. Zagar</i>)	» 507
CUNIETTI M. e INGHILLERI G., Un metodo di compensazione di un blocco di strisciate. - II. Compensazione altimetrica ed uso dei dati degli strumenti ausiliari (pres. dal Socio <i>L. Solaini</i>)	» 512
CORRADINI P. e ALLEGRA G., Studio conformazionale di una catena di polimero isotattico in soluzione e calcolo della sua lunghezza quadratica media imperturbata (pres. dal Socio <i>G. Natta</i>)	» 516
MIRONE P. e CHIORBOLI P., Spettri Raman e ultrarossi e assegnazione vibrazionale dell'anidrida maleica (pres. dal Socio <i>G. B. Bonino</i>)	» 526

TURANO C., FASELLA P., VECCHINI P. e GIARTOSIO A., Sulla composizione chimica della glutamico-aspartico transaminasi del cuore di Porco. Digestione chimotriptica dell'enzima ed isolamento del peptide contenente il coenzima (pres. dal Corrisp. <i>A. Rossi-Fanelli</i>)	Pag. 532
BERTI T., D'ANGELI F., LANZANI C. e MENEGHELLI P., Ulteriori ricerche sull'attività antivirale di complessi metallici idrosolubili (pres. dal Socio <i>U. D'Amiconna</i>)	» 538
DOLCINI C. e DOLCINI B., Superficie d'espansione su carta da filtro di aliquote di soluzioni proteiche in funzione della concentrazione (pres. dal Corrisp. <i>G. Amantea</i>)	» 550
BRANDI G., Determinazione incruenta della pressione di CO ₂ nel sangue venoso misto (pres. dal Socio <i>R. Margaria</i>)	» 554
BRANDI G. e BRAMBILLA I., Differenza arterovenosa in ossigeno, gettata cardiaca e gettata pulsatoria in funzione del consumo energetico (pres. dal Socio <i>R. Margaria</i>)	» 559
D'ARCANGELO P., Separazione degli zuccheri dello sperma mediante elettroforesi su carta (pres. dal Corrisp. <i>G. Amantea</i>)	» 562
ROSSI A., Nuove esperienze sull'asportazione dello strato dell'ependima presuntivo in embrioni di Anfibi anuri (pres. dal Corrisp. <i>A. Stefanelli</i>)	» 565
SACCHI C. F. e GAUDIOSI M. R., Sul significato ecologico dell'azoto conchigliare nella Elicide dunicola <i>Euparypha pisana</i> (Müll.) - II. Analisi di fenotipi differenti in una singola popolazione (pres. dal Corrisp. <i>G. Montalenti</i>) . .	» 571

COMMEMORAZIONI

BOAGA G., Commemorazione del Socio Corradino Mineo	» 576
Personale accademico	» 592
Presentazione di libri	» 592
Presentazione di Note e Memorie	» 593
Comunicazioni varie	» 594
Congressi	» 594
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta dell'8 aprile 1961	» 595
Premi in corso di assegnazione presso l'Accademia Nazionale dei Lincei . . .	» 596

FASCICOLO 5.

MAGGIO 1961.

NOTE DI SOCI

PICONE M. e SIGNORINI A., Calcolo di alcuni integrali che intervengono in un criterio sufficiente di minimo assoluto	» 603
KRALL G. e CALIGO D., Moltiplicatore critico λ_{cr} per volte autoportanti. Nota IV (pres. dal Socio <i>G. Krall</i>)	» 608
COLONNETTI G., Problemi di conservazione dell'equilibrio interno di una massa rocciosa eterogenea in corso di trasferimento	» 618
TAGLIAFERRI G. e RIGHINI G., Sulla correlazione tra i brillamenti solari e gli atmosferici a 27 KHz (pres. dal Corrisp. <i>G. Righini</i>)	» 622

RUSSO D. e RIGHINI G., Sulle condizioni fisiche del brillamento solare del 3 luglio 1957 (pres. dal Corrisp. <i>G. Righini</i>)	Pag. 626
CALOI P., Sulle onde interne del lago di Bracciano e sulle loro probabili cause	» 630
CAMBI L., DUBINI PAGLIA E. e BARGIGIA G., Sali Rh^{III} -idrazinici di acidi carbossilici. Nota VII (pres. dal Socio <i>L. Cambi</i>)	» 636
PIONTELLI R., PERALDO BICELLI L. e LA VECCHIA A., Sovratensione di idrogeno su monocristalli di antimonio (pres. dal Corrisp. <i>R. Piontelli</i>)	» 644
DESIO A., Qualche osservazione comparativa fra le serie stratigrafiche dell'Hindu Kush afgano e del Tagikistan (Asia centrale)	» 650
COLOSI G., Sul valore logico delle teorie darwiniane	» 659
STEFANELLI A., CATALDI E. e IERADI L. A., Istochimica della fosfatasi acida durante lo sviluppo embrionale della retina di pollo (pres. dal Corrisp. <i>A. Stefanelli</i>)	» 664

NOTE PRESENTATE DA SOCI

KÓSA A., Un criterio sufficiente per il minimo assoluto nel caso di estremi variabili (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	» 669
ADLER G., Maggiorazione del gradiente delle soluzioni delle equazioni $\Delta u - f$ e $\Delta u - au'_t = g$ (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	» 673
ZAIDMAN S., Solutions presque périodiques dans le problème de Cauchy, pour l'équation non-homogène des ondes. Nota I (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	» 677
BASSOTTI L., Costruzione di successioni approssimanti gli autovalori di una trasformazione lineare e compatta (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	» 682
LETTA G., Un'osservazione sul teorema di Severini Egoroff (pres. dal Corrisp. <i>C. Miranda</i>)	» 690
PETTINEO B., Sul teorema dell'alternativa per talune equazioni funzionali (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	» 694
MOLNÁR J., Alcune generalizzazioni del teorema di Segre-Mahler (pres. dal Socio <i>B. Segre</i>)	» 700
TALLINI G., Le ipersuperficie irriducibili d'ordine minimo che invadono uno spazio di Galois (pres. dal Socio <i>B. Segre</i>)	» 706
MENGER K., Frammenti piani autoduali e relative sostituzioni (pres. dal Socio <i>B. Segre</i>)	» 713
FERRARESE G., Sulla dinamica dei solidi tubolari: equazioni non linearizzate (pres. dal Socio <i>A. Signorini</i>)	» 718
VENINI C., Spostamento del perielio nell'orbita descritta da una particella materiale elettrizzata nella prima approssimazione dell'ultima teoria unitaria einsteiniana (pres. dal Socio <i>F. Zagar</i>)	» 728
LEVI F., Interpretazione teorica del principio di reversibilità di MacHenry (pres. dal Socio <i>G. Colonnetti</i>)	» 734
PACHOLCZYK A. G., Sulla instabilità magneto-gravitazionale di un mezzo stratificato (pres. dal Corrisp. <i>C. Agostinelli</i>)	» 738
BALLARIO M. C., Sull'altezza dei brillamenti cromosferici in radiazione di idrogeno (pres. dal Corrisp. <i>G. Righini</i>)	» 744
CIMINO A., MOLINARI E., CRAMAROSSA F. e GHERSINI G., Sulla relazione tra fotoconducibilità e fotodesorbimento dell'ossigeno nell'ossido di zinco (pres. dal Socio <i>V. Caglioti</i>)	» 750
BONAVITA V. e GUARNERI R., Sugli isoenzimi della latticodeidrogenasi di tessuto nervoso. - I. Reazione con analoghi piridinici del difosfopiridin-nucleotide ed affinità per l'acido piruvico (pres. dal Socio <i>L. Califano</i>)	» 754
SALVETTI O., Su alcune semplificazioni formali nel calcolo delle intensità delle bande di vibro-rotazione (pres. dal Socio <i>G. B. Bonino</i>)	» 761

HIEKE-MERLIN O., Ricerche chimico-petrografiche su alcune vulcaniti del Monte Vulture (Lucania) (pres. dal Socio <i>A. Bianchi</i>)	Pag. 767
ARNAUDI C. e CARINI S., Azione inibente di alcuni antibiotici sui microrganismi riducenti il colesterolo a coprosterolo (pres. dal Socio <i>S. Tonzig</i>)	» 776
COGNETTI G. e COGNETTI VARRIALE A. M., Ricerche carilogiche su <i>Macrosiphum rosae</i> L., <i>Myzodes persicae</i> Sulzer e <i>Brevicoryne brassicae</i> L. (Homoptera Aphididae) (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i>)	» 782
D'AMELIO V. e SALVO A. M., Ulteriori osservazioni sulla ontogenesi della emoglobina dell'embrione di pollo (pres. dal Corrisp. <i>G. Montalenti</i>)	» 786
AGOSTONI E., Analisi della meccanica toraco-addominale durante respirazione a pressione positiva (pres. dal Socio <i>R. Margaria</i>)	» 791
CREPAX P., FADIGA E., MASSARINI A. e VOLTA A., Analisi neurofisiologica degli effetti della imipramina (pres. dal Socio <i>G. C. Pupilli</i>)	» 795
BAFFONI G. M., L'andamento dell'attività mitotica nel midollo spinale di un Anfibio urodelo durante lo sviluppo (pres. dal Corrisp. <i>A. Stefanelli</i>)	» 802
Personale accademico	» 809
Comunicazioni varie	» 809
Presentazione di libri	» 809
Presentazione di Note e Memorie	» 810
Relazioni di Commissioni	» 811
Congressi	» 811
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 13 maggio 1961	» 812

FASCICOLO 6.

GIUGNO 1961.

NOTE DI SOCI

PICONE M., Sulla condizione di Weierstrass per un'estremante di un integrale	» 815
STEFANELLI A., ZACCHEI A. M. e CECCHERINI V., Organizzazioni isotipiche nelle riaggregazioni <i>in vitro</i> di abbozzi disgregati di retina di embrioni di pollo (pres. dal Corrisp. <i>A. Stefanelli</i>)	» 818

NOTE PRESENTATE DA SOCI

ZAIDMAN S., Solutions presque-périodiques dans le problème de Cauchy pour l'équation non-homogène des ondes. Nota II (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	» 823
BASSOTTI L., Approssimazione globale degli autovalori di una trasformazione lineare e compatta (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	» 828
KÓSA A., Un criterio sufficiente per il minimo assoluto degli integrali doppi nel caso di contorno variabile (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	» 833
DE VITO L., Sullo spettro della trasformazione integrodifferenziale di Volterra (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	» 837
FRODA A., Sur l'angle complexe, orienté, de deux vecteurs d'un espace unitaire (pres. dal Socio <i>B. Segre</i>)	» 845
SABAN G., Sulla curvatura geodetica totale (pres. dal Socio <i>B. Segre</i>)	» 854

COSSU A., Connessioni che conservano una struttura quasi complessa (pres. dal Socio <i>E. Bompiani</i>)	Pag. 863
CLAUSER E., Proprietà di una particella di prova nel campo gravitazionale einsteiniano (pres. dal Socio <i>B. Finzi</i>)	» 874
GRAIFF F., Carattere tensoriale dell'azione Einsteiniana (pres. dal Socio <i>B. Finzi</i>)	» 884
PACHOLCZYK A. G., Sul limite superiore della intensità del campo magnetico in una protogalassia (pres. dal Corrisp. <i>C. Agostinelli</i>).	» 889
ZOLI A. M., Sul teorema di unicità per le equazioni di Maxwell in un mezzo ferromagnetico (pres. dal Corrisp. <i>D. Graffi</i>)	» 892
LAMPARIELLO G., Considerazioni intorno alla costante universale elettromagnetica γ (pres. dal Socio <i>E. Perucca</i>)	» 897
FIorentini POTENZA M. e ELLI M., Sui solfogermanati d'Argento. Nota II (pres. dal Socio <i>L. Cambi</i>)	» 952
BAGGIO P. e MALARODA R., Il traforo del Monte Bianco; prime osservazioni geologiche sul tratto dalla progressiva 1300 alla progressiva 2500 (parte italiana) (pres. dal Socio <i>Gb. Dal Piaz</i>)	» 908
CUSIMANO T., Risultati di ulteriori esperimenti con nucleosidi purinici e pirimidinici sullo sviluppo delle uova di Ascidie (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i>)	» 921
LA SPINA R., Sviluppo di frammenti dell'uovo vergine di Ascidia malaca ottenuti mediante centrifugazione (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i>)	» 926
STAGNI A., Ancora sulla genesi e sessualizzazione degli elementi germinali in esemplari rigeneranti di <i>Spirorbis pagenstecheri</i> (pres. dal Socio <i>U. D'Ancona</i>)	» 928
FILOGAMO G. e MARCHISIO P. C., Sulla sede delle placche motrici della muscolatura della coda rigenerata dei Sauri (pres. dal Socio <i>G. Levi</i>).	» 933
ROSSI A., Nuove esperienze sulle regolazioni nervose nelle parabiosi fra embrioni di Anfibi anuri (pres. dal Corrisp. <i>A. Stefanelli</i>)	» 937
BERTOLINI B., Osservazioni istochimiche sulla distribuzione della fosfatasi acida nella rigenerazione del midollo spinale caudale del Tritone (pres. dal Corrisp. <i>A. Stefanelli</i>)	» 943
MARINI M. e MARGOTTA V., Fenomeni riparativi e rigenerativi in segmenti di midollo spinale in condizioni di isolamento nell'adulto di un Anfibio urodelo (pres. dal Corrisp. <i>A. Stefanelli</i>)	» 948
BAFFONI G. M., L'andamento dell'attività mitotica nel mielencefalo durante lo sviluppo di un Anfibio urodelo (pres. dal Corrisp. <i>A. Stefanelli</i>)	» 954
BLANDINO G., Osservazioni critiche sul neo-darwinismo (pres. dal Corrisp. <i>G. Colosi</i>)	» 960

COMMEMORAZIONI

TONZIG S., Commemorazione del Socio Alberto Chiarugi	» 968
Personale accademico	» 984
Congressi	» 984
Comunicazioni varie	» 985
Presentazione di libri	» 985
Presentazione di Note e Memorie	» 986
Relazioni di Commissioni	» 986
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 13 giugno 1961	» 987
Indice per Autori	» 991
Indice per materie	» 997
Indici dei fascicoli	» 1003

